INFORME FINAL DE TESIS
Maestría en Educación
Universidad de los Andes – Centro de Investigación y Formación en Educación (CIFE)

APRENDIZAJE DE LA PRUEBA GEOMETRÍCA

Incidencia del Geometer's Sketchpad y del trabajo en colaboración en la comprensión de la prueba geométrica formal.

Presentado por:

Alexander Sarria Borbón

Dirigido por:

Claudia Lucía Ordóñez Ed. D.

Julio de 2.004

TABALA DE CONTENIDO

1. Resumen Ejecutivo

Estudios recientes muestran evidencias de que el trabajo en colaboración y el uso de herramientas tecnológicas pueden favorecer el aprendizaje de las matemáticas y la geometría.

Este estudio analiza la incidencia de actividades en las que los alumnos manipulan figuras geométricas por medio del programa de geometría dinámica Geometer's Sketchpad, a la vez que discuten en parejas para enunciar conjeturas, explicarlas y verificarlas y desarrollar pruebas geométricas, en la comprensión de la prueba en alumnos de noveno grado de un colegio privado de Bogotá. Participaron quince alumnos de un grupo experimental que trabajó estas actividades y quince (15) de un grupo control que siguió una metodología de trabajo individual basada en el libro de texto. Por medio de datos cuantitativos y cualitativos provenientes de encuestas, evaluaciones escritas formales a los dos grupos, entrevistas semiestructuradas y grabaciones de la interacción en el trabajo en grupo se analizó el aprendizaje de ambos grupos. El análisis revela que los alumnos del grupo experimental logran comprensiones más completas de la prueba geométrica.

2. Marco Conceptual

Actualmente soy profesor del curso de geometría de noveno grado en el Colegio Los Nogales. Este curso pretende que los alumnos logren un buen manejo de los conceptos y objetos geométricos y que logren una buena comprensión de la prueba geométrica formal. Siempre que me enfrento al curso de geometría encuentro dificultades para enseñar a mis alumnos a probar matemáticamente. Con frecuencia noto que algunos de ellos no tienen una representación visual clara de lo que están probando, concluyen la prueba y no están seguros de la veracidad de la afirmación que probaron o creen que el proceso de prueba es simplemente un proceso algorítmico.

Generalmente pedía a mis alumnos que leyeran los teoremas y que siguieran las pruebas que de éstos presentaba el texto, para que luego trataran de hacerlo ellos mismos con ejercicios similares planteados de la forma 'pruebe que'. Además les mostraba a los estudiantes ejemplos de cómo elaborar pruebas geométricas y luego les pedía que imitaran el mismo procedimiento. Pero me he venido convenciendo de que este tipo de estrategia no ofrece los mejores resultados. De acuerdo con Senk (1985), después de dar un curso de un año completo de geometría con esta estrategia en un colegio de enseñanza media en los Estados Unidos, únicamente el 30% de los estudiantes alcanzó un puntaje del 75% en el manejo de pruebas. Además, muchos de estos estudiantes que manejaban la mecánica de la prueba no entendían realmente lo que hacían ni por qué lo hacían.

La prueba juega un rol fundamental en matemáticas, y por consiguiente en geometría, ya que es el medio para convencer y establecer la validez de las afirmaciones (Hanna, 2000). Por esto es importante hacer que la prueba tenga sentido para los alumnos. Para lograrlo, según Balacheff (2000) es necesario que se presente la prueba como una herramienta eficaz y confiable para establecer la validez de una proposición y según De Villiers (1999) y Brousseau (1997) que se presenten a los alumnos situaciones en las que tengan que explicarse y explicar a otros por qué una conjetura -el resultado de la observación y el razonamiento inductivo- o un enunciado son ciertos, poniendo en acción sus conocimientos y talento. Chazan y Houde (1989) definen una conjetura en geometría como una proposición que puede ser cierta o falsa al momento de hacerla, de modo que no es una definición ni un postulado pero al ser probada se convierte en un teorema y Hanna (2000) considera que una de las formas potencialmente más efectiva para permitir al estudiante usar sus conocimientos y talento es el uso de software dinámico para geometría, el cual abre una interesante y novedosa forma de enseñar la prueba geométrica.

Estas ideas sobre la forma mejor de facilitar que los alumnos le asignen significado a la prueba geométrica son consistentes con el constructivismo del desempeño (Perkins, 1998), la base teórica de la Enseñanza Para la Comprensión (Wiske, 1998). Según Perkins, (1998) hay diferencias entre comprensión, conocimiento y habilidad. El conocimiento es básicamente información y las habilidades son desempeños de rutina. Afirma que la comprensión es algo más que sólo conocimiento y rutina, y que comprender es la habilidad que tiene una persona para pensar y actuar (desempeñarse) con flexibilidad a partir de lo que sabe. La comprensión, explica, está asociada más con una capacidad de realización (desempeño), de forma que, una persona puede mostrar comprensión y avanzar en ella en la medida en que es capaz de desempeñarse flexiblemente de acuerdo con lo que sabe.

Waring (1997) describe cinco (5) niveles de comprensión de la prueba, basados en las reacciones observadas durante investigaciones y adaptadas de acuerdo con las sugerencias de Balacheff, Bell y Fiscbein. 1) La prueba de nivel 0 es aplicable a los alumnos que ignoran la existencia de la prueba o no tienen una noción de la prueba. 2) La prueba de nivel 1 corresponde a aquellos alumnos que reconocen la existencia de la prueba pero no aprecian su naturaleza general, y consideran que revisar unos pocos ejemplos es suficiente como prueba. 3) La prueba de nivel 2 corresponde a aquellos alumnos que son concientes de que revisar algunos casos no es suficiente para probar, pero quedan satisfechos si revisan un gran número de casos o si toman un caso al azar y funciona. 4) la prueba de nivel 3 se aplica a aquellos alumnos que son concientes de la necesidad de una prueba generalizada, de modo que son capaces de seguir una cadena corta de razonamientos deductivos pero no necesariamente de elaborar una prueba; además pueden distinguir entre una demostración práctica y una prueba. 5) La prueba de nivel 4 es el nivel en que se encuentran los alumnos que pueden construir pruebas en un limitado rango de contextos que les son familiares. 6) La prueba de nivel 5 es la de los alumnos que tienen una profunda comprensión del papel de la prueba, pueden construir una gran variedad de pruebas y pueden usar lenguaje formal para ello.

De acuerdo con Kaput (1992) la comprensión se desarrolla a partir del manejo de representaciones de los objetos o entes matemáticos, lo cual transforma y desarrolla las percepciones de los alumnos. Es decir, que se favorece la comprensión en la medida en que se permita la interacción entre el mundo de las operaciones mentales y el mundo de las representaciones físicas de estos objetos. Aclara que como los objetos matemáticos son tan complejos no se pueden representar completamente en un solo sistema de representación y, por lo tanto, requieren de múltiples sistemas para su representación total. Para Kaput, la importancia de la tecnología radica en permitir el manejo dinámico de múltiples representaciones de un objeto o concepto matemático. Además, afirma, esto ha hecho que cambie la forma de enseñar matemáticas, debido a que en matemáticas generalmente hay que manipular representaciones de los objetos pues los objetos mismos no son entes físicos.

Un ejemplo de este tipo de tecnología es el Geometer's Sketchpad, ya que las figuras geométricas son entes abstractos y este software permite manipular las figuras mediante símbolos en forma interactiva y dinámica (Clemens y Battista, 1992). El Geometer's Sketchpad es un software dinámico del estilo micromundos, en cuyo sistema se desarrolla una semántica para un sistema formal compuesto por objetos primitivos, relaciones entre los objetos y reglas para operar con ellos (Bennett, 1994). De acuerdo con Bennett, este programa permite establecer una relación entre los objetos y sus propiedades. Los estudiantes pueden manipular los objetos que se crean en la pantalla de tal forma que se mantienen invariantes las condiciones que los determinan (Clemens y Battista, 1992; Bennett, 1994). El programa brinda a su vez la oportunidad al profesor de diseñar situaciones en las que el alumno puede actuar explorando, observando, conjeturando y argumentando, de tal manera que ayuda a desarrollar el pensamiento lógico deductivo y en consecuencia la comprensión de la prueba (Bennett, 1994).

Además de ser consistentes con la concepción del desempeño y de ser probablemente favorecidas por el uso de tecnología informática, las formas mejores de facilitar que los alumnos le asignen significado a la prueba geométrica pueden relacionarse fácilmente con la idea de la construcción del conocimiento a partir de la interacción social Vygotsky (1978). Esto se debe a que exigen situaciones en las que los alumnos deben explicar a otros sus conjeturas y comprender las explicaciones de otros.

Una manifestación metodológica específica de esta idea también constructivista es el trabajo en colaboración Este tipo de trabajo constituye un proceso de negociación y discusión entre pares que favorece la argumentación y sustentación de ideas (Rogoff, 1993).

De acuerdo con Miller (1987), la discusión es la forma más importante de intercambio social, ya que propicia un tipo de pensamiento colectivo, pues la característica más importante de la discusión es la necesidad de encontrar una solución colectiva a un problema. Miller plantea, además, que en la discusión entre pares están presentes tres principios de cooperación que permiten a los participantes producir sentencias colectivamente válidas: la generalización, la objetividad y la consistencia. Explica que una sentencia es generalizable sólo si ha sido aceptada por el grupo o si se ha podido deducir a partir de otras ya aceptadas. Tanto las sentencias emitidas como el paso de una sentencia a otra en la discusión son revisados objetiva y constantemente por el interlocutor. Finalmente, la consistencia impide que los desacuerdos formen parte de lo colectivamente válido. Según Balacheff (2000), uno de los principales medios que permiten transformar una situación de decisión en una situación de prueba es someterla a debate para garantizar o desconocer su validez. Igualmente de acuerdo con Brousseau (1986), permitir a los estudiantes interactuar entre ellos por medio de discusiones para establecer argumentos válidos es determinante para que los alumnos comprendan la prueba.

Muchas investigaciones dan evidencia de que el trabajo en colaboración permite a los alumnos lograr buenos resultados académicos, una comprensión más profunda de los contenidos o una mejor disposición frente al aprendizaje (Alavi, 1994; Fuchs, et al 1997;

Springer, Stanne y Donovan, 1999; Johanning, 2000; Torres, 2001; Connor, 2002.). Por ejemplo Springer, Stanne y Donovan (2000), revisaron 39 estudios que compararon el trabajo en pequeños grupos con el trabajo individual, en estudiantes de pregrado en ciencias, matemáticas, ingeniería y tecnología de USA. Los resultados sugieren que el trabajo en colaboración permite a los alumnos mejores desempeños académicos, mejor actitud hacia el aprendizaje y más persistencia en el trabajo. Un estudio realizado en la Vienna International School de Austria, en el área de matemáticas, con estudiantes de 9 grado, organizados en grupos da evidencias de que al trabajar con pares los estudiantes adquieren una gran habilidad para discutir y explicar sus razonamientos matemáticos (Torres, 2001). Los alumnos se evaluaron por medio de la observación directa del profesor y por medio de 7 exámenes individuales. En una investigación cualitativa realizada por Johanning (2000) para entender cómo es el razonamiento de los estudiantes de escuela media cuando abordan un problema, primero en forma individual y luego en grupos pequeños, concluye que el conocimiento y la seguridad de los estudiantes mejora, son más concientes de su proceso de aprendizaje y logran mejores habilidades para expresar sus conocimientos.

Un buen número de investigaciones dan evidencias de cómo un software dinámico para geometría puede ayudar a darle sentido a la prueba formal en matemáticas, ya que pone al estudiante en la posición de explicar el por qué de una conjetura. (Choi-Koh, 1999; Jones, 1999; Jones, 2000; Mariotti 2000; Jones 2000; Marrades y Gutiérrez, 2000; Hadas, Hershkowitz y Schwarz 2000; Mogetta, Olivero, Jones 1999; Connor, 2001; Hannafin, Burrus, Little, 2001). Por ejemplo Jones, (2000) desarrolló un estudio longitudinal de nueve meses a cinco parejas de estudiantes de doce años mientras desarrollaban unas secuencia especifica de tareas de geometría en la que tenían que usar un software de geometría dinámica (Cabri). Este estudio lo realizó en un colegio promedio del Reino Unido y encontró evidencias de que el software de geometría dinámica Cabri facilita a los estudiantes conjeturar, razonar y argumentar. Además Jones encontró que el software de geometría dinámica influía en el tipo de explicaciones que daban los alumnos. Los argumentos con los que los alumnos sustentaban sus afirmaciones cada vez eran más precisos y mostraban buen manejo del lenguaje geométrico formal. Por su parte Choi-Koh, (1999) encontró evidencias de que el Geometer's Sketchpad facilita el proceso de formulación de conjeturas al permitir una visualización rápida de múltiples ejemplos de una situación. Realizó su estudio por medio de grabaciones en video y en audio de las interacciones entre alumnos y profesor durante las clases. También grabó el trabajo hecho por los alumnos en la pantalla del computador y tomó notas durante la observación. Por su parte, el estudio de 4 casos de Marrades y Gutiérrez (2000), muestra evidencias de que este tipo de software puede ayudar a los estudiantes a entender la necesidad de hacer justificaciones abstractas y de hacer pruebas geométricas formales. Además estos investigadores encontraron que la organización detallada de una secuencia de problemas permite a los alumnos progresar en el desarrollo de argumentaciones. Para obtener estos resultados Marrades y Gutiérrez hicieron observación participativa durante 30 semanas a dos parejas de estudiantes, con alto rendimiento académico, de una clase de 16 estudiantes de 4 grado de enseñanza secundaria. Adicionalmente, analizaron las respuestas a tres exámenes, aplicaron entrevistas semiestructuradas después de cada examen y grabaron el trabajo hecho por los alumnos en el computador.

En contraste Cohen (2001), encontró evidencias de que un ambiente tecnológicamente rico y una aproximación constructivista al aprendizaje tiene efectos negativos sobre los estilos de aprendizaje en estudiantes nuevos de un colegio de enseñanza media de Estados Unidos. Los resultados mostraron un descenso en las preferencias de los alumnos por trabajar responsable y persistentemente. En general, bajó su nivel de motivación con respecto al inicio del año y con respecto al grupo control. Cohen afirma que este descenso puede ser resultado directo del ambiente académico constructivista dentro de la escuela. Obtuvo estos resultados comparando las respuestas a una prueba de actitudes frente al aprendizaje al inicio de año con las de final año y con las de 120 estudiantes de un colegio más tradicional que tomó como grupo control. Además, realizó entrevistas a una pequeña muestra de la población. Por otro lado, Hannafin, Burruss y Little (2001) concluyeron, mediante observación participativa y entrevistas semiestructuradas realizadas a 12 alumnos de 7 grado de dos clases diferentes de un colegio en Estados Unidos, que el nivel de colaboración entre parejas de trabajo a lo largo de 10 clases de geometría, con el Geometer's Sketchpad como herramienta, fue muy bajo. En general, los alumnos preferían trabajar solos cada uno con un computador. Según estos investigadores, es probable que este descontento por el trabajo con compañeros se diera por la forma como fueron hechas las parejas de trabajo.

A pesar de esto, mis inquietudes sobre mis clases de geometría y sobre las propuestas y conclusiones de estudios y artículos teóricos como los que he presentado me han llevado a pensar que usar un software de geometría dinámica como el Geometer's Sketchpad, en compañía del trabajo entre parejas bajo una concepción constructivista, puede favorecer la comprensión de la prueba y el desarrollo de habilidades para probar en mis estudiantes.

Esto es, que el uso de este tipo de software dinámico y el desarrollo de actividades que lleven a los alumnos a discutir sus observaciones, a formular sus conjeturas y a dar argumentos con el propósito de convencer al otro antes de elaborar pruebas formales pueden mejorar la comprensión de la prueba geométrica.

3. La innovación:

Con base en la revisión bibliográfica anterior diseñé una innovación que consiste en plantear actividades (ver guías de actividades en el Anexo 1) para cada capítulo del libro de texto *Geometry de Ray C. Jurgensen, Richard G Brown y John W. Jurgensen, (2000)* que uso en mi curso de geometría en las que los alumnos, por medio de la manipulación de figuras o la elaboración de construcciones en el Geometer's Sketchpad, pudieran formular conjeturas acerca de las figuras construidas. Una vez que los alumnos formulaban sus conjeturas les pedía que explicaran, discutieran y justificaran su veracidad. Los alumnos podían interactuar con el Geometer's Sketchpad y manipular figuras y construcciones que les permitían observar y obtener patrones o invariantes que los llevaron a formular conjeturas. En lugar de leer los teoremas del libro los alumnos llegaban a ellos trabajando en colaboración con un compañero y usando el Geometer's Sketchpad. El trabajo por parejas les brindaba la oportunidad de discutir sus observaciones y conclusiones, de modo que en las discusiones los alumnos convertían la prueba en el medio de auto convencerse y de convencer a otros de sus conclusiones.

Mi forma tradicional de enseñar ha consistido en que los alumnos lean, tomen notas, contesten preguntas, resuelven ejercicios y hacen pruebas. Aunque los escritorios estén organizados en parejas, los alumnos trabajan individualmente. En las clases yo resuelvo dudas en el tablero o a cada alumno, hago pruebas en el tablero y les sugería a los estudiantes que imitaran el proceso desarrollando otras pruebas. En cada capítulo el texto presenta algunos postulados y teoremas y luego plantea proposiciones que pueden ser probadas a partir de los postulados o teoremas planteados en la lección. Seguí utilizando este tipo de instrucción en uno de mis grupos de estudiantes y usé la innovación con el otro, de modo que conformé un grupo control y otro experimental para investigar el impacto de la innovación.

4. Preguntas de Investigación

Esperé con mi innovación favorecer la comprensión de la prueba, así como el desarrollo de habilidades para probar formalmente. Esto es, supuse que la comprensión de la prueba formal como instrumento para establecer la validez de un enunciado podía mejorar en la medida en que los alumnos tuvieran la posibilidad de interactuar con el Geometer's Sketchpad y, con la guía del profesor, discutir y argumentar las razones posibles que explicaran la validez de sus conjeturas, antes de elaborar la prueba. Con el fin de obtener información que me ayudara a confirmar mi hipótesis, me planteé las siguientes preguntas de investigación:

4.1 ¿Qué incidencia tiene el desarrollo de actividades en las que primero se establezcan conjeturas a través de la observación de construcciones en el Geometer's Sketchpad, luego se explique o argumente con compañeros la veracidad de las conjeturas y finalmente se elaboren pruebas formales, en la comprensión de la prueba formal en geometría, en alumnos de 9 grado?

4.2. ¿Qué incidencia tiene el uso del software de geometría dinámica Geometer's Sketchpad, en la comprensión de la prueba geométrica formal en estos mismos alumnos?

3.3. ¿Qué incidencia tiene el trabajo en colaboración por parejas en la comprensión de la prueba geométrica formal en ellos?

5. Metodología

Lleve a cabo el curso de geometría con dos grupos de alumnos y en ambos me centre en la comprensión de la prueba geométrica formal. En uno de los grupos apliqué la innovación (grupo experimental) y en el otro trabajé como lo hacía tradicionalmente (grupo control). La metodología usada tiene elementos cuantitativos en cuanto a la medición de la habilidad para elaborar pruebas, para lo cual tuve en cuenta los resultados de los exámenes. También tiene elementos cualitativos en cuanto a la concepción de la prueba geométrica y de la incidencia del trabajo en colaboración y del Geometer's Sketchpad, para lo cual tuve en cuenta encuestas, entrevistas y grabaciones.

5.1. La muestra

La investigación se realizó en un colegio con un alto nivel académico, con niños y niñas de entre 15 y 16 años de la clase de geometría de noveno grado del segundo semestre del año 2003. Desde noveno grado los cursos son semestrales y son 5 periodos de clase de 60 minutos por semana. Para esta investigación conté con treinta (30) estudiantes, con quince (15) en el grupo control y quince (15) en el experimental. Los dos cursos vieron los mismos temas, presentaron las mismas evaluaciones y me tuvieron a mí como profesor. La división de los cursos la hizo el director de semestralizado junto con los coordinadores de área, tratando de formar grupos equilibrados en cuanto a habilidades académicas, número de niñas y número de niños. Para presentar la investigación a los alumnos les conté de manera general los objetivos y cómo emplearían los datos Decidí cuál sería el grupo experimental por la disponibilidad en el horario de la sala de computadores.

5.2. Recolección y análisis de datos.

Para responder las preguntas de investigación utilicé cuatro métodos de recolección de datos: encuestas, evaluaciones escritas, entrevistas y grabaciones. Con el propósito de obtener información sobre la habilidad de los alumnos para elaborar y usar pruebas, apliqué una evaluación al terminar cada capítulo, tanto al grupo control como al grupo experimental (ver protocolos de examen en el Anexo 2). Para este estudio analicé únicamente los puntos que tenían que ver directamente con pruebas. Los dos grupos tuvieron el mismo tiempo tanto para la preparación como para la realización de la prueba. Hallé las medias descriptivas (media y desviación estándar) de los resultados de cada examen y les apliqué las pruebas t-student para determinar si había diferencias estadísticamente significativas al comparar el grupo experimental con el grupo control. Además realicé este mismo análisis entre los resultados de la primera y la última evaluación en cada grupo.

Con el fin de estudiar si cambiaba la comprensión de la prueba geométrica y cómo cambiaba tanto en el grupo experimental como en el grupo control, diseñé y apliqué dos (2) encuestas (Ver protocolos de encuesta en Anexo 3). La encuesta de entrada ocurrió antes de empezar la intervención en la primera semana del curso. Apliqué la encuesta de salida doce (12) semanas después de iniciar la intervención y en la última semana del semestre. Para favorecer la autenticidad en las respuestas les expliqué a los alumnos que sus respuestas no tendrían ninguna incidencia en sus calificaciones y que además no era necesario que las firmaran.

Con la encuesta de entrada, a manera de diagnostico, traté de determinar los preconceptos y las nociones que los alumnos tenían de la prueba geométrica antes de empezar el proceso de intervención. Las respuestas a esta encuesta las clasifiqué de acuerdo con las categorías planteadas por Waring (1997) (ver página 3). Con la encuesta de salida busque determinar las diferencias y similitudes en cuanto a la percepción de la prueba entre el los dos grupos. Además traté de ver en qué forma cambiaba la percepción de la prueba comparando los resultados con los de la encuesta de entrada. El proceso de análisis de estas diferencias y similitudes dio origen a las categorías, que indicaron cómo cambió la comprensión y cómo influyó tanto el trabajo cooperativo como del uso del Geometer's Sketchpad en la comprensión de la prueba. Estas categorías fueron **"**Definición y descripción de la prueba geométrica", Las preguntas de esta encuesta indagan sobre la definición, características principales, elementos de los que consta una prueba geométrica, el propósito de elaborar pruebas geométricas y la diferencia entre una prueba y otro tipo de argumentos. Para clasificar y comparar los resultados también tuve en cuenta las categorías propuestas por Waring, (1997).

Para obtener información sobre la incidencia del Geometer's Sketchpad y el trabajo cooperativo, usé la información de la segunda encuesta y la triangulé con los datos obtenidos de las entrevistas y las grabaciones. Las entrevistas, fueron semiestructuradas y se las hice a ocho (8) alumnos del grupo experimental. Para esto clasifiqué los alumnos de acuerdo con sus calificaciones en matemáticas del año anterior así: grupo 1, para los alumnos que obtuvieron M (Mínimo Aceptable), o sea que lograron entre el 60 y el 69 por ciento de las metas propuestas en el curso; grupo 2, para los alumnos que obtuvieron S (Satisfactorio), que corresponde a un rendimiento entre el 70 y el 79 por ciento; grupo 3, para los alumnos que obtuvieron H (Honores), con entre el 80 y el 89 por ciento en sus desempeños; y finalmente grupo 4, para aquellos alumnos que obtuvieron AH (altos Honores), con más del 90 por ciento de las metas propuestas. De cada uno de estos cuatro grupos elegí dos alumnos para entrevistar el último día del calendario escolar del semestre. En estas entrevistas les pregunté directamente a los alumnos sobre cómo les había parecido el trabajo con el Sketch y el trabajo en parejas y si sentían que éste había favorecido el proceso de comprensión de la prueba geométrica.

Además durante el desarrollo de la intervención realicé en tres ocasiones grabaciones de 45 minutos a cuatro (4) parejas por vez. Los alumnos desarrollaban una guía de trabajo en la que tenían que explorar, discutir y plantear una conjetura para luego probarla. Las grabaciones básicamente las empleé para aportar evidencias de lo encontrado tanto en las entrevistas como en las encuestas.

6. Resultados

Tanto el análisis cuantitativo como el cualitativo dan evidencias de que los alumnos que usaron el software de geometría dinámica Sketchpad y trabajaron en colaboración alcanzan una comprensión de la prueba más completa que los alumnos del grupo control. Esto se ve reflejado en que logran mayor habilidad para desarrollar pruebas que los del grupo control, expresan de una forma mucho más completa y precisa lo que es una prueba y los propósitos que cumple y que diferencian mejor entre una prueba y una demostración visual de un teorema. Además logran una mejor percepción de la geometría euclidiana y su sistema lógico deductivo

6.1. Comprensión de la prueba geométrica.

En cuanto a la comprensión de la prueba los resultados están divididos en cuatro categorías la habilidad para desarrollar pruebas, la definición y descripción que hacen de la prueba geométrica formal, distinción entre una prueba formal y una demostración visual y la percepción de la geometría como una materia en desarrollo.

6.1.1 Habilidad para elaborar pruebas geométricas

El análisis de los resultados de la encuesta de entrada me permitió entender los preconceptos que tenían los alumnos antes de iniciar la intervención sobre el significado de la prueba. Encontré similitudes entre las concepciones de prueba de los estudiantes en tres categorías: primera, la prueba matemática entendida como la evaluación; segunda, la prueba asociada con la comprobación de un resultado; y tercera, la prueba interpretada como un proceso para sustentar un resultado. Cuatro (4) alumnos del grupo experimental y dos (2) del grupo control asociaban la prueba con la evaluación del conocimiento en matemáticas. Explicaron que las pruebas matemáticas sirven para ver qué tanto se maneja un concepto y para saber si uno puede o no aplicar lo aprendido en la solución de un problema. Además contestaron que en todos los cursos de matemáticas han hecho pruebas (evaluaciones) y que éstas constan de problemas y ejercicios.

Por su parte, siete (7) alumnos del grupo experimental y seis (6) del grupo control asociaban la prueba matemática con la comprobación de un resultado, respondiendo cosas como que: "*cuando uno obtiene un resultado de una ecuación, entonces uno lo comprueba para ver si cumple con la ecuación*." Encontraban las pruebas útiles para asegurarse de que un resultado es correcto o para mostrar el proceso del desarrollo de un problema y reconocían que comprobaban resultados constantemente en las clases de matemáticas y que todas estas pruebas eran procesos de verificación de las ecuaciones y los pasos.

Finalmente tres (3) alumnos del grupo experimental y cuatro (4) del grupo control reconocieron la prueba como un proceso para explicar, justificar o demostrar el porqué de una afirmación. Respondieron cosas como que la prueba es "*la forma de demostrar de dónde salen los conceptos matemáticos que estudiamos y por qué son válidos*." Encontraban las pruebas útiles para sustentar resultados, para hacer creíble una afirmación o para entender cómo se llegaba a una conclusión. Todos estos alumnos respondieron que no habían realizado pruebas, pero que habían leído pruebas de los libros.

Asocié luego estas concepciones con los niveles de comprensión de la prueba definidos por Waring (1997). Las dos primeras categorías constituyen concepciones completamente erróneas de lo que significa la prueba geométrica y la tercera categoría es un acercamiento no muy preciso al concepto de prueba geométrica. La Tabla 1 presenta la clasificación de las respuestas de los estudiantes de acuerdo con estas categorías.

Tabla 1.
Preconcepciones de los alumnos de la muestra: Niveles de comprensión y habilidad para hacer pruebas demostrados en la encuesta de entrada de acuerdo con la propuesta de Waring, (1997).

Nivel	Grupo experimental		Grupo control	
	Número	Porcentaje	Número	porcentaje
Prueba de nivel 0: Ignoran la necesidad y la existencia de las pruebas.	11	79%	8	64%
Prueba de nivel 1: Concientes de la noción de prueba pero consideran que chequear pocos casos es suficiente.	0	0	0	0
Prueba de nivel 2: Concientes de la noción de prueba pero consideran que chequear muchos casos es suficiente.	0	0	0	0
Prueba de nivel 3: Concientes de la necesidad de probar entienden pruebas pero no las pueden hacer ellos mismos.	3	21%	4	33%
Prueba de nivel 4: Consientes de la necesidad de probar y capaces de hacer pruebas en un limitado número de contextos.	0	0	0	0
Prueba de nivel 5: Consientes de la necesidad de probar y capaces de hacer pruebas en una variedad de contextos.	0	0	0	0

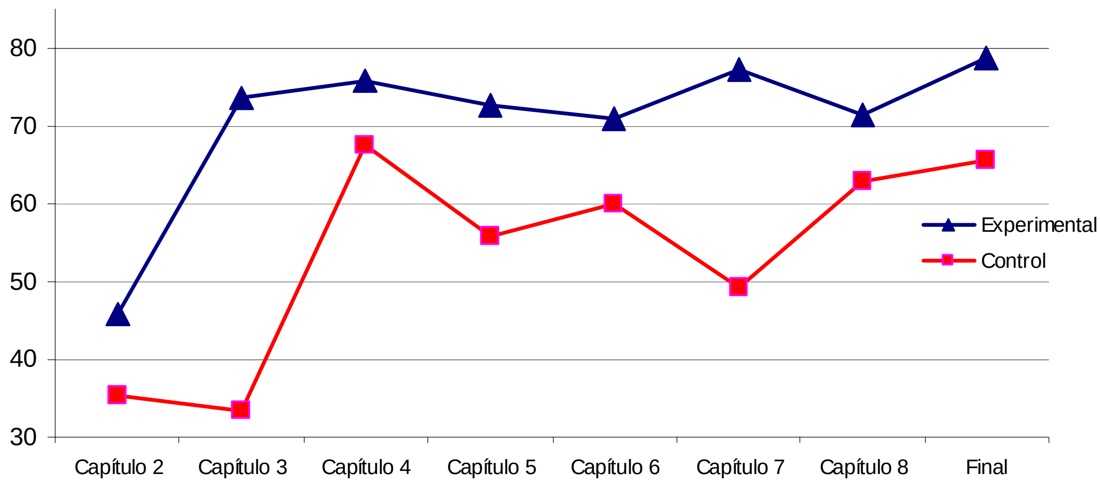
A partir de estas preconcepciones, el análisis cuantitativo de las preguntas que tenían que ver exclusivamente con pruebas en la evaluación final de cada capítulo del curso muestra evidencias de que los alumnos de ambos grupos participantes en la investigación fueron adquiriendo paulatinamente una mayor comprensión y habilidad para desarrollar pruebas geométricas, con ventaja para el grupo experimental (Tabla 2 y Gráfica 1). Los alumnos que experimentaron la innovación obtuvieron, en promedio, mejores resultados en todas las evaluaciones que los del grupo control. Las diferencias entre los dos grupos son estadísticamente significativas solamente para los exámenes de capítulo 3 con un nivel de confiabilidad de 0.05), 5 y 7 (a niveles de confiabilidad de 0.1). Los alumnos del grupo experimental, que no habían empezado demostrando diferencias significativas en la comprensión de la prueba con el grupo control, mejoran extraordinariamente en sus resultados en la evaluación de capítulo 3 y se mantienen por encima del grupo control hasta el examen final. En el resultado final, sin embargo, no se producen diferencias estadísticamente significativas en la comprensión de la prueba entre el grupo experimental y el grupo control. No pongas en la tabla ni menciones la desviación estándar si no la vas a comentar.

Tabla 2. Estadísticas descriptivas y pruebas t para la habilidad de elaborar pruebas geométricas demostrada en las evaluaciones finales de capítulo.

Examen de capítulo	Promedio grupo experimental	Promedio grupo control	t entre experimental y control
Capítulo 2	45.7	35.4	0.864
Capítulo 3	73.6	33.3	2.865***
Capítulo 4	75.6	67.5	0.737
Capítulo 5	72.6	55.8	2.116*
Capítulo 6	71.0	60.0	1.085
Capítulo 7	76.9	49.3	1.933*
Capítulo 8	71.4	62.9	0.660
Examen Final	78.7	65.5	1.231

Nota: $\approx p<0,10$; * $p<0,05$; ** $p<0,01$; *** $p<0,005$

Gráfica 1
Promedios en evaluaciones finales de capítulo para el grupo experimental y el grupo control.



Tomando los resultados del examen del capítulo 2 como prueba inicial, para compararlos con los del examen final, comprobé diferencias estadísticamente significativas en ambos grupos de participantes (Ver Tabla 3), lo que corrobora que en ambos grupos hubo buen aprendizaje del concepto de prueba geométrica.

Tabla 3. Estadísticas descriptivas y pruebas t para comparar el primero y el último exámenes del curso.

Grupo	Promedio examen capítulo 2	Promedio examen final	t entre examen 2 y final
Grupo experimental	45.7	78.7	2.937 **
Grupo control	35.4	65.5	2.658*

Nota: ≈ $p<0.10$; * $p<0.05$; ** $p<0.01$; *** $p<0.005$

Sin embargo es posible mostrar algunas diferencias entre uno y otro grupo en cuanto a sus habilidades específicas para elaborar pruebas en el examen final, teniendo en cuenta los niveles de comprensión de la prueba propuestos por Waring, (1997). Este examen final tenía 6 puntos que implicaban el desarrollo de pruebas geométricas. Los alumnos que lograron hacer correctamente 4 o más de las pruebas demostraron un nivel 5 de comprensión, los alumnos que lograron hacer 2 o 3 pruebas correctamente, nivel 4 y aquellos alumnos que lograron desarrollar una prueba bien, nivel 3. Ningún estudiante utilizó ejemplos como medio para probar, por lo cual ninguno se clasificó en un nivel inferior al 3. La tabla 4 muestra estos resultados.

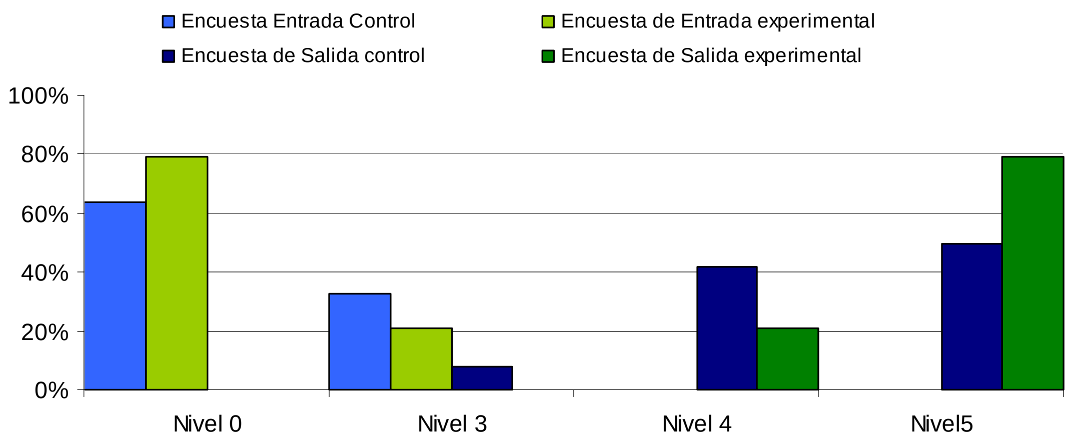
Tabla 4. Niveles de comprensión y habilidad para hacer pruebas en el examen final, de acuerdo con las categorías de Waring (1997).

Nivel	Grupo experimental		Grupo control	
	Número	Porcentaje	Número	porcentaje
Prueba de nivel 0: Ignoran la necesidad y la existencia de las pruebas.	0	0%	0	0%
Prueba de nivel 1: Concientes de la noción de prueba pero consideran que chequear pocos casos es suficiente.	0	0%	0	0%
Prueba de nivel 2: Concientes de la noción de prueba pero consideran que chequear muchos casos es suficiente.	0	0%	0	0%
Prueba de nivel 3: Concientes de la necesidad de probar entienden pruebas pero no las pueden hacer ellos mismos.	0	0%	1	8%
Prueba de nivel 4: Concientes de la necesidad de probar y capaces de hacer pruebas en un limitado número de contextos.	3	21%	5	42%
Prueba de nivel 5: Concientes de la necesidad de probar y capaces de hacer pruebas en una variedad de contextos.	11	79%	6	50%

La encuesta de salida me permitió corroborar la ventaja que mostró el grupo experimental en el examen final, con un mayor número de alumnos en el nivel 5 y un mayor número de alumnos en el nivel 5 de comprensión de la prueba que el experimental (6 y 11, respectivamente). La gráfica 2 muestra el porcentaje de alumnos por cada nivel en cada grupo, según la encuesta de entrada y la encuesta de salida. En general todos los niños terminan en los niveles 3, 4 y 5, pero en el grupo experimental se ubica un mayor porcentaje de niños en el nivel 5 en la encuesta de salida, a pesar de que en la encuesta de entrada había más niños de este grupo en el nivel 0.

Gráfica 2.

Porcentaje de alumnos en cada nivel de comprensión de la prueba, según categorías de Waring (1997)



6.1.2 Definición y descripción de la prueba

Por otro lado la encuesta de salida, en sus preguntas 1 y 2, me permitió ver cómo terminaban los estudiantes definiendo la prueba geométrica, el sentido que le daban a realizar pruebas y qué características percibían como las más importantes en el desarrollo de pruebas. Aquí también encontré que los alumnos del grupo experimental realizaban definiciones y descripciones más acertadas que los alumnos del grupo control.

Por otra parte, la mayoría de los alumnos del grupo experimental percibían, de una forma más compleja, la prueba como un proceso para sustentar, argumentar, demostrar, justificar o explicar la validez de un enunciado.

En efecto, seis (6) alumnos del grupo control definen en forma tautológica ‘probar’ como un proceso de prueba, dando respuestas como: “*Una prueba es una sucesión de pasos para probar con teoremas y postulados*” o “*…es un proceso que se usa para probar algo… por* *medio de teoremas y postulados.*" Estos alumnos no ven la prueba como una sustentación o una justificación o explicación de la veracidad de un enunciado. Este tipo de respuesta no se presentó en el grupo experimental.

Por otro lado, todos los alumnos del grupo experimental, catorce (14), y seis (6) del grupo control interpretan la prueba como un proceso lógico en el que por medio de teoremas, postulados y definiciones se sustenta, argumenta, demuestra, justifica o explica la validez de una afirmación o conjetura. Dicen cosas como "*...una prueba matemática es un proceso lógico que se basa en postulados y otros teoremas que sirve para explicar y convencer a otros de la veracidad de una nueva afirmación*," O "*Una prueba matemática es una secuencia lógica de pasos consecutivos basados en postulados y teoremas, para explicar por qué una conjetura es verdadera*." La Tabla 5 muestra un resumen de los datos obtenidos en cuanto a la definición de la prueba y su propósito y las características más importantes que debe tener una prueba geométrica.

Tabla 5.
Definiciones y características de la prueba geométrica dadas por los alumnos en la encuesta de salida

Definición de la prueba geométrica	**Grupo experimental**		**Grupo control**	
	Número	**Porcentaje**	**Número**	**Porcentaje**
Como un proceso para probar.	0	0%	6	50%
Como un proceso lógico y coherente en el que por medio de teoremas, postulados y definiciones se sustenta, argumenta, demuestra, justifica o explica la validez de una afirmación o conjetura.	14	100%	6	50%
Características de la prueba geométrica				
Se hacen en dos columnas.	0	0%	5	42%
Se basan en afirmaciones generales, justificaciones y razones.	10	71%	7	58%
Las justificaciones de las afirmaciones son postulados, teoremas y definiciones.	8	51%	5	42%
Son lógicas, coherentes, claras, concisas y consistentes.	11	79%	3	25%

Como lo indica la tabla, los alumnos del grupo experimental consideran con más frecuencia como característica importante de una prueba la coherencia, la claridad, la síntesis y la consistencia en los argumentos, siendo esta una de las principales características de la prueba. Mientras tanto los alumnos del grupo control se refieren a aspectos menos importantes como la forma en que se escriben las pruebas.

6.1.3 Distinción entre una prueba formal y una demostración visual

Todos los alumnos del grupo experimental catorce (14) y ocho (8) del control identificaron correctamente la prueba formal de los otros dos argumentos, dando explicaciones como que…l... *porque muestra todo el proceso, sustentado con razones entre lo dado y la conclusión. Se basa en teoremas, postulados, definiciones etc. que hacen que la prueba sea confiable*;" y "*...porque no usa ejemplos sino razones para sustentar sus afirmaciones. Esta prueba es clara y bien estructurada y las otras son sólo ejemplos*." Cuatro (4) alumnos del grupo control no pudieron distinguir entre la prueba formal y los otros argumentos.

6.1.4 La percepción de la geometría como una materia en desarrollo.

La encuesta de salida también me permitió obtener información sobre la percepción que tienen los alumnos de la geometría en general, en cuanto a si es posible descubrir y probar nuevos teoremas. Es decir, pude saber si ven la geometría como un sistema lógico deductivo factible de desarrollar o como una ciencia estática y completamente desarrollada. Todos los alumnos del grupo experimental encuentran que es posible descubrir nuevos teoremas, mientras que no todos los del grupo control lo consideran así.

En efecto, ante la pregunta '¿Cree usted posible descubrir nuevos teoremas en geometría?' todos los alumnos del grupo experimental y siete (7) del grupo control ven muy probable encontrar nuevos teoremas, dando respuestas como las siguientes: "*Sí, siempre va a haber* *cosas por descubrir, cada vez que uno pruebe algo está descubriendo un nuevo teorema*." "*Sí, cuando una conjetura es elaborada y se llega a la conclusión de que es verdadera por medio de una prueba, esta conjetura se convierte en un teorema aplicable en otras situaciones.*" Los estudiantes se sienten capaces de aportar de alguna manera al desarrollo de la geometría. Por el contrario, cinco (5) alumnos del grupo control manifestaron que no es posible descubrir nuevos teoremas: "*No, ya todo en geometría esta probado*;" "*…no. Los teoremas son los teoremas y no hay más*."

6.2 El aporte del Geometer's Sketchpad y del trabajo en colaboración.

En esta sección presento los resultados que dan evidencias de la forma como la discusión en parejas y la interacción con el Sketchpad incidieron para que los alumnos del grupo experimental lograran una comprensión más completa de la prueba. Los resultados están divididos en tres categorías: las actividades que consideran los alumnos que les ayudaron más en la comprensión de la prueba; cómo consideran los alumnos que les ayudó la discusión con los compañeros y los apoyos específicos que les brindaron el software y el trabajo en colaboración. Esta última categoría a su vez aparece dividida en dos: la visualización que les permitía obtener conjeturas y que los ponía en una situación de justificación y las construcciones adicionales que les permitía encontrar caminos para elaborar pruebas.

6.2.1 Actividades que más contribuyeron a la comprensión de la prueba

En la encuesta de salida indicaron los alumnos qué tipos de actividades influyeron más en su proceso de construcción del concepto de prueba. Aparecieron cuatro tipos de actividades: la práctica de la prueba, las explicaciones del profesor, el trabajo con compañeros y, finalmente, el uso de Sketchpad.

Es interesante notar cómo es muy importante la práctica para los alumnos del grupo control mientras que para los alumnos del grupo experimental es mucho menos importante. Esa importancia de la práctica se ve disminuida en la medida en que tienen oportunidad de desarrollar otros desempeños de aprendizaje. Sólo cuatro (4) alumnos del grupo experimental y diez (10) del grupo control señalaron que lo que mas les ayudó para entender la prueba fue la práctica en el desarrollo de pruebas: *"Lo que más me ha ayudado es probar y probar día tras día*."

De la misma manera las explicaciones del profesor cobran muy poca importancia en el grupo experimental, dos (2) alumnos, mientras que en el grupo control casi la mitad de los alumnos, cinco (5), encuentran que lo que más los apoyó fueron las explicaciones del profesor durante las clases. Respondiendo a la encuesta cosas como: "*Las explicaciones de pruebas difíciles en el tablero."*

La interacción con el software, unida a la discusión en parejas resultó ser lo más importante para los alumnos del grupo experimental. La mitad de los alumnos del grupo experimental, siete (7), señalan cómo lo más valioso es el trabajo con Sketchpad y el trabajo con compañeros. "*El trabajo con Sketch porque me permitía entender los teoremas o las conjeturas, podía verlos*." "*El trabajo en parejas porque uno puede ver cómo el compañero elabora las pruebas y entender otra forma de ver el problema y cómo lo resuelve. Si no entiendo, le pregunto y él me explica su método*." *"Los trabajos con el compañero porque uno puede preguntarle por qué y también explicar las razones de uno todo el tiempo."*

Tabla 6.
El impacto de cada tipo de actividad en la comprensión de la prueba geométrica.

Elementos de los que consta una prueba	Grupo experimental		Grupo control	
	Número	Porcentaje	Número	Porcentaje
La práctica haciendo pruebas.	4	33%	10	71%
Las explicaciones del profesor en el tablero.	2	17%	4	29%
La discusión entre compañeros	7	50%	0	0%
El uso de la herramienta Sketchpad	7	50%	0	0%

Nota: La suma de los valores de las últimas columnas no corresponde con el número de alumnos de cada grupo ya que algunos alumnos señalaron más de una actividad.

Como lo muestra la tabla 6 el 71% de los alumnos del grupo control encuentra como lo más importante en su proceso de aprendizaje del concepto de prueba la práctica elaborando pruebas. Mientras el 50% de los alumnos del grupo experimental consideran como lo más importante la discusión y el uso del sketchpad, haciendo énfasis en que estas discusiones ayudan a entender las razones que sustentan la prueba y el software les permitía entender realmente lo que afirma el teorema.

6.2.2. El aporte de la discusión con los compañeros.

Siete (7) de los entrevistados respondieron que les sirvió el trabajo y la discusión con un compañero, resaltando que podían compartir ideas o explicarse el uno al otro cosas que no entendían o no podían ver de las figuras. Indicaron además que como no veían las mismas cosas, tenían que darse explicaciones mutuamente y que éstas servían para desarrollar la prueba: "*... por ejemplo a mi, unas veces que yo estaba pues intentando cuando yo llegaba al momento de la prueba y yo pues estaba aplicando mis conocimientos, intentábamos y como que intercambiábamos como lo que los dos pensábamos. Me ayudaba un resto… porque es el momento en el que uno ya lo tiene que hacer solo, pero uno le falta una cosita y llega el compañero y le dice ¿y este ángulo que?... Eso ayuda harto.* Otra respuesta en esta dirección es la siguiente: *"Además que uno cuando no entiende un punto pide ayuda, entonces como que se discute y uno entiende mejor con la discusión de algo. Y cuando uno comparte siempre la opinión puede sacar la confirmación de la respuesta."*

Encontré en cuatro (4) grabaciones de las doce (12) evidencias que corroboran esta idea de apoyo en el que un alumno ayuda a otro para entender el por qué de una afirmación, es decir, a entender una prueba.

> *Alumno A: Vea que estos dos triángulos son congruentes*
> *Alumno B: ¿Pero usted porque dice que son congruentes?*
> *Alumno A: Pues porque mire estos ángulos son congruentes por ser correspondientes entre paralelas.*
> *Alumno B: Si ¿pero que lados congruentes?*
> *Alumno A: Pero estos también son congruentes por que este triángulo es isósceles.*
> *Alumno B: Ahora si, si entonces, SAS* [Se refiere al postulado lado ángulo lado de congruencia triangular]

Sólo una de las alumnas entrevistadas manifestó no sentirse tan cómoda trabajando con un compañero, pues no siempre podía dar las explicaciones de sus afirmaciones, pero encontró de todas maneras utilidad en el trabajo en grupo: "*... a veces me parecía difícil explicar todas las razones por las que yo decía algo, y mi compañera me preguntaba por qué esto y eso y como que yo creía que era verdad pero como que no era fácil explicarlo. Pero al final creo que siempre lo lográbamos, pues encontrábamos el camino para la prueba."*

Esta situación se ve reflejada en el siguiente diálogo:

> *Alumno A: Pues que el triángulo DEF es congruente con el triángulo EDC.*
> *Alumno B: Sí, pero ¿Por qué?*
> *Alumno A: Pues fíjate que miden igual.*
> *Alumno B: Sí pero ¿por qué? Es que yo no se porqué quedan iguales.*
> *Alumno A: No ni idea… pero son congruentes.*
> *Alumno B: Necesitamos saber porque para poder hacer la prueba…*
> *Alumno A: llamemos a Alex.*
> *Alumno B No la gracia es que descubramos nosotros.*
> *Alumno A: si pero entonces nos demoramos.*

6.2.3 Las facilidades que permite el Geometer's Sketchpad

Cuando les pregunté a los alumnos del grupo experimental en la encuesta y en las entrevistas si consideraban que el trabajo con el Geometer's Sketchpad les ayudaba a entender la prueba geométrica, todos respondieron que sí y resaltaron dos aspectos principalmente: Primero la facilidad que da el software para ver múltiples ejemplos de una figura y poder tener medidas precisas, para luego establecer la conjetura. Segundo, la posibilidad de hacer líneas auxiliares que facilitan encontrar el camino para la prueba.

6.2.3.1 Visualización y justificación

Los alumnos manifestaron que el Sketchpad les permitía cambiar algunos aspectos y mantener al mismo tiempo fijas ciertas características, con lo que era posible ver características que se mantienen constantes y así, plantear conjeturas. Dijeron en las encuestas: "*Yo si* creo [que el software ayuda en la comprensión de la prueba], *porque ayuda con construcciones exactas que además son fáciles de construir y ayuda a ilustrar y proveer una base para la prueba*" y "*...permite crear una construcción móvil que permite ver si se aplica para todo un grupo de figuras*". En las entrevistas todos (8) mencionaron este aspecto: "*Pues sí ayuda como para ver lo que uno quiere probar moviendo la figura... entonces es más fácil que tener que construir 50 cosas en papel;" "...lo bueno del Sketch es que le da la medida de los lados y los ángulos exactos, entonces uno ya tiene como la visualización de toda la prueba. Exacto, no tanto imaginación sino como el hecho...";* "*...además que en el papel uno sólo tiene una figura; en esto uno lo puede cambiar con el cosito* [se refieren a cambiar la figura sin cambiar las características que la determinan] *y es más fácil ver otras cosas que uno en un papel uno no ve."*

Igualmente en todas las grabaciones de las interacciones mientras trabajaban usando el Sketchpad encontré conversaciones que confirman de alguna manera que el software les ayudó a visualizar invariantes de las figuras. El siguiente ejemplo resulta ilustrativo:

Alumno A: Guao, fíjate que también es isósceles.
Alumno B: Pero muévelo para ver si sí.
Alumno A: Sí, sí mira
Alumno B: No, pero mide los lados para ver si sí son iguales.
Alumno A: Listo
Alumno B: Mira que sí
Alumno A: Pero ¿Por qué?
Alumno B: Mira estos segmentos se ven paralelos y entonces estos ángulos deben ser congruentes

Por otro lado es interesante resaltar cómo los alumnos primero se ven sorprendidos por el hallazgo e inmediatamente después aparece la pregunta de por qué sucede esto. Esta situación los pone inmediatamente a buscar justificaciones o razones para esa conclusión, es decir los lleva a pensar en la prueba formal. Veamos otro ejemplo de esta situación.

Alumno A: oye ¿todos los triángulos quedan congruentes?
Alumno B: Pues sí… parece
Alumno A: No, pero estos lados ¿si son congruente?
Alumno B: Pues si cambian… pero las medidas de los dos quedan iguales siempre.
Alumno A: Rarísimo ¿o no?
Alumno B: Pues lo difícil es por qué pasa
Alumno A: Hum… tratemos de buscar ángulos o lados
Alumno B: preguntemos
Alumno A: No espérese…

6.2.3.2 Construcciones para encontrar caminos de prueba

En las entrevistas tres (3) parejas resaltaron la ventaja de poder construir líneas auxiliares y otras figuras que pueden ayudar a aclarar las razones de la conjetura, es decir el camino para la prueba. Estos alumnos daban respuestas como la siguiente: "*…tal vez uno le puede construir como líneas auxiliares a los dibujos y cosas así, es más como que facilita ver,* *porque la parte de hacer una prueba lo difícil es cómo ver como uno puede probar con triángulos e pues ayudándose con otros triángulos o cosas así es más fácil construirlos con el Sketch"* Encontré cuatro (4) grabaciones de doce (12) diálogos que corroboran esta idea, el siguiente es un ejemplo de ello.

> *Alumno A: Sí, se ve que es un rectángulo. Pero ni idea…*
> *Alumno B: Yo creo que lo mejor es tratar de ver triángulos congruentes…*
> *Alumno A: Pues tracemos el segmento AD a ver si podemos sacar algo.*
> *Alumno B: Bueno, pero yo no creo que eso sirva… es que no estamos usando la información del cuadrilátero exterior*
> *Alumno A: sí, mira que nos quedan dos triángulos congruentes…*

7. Discusión.

Como ya mencioné los alumnos del grupo experimental en general obtuvieron mejores promedios en los exámenes de capítulo que los alumnos del grupo control. Estas evaluaciones básicamente muestran que los alumnos del grupo experimental lograron una mayor habilidad para desarrollar pruebas. Como las diferencias en los promedios solo fueron estadísticamente significativas en tres exámenes de capítulo, esto podría sugerir que la innovación no fue tan productiva.

Sin embargo los alumnos de los dos grupos logran avances estadísticamente significativos en la habilidad para desarrollar pruebas si se comparan sus habilidades al principio y al final del curso. Además es muy interesante notar como hay grandes diferencias entre el grupo experimental y el grupo control en la forma como perciben y se expresan de la prueba. Mientras los alumnos del grupo experimental conciben la prueba como un proceso para explicar, justificar o demostrar porque una afirmación es verdadera, la mayoría del grupo control da definiciones muy incompletas o tautológicas de lo que significa una prueba geométrica. Estos resultados sugieren que es posible hacer pruebas sin comprender realmente qué se esta haciendo. Esto concuerda con la investigación realizada por Senk (1985), quien encontró que muchos de los alumnos que aprendían a probar con el método tradicional no entendían realmente qué estaban haciendo ni porqué lo estaban haciendo.

La diferencia en estas comprensiones de la prueba geométrica puede asociársela uso del software de geometría dinámica. Ya que el Sketchpad les facilitó a los alumnos descubrir invariantes y características de las figuras al poder tener múltiples ejemplos de una construcción. Esto los expuso como consecuencia a situaciones de justificación o explicación de esos descubrimientos permitiendo así darle sentido a la prueba, algo que con mucha dificultad lograron unos pocos alumnos del grupo control. Además les permitió hacer construcciones auxiliares que les ayudaban a encontrar caminos posibles para elaborar la prueba formal. También les permitió ver con claridad y entender realmente lo que pretendían probar pues era un descubrimiento hecho por ellos mismos y no sólo un enunciado dado por el profesor o el libro de texto.

Por otro lado podría explicarse por el trabajo en colaboración y la discusión entre pares, ya que estas discusiones estimulan el conflicto cognitivo al poner el estudiante en duda sus conocimientos y razonamientos propios frente a los del compañero (Piaget, 1975). Además de acuerdo con Vygotsky (1999), cuando se trabaja con pares se puede intercambiar información, se pueden ver los puntos débiles de los argumentos del compañero y se pueden descubrir mejores estrategias y así construir conocimiento a partir del otro. En resumen el trabajo colaborativo en parejas y la interacción con el Geometer's Sketchpad permiten a los alumnos más posibilidades de argumentar, discutir, explicar, preguntar y recibir respuesta inmediata a sus preguntas lo que los lleva a lograr comprensiones más completas y complejas de los conceptos.

Los resultados sugieren que debo cambiar mi metodología para desarrollar el curso de geometría. Si el objetivo es proveer los medios para que los alumnos logren una comprensión profunda de la prueba geométrica formal. Por un lado debo diversificar la evaluación de forma que pueda ver cómo entienden los alumnos la prueba y no solo su habilidad para elaborarlas. Además el estudio me hace caer en cuenta de la importancia de hacer que los alumnos se expresen sobre el significado de la prueba y sus características. Esto es algo que no tocaba en ningún momento en el curso y que el texto no sugiere pero que ahora considero fundamental para mejorar el curso. Sale a flote así la necesidad e importancia de poner a los estudiantes a discutir y confrontar entre ellos sobre el significado que tiene para cada uno un concepto. Vale la pena destacar cómo las construcciones que hacen los alumnos sobre un mismo concepto pueden diferir diametralmente. Además si la socialización de estas diferentes concepciones puede llevarlos a una comprensión más completa, es necesario involucrar el trabajo en colaboración como parte fundamental de mi metodología de clase.

8. Referencias bibliográficas:

Alavi, M. (1994). Computer-mediated collaborative learning: An empirical evaluation. MIS Quarterly, junio, 159-174.

Balacheff, N. (2000) Procesos de Prueba en los alumnos de matemáticas. (Pedro Gómez, trad) Bogotá Colombia. Una Empresa Docente.

Bennett, Dan. (1994) *Exploring Geometry with The Geometer's Sketchpad* Berkeley, CA: Key Curriculum Press.

Brousseau, G. (1986). Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas. (Julia Centeno, Begoña Melendo y Jesús Murillo Trad) España.

Brousseau, G. (1997). The theory of didactical situations in mathematics. Dordrecht: Kluwer A.P.

Chazan, D. & Houde, R. (1989). How to use conjecturing and microcomputers to teach geometry. Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics.

Choi-Koh, S. (1997) A student´s Learning of Geometry Using the Computer. En The Journal of Education Research. May-June 1999

Clements Douglas H. y Michael T. Battista, (1992). Geometry and Spatial Reasoning. En Handbook of Research on Mathematics teaching Learning. New York. National Council of Teachers of Mathematics.

Cohen V. (2001) Learning Styles and Technology in a Ninth-Grade High School Population. En Journal for Research on Computing in Education. Vol 35 n 4.

Connor Jeff (2002) Using technology and cooperative groups to develop a ‘deep understanding’ of secondary school geometry. En the 2^{nd} International Conference on the Teaching of Mathematics, Wiley (No page numbers as on a CD.)

De Villiers, M.: 1999, *Rethinking proof with the Geometer’s Sketchpad*, Key Curriculum Press, Emeryville, CA.

Bennie K. (1988). An analysis of the Geometric Understanding of Grade 9 Pupils Using Fuys et al.´s Interpretation of the Van Hiele Theory. Malati

Fuchs Lynn S., Fuchs Douglas, Hamlett Carol L., Phililips Norris B., Karns Kathy, Dutka Suzanne. (1997). Enhancing Students Enhancing Students' Helping Behavior during Peer-mediated Instruction with Conceptual Mathematical Explanations. En The Elementary School Journal; enero ; páginas 223 – 249.

Fuchs Lynn S., Fuchs D, Kazdan S, Karns K, Calhoon M, Hamlett C, Hewlett S. (2000) Effects of Workgroup Structure and Size on Student Productivity During Collaborative Work on Complex Task. En The Elementary School Journal Volume 100 Number 3.

Johanning, D. (2000). An analysis of writing and postwriting group collaboration in meddle school pre-algebra. School science and mathematics, 100, 151-160.

Kaput, j.j (1992) Technology and mathematics Education. En D. A. Grows. En Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.

Hadas Nurit, Hershkowitz Rina y Schwarz Baruch B.(2000) The Role Of Contradiction And Uncertainty In Promoting The Need To Prove In Dynamic Geometry Environments. En Educational Studies in Mathematics number 44. Páginas 127-150

Hanna G. (2001) Proof, Explanation and Exploration: an Overview. En Educational Studies in Mathematics number 44.

Hannafin R, Burrus J y Little C. Learning With Dynamic Geometry Programs: Perspective of Teachers and Learners. En The Journal Education Research Jan/Feb

Jones Keith. (2000) Providing a Foundation for Deductive Reasoning: Student's Interpretation When Using Dynamic Geometry Software and Their Evolving Mathematical Explanations. En Educational Studies in Mathematics. Número 44. Páginas 55-85

Jones Keith. (1999) Student Interpretations of a Dynamic Geometry Environment. En European Research in Mathematics Education I: Group 2. Páginas 245-256.

Mariotti, Maria Alessandra. (2000) Introduction To Proof: The Mediation Of A Dynamic Software Environment. En Educational Studies in Mathematics. Número 44 páginas 25–53.

Marrades R y Gutierrez A.(2000) Proofs Produced by Secondary School Students Learning Geometry in a Dynamic Computer Environment. En Educational Studies in Mathematics.number 44. Páginas 87-125.

Mogetta Catia, Olivero Federica, Jones Keith (1999).Providing the Motivation to Prove in a Dynamic Geometry Environment. A report based on the meeting at the St Martin's University College, 5th June 1999.

Mogetta Catia, Olivero Federica, Jones Keith (1999).Designing Dynamic Geometry Task that Support the Proving Process. A report based on the meeting at the University of Warwick, 13th November 1999.

Perkins, D. (1998). What is understanding? En M. S. Wiske (Ed.), Teaching for Understanding (39–57). San Francisco, CA, E.E.U.U.: Jossey-Bass Publishers.

Rogoff, Barbara. (1993) Aprendices del Pensamiento: El desarrollo cognitivo en el contexto social.(Pilar Lacasa, Trad) España. Ediciones Paidós (escrito original publicado en 1990).

Senk, Sharon L (1985). "How Well Do Students Write Geometry Proofs?" *Mathematics Teacher* 78:

Springer, L., Stanne, M. y Donovan, S. (1999). Effects of small-group learning on undergraduates in science, mathematics, Engineering, and Technology: A meta-Analysis. *Review of Educational Research;* Spring 1999; 69, 1; páginas 21-51.

Torres-Skoumal, Marlene, (2001). Alternative assessment models: Assessment through group work and the use of CAS as a Self-Assessment Tool. The International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education; 2001; 8, 1; páginas 61-83.

Wiske, Martha Stone. (1998) *Teaching for Understanding: Linking Research with Practice.* San Francisco: Jossey-Bass.

Vygotsky, L.S. (1978), *Mind in society,* Cambridge, MA, E.E.U.U.: Harvard University Press.

Vygotsky L. S. (1999) Pensamiento y Lenguaje Comentarios Críticos de Jean Piaget. Ediciones Fausto.

Waring Sue (1997) The teaching and learning of proof and pattern in the age range fourteen to sixteen years. En Developing concepts of proof in primary and secondary schools. J.W Arrowsmith Ltd, Bristol. United Kingdom.

Waring Sue (2000) Developing concepts of proof in primary and secondary schools. J.W Arrowsmith Ltd, Bristol. United Kingdom.

Anexo 1. Guías de Actividades.

COLEGIO LOS NOGALES

ACTIVIDAD ANGULOS DE POLÍGONOS GEOMETRÍA 9 GRADO[1]

NOMBRES: ____ FECHA: ________________

En esta actividad ustedes van a investigar la suma de las medidas de los ángulos en triángulos, cuadriláteros, pentágonos, hexágonos y otros polígonos.

1. Usen el Sketchpad para construir 5 polígonos con diferente número de lados.
2. Nombren los vértices de cada polígono
3. Midan los ángulos de cada polígono.
4. Sumen las medidas de los ángulos en cada polígono. Muevan los polígonos arrastrándolos de los vértices
5. Discutan con su pareja lo observado y completen la siguiente tabla.

Número de lados	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**...**	**15**	***n***
Suma de los ángulos									

6. Establezcan una conjetura que relacione el número de lados de un polígono con la suma de sus ángulos. (escríbanla los mas claramente posible)
7. Expliquen ¿Por qué creen que esta conjetura es verdadera? (Sugerencia Dibuje todas las diagonales desde un vértice de uno de los polígonos)
8. Escriban una prueba a dos columnas de esta conjetura
9. Discutan con sus compañeros de al lado la integridad de su prueba.
10. ¿Es esta conjetura verdadera para polígonos cóncavos? Expliquen.
11. Las medidas de cinco ángulos exteriores de un octágono convexo son: 45^o, 50^o, 58^o, 63^o y 67^o. ¿Es posible hallar las medidas de los restantes ángulos? Si es posible hallen las medidas, de lo contrario explique por qué no es posible.
12. Cuatro ángulos interiores de un pentágono convexo tienen medidas 73^o, 80^o, 120^o, 130^o. ¿Es posible encontrar la medida del quinto ángulo del pentágono? Si es posible hallen la medida si no es posible explique por qué.
13. ¿Cuánto es la suma de las medidas de los ángulos de un hexágono?
14. Un ángulo exterior de un polígono regular mide 30^o. ¿Cuál es la suma de las medidas de los ángulos interiores del polígono?

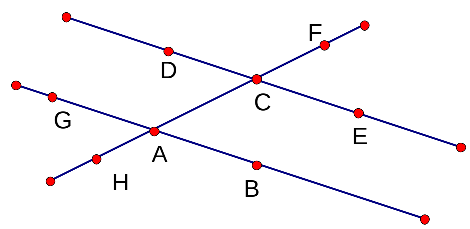
[1] Adaptada de Michael Serra (1997). Discovering Geometry An inductive Approach. Key Curriculum Press. San Francisco, California USA

COLEGIO LOS NOGALES
ACTIVIDAD: LÍNEAS PARALELAS*

NOMBRES: ____ FECHA: ___________________

En esta actividad ustedes van a descubrir relaciones entre los ángulos formados por dos líneas paralelas y una transversal.

a) Construyan $\overleftrightarrow{AB}$ y un punto C, que no este sobre $\overleftrightarrow{AB}$
b) Construyan una línea paralela a $\overleftrightarrow{AB}$, que pase por C
c) Construyan $\overleftrightarrow{CA}$ y los puntos D, E, F, G y H como se muestra en el dibujo.
d) Midan los ocho ángulos formados en su figura.



e) Muevan la línea $\overleftrightarrow{CA}$. ¿Qué observan de los ángulos medidos?
f) En la tabla de abajo les dan un ejemplo de cada tipo de pareja de ángulos. Completen la tabla poniendo otros ángulos de este tipo, entonces establezcan alguna relación entre esas parejas de ángulos.

Tipo de Ángulo	Par 1	Par 2	Par 3	Relación
Correspondientes	$\angle FCE$ y $\angle CAB$			
Alternos internos	$\angle ECA$ y $\angle CAG$			
Alternos externos	$\angle FCE$ y $\angle HAG$			
Consecutivos Internos	$\angle ECA$ y $\angle BAC$			
Consecutivos Externos	$\angle FCD$ y $\angle HAG$			

g) Discutan sus observaciones y conclusiones con su pareja. Establezcan unas conjeturas que enuncien la relación de cada pareja de ángulos.
h) Si tienen como *Postulado: Si dos líneas paralelas son cortadas por una transversal, entonces ángulos correspondientes son congruentes*. Expliquen porque su conjetura en E es cierta a partir de este postulado.
i) Escriban una prueba a dos columnas y discutan con sus compañeros la integridad de su prueba.
j) Qué pueden decir acerca de estas parejas de ángulos entre líneas que no sean paralelas, den ejemplos.

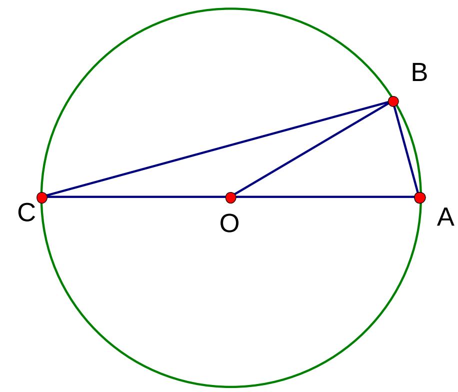
---

* Adaptada de Dan Bennett (1993) Exploring Geometry with the Geometer´s Sketcpad . Key Curriculum Press. Berkeley, California USA.

COLEGIO LOS NOGALES
ACTIVIDAD TRIÁNGULOS

NOMBRES: ____ FECHA: _________________

1. Construyan un circulo con centro O y radio OA
2. Construyan el diámetro $\overline{AOC}$
3. Construyan un punto B sobre el círculo.
4. Construyan los segmentos $\overline{BC}$, $\overline{BO}$, $\overline{BA}$
5. ¿Qué pueden decir de los ΔCOB y ΔAOB?
6. ¿Qué pueden concluir del ΔABC .
7. **Prueben su conclusión.**



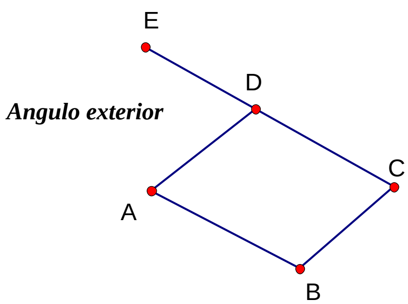
COLEGIO LOS NOGALES

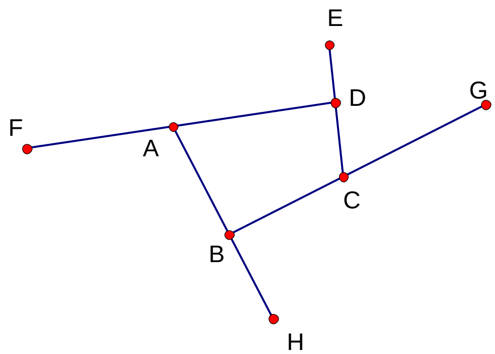
ACTIVIDAD ANGULOS DE POLÍGONOS GEOMETRÍA 9 GRADO[2]

NOMBRES: ____ FECHA: ________________

En esta actividad ustedes van a investigar la suma de las medidas de los ángulos exteriores de triángulos, cuadriláteros, pentágonos, hexágonos y otros polígonos.

Si se extiende un lado de un polígono mas allá del vértice se forma un ángulo exterior al polígono





1. Usen el SketchPad para construir 5 polígonos con diferente número de lados.
2. Nombren los vértices de cada polígono
3. Construyan un juego de ángulos externos para cada polígono, midan los ángulos externos de cada polígono (un ángulo externo por cada vértice.)
4. Sumen las medidas de los ángulos externos en cada polígono. Muevan los polígonos arrastrándolos desde sus vértices y discutan con su pareja lo observado.
5. Completen la siguiente tabla:

Número de lados	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**...**	**15**	***n***
Suma de los ángulos externos									

6. Establezcan una conjetura que relacione el número de lados de un polígono con la suma de sus ángulos exteriores. (escríbanla los mas claramente posible)
7. ¿Por qué creen que esta conjetura es verdadera? Expliquen
8. ¿Escriban una prueba a dos columnas de esta conjetura?
9. Discutan con sus compañeros de al lado la integridad de su prueba.

[2] Adaptada de Michael Serra (1997). Discovering Geometry An inductive Approach. Key Curriculum Press. San Francisco, California USA.

10. ¿Es esta conjetura verdadera para polígonos cóncavos? Expliquen. ¿Cambia esto el enunciado de su conjetura inicial?

COLEGIO LOS NOGALES
ACTIVIDAD: BISECTOR DE UN ÁNGULO*

NOMBRES: ____ FECHA: ________________

En esta actividad ustedes van a descubrir algunas propiedades sobre el bisector de un ángulo de un triangulo y el bisector del ángulo exterior correspondiente a este ángulo.

1.

I. Construyan un triángulo.

II. Extiendan uno de sus lados. *Este lado extendido forma un nuevo ángulo con un lado del triángulo y es llamado un ángulo exterior.*

III. Bisequen ese ángulo exterior y bisequen el ángulo del triángulo adyacente al ángulo exterior construido.

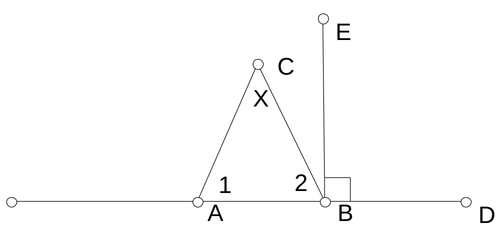
IV. Midan el ángulo formado por los bisectores de los dos ángulos.

V. Muevan los vértices del triángulo. ¿Qué pueden concluir sobre el último ángulo formado?

VI. Discutan su conclusión con su compañero. Formulen una conjetura.

VII. Escriban su explicación para presentarla a sus compañeros de curso.

2. $\angle 1 \cong \angle 2$ y $\overline{EB} \perp \overline{AD}$. $m\angle$ ACB es x grados, cuál es la $m\angle$ CBE? **Expliquen su proceso.**



* Adaptada de Dan Bennett (1993) Exploring Geometry with the Geometer´s Sketcpad . Key Curriculum Press. Berkeley, California USA.

COLEGIO LOS NOGALES
ACTIVIDAD BISECTRICES DE ANGULOS DE PARALELOGRAMOS 9 GRADO[3]

NOMBRES: ____ FECHA: ________________

En esta actividad ustedes van a investigar algunas relaciones entre las bisectrices de los ángulos de un paralelogramo y el cuadrilátero que forman las intersecciones de estos.

1. Usen el Sketch-Pad para construir un paralelogramo *ABCD*.
2. Construyan los bisectores de cada ángulo del paralelogramo *ABCD*
3. Marquen los puntos de corte de estos bisectores con las letras *EFGH*.
4. ¿Qué características especiales tiene el cuadrilátero *EFGH*? Muevan el paralelogramo ABCD para ver cuales características del paralelogramo *EFGH* se mantienen.
5. Establezcan una conjetura sobre las bisectrices de los ángulos y el cuadrilátero formado.
6. Establezcan razones que expliquen su conjetura.
7. Hagan una Prueba a dos columnas de la conjetura.

COLEGIO LOS NOGALES
ACTIVIDAD TRIÁNGULOS Y ÁNGULOS

NOMBRES: ____ FECHA: _________________

Con esta actividad podrán investigar algunas características de los ángulos y los lados de un triángulo.

1.

a. Usen el SketchPad para construir un triángulo *ABC* cualquiera.

b. Construyan los puntos medios *D, E* y *F* de los lados del triángulo *ABC*.

c. Construyan los segmentos que unen los puntos medios de los lados del triángulo.

d. Midan todos los segmentos y ángulos formados.

e. Muevan el triángulo *ABC* y discutan con su compañero sus observaciones ¿Cuáles segmentos y ángulos se mantienen congruentes? ¿Por qué?

f. Escriban sus conjeturas en forma clara y concisa.

2.

g. Usen el SketchPad para construir un triángulo rectángulo *ABC* cualquiera.

h. Midan todos los lados y los ángulos del triángulo.

i. Construyan *D* el punto medio del lado más largo del triángulo y únanlo con el vértice del ángulo más grande.

j. Midan todos los segmentos y ángulos formados.

k. Nombren todos los segmentos y ángulos congruentes.

l. Muevan el triángulo ABC de uno de sus vértices y discuta con su compañero ¿qué congruencias se mantienen? ¿por qué?

m. Formulen una conjetura de la forma más clara y precisa.

---

[*] Adaptada de Jurgensen Ray C., Brown Richard G., Jurgensen John W. (2000). Geometry. Mc Dougal Littell, Evanstons Illinois, USA.

COLEGIO LOS NOGALES
ACTIVIDAD: PUNTOS MEDIOS DE UN CUADRILÁTERO*

NOMBRES: ____ FECHA: _________________

En esta actividad ustedes van a descubrir algunas propiedades del cuadrilátero formado por los puntos medios de otro cuadrilátero.

1. Construyan un cuadrilátero *ABCD*.
2. Construyan los puntos medios de los cuatro lados y nómbrenlos con las letras *E, F, G* y *H*.
3. Unan estos puntos medios para formar un nuevo cuadrilátero.
4. Muevan los vértices del cuadrilátero *ABCD*. Asegúrense de mover en una variedad de formas y tamaños este cuadrilátero, incluso haga que el cuadrilátero sea cóncavo.
5. ¿Qué observan del cuadrilátero formado por los puntos medios? Tomen las medidas necesarias que den evidencias de sus hallazgos.
6. Establezcan una conjetura que relacione el cuadrilátero exterior con el cuadrilátero formado por los puntos medios.
7. Comparen y discutan su conjetura con sus compañeros.
8. Expliquen su conjetura y escriban una prueba.

Repitan los pasos del 1 al 7 pero en el paso 1 en lugar de construir un cuadrilátero cualquiera construyan: Un Rombo
Un Rectángulo
Un Cuadrado
Un trapezoide isósceles
Un paralelogramo

9. ¿Cuáles son las condiciones mínimas que debe tener un cuadrilátero para que al unir sus puntos medios se forme un rectángulo?
10. ¿Cuáles son las condiciones mínimas que debe tener un cuadrilátero para que al unir sus puntos medios se forme un Rombo?

PAUTAS PARA LA PRESENTACIÓN

Escriban un documento en el que expliquen al lector su propósito, el procedimiento que siguieron y las conclusiones a las que llegaron. Para dar claridad a su trabajo es importante que den ejemplos, que incluyan dibujos de las construcciones hechas, que enuncien claramente sus conjeturas y que prueban sus conjeturas de forma clara y concisa.

1. **Propósito:** En el informe debe aparecer el propósito de su proyecto y las definiciones y explicaciones que consideren necesarias para hacer claro al lector lo que se proponen con su proyecto.
2. **Procedimiento:** Debe ser claro cuál fue el proceso que siguieron para encontrar y probar sus conjeturas, su proceso debe ser explicado de forma lógica y ordenada de tal manera que sea claro para un lector ajeno a la clase. Debe usar un lenguaje matemático claro y preciso (Las pruebas

* Adaptada de Dan Bennett (1993) Exploring Geometry with the Geometer´s Sketcpad . Key Curriculum Press. Berkeley, California USA.

deben ser claras y concisas entre menos pasos mejor). Deben aparecer los dibujos que indiquen con claridad como se obtuvieron cada una de las conjeturas.

3. Conclusiones: Las conclusiones deben ser claras y plenamente justificadas, deben estar estrechamente relacionadas con el propósito. (No deben aparecer comentarios como me divertí, fue fácil, me gusto, etc., que no interesan al lector)
4. Presentación: Deben ser especialmente cuidadosos con la ortografía y con la redacción. El trabajo debe estar visualmente bien presentado, para esto es fundamental usar un procesador de texto y Sketchpad. No recibo trabajos hechos a mano.
5. Entrega: octubre 29 de 2003 en la hora de clase. Bajo puntos si se retrasan de esta hora.

TABLA DE CORRECIÓN

Verifique cada opción y encierre el número del puntaje asignado. na = no aplica, nr = no responde

A. FORMA DEL PROYECTO (4 pts) _____ El título es sugerente y acorde con el proyecto _____ El propósito es claro y coherente. _____ La presentación visual es adecuada _____ La redacción es clara.	nr 1 2 3 4 na
B. COHERENCIA DEL PROCEDIMIENTO (2pts) _____ Hay suficientes datos e información que sustenten las conjeturas. _____ Explica al lector el proceso para llegar a las conjeturas.	nr 1 2 na
C. CALIDAD DE LAS PRUEBAS (8 pts) _____ Los enunciados de las conjeturas y teoremas son precisos. _____ Las pruebas son correctas. _____ Las pruebas son concisas. _____ Usa o prueba cosas innecesarias o ya probadas. _____ Las relaciones entre una conjetura y otra están bien establecidas. _____ Los pasos de las pruebas son lógicos y claros. _____ Los cálculos son correctos _____ La notación es adecuada	nr 1 2 3 4 5 6 7 8 na
D. CONCLUSION (4 pts) _____ Consistente con el propósito _____ Consistente con el procedimiento _____ Es clara y concisa _____ Las preguntas planteadas son respondidas	nr 1 2 3 4 na
E. PROFUNDIZACIÓN (4 pts) _____ Profundizan o van mas lejos del trabajo planteado inicialmente	nr 1 2 3 4 na _______ / 22 = ______% Total Pts.

Comentarios:

____

____

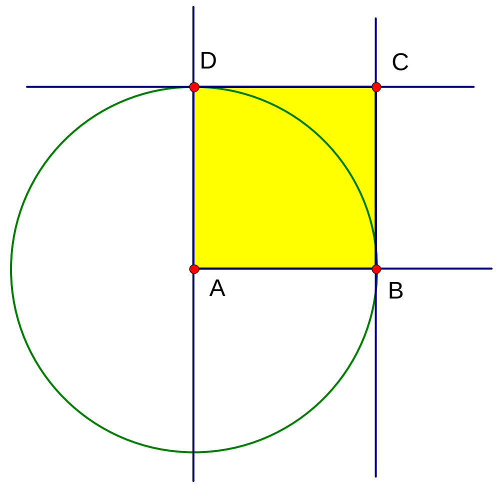
____

____

COLEGIO LOS NOGALES
TEOREMA DE PITÁGORAS

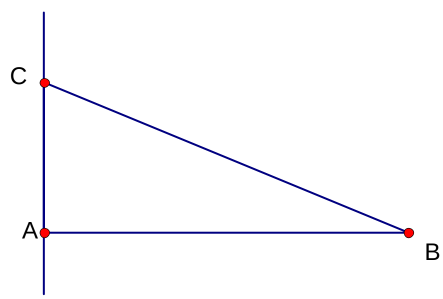
NOMBRE: ____ FECHA: __________________

En esta actividad usted va a crear un script para construir un cuadrado, entonces construir cuadrados sobre los lados de un triángulo rectángulo. Las áreas de estos cuadrados pueden ilustrar la más famosa relación in matemáticas, el teorema de Pitágoras.



1. Usen el Sketchpad para construir un rayo AB y líneas perpendiculares a este rayo por A y por B
2. Construyan el circulo AB.
3. Llamen C la intersección del circulo y la perpendicular por A del rayo AB
4. Construyan una línea por C perpendicular a $\overleftrightarrow{AC}$
5. Llamen D el cuarto vértice del cuadrado.
6. Escondan los rayos, líneas y el círculo.
7. Construyan el polígono interior del cuadrado, seleccionando los cuatro vértices y en el menú Construct la opción Quadrilateral interior.
8. para que todo el proceso quede grabado como una herramienta. Seleccione todo el cuadrado, luego haga clic en el botón ▶▶ y seleccione Create New Tool... llámela Tool #1

Cree una hoja en blanco en el mismo documento para dibujar un triángulo rectángulo.



1. Construyan el $\overline{AB}$

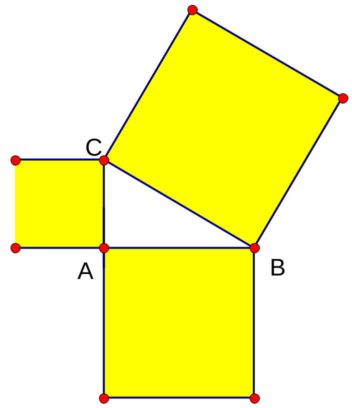
2. Construyan una línea perpendicular a $\overline{AB}$, que pase por A.

3. Construyan $\overline{AC}$ siendo C un punto sobre la perpendicular.

4 Construyan $\overline{BC}$ y escondan las líneas.

Construyan sobre los lados del triángulo rectángulo cuadrados haciendo clic en el botón , seleccione la Tool #1 y de clic en los vértices del triángulo.

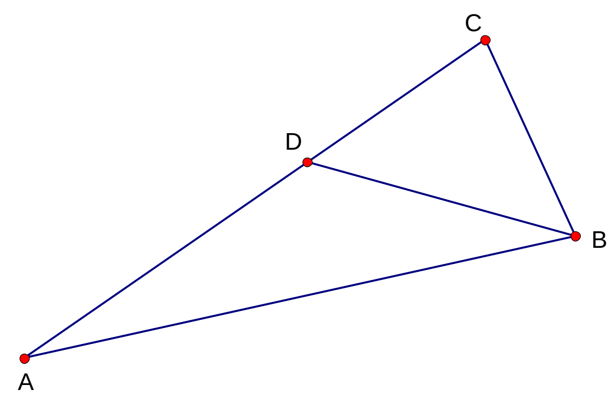
Calculen las áreas de los cuadrados y observen que relación tienen.



COLEGIO LOS NOGALES
ACTIVIDAD DESIGUALDADES DE TRIÁNGULOS 9 GRADO[4]

NOMBRES: ____ FECHA: ________________
En esta actividad ustedes van a investigar algunas relaciones entre las medidas de los ángulos y los lados de un triángulo..

1. Usen el SketchPad para construir un triángulo ABC.
2. Midan los ángulos y los lados de cada triángulo.
3. Ordenen en forma decreciente las medidas de los ángulos y los lados
4. ¿Qué relación observan entre las medidas de los lados y los ángulos del ΔABC? (muevan el triangulo para ver si lo observado se mantiene)
5. Discutan con su pareja lo observado.
6. Establezcan una conjetura que relacione la medida de los lados y los ángulos del ΔABC. (escríbanla los mas claramente posible)
7. ¿Expliquen Por qué creen que esta conjetura es verdadera? (sugerencia: construya un punto D sobre $\overline{AC}$ de tal manera que $\overline{BC} \cong \overline{CD}$, construyan $\overline{BD}$)



8. ¿Escriban una prueba a dos columnas de esta conjetura?
9. ¿Qué pueden decir del reciproco de su conjetura? Pruébenlo o den un contraejemplo.
10. Discutan con sus compañeros la integridad de sus pruebas.

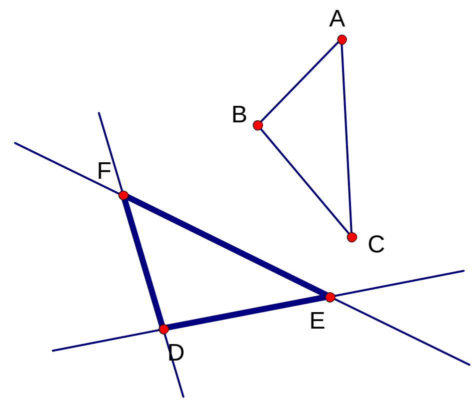
---
[*]Adaptada de Jurgensen Ray C., Brown Richard G., Jurgensen John W. (2000). Geometry. Mc Dougal Littell, Evanstons Illinois, USA.

COLEGIO LOS NOGALES
ACTIVIDAD: SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS*

NOMBRES: ____ FECHA: ___________________

En esta actividad ustedes van a descubrir algunas condiciones de los ángulos de un triángulo.

k) Construyan un ΔABC y una línea recta $\overleftrightarrow{DE}$.
l) Seleccionen D y márquenlo como centro de rotación usando **Mark Center** del menú **Transform**. Seleccionen en orden C, B y A y escojan **Mark Angle** del menú **Transform**, para que quede seleccionado el $\angle CBA$.
m) Seleccionen $\overleftrightarrow{DE}$ y rótenla el $\angle CBA$ con centro en D, seleccionando **Rotate** y **Marked Angle** del menú **Transform**.
n) Ahora marquen E como centro y el $\angle ACB$.
o) Roten $\overleftrightarrow{DE}$ nuevamente pero ahora el nuevo $\angle ACB$ y haciendo centro en E.
p) Finalmente construyan F como el punto de intersección de las dos rotaciones de la línea $\overleftrightarrow{DE}$. Oculten las líneas y reemplácelas con segmentos.



q) Construyeron los ángulos FDE y FED congruentes con los ángulos BCA y ACB respectivamente. ¿Cómo son los ángulos DFE y CAB? ¿Por qué?
r) Midan todos los ángulos y los lados de los triángulos ¿qué pueden decir acerca de estos triángulos y por qué? Muevan los triángulos para ver si su observación cambia.
s) Establezca una conjetura. Susténtenla mostrando las relaciones de los ángulos y los lados.

Exploración

1. Construyan un triángulo ABC. Construyan un punto D sobre $\overline{AB}$. Construyan una línea paralela a $\overline{BC}$ que pase por D y llamen E al punto de intersección con $\overline{AC}$.
2. ¿Qué pueden decir acerca de los ΔABC y ΔADE?
3. Establezcan una conjetura y justifíquenla mostrando las relaciones entre las medidas de los lados y los ángulos de los triángulos.
4. Prueben su conjetura (pueden apoyarse en la conjetura anterior)

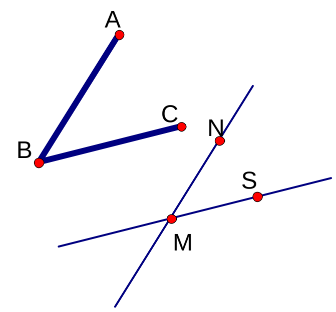
* Adaptada de Dan Bennett (1993) Exploring Geometry with the Geometer´s Sketcpad . Key Curriculum Press. Berkeley, California USA.

COLEGIO LOS NOGALES
ACTIVIDAD: SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

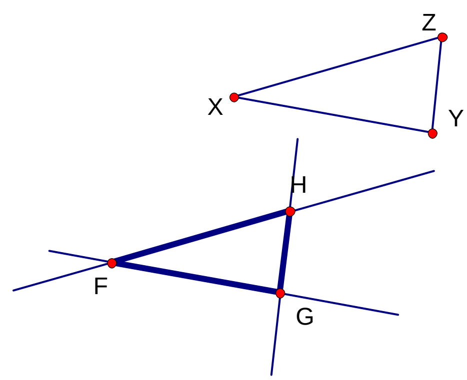
NOMBRES: ____ FECHA: __________________

En esta actividad ustedes van a descubrir cuáles son las condiciones mínimas para que dos triángulos sean semejantes.

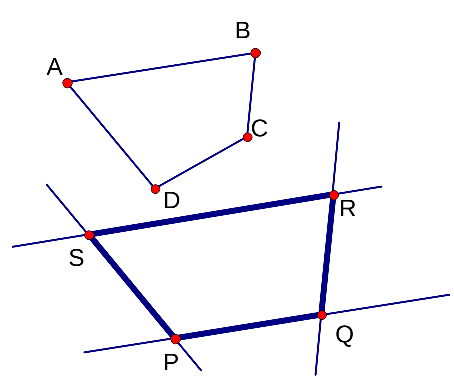
1. ***Cómo construir un ángulo congruente a un ángulo dado*** $\angle ABC$ **.**
   a) Dibujen un $\angle ABC$ cualquiera, construyendo dos segmentos que tengan el extremo B en común.
   b) Construyan una línea paralela a $\overline{AB}$ por un punto M que no este en $\overline{AB}$.
   c) Construyan otro punto N sobre esta línea paralela. Construyan por M una paralela a $\overline{BC}$.
   d) Construyan un punto S sobre esta paralela.
   e) Midan los $\angle ABC$ y $\angle NMS$. Muevan el $\angle$ ABC



2. ***Propiedades de dos triángulos que tengan 2 ángulos congruentes.***
   a. Dibujen un ΔXYZ cualquiera.
   b. Construyan $\overleftrightarrow{FG}$ paralela a $\overline{XY}$.
   c. Copien los $\angle ZXY$ y $\angle XYZ$ sobre los puntos F y G.
   d. Nombren H el punto de intersección de las líneas que forman los ángulos duplicados.
   e. Oculten las líneas y remplácelas por segmentos.
   f. ¿Qué relación encuentran entre el ΔXYZ y el ΔFGH ?
   g. Muevan los triángulos para ver si la relación se mantiene. **Establezcan una conjetura.**
   h. Tomen medidas de los triángulos y hagan proporciones para dar evidencias de su observación.



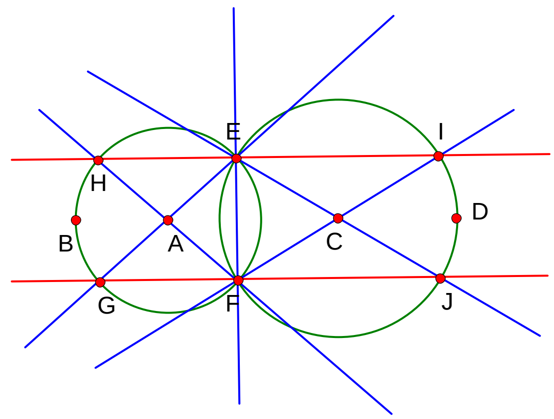
3. ***Propiedades de cuadriláteros con 3 ángulos congruentes.***
   a. Dibujen un cuadrilátero cualquiera $ABCD$.
   b. Construyan $\overleftrightarrow{PQ}$ paralela a $\overline{AB}$.
   c. Copien los $\angle BAD$ y $\angle ABC$ sobre los puntos P y Q.
   d. Sobre el punto R copien el $\angle CBA$.
   e. Llamen S el punto de intersección que forma el cuadrilátero $PQRS$.
   i. ¿Qué relación encuentran entre los cuadriláteros $ABCD$ y $PQRS$? **Establezcan una conjetura.**
   j. Muevan los cuadriláteros para ver si la relación se mantiene. Tomen medidas y hagan proporciones para dar evidencias de su conjetura.



COLEGIO LOS NOGALES
QUIZ CONJETURAS EN CIRCULOS[5]

NOMBRES: ____ FECHA: ____________

A. Construcción (2punto)



1. Construyan círculos AB y CD con cualquier radio de tal manera que se corten en los puntos E y F. (Construyan esos puntos de intersección)
2. Construyan $\overleftrightarrow{EF}$ $\overleftrightarrow{AE}, \overleftrightarrow{AF}, \overleftrightarrow{CE}$ y $\overleftrightarrow{CF}$
3. Llamen los puntos de intersección de estas rectas con los círculos G, H, I y J.
4. Construyan $\overleftrightarrow{HI}$ y $\overleftrightarrow{GJ}$

B. Conjeturas y pruebas (5 puntos)

1. Descubran y prueben algo interesante sobre $\overleftrightarrow{EF}$ y $\overleftrightarrow{GJ}$
2. Prueben que G, F y J son colineales.
3. ¿Qué pueden decir de los ΔAEC y ΔGEJ ? Pruébenlo
4. Descubran y prueben algo interesante sobre $\angle EAF$ y $\angle EGF$.
5. Descubran y prueben algo interesante sobre el cuadrilátero $HGJI$.

C. **Creatividad (3 puntos)**

Conjeturen y prueben tres cosas nuevas e interesantes sobre la anterior construcción.

[5] Adaptación de un taller de Margarita de Mesa (profesora de matemáticas Universidad de los Andes) para Cabri.

Anexo 2. Protocolos de encuestas

COLEGIO LOS NOGALES
ENCUESTA DE ENTRADA GEOMETRÍA

NOMBRE: ____ FECHA: ______________

Dos de los propósitos de este curso son: que los alumnos adquieran habilidades para elaborar pruebas matemáticas y que comprendan el significado de una prueba en matemáticas. Para ver como su comprensión evoluciona a lo largo del curso es necesario que responda a las siguientes preguntas:

1. ¿Qué significa para usted la palabra prueba matemática?

2. ¿Para qué cree usted que sirven las pruebas?

3. ¿Ha hecho usted pruebas en sus clases de matemáticas?

4. ¿Puede dar algunas características de una prueba matemática?

5. ¿De qué elementos consta una prueba?

6. ¿Cómo se elaboran pruebas en matemáticas?

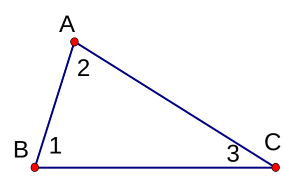
COLEGIO LOS NOGALES
ENCUESTA DE SALIDA GEOMETRÍA

NOMBRE: ____ FECHA: ______________

Dos de los propósitos de este curso son: que los alumnos adquieran habilidades para construir pruebas matemáticas y que comprendan el significado de una prueba en matemáticas. Para ver como su comprensión sobre la prueba evolucionó a lo largo del curso por favor responda a las siguientes preguntas.

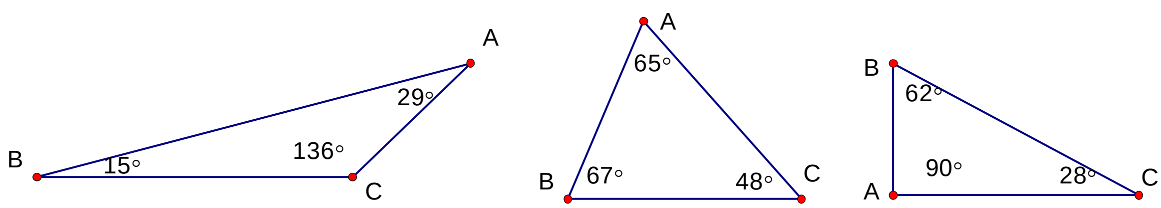
1. ¿Qué es para usted una prueba geométrica?
2. ¿Para qué cree usted que sirven las pruebas?
3. ¿Sabe usted elaborar pruebas?
4. ¿Cuáles son las principales características de una prueba geométrica?
5. ¿De que elementos consta una prueba?
6. ¿Qué hace que un argumento sea una prueba?
7. ¿Qué tipos de argumentos no son pruebas?
8. ¿Cuándo una prueba es invalida?
9. ¿Cuál es su propósito cuando hace una prueba?
10. ¿Cuáles actividades de la clase de geometría le han aportado más para entender la prueba?
11. En una evaluación de geometría el profesor pone a los alumnos la siguiente prueba[6]:

Dado: ΔABC
Probar: $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = 180$



Las respuestas de tres alumnos aparecen a continuación:

Alumno A. Dibujó tres triángulos y midió los tres ángulos de cada triángulo y debajo de cada triángulo anoto la suma de dichos ángulos. Explicando que siempre la suma era 180º.



15 +136 + 29 = 180

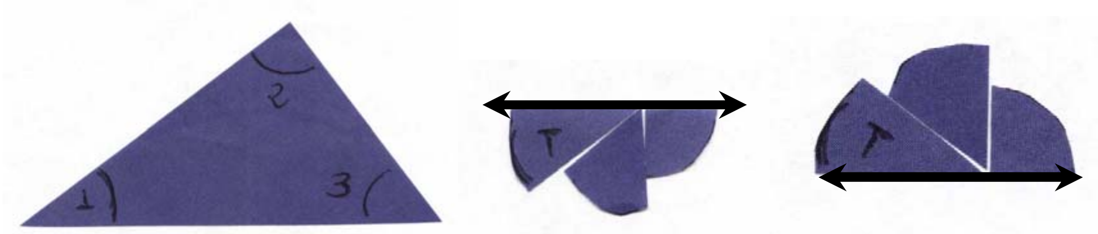
65+ 67 + 48 = 180

62 + 90 + 28 =180

---

[6]Adaptada de: Eric J Knuth (2002), "Secondary School Mathematics Teachers´ Conceptions of proof.", University of Wisconsin- Madison Journal for Research in Mathematics Education.

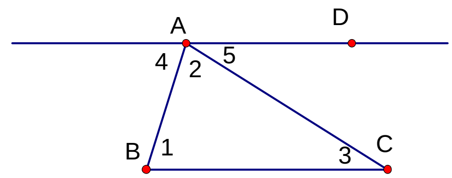
Alumno B. Dibujó un triángulo en un papel y luego recorto los ángulos y los puso juntos como se muestra en la figura.



Explicando que juntos los ángulos forman una línea recta, que forma un ángulo de 180 grados además esto es así para triángulos obtusos y rectángulos. Entonces la suma de los ángulos interiores de un triángulo es siempre 180º.

Alumno C. Hizo el siguiente dibujo y escribió lo siguiente.

Dado: ΔABC
Probar: $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = 180$



Afirmación	Razón
Por A dibujo $\overleftrightarrow{AD}$ paralela a $\overleftrightarrow{BC}$	Por un punto exterior a una recta existe exactamente una línea paralela a la línea dada.
$m\angle 4 + m\angle BAD = 180$	Postulado de adición de ángulos.
$m\angle BAD = m\angle 2 + m\angle 5$	
$m\angle 4 + m\angle 2 + m\angle 5 = 180$	Propiedad de sustitución de la igualdad.
$m\angle 1 = m\angle 4$ y $m\angle 3 = m\angle 5$	Dos líneas paralelas cortadas por una transversal forman ángulos alternos internos congruentes.
$m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = 180$	Propiedad de sustitución de la igualdad.

¿Cuáles de los anteriores argumentos considera usted pruebas geométricas? ¿Por qué?

12. ¿Cree usted que el trabajo con SketchPad le ayuda a dar sentido y a entender la prueba? Explique

COLEGIO LOS NOGALES
ENCUESTA DE SALIDA GEOMETRÍA 2ª PARTE

NOMBRE: ____ FECHA: _____________

Dos de los propósitos de este curso son: que los alumnos adquieran habilidades para construir pruebas matemáticas y que comprendan el significado de una prueba en matemáticas. Para ver como su comprensión sobre la prueba evolucionó a lo largo del curso por favor responda a la siguiente encuesta.

1. ¿Qué entiende usted por prueba matemática?

2. ¿Qué cosas le parecen complicadas cuando elabora pruebas?

3. ¿Qué tipos de errores cometía o comete usted en la elaboración de pruebas geométricas?

4. De un ejemplo de un argumento que no sea una prueba. Explique.

5. ¿Cree usted posible descubrir nuevos teoremas en geometría? Explique.

COLEGIO LOS NOGALES
ENCUESTA DE SALIDA GEOMETRÍA 2ª PARTE

NOMBRE: ____ FECHA: _____________

Dos de los propósitos de este curso son: que los alumnos adquieran habilidades para construir pruebas matemáticas y que comprendan el significado de una prueba en matemáticas. Para ver como su comprensión sobre la prueba evolucionó a lo largo del curso por favor responda a la siguiente encuesta.

6. ¿Qué entiende usted por prueba matemática?

7. ¿Qué cosas le parecen complicadas cuando elabora pruebas?

8. ¿Qué tipos de errores cometía o comete usted en la elaboración de pruebas geométricas?

9. De un ejemplo de un argumento que no sea una prueba. Explique.

10. ¿Cree usted posible descubrir nuevos teoremas en geometría? Explique.

Anexo 3. Exámenes de capítulo y examen final.

COLEGIO LOS NOGALES
GEOMETRY CHAPTER TEST 2

NAME: ____ DATE: _________________

1. Write the hypothesis and the conclusion of the conditional statement:
   If < A is a right angle, then *m*<A = 90.

____

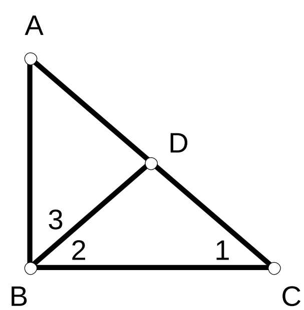
2. Write the converse of the following statement:
   If $x < 0$, then $x^2 > 0$

____

3. Classify each statement as true or false. If it is false, provide a counterexample. If it is true give the reason (Theorem, Postulate or definition)
   a. Perpendicular lines form right angles
   b. Adjacent angles must be complementary
   c. If $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ and $\overline{CD} \cong \overline{EF}$, then $\overline{AB} \cong \overline{EF}$
   d. If two adjacent angles are congruent, then the angles are supplementary.

4. Write the proof in two/column form.

   Given: $\overline{AB} \perp \overline{BC}$;
   $\angle 1$ and $\angle 2$ are complementary angles.
   Prove: $\angle 1 \cong \angle 3$



5. Draw any triangle. Extend one of the sides. This extended side forms a new angle with a side of the triangle and is called an *exterior angle*. Bisect the exterior angle just formed. Bisect the angle of the triangle adjacent to this exterior angle. Measure the angles formed by the two angles bisector. Drag the vertices of triangle. What can you conclude about the angle? Compare your results with the results of your partner. Organize your observations in to a conjecture. Write your explanation for presentation to the class as a two column proof.

Statements	**Reasons**

6. Draw any triangle. Bisect an angle of the triangle. The bisector of an angle of a triangle bisects the opposite side of the triangle? If it is false, provide a counterexample. If it is true prove.

COLEGIO LOS NOGALES
GEOMETRY CHAPTER TEST 3

NAME: ____ **DATE:** ____________________

In 1-4, classify each statement as true or false. Explain.

1. Two lines that are not parallel must intersect.
2. It is possible for a polygon to be equilateral but not equiangular.
3. It is possible for a triangle to be both right and isosceles.
4. If each exterior angle of a polygon has measure 15º, then the polygon has 24 sides.

In 5-8, complete each statement with the word *always, sometimes, or never.*

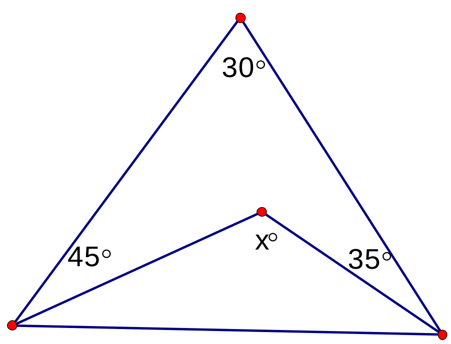
5. An isosceles triangle___________ has exactly two congruent sides.
6. If two lines are cut by a transversal, then corresponding angles are __________ congruent.
7. An equilateral polygon is __________ regular.
8. Each angle of an equiangular quadrilateral has ____________ 80º.

In 9 and 10, complete each statement.

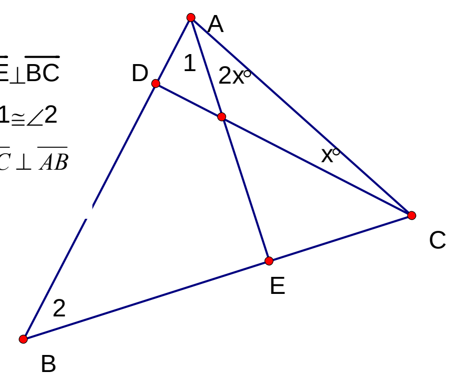
9. The sum of the measures of the interior angles of a decagon is __________
10. If two parallel planes are cut by a third plane, then the lines of intersection are __________.

In 11 and 12, find the value of *x*.

11.



12.

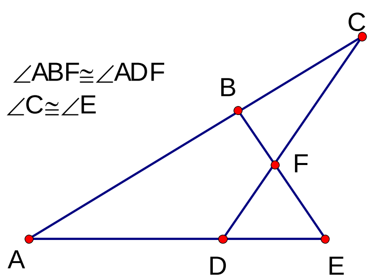


13. $\overline{BC}$ is one side of a regular octagon. The sides next to $\overline{BC}$ are extended to meet at *Z*. Find the measure of $\angle Z$

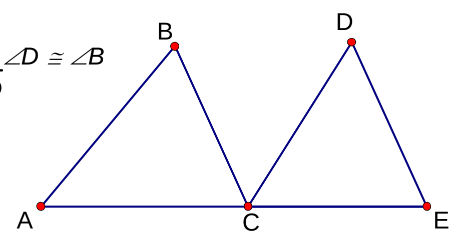
14. A regular polygon has exterior angles that are congruent to its interior angles. How many sides does the polygon have?

15.

Given: $\angle ABF \cong \angle ADF$
Prove: $\angle C \cong \angle E$



16. Given: $\overline{BC} \parallel \overline{DE}$; $\angle D \cong \angle B$
Prove: $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$



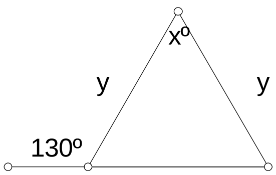
COLEGIO LOS NOGALES
GEOMETRY CHAPTER TEST 4

NAME: ____ **DATE:** ________________

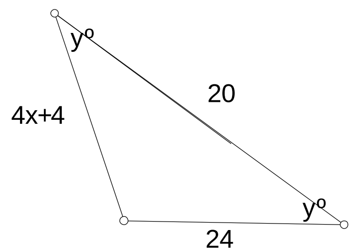
1. ΔKRZ is isosceles, $m < R = 100$, $KR = 9x+2$, $RZ = 3x+20$, *and* $KZ = 6x+14$. Find the measure of the sides of ΔKRZ

2. Find the value of x.

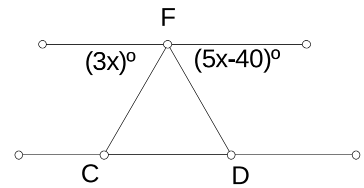
a)



b)



c)

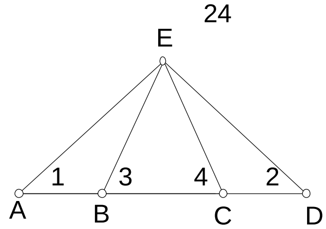


FC=FD

3. Given: $<1 \cong <2$

$\overline{AB} \cong \overline{CD}$

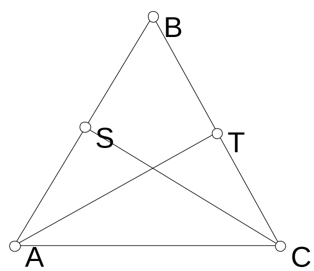
Prove: $<3 \cong <4$



4. Given: $\overline{CS}$ and $\overline{\text{AT}}$ are altitudes;

$\overline{CS} \cong \overline{AT}$

Prove: $\overline{AS} \cong \overline{CT}$

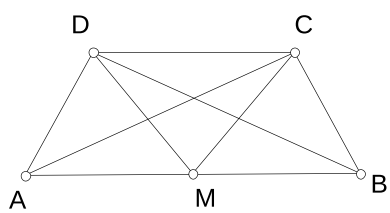


5. Write key steps.

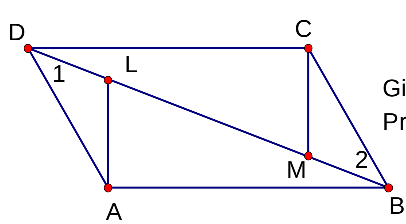
Given: $\overline{AM} \cong \overline{MB}$; $\overline{\text{AD}} \cong \overline{BC}$;

$< MDC \cong < MCD$

Prove: $\overline{AC} \cong \overline{BD}$



6. Write key steps.



Given: $\overline{DC} \parallel \overline{AB}$; $\overline{DC} \cong \overline{AB}$; $\angle 1 \cong \angle 2$

Prove: $AL \cong CM$

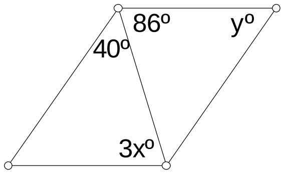
7. Draw an isosceles ΔRST with $\overline{RT} \cong \overline{ST}$. Let M be the midpoint of $\overline{ST}$ and N be the midpoint of $\overline{RT}$. Draw $\overline{RM}$ and $\overline{SN}$ and label their common point O. Now draw $\overline{NM}$. Name four pairs of congruent triangles and name the postulate or theorem used.

COLEGIO LOS NOGALES
GEOMETRY CHAPTER TEST 5

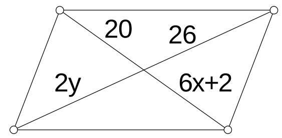
NAME:____ DATE: __________________

1. Each quadrilateral is a parallelogram. Find the values of the specified variables. **Show your work**.

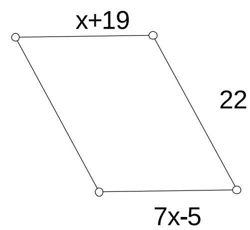
a.



b.

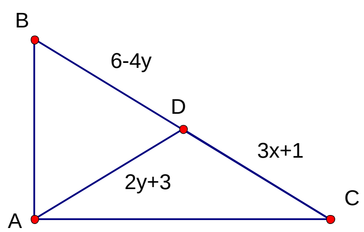


c.

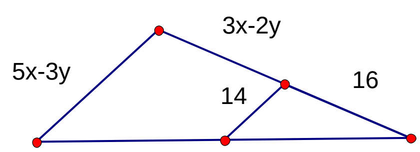


2. Find the values of x and y.

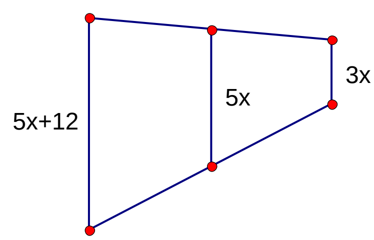
a.



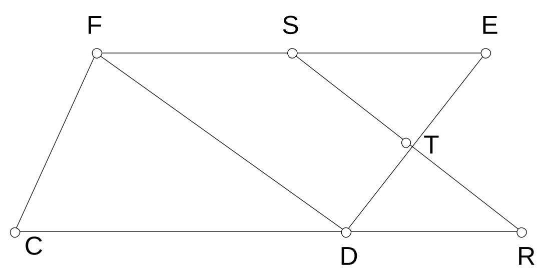
b.



c.



3. Given: *CDEF* is a parallelogram; *S* and *T* are the midpoints of $\overline{EF}$ and $\overline{ED}$. Prove $\overline{SR} \cong \overline{FD}$

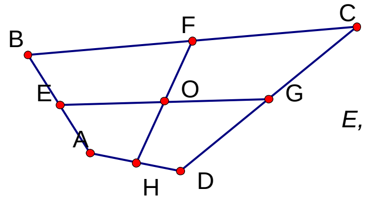


4. Prove: The diagonals of a rectangle are congruent.

5. Carefully draw a convex kite Join, in order, the midpoints of the sides. **Discover, sate, and prove**. What special kind of quadrilateral do you appear to get?

6. Draw any ΔABC. Label the midpoint of $\overline{AB}$ as *D*, of $\overline{AC}$ as *E*, and of $\overline{BC}$ as *F*. What kind of quadrilateral is *ADFE*. How do you know? Make a two column prove.

7. What is the most general type of quadrilateral whose midpoint quadrilateral is a rectangle? Make a two column prove.



E, *F*, *G* and *H* are the midpoints of a quadrilateral *ABCD*. Prove that $\overline{FO} \cong \overline{OH}$

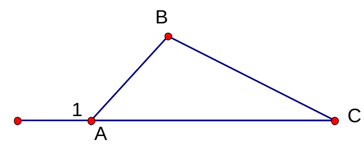
COLEGIO LOS NOGALES
GEOMETRY CHAPTER TEST 6

NAME: ____ DATE: _____________

1. Classify each statement as true or false.

a. $m\angle 1 = m\angle BAC + m\angle B$ **c.** $m\angle B + m\angle C > m\angle 1$

b. $m\angle 1 < m\angle B$ **d.** $m\angle 1 > m\angle C$



2. Consider the true statement: ***Two skew lines do not intersect***.

	If ______ then _____	**True / False**
Statement		
Contrapositive		
Inverse		
Converse		

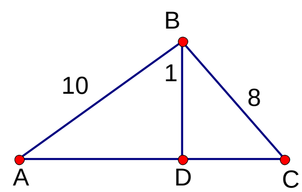
3. Complete each statement by writing <, =, or >.

a. $m\angle A$ ________ $m\angle C$

b. $m\angle ADB$ _______ $m\angle 1 + m\angle A$

c. AB _________ BD

d. AC _______ 18 and AC _____ 2

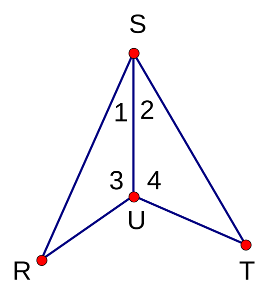


4. Complete each statement writing <, =, or >.

a. If $RS = ST$ and $m\angle 1 > m\angle 2$, then RU _____ TU

b. If $RS = ST$ and $RU = TU$, then $m\angle 3$ _______ $m\angle 4$

c. If $RU = TU$ and $ST < RS$, then $m\angle 3$ _______ $m\angle 4$



5. Complete

a. In ∇KLM, if KL = 9, LM = 12, and MK = 13 the largest angle is __________?

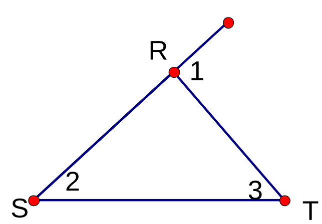
b. In ∇NOR, if $m\angle N$ =52 and $m\angle O$ = 92, the shortest side is _____________?

c. The lengths of two sides of a triangle are 16 and 10. The length of the third side must be greater than ________?, but less than _____?

6. Prove that the sum of the lengths of the medians of a triangle is greater than half the perimeter.

7. Given: $m\angle 2 = \frac{1}{3} m\angle 1$

Prove: $RS \neq RT$



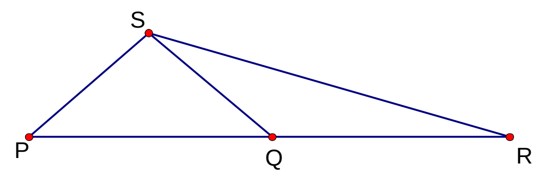
8. The longer diagonal of parallelogram QRST is $\overline{QS}$. Tell whether each statement *must be, may be, or cannot be* true. Justify.

a. $\angle$R is an acute angle   b. QS > RS   c. RS >RT

9.

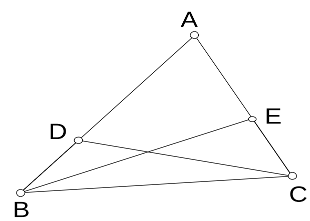
Given: $\overline{SP} \cong \overline{PQ} \cong \overline{QR}$

Prove: $SR > SP$



10. Given: AB > AC; BD = EC

Prove: BE > CD

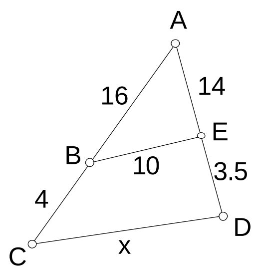


COLEGIO LOS NOGALES
GEOMETRY CHAPTER TEST 7

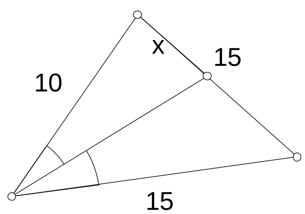
NAME:____ DATE: _______________

In Questions 1-2, find the value of *x*. **Show your process**

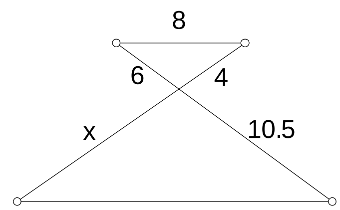
a.

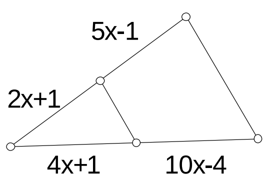


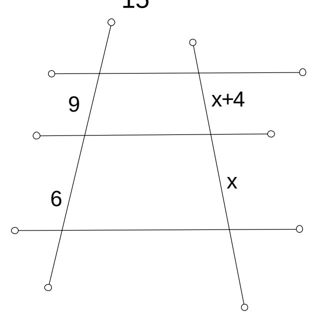
b.

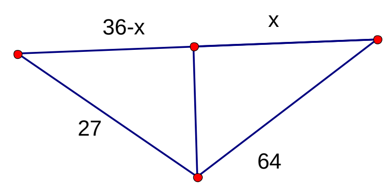


c.





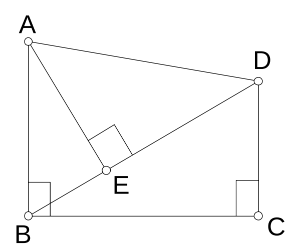




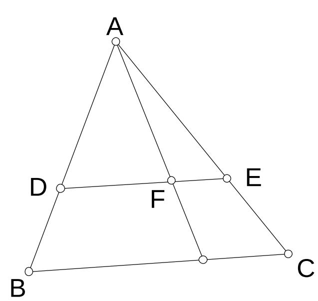
2. a. b. c.

3. Trapezoid PQRS has bases $\overline{PQ}$ and $\overline{RS}$. If $m\angle P : m\angle Q : m\angle R = 3:5:7$, find the numerical measure of the largest angle of PQRS.

4. Given: m<ABC = 90º, m<DCB = 90º $\overline{AE} \perp \overline{BD}$.
   Prove: AE*DC = BE*BC



5. Given: $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$
   Prove: DF*GC = EF*BG

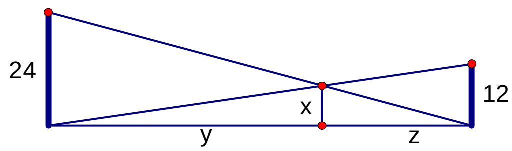


6. *Draw and label a diagram. List, in terms of the diagram, what is given and that is to proved. Then write a proof.* If two triangles are similar, then the lengths of corresponding medians are in the same ratio as the lengths of corresponding sides.

7. Find the value of *x*.

a. $\dfrac{x}{x+5} = \dfrac{2x}{3x}$ b. $\dfrac{x}{x+4} = \dfrac{x+1}{x+8}$ c. $\dfrac{x-1}{x+2} = \dfrac{10}{3x-2}$

8. Two verticals poles have 12 ft and 24 ft. A rope is stretched from the top of each pole to the bottom of the other. How far above the ground do the ropes cross?



COLEGIO LOS NOGALES
GEOMETRY CHAPTER TEST 8

NAME: ____ DATE: __________ ______

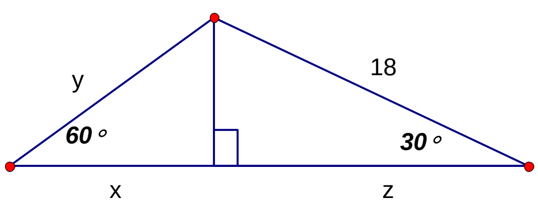
Show your process

1. Write answers in the spaces provided.
    a. 20 is the geometric mean between 5 and ______
    b. $\overline{AB}$ Is the longest side of ΔABC. If $(AB)^2 < (BC)^2 + (AC)^2$, *then* ΔABC is a(n) _________ (acute, right, obtuse) triangle.

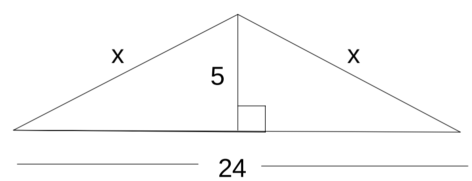
2. Simplify.
    a. $\sqrt{72}$ b. $\dfrac{9}{\sqrt{27}}$ c. $6(\sqrt{\dfrac{3}{2}})$

3. Find the values of the variables. (**2 Points**)

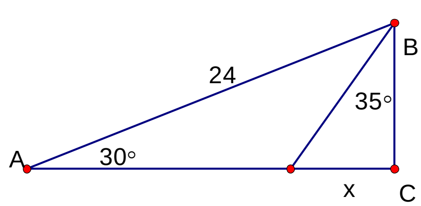
a.



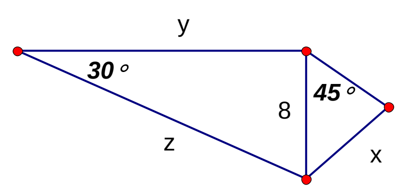
b.



c.



d



4. Tell whether a triangle formed with sides having the lengths named is acute, right, or obtuse. If a triangle can't be formed, write no possible.
    a. 5, 3, 9 b. 5, 7, 13 c. $\sqrt{5}, 2\sqrt{5}, 5$

5. A rectangle is 5 cm longer than it is wide. The diagonal of the rectangle is $5\sqrt{13}$ cm long. Find the perimeter of the rectangle

6. A support wire is attached to the top of a 150 m radio tower. The wire is 190 m long. What is the angle that the wire makes with the ground?

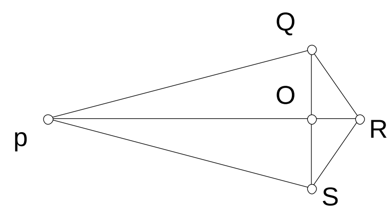
7. Prove: In a right triangle, the product of the hypotenuse and the length of the altitude drawn to the hypotenuse is equal the product of the two legs.

COLEGIO LOS NOGALES
GEOMETRY FINAL TEST

NAME: ____ **DATE:** ________________

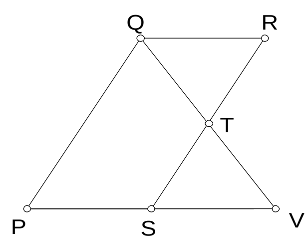
1. Given $\overline{PQ}$ is an altitude of ΔPQR; $\overline{PS}$ is an altitude of ΔPSR; $\overline{PQ} \cong \overline{PS}$

Prove: $\overline{PO}$ is a median of ΔPQS

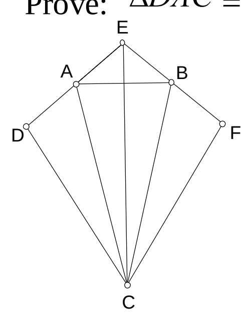


2. Given: $\Delta QRT \cong \Delta VST$; S is the midpoint of $\overline{PV}$.

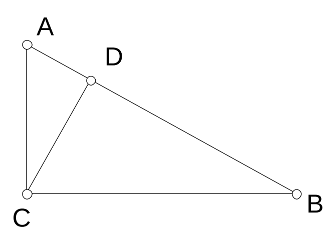
Prove: Quadrilateral PQRS is a parallelogram.



3. Given: $\overline{DC} \cong \overline{FC}; \overline{DE} \cong \overline{FE}; \overline{DA} \cong \overline{FB}$ Prove: $\Delta DAC \cong \Delta FBC$

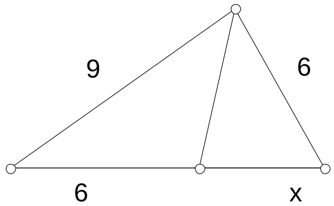


4. Given: Δ ABC with m$\angle ACB = 90$; $\overline{CD} \perp \overline{AB}$. Prove: $AB \bullet AD = (AC)^2$.

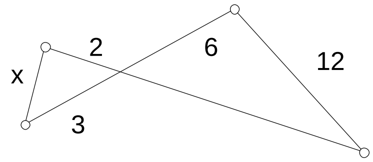


5. Find the value of ***x***.

a.

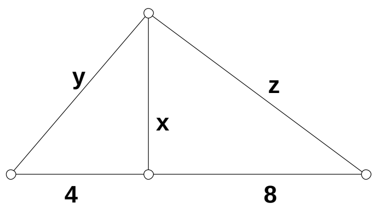


b.

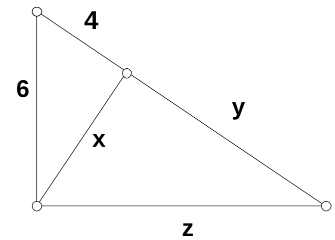


6. Each diagram shows a right triangle with the altitude drawn to the hypotenuse. Find the values of ***x, y,*** and ***z.***

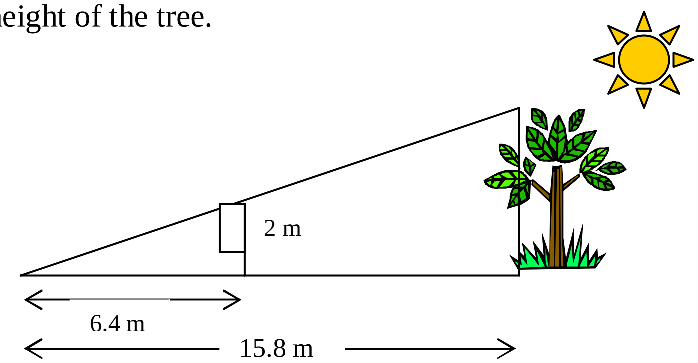
a.



b.



7. To estimate the height of a tree, Adele waited until the tops of the shadows of the tree and a sing coincided. The sing is 2 m high and the sing and the tree have shadows of 6.4 m and 15.8 m, respectively. Find the height of the tree.



8. Draw any ΔABC. Label the midpoint of $\overline{AB}$ as *D*, of $\overline{AC}$ as *E*, and of $\overline{BC}$ as *F*. What kind of quadrilateral is *CEDF*? How do you know? Make a two column prove.

9. Explique cuáles son las condiciones mínimas que debe tener un cuadrilátero para que los puntos medios formen un rectángulo. Enuncie una conjetura y Pruébela.