

Universidad de los Andes  
Facultad de Economía

Derivados para el Cubrimiento del Riesgo de Tasa de Interés Real en los  
Bancos Hipotecarios Colombianos

Asesor: Camilo Zea Gómez

Presentado por: Diego M. Vásquez E. \*

Código: 199427635

7 de febrero de 2005

**Resumen**

La inexistencia de títulos de largo plazo denominados en DTF se constituye como una falla de mercado del sistema financiero colombiano. Este hecho, que obliga a los bancos especializados en crédito hipotecario (BECH) a captar recursos en DTF a corto plazo para posteriormente colocarlos a manera de créditos hipotecarios referidos a la inflación, expone a estos intermediarios al riesgo de variaciones de la DTF real. Este documento presenta el diseño y valoración de dos instrumentos financieros derivados que ofrecería temporalmente el Gobierno para cubrir el riesgo en mención, durante el proceso de transición en el que se encuentran los BECH, en el cual están cambiando su sistema de fondeo de hipotecas basado en depósitos a uno cimentado en el mercado de capitales de largo plazo. Los derivados corresponden a: 1) Un *Swap* de tasas de interés, y 2) Un menú de opciones *cap* europeas. Paralelo al cubrimiento del riesgo referido, la colocación de estos derivados constituye un aporte importante para la solución de mercado de la falla en mención, ya que ofrece un referente de precio para emisiones futuras de instrumentos a largo plazo denominados en DTF.

*Clasificación JEL* D21, G15, G21, L11

*Palabras claves:* *swap, caps, riesgo, bono sintético y derivado*

---

\*Se agradecen los comentarios y sugerencias de los jurados de tesis Diego Jara y Arunachalam Viswanathan.

# 1. Introducción

El riesgo de tasa de interés real que afrontan los bancos especializados en crédito hipotecario (BECH) se presenta debido a que en sus balances: 1) Los plazos de captación y colocación difieren, siendo los primeros de corto plazo y los segundos de largo plazo, y 2) Las tasas a las cuales se remuneran el activo y el pasivo son diferentes. El problema surge, por una parte, debido a la inexistencia de un mercado de títulos de largo plazo denominados en DTF <sup>1</sup>, y de otro lado, en razón a que el mercado de papeles hipotecarios indexados empezó a funcionar hace relativamente poco y se encuentra en proceso de desarrollo.

Debido a lo anterior, el tipo de financiación que tradicionalmente usaron los BECH hasta antes de la crisis hipotecaria del periodo 1999-2001, precipitó la misma. En efecto, la transformación de plazos de estos intermediarios, i.e., el fondeo de hipotecas a largo plazo financiadas mediante captaciones a corto plazo, entró en crisis en el escenario de altas tasas de interés de finales de los 90 <sup>2</sup>. Por esta razón, la Ley 546 de 1999 consideró necesaria la intervención del gobierno para facilitar la transición del sistema tradicional de financiación de estas entidades a uno basado en el mercado de capitales. En ese sentido, los BECH deben dejar gradualmente de transformar plazos, para volverse asignadores de riesgo puramente.

Específicamente, el artículo 49 de la Ley 546 crea el Fondo de Reserva para la Estabilización de la Cartera Hipotecaria (FRECH), financiado inicialmente con recursos gubernamentales y administrado por el Banco de la República, con el objeto de cubrir temporalmente el riesgo de tasa de interés real que enfrentan los BECH, por un espacio de tiempo determinado luego del cual su sistema tradicional de fondeo

---

<sup>1</sup>Tasa de interés que los bancos comerciales reconocen por depósitos a 90 días, calculada semanalmente por el Banco de la República a partir del promedio ponderado de operaciones registradas por los intermediarios

<sup>2</sup>Típicamente, un BECH capta recursos en forma de cuentas de ahorro y certificados de depósito a término (CDT) menores a un año, los cuales reconocen al tenedor la tasa de interés DTF al plazo respectivo. De otro lado, estos intermediarios colocan los recursos captados en hipotecas a plazos mayores a 10 años, a tasas referidas a la evolución de la inflación, en términos de la Unidad de Valor Real (UVR), creada por la Ley 546 de 1999.

de hipotecas deberá haberse transformado en uno basado en el mercado de capitales de largo plazo.

Es importante aclarar que si en Colombia existiera un mercado de títulos de largo plazo denominados en DTF, los BECH probablemente podrían contratar coberturas de mercado (e.g. swaps) con entidades privadas que les permitirían cubrir el riesgo puro de "flujo de caja", es decir, el riesgo asociado al diferencial de tasas activas y pasivas. Por eso se resalta que la inexistencia del mercado de DTF de largo plazo da origen a la posibilidad de intervención del gobierno.

Este artículo presenta el diseño y valoración de dos alternativas de cobertura para ser vendidas por el FRECH a los BECH en los términos que establece la Ley, a saber <sup>3</sup>: 1) Un *swap* simple o *plain vanilla* y un swap entre bandas o *collar swap* con un subsidio implícito, y 2) Un menú de opciones *cap* europeas a distintas tasas.

El resto del documento se divide en tres partes. En la segunda parte se presenta la descripción de los dos derivados, como alternativas de diseño de la operación de cobertura. En la tercera se describe su valoración y en la cuarta se presentan algunas conclusiones.

## 2. Identificación del problema y alternativas de funcionamiento

El sistema financiero colombiano presenta una falla de mercado derivada de la no existencia de un mercado de títulos a largo plazo denominados en DTF. En consecuencia, hasta hace poco los BECH se veían obligados a transformar maduresces, fondeando cartera hipotecaria con depósitos a corto plazo. Lo anterior, unido a

---

<sup>3</sup>Este trabajo tiene en cuenta algunas de las ideas presentadas en los documentos técnicos elaborados por Galindo y Vásquez (1999), Mejía y Vásquez (2000), Vásquez y Zea (2001), Vásquez (2003), Vásquez y Zea (2003), los cuales sirvieron de base para la definición de las condiciones de funcionamiento del mecanismo, consideradas por en el Decreto 2587 de 2004 del Ministerio de Hacienda y Crédito Público.

que tradicionalmente las tasas de colocación de créditos hipotecarios han estado referidas a la evolución de la inflación, ha redundado en un descalce tanto de plazos de captación y colocación, como de tasas pasivas (DTF) y activas (UVR) de estos intermediarios.

La diferencia entre la tasa pasiva y activa constituye la tasa de interés real <sup>4</sup>. Un aumento de esta diferencia genera el problema de riesgo de tasa de interés real en mención, ya que encarece el fondeo a corto plazo en DTF en términos reales y en consecuencia, aumenta el desfase en la remuneración de los activos y pasivos en el balance de los BECH.

A finales de la década del 90, el fondeo de hipotecas a corto plazo se encareció sustancialmente por el aumento en la DTF real, lo cual llevó a una fuerte caída en el crédito hipotecario. Ante este problema, el Gobierno consideró adecuado promover una transición de dicho sistema de financiación basado en la transformación de vencimientos a otro de fondeo con base en el mercado de capitales de largo plazo, tal que permita a los BECH constituirse principalmente como asignadores de riesgo.

La transición al nuevo esquema, contemplada en la Ley 546 de 1999, representa para estas entidades un cambio fundamental que afecta sus balances. En efecto, a partir de la promulgación de la Ley los BECH deberán reducir su exposición al riesgo de tasa de interés real a través del fondeo de hipotecas mediante emisiones de bonos o títulos hipotecarios de largo plazo, a tasas en UVR.

Debido a la ausencia de un mercado de títulos denominados en DTF a largo plazo, los BECH no cuentan con instrumentos financieros que les permitan compensar al menos el descalce de tasas y su efecto sobre el balance. Adicionalmente, el proceso de transición que promueve la Ley es lento, por cuanto requiere un cambio en la mentalidad de los inversionistas nacionales.

---

<sup>4</sup>Matemáticamente, la tasa de interés real se puede expresar como  $r = i - \pi$ . Para efectos de la presente discusión, se entiende  $r$  como la DTF real,  $i$  como la DTF nominal y  $\pi$  como el cambio en la UVR. En el trabajo se utiliza la diferencia multiplicativa por ser una definición más adecuada en economías inflacionarias evitando una subestimación de la tasa real.

Por esta razón, se justifica una intervención del Gobierno a través de la venta de un instrumento financiero derivado ofrecido temporalmente, que permita el cubrimiento del riesgo de tasa de interés real a los BECH durante el proceso de transición mencionado<sup>5</sup>.

De forma paralela, la venta de instrumentos derivados referidos a la DTF real por parte del Gobierno, crea un referente de mercado para futuras emisiones privadas de largo plazo denominadas en esa tasa, con lo cual adicionalmente se eliminaría la falla de mercado señalada.

## 2.1. Mecanismo de cubrimiento tipo *Swap*

Siguiendo a Hull (2002), la cotización de compra en un *swap* de tasa de interés es la tasa fija que está dispuesto a pagar el creador de mercado a cambio de una tasa variable. La cotización de venta en dicho *swap* es la tasa fija que el creador de mercado quiere recibir mientras entrega una tasa variable. Así, en un *swap* en el que se recibe una tasa fija y se paga una tasa variable, su valoración queda definida por:

$$V_{swap} = B_V - B_f \quad (2.1)$$

Donde,  $B_V$  y  $B_f$  corresponden a los valores de los bonos subyacentes de tasa variable y fija respectivamente. Se puede suponer que la tasa fija es igual a la tasa del *swap*<sup>6</sup> y en este caso el valor del *swap* es cero; por lo tanto de (2.1) se tiene que  $B_V = B_f$ . Esto implica que tanto el bono de tasa fija como el de tasa variable igualan al valor del principal del *swap*. Por ende, en un *swap* de tasa de

---

<sup>5</sup>El monto máximo nocional de cubrimiento contra el riesgo de tasa de interés real en los términos que la Ley ordena, corresponde al saldo de cartera hipotecaria vigente de los BECH, registrada en sus balances el diciembre 31 de 2000. Adicionalmente, el capital inicial del FRECH está constituido por los recursos provenientes de un impuesto de 50% a la remuneración mensual de los encajes, ciento cincuenta mil millones de pesos provenientes de las utilidades del Banco de la República, correspondientes al ejercicio de 1999, y los rendimientos de los recursos del fondo. El portafolio está constituido por TES a tasa fija y en UVR.

<sup>6</sup>Al respecto, Hull (2002) señala que si dicho supuesto no fuera válido, un creador de mercado no pondría puntas de compra y venta centradas alrededor de la tasa *swap*.

interés está implícito un capital notional, la valoración de un bono subyacente y un intercambio de flujos de caja denominados en tasas diferentes.

Dado lo anterior, la idea central de la operación de cobertura a través de un *swap* consiste en sustituir un flujo denominado en UVR por otro en DTF. La operación de cobertura, en este contexto, tiene por objetivo compensar el riesgo que surge de las fluctuaciones dispares entre la remuneración del activo y del pasivo de los BECH y del desfase entre plazos.

Teniendo en cuenta que, como se dijo, Colombia no cuenta con un mercado de títulos a largo plazo denominados en DTF y el de instrumentos a largo plazo en UVR es aún poco desarrollado, este tipo de cobertura plantea la necesidad de llevar a cabo la valoración de un bono subyacente artificial. Dicha valoración se obtiene a partir de una tasa de interés de referencia,  $\overline{r^m}$ , que permita determinar el momento y la cantidad de la cobertura.

La tasa del *swap*, la cual permite la valoración del bono subyacente, es función de la tasa de interés real, y su equivalente de largo plazo. Así, cuando la tasa de interés real exceda su equivalente de largo plazo el pasivo de los BECH tiene una remuneración superior a la del activo y por lo tanto el mecanismo compensa a las entidades aportando tal diferencia. En caso contrario los BECH aportan al FRECH el exceso en ingresos resultante.

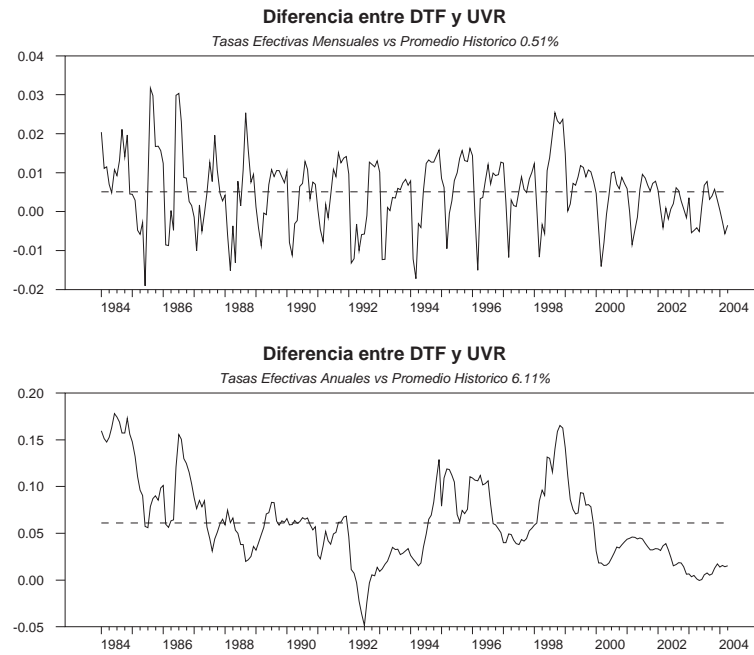
La operación definida de esta forma permite ofrecer una cobertura neutral ex ante, en el sentido en que el valor esperado de la suma de los pagos para cada parte se compense con el valor esperado de la suma de los ingresos derivados de la operación.

La tasa de interés real se define a partir de la diferencia multiplicativa entre la tasa de interés nominal (DTF) y el crecimiento de la UVR de la siguiente forma:

$$r_t^a = \left( \frac{1 + i_t^a}{1 + \Delta UVR_t^a} \right) - 1 \quad (2.2)$$

Donde,  $i_t^a$  corresponde a la  $t$ -ésima (mensual) observación de la tasa de interés

Figura 1: Tasa de interés real efectiva mensual y efectiva anual



Fuente: Cálculos el autor

DTF nominal efectiva anual y  $\Delta UVR_t^a$  constituye la  $t$ -ésima (mensual) observación del crecimiento anual de la UVR, la cual se calcula mensualmente con base en la tasa de inflación rezagada un período ( $\pi_{t-1}^m$ ). Una alternativa de medición de la tasa de interés real es a partir de la diferencia multiplicativa entre la tasa de interés nominal efectiva mensual y la variación mensual de la UVR obtenida mediante:

$$r_t^m = \left( \frac{1 + i_t^m}{1 + \Delta UVR_t^m} \right) - 1 \quad (2.3)$$

La figura 1 muestra la evolución de la tasa de interés real, tanto efectiva mensual como efectiva anual, y los promedios históricos de cada serie en el período comprendido entre enero de 1984 y abril de 2004.

Una vez definida la tasa de interés real se obtiene la relación entre ésta y su equivalente de largo plazo a partir de su diferencia multiplicativa definida por:

$$\mathfrak{R}_t^m = \left[ \frac{(1 + i_t^m)}{(1 + \Delta UV R_t^m)(1 + \overline{r^m})} \right] - 1 \quad (2.4)$$

La valoración implícita del bono subyacente del *swap* obtenida a partir de  $\mathfrak{R}_t^m$ , es decir de la diferencia entre la tasa de interés real de títulos de vencimiento corto denominados en DTF ( $r_t^m$ ) y su equivalente de largo plazo ( $\overline{r^m}$ ), se fundamenta en el supuesto de igualdad entre un bono a largo plazo y uno de madurez corta con *roll-over* permanente <sup>7</sup>. Dicho supuesto es necesario debido a que la no existencia de un mercado de bonos de vencimiento largo en DTF impide la obtención de una estructura a plazos de tasas de interés y por tanto la tasa equivalente de largo plazo.

Con base en dicho supuesto, tal como se muestra en el Apéndice B, la tasa  $\mathfrak{R}_t^m$ , permite establecer la magnitud de los pagos ( $p_t$ ) a los BECH y viceversa en cada momento. A partir de  $p_t$  se determina  $\overline{r^m}$  (tasa del *swap*) tal que los ingresos esperados al final de la operación de cobertura ( $E[I_T]$ ) sean iguales a los recursos iniciales ( $I_0$ ) otorgados por la Ley. La tasa del *swap* resultante para la operación *swap* queda definida por:

$$\overline{r^m} = \sum_{t=1}^T \frac{r_t^m}{T} \quad (2.5)$$

Según la ecuación (2.5), bajo un mecanismo de cobertura por medio de un *swap*, el equivalente de largo plazo de la tasa de interés real corresponde al promedio aritmético de la diferencia multiplicativa entre estas dos variables.

Una consideración adicional acerca de este mecanismo y de su definición en un contexto de neutralidad es su duración, la cual debe ser igual a la del ciclo de la tasa de interés real.

Como puede apreciarse en la figura 1, la dinámica observada de la tasa de interés real efectiva mensual ( $r_t^m$ ) está fuertemente influenciada por variaciones estacionales,

---

<sup>7</sup>Las "patas" del *swap* descrito corresponden a los flujos de un bono denominado en DTF real, por un lado, y por otro, los flujos de un bono en DTF real fija, equivalente al valor de largo plazo o de "estado estacionario" de la DTF.



en tanto que en la tasa real efectiva anual ( $r_t^a$ ) no se aprecia dicho patrón estacional de forma evidente. Sin embargo, si la tasa de interés real efectiva anual presenta un comportamiento cíclico, es decir, contiene un componente periódico sinusoidal con determinada longitud de onda, su varianza puede ser explicada por las variaciones de dicho componente a diferentes frecuencias (mensual, trimestral, semestral etc.).

En este sentido, un comportamiento cíclico de la tasa de interés real puede comprometer la neutralidad del mecanismo. En efecto, cuando la duración de éste es diferente de un múltiplo entero de la duración del respectivo ciclo, el período de pagos que afronta uno de los dos participantes es menor que el del otro. En estas circunstancias, cualquiera de los dos (el FRECH o los BECH) percibiría ganancias extraordinarias generadas por dicho comportamiento cíclico. El Apéndice A presenta una descripción de la estimación del ciclo de la tasa de interés real efectiva anual utilizando técnicas de análisis espectral. Los resultados permiten concluir que dicho ciclo tiene una duración de cuatro años, por lo tanto se recomienda que el mecanismo tenga la misma duración.

### **2.1.1. Mecanismo de cubrimiento *swap* con subsidio**

La Superintendencia Bancaria ordena capitalizar solamente una parte del riesgo de tasa de interés real en que incurren los BECH, a través de los denominados "Requerimientos de Capital por Riesgos de Mercado". Por esta razón, la regulación tolera la existencia de riesgo de tasa de interés real no cubierto en los estados financieros de estas entidades, lo cual genera que el fondeo de la cartera hipotecaria basado en depósitos resulte barato y con ello el mecanismo de transformación de plazos siga siendo atractivo. Debido a esto, la cobertura definida a partir de una operación *swap* podría no ser de suficiente interés para los BECH.

En estas circunstancias, una menor tasa del *swap* genera incentivos para que las entidades adopten la cobertura contra el riesgo de tasa de interés real a través del mecanismo descrito, de tal forma que permita cubrir a los BECH el nocional

equivalente a la parte no capitalizada de su riesgo de tasa de interés real sobre el stock de cartera hipotecaria elegible.

Dado lo anterior, el objetivo consiste en determinar una nueva tasa del *swap*  $\overline{r^{m*}}$ , menor que  $\overline{r_s^m}$ . Esto es posible si se distribuye, durante el período de operación, una parte de los recursos asignados al fondo entre las entidades que ingresan al mecanismo, es decir si se otorga un subsidio a la compra de cobertura. En el Apéndice D se presenta la deducción de dicha tasa del *swap* ( $\overline{r^{m*}}$ ), la cual está definida por:

$$\overline{r^{m*}} = \frac{\delta C \left( \sum_{t=1}^T r_{s,t}^m \right) - I_0}{T\delta C + I_0} \quad (2.6)$$

En la ecuación (2.6) se observa que la nueva tasa de interés de referencia, a diferencia de la inicial, es función del valor de la cartera inscrita en el mecanismo<sup>8</sup>. Por lo tanto, para cada acervo resulta una tasa de interés de referencia diferente que distribuye los recursos iniciales otorgados por la Ley al FRECH. Los valores resultantes para dicha tasa se presentan en la siguiente sección.

### 2.1.2. Sistema de franjas de tasa de interés real a partir de la tasa del *swap* no neutral $\overline{r^{m*}}$

Por razones de manejo de portafolio, los BECH pueden estar interesados en cubrir únicamente una parte del riesgo de tasa de interés real. Es decir, es posible que a partir de cierto nivel, el desfase entre tasas y plazos represente un problema para sus balances.

Debido a lo anterior, es posible plantear otra versión del mecanismo que resulta un tanto más flexible en términos de selección del nivel desfase a cubrir. Esta alternativa consiste en que la operación de cobertura compense únicamente situaciones

---

<sup>8</sup>Téngase en cuenta que, como se señala en los Apéndices C y D,  $r_{s,t}^m$  constituye la trayectoria de tasa de interés obtenida del proceso de simulación y  $\overline{r_s^m}$  la tasa promedio real de largo plazo por estimar. De igual forma, en el Apéndice B de fine a  $\delta$  como el porcentaje de cartera inscrita y  $C$  como el valor de cartera hipotecaria bruta a diciembre de 2000 establecido por la Ley 546.

extremas de la diferencia entre  $i_t^m$  y la  $\Delta UVR_t^m$ . De esta forma se establece un régimen de franjas de tasa de interés real en el que el mecanismo compensa a los BECH si dicha diferencia se sitúa por encima del techo de la franja ( $r_{s,t}^m > \bar{T}$ ) y cuando  $r_{s,t}^m$  sea menor que el piso de la franja ( $r_{s,t}^m < \bar{P}$ ) las entidades aportan al FRECH. La metodología del sistema de franjas de tasa de interés considera igualmente la distribución de una proporción de los recursos iniciales del FRECH.

El Apéndice D presenta la construcción del sistema de franjas a partir de la tasa de interés de referencia con subsidio. La ecuación (2.6) define la nueva tasa de interés de referencia  $\bar{r}^{m*}$  y las ecuaciones (D-9) y (D-10) del Apéndice D permiten obtener el nivel de ingreso final  $I_T$  y el piso  $\bar{P}$  de la franja. A partir de estas tres variables se obtiene el techo y el piso de la franja los cuales resultan en función del porcentaje de cartera inscrita. Para cada acervo de cartera resulta una franja diferente que distribuye los recursos iniciales del FRECH. El techo y piso de dicha franja quedan definidos por:

$$\bar{T} = \bar{r}^{m*} + PBS \quad (2.7)$$

$$\bar{P} = \bar{r}^{m*} - PBS \quad (2.8)$$

Con  $\bar{P}$  tal que  $I_T$  sea lo suficientemente cercano a cero.

## 2.2. Oferta de opciones *cap* europeas

La estructura de los BECH observada en la época de expedición de la Ley 546 era más homogénea que en la actualidad, ya que los balances de estos intermediarios han cambiado dramáticamente por factores tales como la reliquidación de créditos hipotecarios que ordenó la Corte Constitucional luego de la promulgación de la Ley 546, y la reestructuración misma de estas entidades después de la crisis de 1999-2001. En ese sentido, la heterogeneidad actual hace que las entidades tengan diferentes necesidades de cubrimiento en términos de tasa, monto nocional y número de años.

Por esta razón, la alternativa de cubrimiento a través del *swap* prevista inicialmente podría no ser consistente con las necesidades actuales de cada una de las entidades. Este hecho obedece a que en ésta se considera una única tasa y monto notional, o una sola franja de tasas, y una misma duración de la cobertura para cada unos de los BECH.

Así mismo, debido a que el período de cubrimiento recomendado, bajo el *swap* y sus dos versiones alternativas, es relativamente largo (cuatro años como mínimo) y dada la alta volatilidad de la tasa de interés real observada hasta el año 2001, no resulta relevante considerar el nivel de tasa actual para la estimación de la tasa de referencia de el mecanismo. Sin embargo, al tener en cuenta las diferentes necesidades de cubrimiento el nivel actual de la tasa de interés cobra importancia.

Estas consideraciones motivan el planteamiento de otra versión del mecanismo, la cual se fundamenta en la oferta, por parte del FRECH, de opciones *cap* europeas de tasa de interés DTF real. El objetivo es promover un mayor grado de flexibilidad y establecer la cobertura de acuerdo a las necesidades de cada BECH. Por esta razón, se constituye como una alternativa superior al del *swap* entre franjas.

Este nuevo esquema permite, adicionalmente, valorar la asimetría generada en la posibilidad de agotamiento de los recursos del fondo <sup>9</sup>, de tal forma que se pueda descontar tal efecto en la valoración del instrumento derivado.

La opción *cap* planteada se define como un umbral para la tasa de interés DTF real, por encima del cual el FRECH le paga a los BECH la diferencia calculada sobre una determinada cuantía o monto notional. El valor de dicho monto se supone hasta de cuatro billones, el cual corresponde a la cartera que efectivamente requiere ser cubierta.

De esta forma, si la DTF real supera el nivel del *cap* an un mes cualquiera durante la vigencia del contrato, el FRECH reconoce la diferencia entre el equivalente

---

<sup>9</sup>Dicha asimetría establece una la cláusula de obligación limitada implícita en el diseño del Fondo, ya que los recursos tienen límite.

mensual de la tasa observada y dicho *cap*, la cual se liquida sobre el monto nominal acordado. Esto es, si la tasa de interés real observada es superior a la tasa de este nuevo mecanismo, se calcula la cobertura como el producto entre el monto nominal contratado y la diferencia multiplicativa entre el equivalente mensual de la tasa observada y el del *cap*.

En síntesis, los *caplets* son mensuales, donde el equivalente mensual de la DTF real anual que cada banco compra corresponde al precio de ejercicio o *strike*. De esta forma, el sistema de *caps*, permite cubrir a los BECH el nominal equivalente a la parte no capitalizada de su riesgo de tasa de interés real sobre el stock de cartera hipotecaria elegible.

### 3. Valoración de los derivados

Como se menciona en la sección 2.1, la operación de cobertura a partir de un *swap* y sus dos versiones alternativas (con subsidio y entre franjas) tiene implícito un proceso de valoración de un bono sintético subyacente. Dicha valoración se basa en la diferencia entre la tasa de interés real y su equivalente de largo plazo, cuyo valor futuro es desconocido. Por lo tanto, para la valoración de este derivado se requiere la estimación de dicho parámetro.

Igualmente, la valoración de un determinado *cap* de tasa de interés real requiere de la simulación de un conjunto de trayectorias futuras que permitan calcular, en promedio, su valor resultante a diferentes plazos. Por lo tanto, al igual que en la valoración del *swap*, es necesaria la estimación de los parámetros de un modelo o proceso generador de datos, a partir del cual se simulan dichas trayectorias.

Dado lo anterior, en esta sección se describe la valoración de los dos derivados que constituyen las alternativas de funcionamiento de la operación de cobertura.

### 3.1. Tasa de interés de referencia de la operación *swap*

La valoración del derivado (*swap*) de tasa de interés real corresponde a la estimación de la tasa de esta operación que iguala los pagos de cada parte y permite establecer el momento y cuantía de dichos pagos.

La ecuación (2.5) define el parámetro de corte de la operación como el promedio aritmético de la tasa de interés real. El promedio histórico respectivo en el período comprendido entre enero de 1984 y abril de 2004 es de 6.11 % (efectivo anual). Sin embargo, establecer la tasa del *swap* a partir de dicho promedio histórico podría no ser conveniente debido, de un lado, al desconocimiento de la dinámica futura de la tasa mensual  $r_t^m$  y de otro lado, a que sus observaciones constituyen una muestra aleatoria (entre muchas posibles) y sus fluctuaciones futuras no coinciden con las históricas en cada momento. Por lo tanto se plantea la necesidad de estimar la tasa del *swap*  $\bar{r}^m$  y con ello el valor promedio de la equivalencia de largo plazo entre  $i_t^m$  y  $\Delta UVR_t^m$ .

El proceso de estimación se fundamenta en la especificación de un modelo en el que se supone que la variación de la tasa de interés real sigue un movimiento browniano con determinada difusión y reversibilidad a la media dado por:

$$dr^m = -\lambda(r - \bar{r}_s^m) dt + \sigma dW \quad (3.1)$$

El parámetro  $\lambda \geq 0$  corresponde a la velocidad de convergencia o reversibilidad a la media,  $r^m(0) = r_0^m$ ,  $t \in [0, \infty)$ ,  $dr$  es el crecimiento de la diferencia entre  $DTF$  y  $\Delta UVR$ ,  $\sigma$  es la volatilidad del crecimiento de  $r^m$ ,  $dW$  un proceso estocástico  $iid \sim N(0, 1)$  y  $\bar{r}_s^m$  el parámetro que representa la tasa de interés real promedio de largo plazo.

Como se indica en el Apéndice C, este modelo constituye una ecuación estocástica diferencial que corresponde a la solución del modelo de equilibrio general dinámico de precios de activos de Cox, Ingersoll y Ross (1985).

Cuadro 1: Parámetros estimados del modelo  $O-U$

Parámetro	Estimador %
$k = -\lambda$	24.5
$\sigma\sqrt{r} = \sigma(r)$	3.1
$\theta = \overline{r_s^m}$	0.523
$\chi^2_{(1)}$	3.65 % signif

Fuente: Cálculos el autor

Para la estimación de los parámetros de (3.1) se utiliza el método de los Momentos Simulados propuesto por Lee e Ingram (1991). La descripción de esta metodología se encuentra en el Apéndice C. El cuadro 1 muestra los resultados de la estimación para la cual se utilizan datos observados de tasa de interés real ( $r_t^m$ ) para el período enero de 1984 - abril de 2004.

Como puede apreciarse, el valor estimado de la tasa de interés real promedio de equilibrio de largo plazo ( $\overline{r_s^m}$ ), a partir del modelo tipo  $O-U$ , es de 0.523 % equivalente a 6.46 % en términos efectivos anuales. El parámetro estimado de reversibilidad a la media es de 24.5 % y la desviación estándar o volatilidad es de 3.1 %. El nivel de significancia marginal de la estadística  $\chi^2_{(1)}$  de significancia marginal indican un buen ajuste.

La tasa del *swap* estimada, tal como se mencionó, corresponde la tasa que permite igualar el valor de los pagos resultantes y establecer el momento y cuantía de dichos pagos. A partir de dicha tasa es posible estimar la nueva tasa del *swap* con subsidio a la cobertura  $\overline{r^{m*}}$ , la cual es menor que  $\overline{r_s^m}$  y permite la distribución de una parte de los ingresos iniciales del FRECH durante el período de operación.

Cuadro 2: Tasas de interés de referencia  $\overline{r^{a*}}$  con subsidio

Porcentaje de Cartera inscrito	Disminución en tasa de referencia	Nueva tasa del <i>swap</i>
100 %	0.26 %	5.96 %
80 %	0.32 %	5.89 %
60 %	0.43 %	5.78 %
50 %	0.52 %	5.70 %
40 %	0.65 %	5.57 %
20 %	1.29 %	4.93 %
10 %	2.56 %	3.66 %

Fuente: Cálculos el autor

### 3.2. Tasa de interés del *swap* con subsidio

Teniendo en cuenta que para cada monto de cartera inscrita resulta una tasa de interés de referencia diferente y dado un valor de los recursos iniciales de \$312.985 millones<sup>10</sup>, con un horizonte  $T$  de 120 períodos<sup>11</sup> y un valor de la cartera hipotecaria de \$12'838.956 billones<sup>12</sup>. En el cuadro 2 se presentan los valores de  $\overline{r^{m*}}$  calculados a partir de (2.6) para cada porcentaje de cartera inscrito en el mecanismo, los cuales están expresados en términos efectivos anuales  $\overline{r^{a*}}$ .

Como puede apreciarse en el cuadro 2, con 100 % de cartera inscrita, la nueva tasa de corte (5,96 %) es menor en más de 0.47 % a la tasa estimada de largo plazo. Adicionalmente se observa que la reducción marginal en la nueva tasa de corte es creciente a medida que el porcentaje de cartera inscrito disminuye, alcanzando un valor máximo de 2,56 % para el caso de 10 % de cartera inscrita. Si se supone que las entidades hipotecarias inscriben 40 % del valor de la cartera hipotecaria a diciembre del 2000 (\$5'135.582 billones aproximadamente), la tasa de corte es 5,57 %

<sup>10</sup>El saldo estimado a febrero de 2003 es de \$362,985 millones aproximadamente.

<sup>11</sup>La determinación de  $\overline{r_s^{m*}}$  con base en un horizonte de  $T = 120$  períodos mantiene la consistencia con el concepto de largo plazo que se considera en este trabajo y permite tener un número de observaciones relativamente aceptable para el cálculo del promedio de la tasa del *swap*.

<sup>12</sup>Valor del saldo de cartera hipotecaria total del sistema financiero a diciembre de 2000, obtenido con base en los Indicadores de la Superintendencia Bancaria de Colombia.



aproximadamente.

### 3.3. Sistema de franjas de tasa de interés real

Para la valoración del *swap* con subsidio definido a partir de un sistema de franjas se tienen en cuenta los siguientes aspectos: i) la franja diferente que resulta para cada acervo de cartera inscrita, ii) el valor de los recursos iniciales, iii) un horizonte  $T$  de 120 períodos para las simulaciones de la tasa de interés real, iv) el valor total de la cartera hipotecaria, v) los valores de  $\overline{r^{m*}}$  presentados en el cuadro 2 y vi) los diferentes escenarios de puntos básicos ( $PBS$ ) adicionados a la tasa del *swap*  $\overline{r^{m*}}$ <sup>13</sup> y que permiten establecer el sistema diferencial de franjas.

En el cuadro 3 se presentan los resultados del sistema de franjas para cada porcentaje de cartera, por medio del cual se obtienen las diferentes valoraciones de la cobertura. Como puede observarse, si las entidades hipotecarias inscriben el 40 % del valor de la cartera, teniendo en cuenta una amplitud de franja de 150 puntos básicos por encima de  $\overline{r^{m*}}$ , el techo adopta un valor de 7.07 %, en tanto que el piso que asegura cero ingresos al final es de 3.67 %. Esto implica que cuando  $r_{s,t}^m > 7,07\%$  se genera un pago del FRECH a los BECH compensando la respectiva diferencia y cuando  $r_{s,t}^m < 3,67\%$  los BECH aportan al FRECH.

El sistema de franjas presenta tres características principales: i) a medida que disminuye el porcentaje de cartera inscrita se observa una reducción del piso y del techo, ii) la amplitud de la franja se incrementa marginalmente cuando se disminuye dicho porcentaje de cartera y iii) la asimetría negativa observada con respecto a  $\overline{r^m}$  y a  $\overline{r^{m*}}$ , es decir, el punto medio de la franja se reduce en la medida en que aumenta la amplitud de la franja. Dicha asimetría es causada por la determinación del piso que distribuye los recursos del FRECH.

La decisión acerca de la amplitud óptima de la franja depende de tres aspectos,

---

<sup>13</sup>los cuales están expresados en términos efectivos anuales, es decir 0 PB, 50 PB, 100 PB, 150 PB, 200 PB, 250 PB, 300 PB y 350 PB

Cuadro 3: Cobertura por medio de un sistema de franjas de tasa de interés real

Cartera (%)	+ 0 P.B			+ 50 P.B			+ 100 P.B		
	Techo (%)	P med (%)	Piso (%)	Techo (%)	P med (%)	Piso (%)	Techo (%)	P med (%)	Piso (%)
100	5.96	5.96	5.96	6.46	5.90	5.35	6.96	5.85	4.75
80	5.89	5.89	5.89	6.39	5.84	5.28	6.89	5.78	4.68
60	5.78	5.78	5.78	6.28	5.73	5.17	6.78	5.67	4.56
50	5.70	5.70	5.70	6.20	5.64	5.08	6.70	5.58	4.46
40	5.57	5.57	5.57	6.07	5.50	4.94	6.57	5.44	4.31
20	4.93	4.93	4.93	5.43	4.84	4.25	5.93	4.74	3.56
10	3.66	3.66	3.66	4.16	3.51	2.86	4.66	3.36	2.06
Cartera (%)	+ 0 P.B			+ 50 P.B			+ 100 P.B		
	Techo (%)	P med (%)	Piso (%)	Techo (%)	P med (%)	Piso (%)	Techo (%)	P med (%)	Piso (%)
100	7.46	5.80	4.15	7.96	5.75	3.54	8.46	5.69	2.93
80	7.39	5.73	4.07	7.89	5.67	3.45	8.39	5.62	2.84
60	7.28	5.61	3.93	7.78	5.55	3.31	8.28	5.49	2.69
50	7.20	5.51	3.83	7.70	5.45	3.20	8.20	5.38	2.57
40	7.07	5.37	3.67	7.57	5.30	3.03	8.07	5.23	2.39
20	6.43	4.65	2.87	6.93	4.55	2.17	7.43	4.44	1.46
10	5.16	3.20	1.24	5.66	3.03	0.41	6.16	2.85	-0.46
Cartera (%)	+ 0 P.B			+ 50 P.B			+ 100 P.B		
	Techo (%)	P med (%)	Piso (%)	Techo (%)	P med (%)	Piso (%)	Techo (%)	P med (%)	Piso (%)
100	8.96	5.64	2.32	9.46	5.58	1.71	9.96	5.53	1.10
80	8.89	5.56	2.23	9.39	5.50	1.61	9.89	5.44	0.99
60	8.78	5.42	2.06	9.28	5.36	1.44	9.78	5.29	0.81
50	8.70	5.32	1.93	9.20	5.25	1.30	9.70	5.18	0.66
40	8.57	5.15	1.74	9.07	5.08	1.09	9.57	5.00	0.44
20	7.93	4.34	0.75	8.43	4.22	0.02	8.93	4.11	-0.71
10	6.66	2.66	-1.33	7.16	2.46	-2.23	7.66	2.25	-3.17

Fuente: Cálculos el autor

fundamentales: i) el interés por incentivar la cobertura teniendo en cuenta que la reglamentación no establece su obligatoriedad. ii) que el FRECH cuente con recursos suficientes para que el mecanismo tenga una duración promedio igual a la del ciclo de la tasa de interés real y iii) el porcentaje de riesgo que se desea cubrir.

### 3.4. Opciones *cap* europeas

Para valorar un determinado *cap* se requiere: 1) Estimar un modelo para la tasa de interés real, tal como el descrito en el Apéndice C y 2) Realizar experimentos de Monte Carlo usando el modelo estimado <sup>14</sup>.

En este proceso se realizan 50,000 estimaciones a partir de las cuales se calcula la mediana de los parámetros. Este procedimiento se repite 50 veces para incorporar

<sup>14</sup>En el presente contexto no es apropiado usar el modelo tradicional de Black y Scholes, debido a que éste supone constantes tanto la tasa de interés real como la volatilidad. Este es un supuesto fuerte teniendo en cuenta que los contratos de las opciones que se consideran en este trabajo contemplan periodos largos de tiempo en los que se esperan variaciones significativas de ambas medidas.

el efecto de diferentes semillas del generador de los choques aleatorios y simular diferentes momentos del tiempo.

Con los resultados de este procedimiento se valoran los diferentes *caps* de la siguiente forma: i) se obtienen los histogramas de frecuencia absoluta de las diferentes valoraciones a distintos plazos, y se eligen los que exhiben, en primer lugar, mayor concentración alrededor de una determinada frecuencia y en segundo lugar los que sugieran una distribución unimodal. ii) se toma el intervalo en el que se encuentra el mayor número de observaciones y de éste se toma el punto medio como valor del *cap* al plazo correspondiente.

En dichos experimentos de Monte Carlo se simulan trayectorias del mecanismo de cobertura que permitan su valoración a diferentes plazos<sup>15</sup>. Dicha valoración se construye a partir de cálculos en valor presente del monto promedio de cobertura que se hubiere generado en los escenarios planteados (equivalentes al número de repeticiones del Monte Carlo). Para tal efecto, se toma como punto de partida de cada simulación la tasa de interés real corriente, lo cual implica que en cada momento del tiempo el valor de un nuevo *cap* varía frente a los anteriormente ofrecidos<sup>16</sup>

## 4. Conclusiones.

La falla de mercado consistente en la inexistencia de un mercado de bonos de largo plazo denominados en DTF, unido a la indexación del crédito hipotecario, genera una exposición al riesgo de variaciones de la DTF real para los BECH, de cara a su esquema tradicional de fondeo de hipotecas basado en depósitos. Este problema sugiere la intervención del gobierno mediante la creación de un fondo con recursos gubernamentales, que ofrezca cobertura contra el riesgo referido durante el

---

<sup>15</sup>Los plazos considerados son de 24, 36 y 48 meses. Teniendo en cuenta que la duración promedio de la cartera del sistema no supera los 4 años, la cobertura de un plazo mayor carece de sentido. De otro lado, la cobertura de plazos inferiores a 24 meses se puede conseguir en el mercado OTC.

<sup>16</sup>Para efectos de la valoración de los *caps* no se tendrá en cuenta la prima administrativa que se cobra usualmente en este tipo de derivados.

proceso de transición de los BECH, de transformadores de plazos a asignadores de riesgo a través del mercado de capitales. Paralelamente, la cobertura ofrecida por el fondo aporta a la solución de mercado de la falla en mención, ya que crea un referente de precio para emisiones futuras de papeles de largo plazo referidos a la DTF.

En este documento se presenta el diseño de dos alternativas de funcionamiento de dicho fondo o mecanismo de cobertura contra el riesgo de tasa de interés real de los BECH. Dichas alternativas corresponden a un *swap* y un menú de *caps* europeos.

Para garantizar la neutralidad *ex ante* bajo la alternativa del *swap* se recomienda que su duración sea igual a un múltiplo entero de la duración del ciclo de la tasa de interés real (cuatro años), estimada con base en técnicas de análisis espectral.

La tasa *swap* se determina y estima a partir del equivalente de largo plazo de la DTF real. Esta tasa permite definir el valor y momento en el que se hacen los pagos de las partes, donde las "patas" del *swap* corresponden a los flujos de un bono denominado en DTF real, por un lado, y por otro, los flujos de un bono en DTF real fija, equivalente al valor de largo plazo o de "estado estacionario" de la DTF.

Teniendo en cuenta que la regulación Colombiana actual tolera la existencia de riesgo de tasa de interés real no cubierto en los estados financieros de los BECH, el fondeo de la cartera hipotecaria basado en depósitos resulta barato y el mecanismo de transformación de plazos sigue siendo atractivo para estos intermediarios. En estas circunstancias, la cobertura definida a partir del *swap* podría no ser de suficiente interés para los BECH. Por esta razón se considera un mecanismo de funcionamiento con una tasa de referencia menor que la anterior ( $\overline{r^{m*}}$ ), de tal forma que permita cubrir a los BECH el nocional equivalente a la parte no capitalizada de su riesgo de tasa de interés real sobre el stock de cartera hipotecaria elegible. Esta nueva tasa permite la distribución de una parte de los recursos asignados al FRECH entre las entidades, es decir una tasa *swap* subsidiada, la cual resulta en función del porcentaje de cartera inscrito, generando un sistema de bandas o *collar swap*.

Debido a la heterogeneidad actual que presentan los BECH en términos de sus estados financieros en comparación con aquellos de la época de expedición de la Ley 546, se propone otra alternativa de cobertura basada en la oferta temporal de Opciones *cap* europeas para la tasa de interés DTF, por parte del Gobierno. Este mecanismo resulta más acorde a las necesidades de cobertura de cada BECH y permite valorar la cláusula de obligación limitada implícita en los contratos de cobertura ofrecidos por el FRECH, dada la limitación de sus recursos. El sistema de *caps* se define como un umbral para la tasa de interés DTF real por encima del cual el mecanismo le paga a los BECH la diferencia calculada sobre un determinado monto nominal.

## Apéndice A: Estimación del ciclo de la tasa de interés real

La estimación del ciclo de la tasa de interés real se obtiene mediante técnicas de análisis espectral para lo cual se sigue la metodología presentada por Chatfield (1989). Los resultados que se presentan sirven de base para fijar el período de duración del contrato de cobertura *swap*.

La definición de  $r_t^a$  en el dominio temporal está dada por la ecuación (2.2). En el dominio espectral, siguiendo a Hamilton (1994), es posible describir el valor que adopta  $r^a$  en determinado momento  $t$  a partir de:

$$r_t^a = \sum_{j=1}^k R_j \cdot \cos(\omega_j t + \theta_j) + \varepsilon_t \quad (\text{A-1})$$

Donde,  $\omega_j$  es la  $j$ -ésima frecuencia de la variación sinusoidal,  $R_j$  es la amplitud de dicha variabilidad a la frecuencia  $\omega_j$ ,  $\theta_j$  es la respectiva fase y  $\varepsilon_t$  denota el valor de una variable aleatoria estacionaria. El ángulo  $(\omega_j t + \theta_j)$  se mide en radianes por tanto  $\omega_j$  constituye la frecuencia angular, definida como  $f = \omega_j/2\pi$  la cual indica el número de ciclos por cada  $2\pi$  unidades de tiempo y cuya inversa ( $1/f = 2\pi/\omega_j$ ) equivale al período de un ciclo sinusoidal o longitud de onda.

Debido al desconocimiento de  $\omega$ ,  $R$  y  $\theta$ , para estimar sus valores es conveniente reexpresar dicha ecuación  $r_t^a$  a partir de una representación finita de series de Fourier<sup>17</sup> así:

$$r_t^a = a_0 + \sum_{j=1}^{(T/2)-1} [a_j \cos(2\pi jt/T) + b_j \sin(2\pi jt/T)] + a_{T/2} \cos(\pi t) \quad (\text{A-2})$$

---

<sup>17</sup>Chatfield (1989) presenta un resumen sobre aspectos relacionados con representaciones finitas de Fourier.

$$\begin{aligned}
a_0 &= \overline{r^a} \\
a_{T/2} &= \sum_{t=1}^T (-1)^t r_t^a / T \\
\left. \begin{aligned}
a_j &= \frac{\left[ 2 \sum_{t=1}^T r_t^a \cos(2\pi jt/T) \right]}{T} \\
b_j &= \frac{\left[ 2 \sum_{t=1}^T r_t^a \sin(2\pi jt/T) \right]}{T}
\end{aligned} \right\} j = 1, 2, \dots, (T/2) - 1
\end{aligned} \tag{A-3}$$

A partir del algoritmo "Transformada Rápida de Fourier"<sup>18</sup> (FFT), se obtienen los valores de los parámetros de la ecuación (A-3). Por medio de ésta ecuación se obtiene el estimador del periodograma, es decir la gráfica de  $(I(\omega_j))$  respecto a  $\omega_j$ , donde,

$$I(\omega_j) = \frac{TR_j^2}{4\pi} \tag{A-4}$$

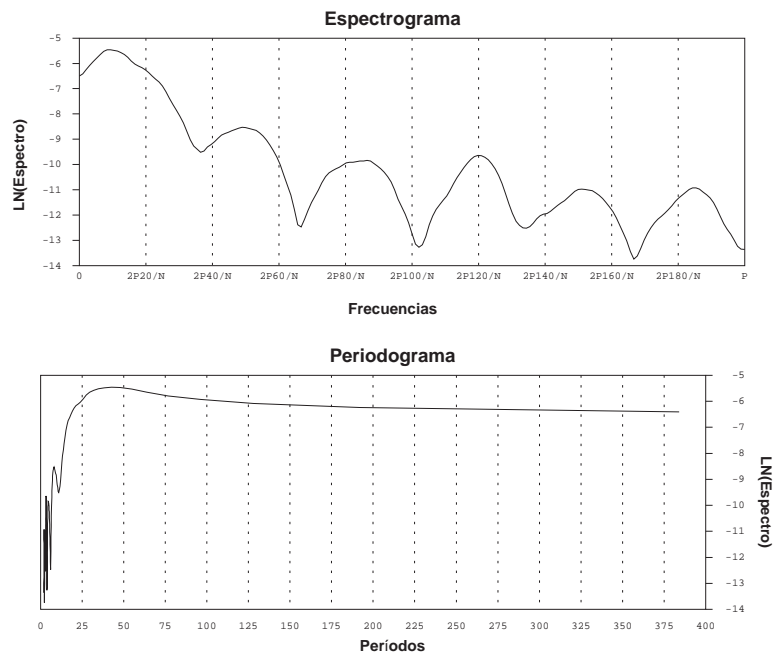
$R_j^2/2$  corresponde a la contribución de la  $j$ -ésima armónica a la varianza de  $r_t^a$ . Los resultados se presentan en la figura 2. El espectrograma o gráfica del espectro de  $r_t^{a*}$  descrito por la ecuación (A-4) se construye con base en las frecuencias obtenidas a partir de  $\omega_j = 2\pi j/N$ , con  $j = 1, 2, \dots, (N/2) - 1$ , utilizando datos mensuales entre enero de 1984 y abril de 2004. El periodograma o gráfica del espectro de  $r_t^{a*}$  se obtiene con base en los períodos calculados a partir de  $N/j = 2\pi/\omega_j$ . Los resultados<sup>19</sup> de la aplicación de la metodología descrita se presentan en la figura 2.

El primer pico observado en el espectrograma se presenta a una frecuencia de  $[(2\pi 8)/384] = 0,1309$ , lo que indica que el número de ciclos observados cada  $2\pi = 6,2831853$  meses en  $(r_t^{a*})$  es de 0,1309, por lo tanto se requieren 48 meses para observar un ciclo completo. Así, la principal contribución a la varianza de  $r_t^{a*}$  está dada por variaciones en su componente cíclico de periodicidad  $[2\pi/(0,1309)] = 48$

<sup>18</sup>para una breve descripción de este algoritmo, véase Chatfield (1989).

<sup>19</sup>Las estimaciones fueron realizadas mediante el uso del *Software RATS* versión 5.02 utilizando el algoritmo FFT de Transformada Rápida de Fourier con datos de tasa de interés real efectiva anual entre enero de 1984 y agosto de 2002.

Figura 2: Tasa de interés real efectiva anual diferenciada estacionalmente



Fuente: Cálculos el autor

meses<sup>20</sup>. Esta afirmación se confirma al observar el periodograma de  $r_t^{a*}$ . En éste, el punto más alto de  $I(\omega_j)$  se observa en el período 48, es decir la longitud de tiempo que toma  $r_t^{a*}$  para completar un ciclo.

Según el resultado anterior, la operación de cobertura estaría libre de asimetrías derivadas del comportamiento cíclico de la tasa de interés real si tiene una duración igual a un múltiplo entero de 48 meses, por ejemplo 4 u 8 años. De lo contrario se genera un sesgo cuya magnitud depende de la fase del ciclo en que se inicie la operación.

Es de anotar que una variación en el régimen inflacionario puede generar algún cambio en la tasa de interés real de largo plazo<sup>21</sup>. La literatura sugiere diversos

<sup>20</sup>Los picos restantes corresponden a períodos de 8, 5, 3 y 2 meses aproximadamente y están asociados a patrones estacionales y efectos calendario.

<sup>21</sup>Espinosa, Vega y Russell(1998) y Tanzi (1984) analizan el impacto de cambios en la inflación sobre la tasa de interés real.



tipos de efectos. Por una parte se puede prever que la tasa de interés real aumente al caer la inflación. Esto ocurre si se presenta un efecto tipo Tobin, en el cual los recursos se transfieran hacia la tenencia de saldos monetarios en vez de capital. En estas condiciones se aumenta la productividad marginal del capital y con ello la tasa de interés real. Alternativamente, la caída en la inflación puede incrementar la eficiencia marginal del capital, y dado un *stock* de capital constante, puede propiciar una reducción en su productividad marginal. Este hecho genera una caída en la tasa de interés real. Determinar cual es el efecto predominante se convierte en un problema empírico.

Dado lo anterior, determinar la dirección y la magnitud del cambio en la tasa de interés real por efecto de variaciones en el régimen inflacionario no es sencillo. En este sentido, si se define la operación de cobertura a partir de un mecanismo *swap*, uno o varios cambios repentinos de la tasa de interés real pueden afectar la determinación de la tasa promedio de largo plazo y esto tendría efectos sobre la valoración del derivado. Para evitar dichos efectos y las asimetrías resultantes de una duración del FRECH inferior a la del ciclo de la tasa de interés real, es aconsejable que la cobertura se ofrezca como mínimo por un período de cuatro años.

## Apéndice B: Determinación de la tasa de interés de referencia del *swap*

La ecuación (2.4) permite definir la magnitud de los pagos ( $p_t$ ) del FRECH a los BECH y viceversa, en cada momento del tiempo, de la siguiente forma:

$$p_t = \delta C \times \left\{ \left[ \frac{1 + r_t^m}{(1 + \Delta UVR_t^m)} \right] - 1 \right\} \quad (\text{B-1})$$

$\delta$  es el porcentaje de cartera inscrita y  $C$  es el valor de cartera hipotecaria bruta a diciembre de 2000 establecido por la Ley 546. Cuando  $p_t$  es positivo, se refiere a pagos del FRECH; en caso de ser negativo se refiere a pagos de los BECH. La definición de los pagos, ecuación (B-1), es equivalente al producto del monto de cartera asegurado y la diferencia multiplicativa entre  $r_{m_t}$  y su equivalente de largo plazo  $\overline{r^m}$ , es decir:

$$p_t = \delta C \times \left[ \left( \frac{1 + r_t^m}{1 + \overline{r^m}} \right) - 1 \right] \quad (\text{B-2})$$

Donde,  $r_t^m$  representa la  $t$ -ésima observación de la diferencia multiplicativa entre la tasa de interés DTF nominal, efectiva mensual ( $i_t^m$ ) y el crecimiento mensual de la UVR ( $\Delta UVR_t^m$ ). Dada la ecuación (B-2), el objetivo es determinar  $\overline{r^m}$  tal que el valor esperado de los los ingresos al final de la operación de cobertura ( $E[I_T]$ ) sean iguales a los recursos iniciales ( $I_0$ ) otorgados por la Ley. Con el fin de simplificar el problema, si se supone que el FRECH no tiene ingresos derivados de la inversión de sus recursos y que el factor de descuento para obtener el valor presente del nivel esperado de ingresos finales es igual a 1, los ingresos en cada momento del tiempo se pueden definir a partir de:

$$I_t = I_{t-1} - p_t, \forall I_t > 0. \quad (\text{B-3})$$

Nótese que si  $I_t = 0$  la cláusula de obligación limitada incluida en el contrato de

cobertura que ofrece el FRECH, implica que el fondo se termina y es liquidado.

Aplicando sustitución recursiva en la ecuación (B-3) es posible obtener la siguiente expresión para los ingresos finales:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= I_0 - p_1 & (B-4) \\
 I_2 &= (I_0 - p_1) - p_2 \\
 I_3 &= [(I_0 - p_1) - p_2] - p_3 \\
 &\vdots \\
 I_T &= I_0 - \sum_{t=1}^T p_t
 \end{aligned}$$

Sustituyendo en (B-4) la definición de los pagos descrita por (B-2) se tiene que

$$I_T = I_0 - \sum_{t=1}^T \delta C \left[ \left( \frac{1 + r_t^m}{1 + \overline{r^m}} \right) - 1 \right] \quad (B-5)$$

Para que  $I_T = I_0$  en (B-5) se requiere que:

$$\sum_{t=1}^T \delta C \left[ \left( \frac{1 + r_t^m}{1 + \overline{r^m}} \right) - 1 \right] = 0 \quad (B-6)$$

Resolviendo (B-6) para  $\overline{r^m}$  se tiene que

$$\frac{1}{1 + \overline{r^m}} \sum_{t=1}^T (1 + r_t^m) - T = 0$$

de la expresión anterior resulta que:

$$\overline{r^m} = \sum_{t=1}^T \frac{E[r_t^m]}{T} \quad (B-7)$$

## Apéndice C

### Modelo tipo Ornstein-Uhlenbeck (*O-U*).

El punto de partida para la estimación de la tasa del *swap* es suponer que la tasa de interés real, definida por medio de la ecuación (3.1), sigue un proceso de difusión estacionario:

$$dr^m = -\lambda(r - \bar{r}_s^m) dt + \sigma\sqrt{r}dW \quad (\text{C-1})$$

La ecuación estocástica diferencial (C-1), que corresponde a la versión continua de un proceso estacionario AR(1) Gaussiano <sup>22</sup>, describe el crecimiento de la tasa de interés real como un proceso estocástico estacionario de media cero. Esta ecuación es la misma ecuación 17 del modelo de equilibrio general intertemporal de precios de activos de Cox, Ingersoll y Ross (1985), a partir de la cual se describe la dinámica de la tasa de interés real como un proceso de difusión con drift  $-\lambda(r - \bar{r}_s^m)$  y varianza  $\sigma^2$ .

El modelo de Cox, Ingersoll y Ross (1985) constituye una descripción intertemporal (en tiempo continuo) de una economía competitiva. Las características principales que gobiernan la determinación de la tasa de interés real de equilibrio son: i) se dispone de un único bien y todos los valores están medidos en unidades de dicho bien. ii) se tiene un conjunto de oportunidades de producción compuesto por  $n$  actividades lineales, un vector  $\alpha$  de tasas de retorno esperadas sobre estas actividades con matriz de varianza-covarianza  $GG'$ , los componentes de  $\alpha$  y  $G$  son funciones de un vector  $Y$  ( $k \times 1$ ) representa el estado de la tecnología que cambia aleatoriamente en el tiempo con vector de cambios esperados  $\mu$  y matriz de varianza-covarianza  $SS'$  y iii) Se supone que la economía se compone de individuos idénticos, cada uno de

---

<sup>22</sup>Campbell, Lo y McKinlay (1997) señalan que un proceso estocástico con estas características se denomina Ornstein-Uhlenbeck y a su vez corresponde a una categoría de modelos tipo movimiento Browniano. Otra ilustración acerca de los modelos de Movimiento Browniano tipo Ornstein-Uhlenbeck se encuentra en Avinash Dixit (1983).

los cuales busca maximizar una función objetivo de consumo de la forma

$$E \int_t^{t'} U(C(s), Y(s), s) ds \quad (\text{C-2})$$

Donde,  $C(s)$  es el flujo de consumo en el momento  $s$  y  $U$  un función de utilidad tipo Von Neuman-Morgenstern y  $t'$  el tiempo terminal. Se define  $C^*$  como el consumo óptimo de cada individuo,  $a^*$  la proporción de la riqueza  $W$  a ser invertida en cada proceso productivo y  $b^*$  la tasa de riqueza invertida en cada pasivo contingente, la restante es invertida en préstamos o deudas a una tasa de interés  $r$ . Se sigue una especificación de la función de utilidad con aversión al riesgo relativa constante

$$U(C(s), s) = e^{-\rho s} \left[ \frac{C(s)^\gamma - 1}{\gamma} \right] \quad (\text{C-3})$$

con  $\rho$  un factor de descuento constante, la función de utilidad indirecta  $J$  determinada por la solución al problema de maximización es de la forma

$$J(W, Y, t) = f(Y, t) U(W, t) + g(Y, t) \quad (\text{C-4})$$

que permite tener una expresión para  $a^*$  tal como:

$$a^* = (GG')^{-1} \alpha + \left( \frac{1 - 1'(GG')^{-1} \alpha}{1'(GG')^{-1} 1} \right) (GG')^{-1} 1 \quad (\text{C-5})$$

con  $1'(GG')^{-1} \alpha > 1$ . Se supone que el desarrollo de la variable de estado  $Y$  es determinado por la ecuación estocástica diferencial

$$dY(t) = [\xi Y + \zeta] dt + v\sqrt{Y} dw(t) \quad (\text{C-6})$$

Donde,  $\xi$  y  $\zeta$  son constantes,  $\zeta \geq 0$  y  $v$  es un vector en el que cada una de sus componentes es la constante  $v$ . Una vez especificadas las ecuaciones (C-1) a la (C-

6), los autores incorporan la siguiente notación:  $\alpha \equiv \hat{\alpha}Y, GG' \equiv \Omega Y$  y  $GS' \equiv \Sigma Y$ , los elementos de  $\hat{\alpha}$ ,  $\Omega$  y  $\Sigma$  son constantes. Con los supuestos anteriores, la tasa de interés real de equilibrio se puede expresar como

$$r(Y) = \left( \frac{1'\Omega^{-1}\hat{\alpha} - 1}{1'\Omega^{-1}1} \right) Y \quad (\text{C-7})$$

En la ecuación (C-7) se supone que la tasa de interés sigue un proceso de difusión con un drift dado por

$$\begin{aligned} \text{drift}(r) &= \left( \frac{1'\Omega^{-1}\hat{\alpha} - 1}{1'\Omega^{-1}1} \right) (\xi Y + \zeta) \equiv \kappa(\theta - r), \\ \text{var}(r) &= \left( \frac{1'\Omega^{-1}\hat{\alpha} - 1}{1'\Omega^{-1}1} \right)^2 v v' Y \equiv \sigma^2 r \end{aligned} \quad (\text{C-8})$$

En la ecuación anterior,  $\kappa$ ,  $\theta$  y  $\sigma^2$  son constantes con  $\kappa\theta \geq 0$  y  $\sigma^2 > 0$ .

Según los autores, debido a que cada componente de  $w(t)$  es un proceso de Wiener entonces es posible especificar el siguiente proceso:

$$\sigma\sqrt{r}dz_1(t) \equiv v\sqrt{Y}dw(t) \quad (\text{C-9})$$

A partir de (C-9) se define la dinámica de la tasa de interés real como

$$dr = \kappa(\theta - r)dt + \sigma\sqrt{r}dz_1 \quad (\text{C-10})$$

Para  $\kappa$  y  $\theta > 0$  la ecuación (C-10) corresponde a un proceso autorregresivo continuo de primer orden y es equivalente a la ecuación (C-1) donde  $r^m = r$ ,  $-\lambda = \kappa$ ,  $\bar{r}_s^m = \theta$  y  $\sigma(r)dw = \sigma\sqrt{r}dz_1$ .

Así, el modelo *O-U* definido por (C-1) corresponde a una especificación de tasa de interés real de equilibrio reversible a la media cuyo comportamiento presenta las siguientes características: i) si la tasa llega a adoptar el valor de cero luego puede

ser positiva, ii) la varianza absoluta de la tasa de interés aumenta cuando la tasa se incrementa y iii) existe una distribución de estado estable para la tasa de interés.

## Estimación del modelo *O-U* por medio de método de Momentos Simulados

La tasa de interés definida a partir de una ecuación estocástica diferencial tal como C-10 presenta, según Ramamurty y Ulman (1996), dificultades tales como el incumplimiento a la condición de no negatividad de la variable dependiente. Para evitar este problema, los autores centran su atención en modelos denominados *Mean-Reverting Square Root (MRSR)* y *Mean-Reverting Logarithmic (MRSL)*. Adicionalmente señalan que, de un lado, este modelo no describe completamente un (*MRSR*) debido a que la misma ecuación estocástica diferencial (*SDE*) genera dos o más funciones de densidad transicional con propiedades radicalmente diferentes y, de otro lado, un par de funciones de *drift* y *difusión* de una (*SDE*) no definen una única densidad transicional debido a que los parámetros infinitesimales asociados fallan en la determinación del comportamiento de la tasa de interés cuando es cercana a cero.

Teniendo en cuenta las dificultades señaladas, para llevar a cabo la estimación de los parámetros de (C-10) se utiliza el método de los Momentos Simulados propuesto por Lee e Ingram (1991). Este método corresponde a un caso particular de la metodología GMM propuesta por Hansen (1982) y tiene excelentes propiedades en modelos (*SDE*) en los que no se tiene una expresión de forma cerrada para las variables endógenas<sup>23</sup>.

El método de los momentos simulados consiste en encontrar los parámetros que garantizan la mayor similitud entre la contraparte de los momentos muestrales de la serie observada  $(x_t)$  y de los momentos de la serie simulada  $(y_j)_j$ . Con tal objetivo

---

<sup>23</sup>Sørensen (2002) presenta un resumen y descripción de los métodos de estimación más empleados para éste tipo de modelos.

se define un vector  $(s \times 1)$  de estadísticas o momentos calculados como un promedio temporal de una función de los datos observados  $H_T(x) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T h(x_t)$  y un vector  $(s \times 1)$  de estadísticas calculadas utilizando datos simulados a partir del modelo económico  $H_N(y_j(\beta)) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N h(y_j(\beta))$ , donde  $\beta$  es el vector de parámetros que caracterizan a (C-10)  $(\kappa, \theta$  y  $\sigma)$ . Se supone ergodicidad en los procesos  $x_t$  y  $y_j(\beta)$  permitiendo definir un estimador consistente y asintóticamente normal  $\widehat{\beta}_{TN}$  tal que minimice la suma ponderada de la diferencia cuadrática entre  $H_T(x)$  y  $H_N(y_j(\beta))$ . Así, dada una matriz  $(s \times s)$  simétrica aleatoria de ponderaciones  $W_T$ , el estimador  $\widehat{\beta}_{TN}$  se define a partir de

$$\underset{\beta}{\operatorname{argmin}} [H_T(x) - H_N(y_j(\beta))]' W_T [H_T(x) - H_N(y_j(\beta))] \quad (\text{C-11})$$

Adicionalmente, se definen el entero  $n = N/T > 1$  y las funciones  $g_T(\beta) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T f_t(\beta) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left[ h(x_t) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n h(y_{k,t}(\beta)) \right]$  con  $k = 1, \dots, n$  y  $t = 1, \dots, T$ . A partir de estas funciones quedan indexadas las simulaciones de tal forma que  $y_{k,t}(\beta) = y_{n(t-1)+k}(\beta)$ . Bajo el supuesto de que  $n > 1$  se requiere que el tamaño de muestra de la serie simulada sea mayor que el de la serie observada. Los autores señalan que el valor de la matriz de varianza-covarianza asintótica de  $\widehat{\beta}_{TN}$  depende de la elección de la matriz de ponderaciones  $W$  y para obtener un estimador cuya matriz de varianza-covarianza sea lo más pequeña posible recomiendan una elección de  $W = [(1 + 1/n)\Omega]^{-1}$  para lo cual definen un estimador consistente de  $\Omega$  dado por:

$$\widehat{\Omega} = \left[ \sum_{i=-p+1}^{p-1} \frac{1}{T} \sum_{t=1+|i|}^T u_{t+p} u'_{t+p-i} \right] \quad (\text{C-12})$$

Donde  $u_{t-p} = h(x_{t+p}) - (1/T) \sum_{t=1}^T h(x_{t+p})$  y  $p$  es el número de autocovarianzas distintas de cero en  $h(x_t)$ .

Previo a la estimación de los parámetros del modelo  $O-U$  y a la estimación del ciclo de la tasa de interés real, se llevó a cabo un análisis de sus propiedades



estadísticas, principalmente de estacionariedad. Los resultados de la prueba aumentada de raíz unitaria de Dickey-Fuller (1976)<sup>24</sup> permiten concluir el carácter  $I(0)$  de  $r_t^m$ . La prueba de estacionariedad KPSS (1992)<sup>25</sup> permite concluir el carácter estacionario  $r_t^m$ . Por lo tanto la serie no requiere la aplicación del operador de primeras diferencias<sup>26</sup>

---

<sup>24</sup>El estadístico de prueba correspondiente al modelo con intercepto arroja un valor de -3.7822 y el valor crítico correspondiente a un nivel de significancia de 0.05 es de -2.9475. Véase Fuller (1976) y MacKinnon (1991).

<sup>25</sup>Para probar la hipótesis de que  $r_t^m$  es estacionaria se lleva a cabo el contraste bajo el modelo que no incluye tendencia lineal. A partir de este modelo se obtiene un valor de la estadística de prueba  $\eta_\mu$  de 0.23457 (con una selección del parámetro de truncamiento de  $l(8)$ ) y un valor crítico tabulado al 5 de 0.463. Lo cual implica no rechazar la hipótesis nula de estacionariedad.

<sup>26</sup>Sin embargo, teniendo en cuenta la dinámica estacional observada en la serie (Figura 1) se lleva a cabo la prueba de raíz unitaria estacional de Franses y Hobijin (1997), para datos mensuales bajo una especificación con dummies estacionales. El resultado indica un rechazo de la hipótesis nula  $H_0 : r_t^m$  es  $I(1, 1)$  a frecuencias regular y estacional a un nivel de significancia de 1%.

## Apéndice D

### Determinación de la tasa de referencia efectiva mensual del *swap* con subsidio ( $\overline{r^{m*}}$ ).

La deducción de la nueva tasa del *swap*  $\overline{r^{m*}}$  se fundamenta en el valor estimado de  $\overline{r_s^m}$ <sup>27</sup>. Se utiliza un horizonte de  $T = 120$  meses para las simulaciones<sup>28</sup>. Si se obtiene  $\overline{r^{m*}}$  que permita la distribución de los recursos iniciales del FRECH durante los  $T = 120$  meses, un mecanismo de cobertura definido con base en dicha tasa y una duración, por ejemplo, de 96 meses (2 veces la del ciclo de  $r_t^{a*}$ ), resulta simétrico (respecto al número de períodos de pagos que afronta cada parte) y permite igualmente que se distribuya la mayor parte de dichos recursos entre los BECH.

El objetivo consiste en encontrar  $\overline{r^{m*}}$  sujeta a que  $I_T = 0$ , dados los ingresos iniciales ( $I_0$ ), la trayectoria de  $r_{s,t}^m$  y las definiciones presentadas en las ecuaciones (B-2) a la (B-5) del Apéndice B.

Retomando la ecuación (B-5) y sustituyendo  $\overline{r^m}$  por  $\overline{r^{m*}}$  y  $E[r_t^m]$  por  $r_{s,t}^m$  se tiene:

$$I_T = I_0 - \sum_{t=1}^T \delta C \left[ \left( \frac{1 + r_{s,t}^m}{1 + \overline{r^{m*}}} \right) - 1 \right] \quad (D-1)$$

garantizar que  $I_T = 0$  en (D-1) equivale a plantear que

$$\sum_{t=1}^T \delta C \left[ \left( \frac{1 + r_{s,t}^m}{1 + \overline{r^{m*}}} \right) - 1 \right] = I_0 \quad (D-2)$$

<sup>27</sup>Teniendo en cuenta que  $\overline{r_s^m}$  es la tasa promedio real de largo plazo por estimar

<sup>28</sup>La determinación de  $\overline{r_s^{m*}}$  con base en un horizonte de  $T = 120$  períodos mantiene la consistencia con el concepto de largo plazo que se considera en este trabajo y además evita incurrir en sesgos de selección de muestra al tener que eliminar observaciones de la serie simulada  $r_{s,t}^m$  para asegurar una duración del mecanismo igual a un múltiplo entero del ciclo de la tasa de interés real tal como 48 meses.

Resolviendo (D-2) para  $\overline{r^{m*}}$  se tiene que

$$\frac{1}{1 + \overline{r^{m*}}} \delta C \left[ \sum_{t=1}^T (1 + r_{s,t}^m) \right] - T \delta C I_0 \quad (D-3)$$

o equivalentemente

$$\overline{r^{m*}} = \frac{\delta C \left( \sum_{t=1}^T r_{s,t}^m \right) - I_0}{T \delta C + I_0} \quad (D-4)$$

## Determinación del sistema de franjas de tasa de interés real

$\overline{r^{m*}}$

El mecanismo de cobertura, definido a partir de un régimen de franjas de tasa de interés establece un sistema de pagos de la siguiente forma:

$$p_t = \begin{cases} \delta C * \left[ \frac{1+r_{s,t}^m}{1+\overline{T}} - 1 \right], & \text{si } r_{s,t}^m > \overline{T} \\ \delta C * \left[ \frac{1+r_{s,t}^m}{1+\overline{P}} - 1 \right], & \text{si } r_{s,t}^m < \overline{P} \\ 0, & e.o.c \end{cases} \quad (D-5)$$

El valor del pago en (D-5) es cero cuando  $\overline{P} \leq r_{s,t}^m \leq \overline{T}$ , es decir, cuando en dicho intervalo se cumple que  $r_{s,t}^m \leq \overline{T}$  y  $r_{s,t}^m \geq \overline{P}$ . De esta forma es posible re expresar (D-5) mediante:

$$p_t = \begin{cases} \delta C * \left[ \frac{1+r_{s,t}^{m,p}}{1+\overline{T}} - 1 \right], & \text{si } r_{s,t}^m > \overline{T} \\ \delta C * \left[ \frac{1+r_{s,t}^{m,a}}{1+\overline{P}} - 1 \right], & \text{si } r_{s,t}^m < \overline{P} \end{cases} \quad (D-6)$$

dónde:

$$r_{s,t}^{m,p} = \begin{cases} r_{s,t}^m, & \text{si } r_{s,t}^m > \overline{T} \\ \overline{T}, & \text{si } r_{s,t}^m \leq \overline{T} \end{cases} \quad (D-7)$$

$$r_{s,t}^{m,a} = \begin{cases} r_{s,t}^m, & \text{si } r_{s,t}^m < \overline{P} \\ \overline{P}, & \text{si } r_{s,t}^m \geq \overline{P} \end{cases} \quad (D-8)$$

Ahora, retomando la ecuación (B-5) y sustituyendo en ésta la definición de  $P_t$  dada en (D-5), se tiene que los ingresos finales del mecanismo de cobertura para el sistema de franjas se pueden calcular de la siguiente forma:

$$I_T = I_0 - \sum_{t=1}^T \delta C \left[ \left( \frac{1 + r_{s,t}^{m,p}}{1 + \bar{T}} \right) - 1 \right] - \sum_{t=1}^T \delta C \left[ \left( \frac{1 + r_{s,t}^{m,a}}{1 + \bar{P}} \right) - 1 \right] \quad (D-9)$$

El objetivo ahora consiste en determinar un piso ( $\bar{P}$ ) tal que los ingresos finales del mecanismo  $I_T$  sean cero. Sustituyendo en (D-9)  $I_T$  por cero y resolviendo para  $\bar{P}$  se tiene:

$$\bar{P} = \left\{ \left[ 2T + \frac{I_0}{\delta C} - \frac{\sum_{t=1}^T (1 + r_{s,t}^{m,p})}{1 + \bar{T}} \right]^{-1} \times \sum_{t=1}^T (1 + r_{s,t}^{m,a}) \right\} - 1 \quad (D-10)$$

Si se fija el techo de la franja de manera exógena, adicionando unos puntos básicos a la tasa del *swap* no neutral  $\bar{r}^{m*}$ , el techo de la franja sería:

$$\bar{T} = \bar{r}^{m*} + PBS \quad (D-11)$$

Sustituyendo el valor de  $\bar{T}$  obtenido a partir de (D-11) en (D-7) es posible calcular  $r_{s,t}^{m,p}$ . Para determinar los valores de  $r_{s,t}^{m,a}$  según la ecuación (D-8) es necesario conocer  $\bar{P}$ , lo cual plantea un problema de simultaneidad entre  $\bar{P}$  y  $r_{s,t}^{m,a}$  en (D-10). Sin embargo, es posible determinar el valor de  $\bar{P}$  por medio de un proceso de aproximación mediante el siguiente algoritmo.

En la primera iteración se determina de manera exógena un piso provisional a partir de:

$$\bar{P} = \bar{r}^{m*} - PBS \quad (D-12)$$

Del valor resultante de  $\bar{P}$  en (D-12) se obtiene un valor provisional de  $r_{s,t}^{m,a}$  por medio de (D-8) y un valor provisional de  $I_T$  por medio de (D-9), tal que si éste es mayor

que cero, a partir del valor provisional de  $r_{s,t}^{m,a}$ , se calcula de nuevo el valor de  $\bar{P}$  por medio de la ecuación (D-10). En la segunda iteración, con el nuevo valor  $\bar{P}$  se determina un nuevo valor de  $r_{s,t}^{m,a}$ , a partir del cual se obtiene un nuevo valor de  $I_T$ , tal que si es mayor que cero, a partir del valor provisional de  $r_{s,t}^{m,a}$ , se calcula de nuevo el valor de  $\bar{P}$ . Este proceso iterativo se repite hasta obtener un valor de convergencia de  $I_T$  tan cercano a cero como se quiera.

Finalmente, en la determinación y estimación de las tasas de interés de referencia,  $\bar{r}^m$  y con subsidio  $\bar{r}^{m*}$ , así como en la determinación del sistema de franjas se supone que la liquidación de los pagos a los BECH y de los aportes de éstos al FRECH se lleva a cabo mensualmente. Esto debido a que cada mes las entidades afrontan flujos de caja derivados del riesgo de tasa de interés.

Sin embargo, la liquidación mensual presenta algunos inconvenientes que se pueden evitar si se ejecuta un único pago anual. Para calcular mensualmente dicho pago se plantea la estrategia de calcular la tasa de interés real  $r_\tau^a$ , a partir de la diferencia entre la tasa DTF nominal mensual acumulada cada doce meses ( $i_\tau^{a*}$ ) y la UVR anual (inflación anual observada en cada mes y rezagada un período). Una vez obtenida se compara con los valores establecidos del techo y piso de la franja calculados en términos efectivos anuales ( $\bar{P}^a$  y  $\bar{T}^a$ ). Con base en los valores de  $r_\tau^a$ ,  $\bar{P}^a$  y  $\bar{T}^a$  se aplica la regla que determina los pagos anuales según la cual el mecanismo compensa a los BECH si  $r_\tau^a > \bar{T}^a$  y cuando  $r_\tau^a < \bar{P}^a$ , las entidades aportan al FRECH. El cálculo de  $r_\tau^a$  se obtiene de la siguiente forma:

$$r_\tau^{a*} = \left[ \frac{(1 + i_\tau^{a*})}{(1 + \Delta UVR_t^a)} \right] - 1 \quad (\text{D-13})$$

con

$$i_\tau^{a*} = \prod_{s=1}^{12} [(1 + i_{s,\tau}^a)^{(1/12)}] - 1 \quad (\text{D-14})$$

Donde  $r_\tau^{a*}$  corresponde a la observación de  $r^a$  en el  $\tau$ -ésimo año de funcionamiento

del mecanismo de cobertura, con  $\tau = 1, \dots, 4$ . Por último, el cálculo de los pagos y cobros anuales se obtiene de manera similar a D-6

$$p_\tau = \begin{cases} \delta C * \left[ \frac{1+r_\tau^{a*}}{1+\overline{T}^a} - 1 \right], & \text{si } r_\tau^{a*} > \overline{T}^a \\ \delta C * \left[ \frac{1+r_\tau^{a*}}{1+\overline{P}^a} - 1 \right], & \text{si } r_\tau^{a*} < \overline{P}^a \end{cases} \quad (\text{D-15})$$

## Referencias

- Anderson, T. W. (1971). *The Statistical Analysis of Time Series*, New York. John Wiley & Sons.
- Campbell, J. Y., A. W. Lo. & A. C. MacKinlay. (1997), *The Econometrics of Financial Markets*. Princeton University Press. Princeton, New Jersey.
- Canavos, G. C. (1988). *Probabilidad y Estadística: Aplicaciones y Métodos*. México McGraw-Hill.
- Chatfield, C. (1989). *The Analysis of Time Series An Introduction*. 4 ed. London. Chapman y Hall.
- Cox, J.C., J.E. Ingersoll, y S. Ross (1985). A Theory of the Term Structure of Interest Rates, *Econometrica*, 53, 385-408.
- Desphande, J.V., et al (1995). *Statistical Analysis of Non normal Data*, New York. John Wiley & Sons.
- Dickey y Fuller (1976). Distribution of the Estimators for Time Series Regressions with a Unit Root. *J.A.S.A.*, 1976. pp 427-431.
- Dixit, A. (1993). *The Art of Smooth Pasting*, Harwood Academic Publishers.
- Doornick, J. A. And Hansen, H. (1994). An Omnibus Test for Univariate and Multivariate Normality, Working Paper, Nuffield College, Oxford. Citado por Hansen, H. y Juselius, K, en *Cats in Rats*; 1995.
- Enders, W. (1995). *Applied Econometric Time series*. New York. John Wiley & Sons, INC.
- Espinosa.Vega y Russell (1998). Can Higher Inflation Reduce Real Interest Rates in the Long Run?. *Canadian Journal of Economics*.
- Franses, P.H. and B. Hobijin (1997). Critical Values for Unit Root Test in Seasonal Time Series, *Journal of Applied Statistics*, 24, 25-47.
- Fuller, W. A. (1976). *Introduction to Statistical Time Series*, New York. John Wiley & Sons.
- Galindo, A. y D. Vásquez (1999). Propuesta Para el Funcionamiento de la Operación de Cobertura Prevista en el Artículo 49 de la Ley 546 de 1999. Bogotá. Banco de la República. Mimeo.
- Hull, J. C. (2002). *Fundamentals of Futures and Options Markets*, Four Edition. New Jersey. Prentice Hall.

- Hamilton, J. D. (1994). *Time Series Analysis*. Princeton University Press. New Jersey.
- Hansen, L. P. (1982). Large Sample Properties of Generalized Method of The Moments Estimators, *Econometrica*, 50, 1929-1954.
- Hansen, L. P., y J. Scheinkman (1995). Back to the Future: Generating Moment Implications for Continuos -Time Markov Processes, *Econometrica*, 63, 767-804.
- Judge, G., Hill, R.C., W. E. Griffiths, H. Lütkepohl and T. C. Lee (1988). *Introduction to the Theory and Practice of Econometrics*. New York. John Wiley & Sons, p. 892.
- Kwiatkowski, D., P.C.Phillips., P. Schmidt., Y. Shin.(1992), Testing the Null Hypothesis of Stationarity Against the Alternative of a Unit Root: How Sure Are We That Economic Time Series Have a Unit Root?. *Journal of Econometrics*. 54. P. 159-78. North Holland.
- Lee, Bong-Soo y Beth F. Ingram (1991). Simulation Estimation of Time-Series Models, *Journal of Econometrics*, 47, 197-205.
- Lilliefors, H. W. (1967). On the Kolmogorov-Smirnov Test for Normality with Mean and Variance Unknown. *J. of the American Statistical Association*, 62, 318. 399-402.
- MacKinnon, Critical Values for Cointegration Tests, Long-Run Economic Relationships, R.F. Engle and C.W.J. Granger, eds, London, Oxford, (1991). p 267-76.
- Mejía, L. F. y D. Vásquez (2000). Alternativas de funcionamiento de la operación de cobertura prevista en el Artículo 49 de la Ley 546 de 1999. Banco de la República. Mimeo.
- Mood, A. M., F. A. Graybill and D. C. Boes. (1974). *Introduction to the Theory of Statistics*. Singapore. McGraw-Hill Series in Probability and Statistics.
- RATS, User's Guide. Version 5. (2000). Estima.431-451. Evanston Illinois.
- Sailesh, R. and Ulman, S. (1996). MLE is Alive and Well in the Financial Markets. Working paper 96-17, Federal Reserve Bank of Atlanta, .
- Sørensen, H. (2002). *Parametric Inference for Diffusion Processes Observed at Discrete Points in Time: a Survey*, Copenhagen. Discussion Papers. Institute of Economics University of Copenhagen.
- Tanzi, Vito (1984). *Taxation Inflation and Interest Rates FMI*.



- Vásquez, D. (2003). Mecanismo de Cobertura para el Riesgo de Tasa de Interés Real de los Bancos Hipotecarios Colombianos. Bogotá, Banco de la República. Borradores de Economía No. 237.
- Vásquez, D. y C. Zea (2001). Fondo de Reserva Para la Estabilización de la Cartera Hipotecaria (Ejercicios contrafactuales con tasa de interés real observada en el periodo 1990-2000). Banco de la República. Mimeo.
- Vásquez, D. y C. Zea (2003). Alternativas de Cubrimiento para el Fondo de Estabilización de Cartera Hipotecaria (FRECH): Oferta de Opciones Europeas CAP para la Tasa de Interés Real. Banco de la República. Mimeo.
- Wei, W. (1990), Time series Analysis: Univariate and Multivariate Methods. Addison-Wesley.
- Wilmott, C. (1998). Derivatives: The Theory and Practice of Financial Engineering. New York. Wiley & Sons, INC.