PROBLEMAS DE DIRICHLET SOBRE CÓNICAS NO HIPERBÓLICAS

EDUARDO OSORIO TRIANA

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
SANTAFÉ DE BOGOTÁ, D.C., 2004

Dedicatoria y agradecimientos

Todos mis triunfos se los dedico a mi mamá, Leonor Triana, y a mi nona, Ana Triana, quienes me dieron su amor y apoyo a lo largo del nuevo camino que culmino ahora.

Les agradezco a mis profesores Ahmed Ould, Jaime Lesmes, y Xavier Caicedo ya que fundamentalmente ellos fueron los que me formaron como Matemático y me han guiado para abrir las puertas del futuro.

Finalmente, gracias a Charlie, amigo incondicional que le agradezco su compañía y amistad, y gracias a Guille y Germán por escucharme cuando necesitaba estar seguro.

Yo, EDUARDO OSORIO TRIANA, manifiesto en este documento mi voluntad de ceder a la Universidad de Los Andes los derechos patrimoniales, consagrados en el artículo 72 de la Ley 23 de 1982, del trabajo final de grado* denominado PROBLEMAS DE DIRICHLET SOBRE CÓNICAS NO HIPERBÓLICAS, producto de mi actividad académica, para optar por el título de MAESTRÍA EN MATEMÁTICAS en la Universidad de Los Andes. La Universidad de Los Andes, entidad académica sin ánimo de lucro, queda por lo tanto facultada para ejercer plenamente los derechos anteriormente cedidos en su actividad ordinaria de investigación, docencia y publicación. La cesión otorgada se ajusta a lo que establece la Ley 23 de 1982. Con todo, en mi condición de autor me reservo los derechos morales de la obra antes citada con arreglo al artículo 30 de la Ley 23 de 1982. En concordancia suscribo este documento en el momento mismo que hago entrega del trabajo final a la Biblioteca General de la Universidad de Los Andes.

NOMBRE	FIRMA	CÉDULA

Santafé de Bogotá, D.C., 20 de agosto de 2004

* "Los derechos de autor recaen sobre las obras científicas, literarias y artísticas en las cuales se comprenden las creaciones del espíritu en el campo científico, literario y artístico, cualquiera que sea el modo o forma de expresión y cualquiera que sea su destinación, tales como: los libros, folletos y otros escritos; las conferencias, alocuciones, sermones y otras obras de la misma naturaleza; las obras dramáticas o dramático-musicales; las obras coreográficas y las pantomimas; las composiciones musicales con letra o sin ella; las obras cinematográficas, a las cuales se asimilan las obras expresadas por procedimiento análogo a la cinematografía, inclusive los videogramas, las obras de dibujo, pintura, arquitectura, escultura, grabado, litografía; las obras fotográficas a las cuales se asimilan las expresas por procedimiento análogo a la fotografía; las obras de artes plásticas; las ilustraciones, mapas, planos, croquis y obras plásticas relativas a la geografía, a la topografía, a la arquitectura o a las ciencias, en fin, toda producción del dominio científico, literario o artístico que pueda reproducirse o definirse por cualquier forma de impresión o de reproducción, por fonografía, radiotelefonía o cualquier otro medio conocido o por conocer". (artículo 2 de la Ley 23 de 1982)

Índice de contenido

1. Introducción

El problema de Dirichlet para el Laplaciano es el siguiente: Dado un conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, con $n \geq 2$, abierto y no vacío, y dada una función continua $f : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ (conocida como la información en la frontera), encontrar una función continua $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ que sea dos veces continuamente diferenciable sobre Ω y sea armónica sobre Ω tal que u coincida con f sobre $\partial\Omega$, la frontera de Ω.

Este es seguramente uno de los problemas más influyentes en el desarrollo de las matemáticas en los últimos dos siglos y uno de los cuales me motivó a estudiar con el profesor Jaime Lesmes un par de seminarios en Ecuaciones Diferenciales Parciales. Mi formación adicional como Ingeniero Civil me atrajo a estudiar un algoritmo que fue desarrollado en 1995 para resolver ciertos problemas de Dirichlet, y entonces decidí hacer esta tesis con la ayuda y orientación del profesor Ahmed Ould, dada su experiencia en las áreas aplicadas de las Matemáticas.

El caso en el cual Ω es un disco en $\mathbb{R}^2$ es un problema estándar para los especialistas en la teoría de funciones analíticas de una variable compleja (ver pág. 231 [WR]). Este documento de tesis se concentra en el caso en el cual Ω es una superficie cuadrática no degenerada en $\mathbb{R}^n$, para $n \geq 2$, y especialmente cuando f es la restricción a $\partial\Omega$ de un polinomio.

Para Ω acotado, gracias al principio del módulo máximo para funciones armónicas, se sabe que si el problema de Dirichlet para el Laplaciano tiene solución entonces la solución es única. Si Ω no es acotado, en general, no se tiene unicidad en la solución a menos que se impongan condiciones de crecimiento en el espacio de funciones en el que se trabaje (para algunos Ω's). Si Ω es acotado y tiene frontera suave, una manera estándar de expresar una solución al problema de Dirichlet involucra la función de Green (o el núcleo de Poisson) y un proceso de integración. Sin embargo, la función de Green de un dominio cualquiera no tiene una fórmula cerrada que permita cálculos exactos (ver pág. 33 [LE]).

Sheldon Axler y Wade Ramey presentaron un algoritmo rápido para encontrar soluciones exactas cuando el conjunto en el que se trabaja es la bola unitaria. Este algoritmo no lleva acabo un proceso de integración como lo sugiere la fórmula de Green sino uno de diferenciación. La base de este algoritmo fue obtenida, sorprendentemente, por estudiar las derivadas de la función $\|x\|^{2-n}$ y observar los patrones que surgían para encontrar una descomposición conveniente de un polinomio y así calcular indirectamente su núcleo de Poisson (ver [SA2]). Desafortunadamente, las anteriores técnicas funcionan sólo sobre esferas y no dan un algoritmo para elipsoides u otras superficies cuadráticas.

El primer objetivo de este documento es mostrar el desarrollo teórico que llevaron a cabo Sheldon y Wade lo cual motiva la generalización de sus técnicas a otras superficies cuadráticas distintas a la esfera. El segundo objetivo es mostrar la implementación de un algoritmo que da una (o la única) solución al problema de Dirichlet para el Laplaciano sobre un dominio inducido por una cierta superficie cuadrática, con información polinomial en dicha superficie.

El capítulo 2 presenta brevemente las definiciones y resultados básicos de la teoría de funciones homogéneas, analíticas reales y armónicas para darle un carácter autocontenido a este documento o por lo menos para dar una referencia. En el siguiente capítulo se muestra el clásico teorema de descomposición de Fischer y una generalización. En el capítulo 4 se presenta de manera bastante clara el desarrollo teórico y algorítmico hechos por Sheldon Axler y Wade Ramey, lo cual motivó este trabajo. Finalmente, en el capítulo 5 se muestra el algoritmo general junto con un unos ejemplos.

Como la teoría en este documento se desarrolla fundamentalmente alrededor del diseño de un algoritmo, para beneficio del lector, en el apéndice se muestra el código de dicho algoritmo programado en Maple.

2. Preliminares

2.1. Notación

A lo largo de este documento se usarán las siguientes convenciones:
$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$, el conjunto de los números naturales; $\mathbb{Z}$, el anillo de los números enteros; $\mathbb{Q}$, el campo de los números racionales; $\mathbb{R}$, el campo de los números reales; y $\mathbb{C}$, el campo de los números complejos. Además, a menos que se especifique otra cosa, todas las funciones que se consideran toman valores reales. La letra Ω denotará usualmente un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ y $\partial\Omega$ su frontera.

Un vector de la forma $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, donde cada componente α_i es un entero no negativo, es llamado un multiíndice de orden

$$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$$

y para $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ y $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ multiíndices, $\alpha \leq \beta$ significa que $\alpha_i \leq \beta_i$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Para cada i entre 1 y n se denota por e_i el multiíndice que tiene ceros en sus componentes salvo en la i-ésima componente en donde tiene un 1.

Además se define el factorial de un multiíndice $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ como

$$\alpha! \doteq \alpha_1!\alpha_2! \cdots \alpha_n!$$

y para un vector $x = (x_1, \ldots, x_n)$ se define

$$x^\alpha \doteq x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$$

Con $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ y $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ suficientemente suave, se define

$$D^\alpha u(x) \doteq \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

y

$$\Delta u \doteq \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

2.2. Funciones homogéneas

Se dice que un subconjunto C de $\mathbb{R}^n$ es un cono si para todo $x \in C$ y para todo $\lambda > 0$ se tiene que $\lambda x \in C$. Una función $f : C \longrightarrow \mathbb{R}$, definida sobre un cono, se dice que es homogénea de grado k si

$$f(tx) = t^k f(x) \tag{2.1}$$

para todo $x \in C$ y para todo $t > 0$. Notemos que si $f \in C^1(C)$ y es homogénea de grado k, sacando la derivada parcial con respecto a x_i en la ecuación 2.1 se deduce que $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ es homogénea de grado $k-1$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Un resultado que será bastante utilizado en este documento es que si $f \in C^1(C)$ es una función homogénea de grado k entonces

$$x \cdot \nabla f(x) = kf(x)$$

donde ∇f denota el gradiente de f. Esto se deduce al derivar la ecuación 2.1 con respecto a t y luego evaluarla en $t = 1$.

2.3. Funciones analíticas reales

Una función en n variables es analítica real si es localmente expresable como una serie de potencias en las variables coordenadas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de $\mathbb{R}^n$. Para precisar esto hay que discutir que se entiende por una serie de números complejos de la forma $\sum\limits_{\alpha} c_\alpha$, donde la suma se hace sobre todos los multiíndices α. El problema es que no hay orden natural del conjunto de todos los multiíndices cuando $n > 1$. Sin embargo, supongamos que $\sum\limits_{\alpha} c_\alpha$ es absolutamente convergente, es decir que

$$\sup_F \sum_{\alpha \in F} |c_\alpha| < \infty$$

donde el supremo se toma sobre todos los subconjuntos finitos del conjunto de los multiíndices. En este caso, todos los posibles ordenamientos del conjunto de los multiíndices inducen el mismo valor a $\sum\limits_{\alpha} c_\alpha$ y por lo tanto esta expresión pierde la ambiguedad que tenía.

Luego, una función f definida sobre Ω es analítica real sobre Ω si para todo $x_0 \in \Omega$ existen unos números complejos $\{c_\alpha\}_\alpha$ y un $r > 0$ tales que

$$f(x) = \sum_{\alpha} c_\alpha (x - x_0)^\alpha$$

para todo x con $\|x - x_0\| < r$, la serie convergiendo absolutamente en esta vecindad.

Para lo que se va a mostrar será conveniente centrar la serie de potencias en $x_0 = 0$ y definir

$$R(y) \doteq \{x \in \mathbb{R}^n : |x_j| < |y_j|, j = 1, 2, \ldots, n\}$$

para $y \in \mathbb{R}$; $R(y)$ es llamado el "rectángulo abierto n-dimensional centrado en 0 con esquina y". Para evitar trivialidades se asumirá que cada componente de y no es cero.
(Ver pág. 20 [SA1])

Teorema 2.3.1. *Supongamos que $\{c_\alpha y^\alpha\}_\alpha$ es un conjunto acotado. Entonces,*

1. *para todo multiíndice $\beta \in \mathbb{N}^n$,la serie*

$$\sum_\alpha D^\beta(c_\alpha x^\alpha)$$

converge absolutamente sobre $R(y)$ y converge uniformemente sobre compactos de $R(y)$.

2. *la función f definida por $f(x) = \sum_\alpha c_\alpha x^\alpha$ para $x \in R(y)$, es infinitamente diferenciable y*

$$D^\beta f(x) = \sum_\alpha D^\beta(c_\alpha x^\alpha)$$

para todo $x \in R(y)$ y para todo multiíndice $\beta \in \mathbb{N}^n$. Además, $c_\alpha = D^\alpha f(0)/\alpha!$ para todo multiíndice $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

Demostración: Veamos primero que

$$\sum_\alpha D^\beta(x^\alpha) = D^\beta \left[(1 - x_1)^{-1} \cdots (1 - x_n)^{-1}\right] \tag{2.2}$$

sobre $R(1, 1, \ldots, 1)$ para todo multiíndice β. Por inducción en el orden de β,

a) Caso base, $\beta = (0, \ldots, 0)$: Si $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R(1, 1, \ldots, 1)$, entonces

$$(1 - x_1)^{-1} \cdots (1 - x_n)^{-1} = \left(\sum_{\alpha_1=0}^{\infty} x_1^{\alpha_1}\right) \cdots \left(\sum_{\alpha_n=0}^{\infty} x_n^{\alpha_n}\right)$$

y como cada serie converge absolutamente se tiene que

$$\begin{aligned}(1-x_1)^{-1}\cdots(1-x_n)^{-1} &= \sum_{\alpha_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{\alpha_n=0}^{\infty}(x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n})\\ &= \sum_{\alpha} x^{\alpha}\end{aligned}$$

sobre $R(1,1,\ldots,1)$.

b) Supongamos que la afirmación es cierta para todo multiíndice γ de orden m y sea β un multiíndice de orden $m+1$: Es claro que existe un i y un multiíndice γ de orden m tales que $\beta=\gamma+e_i$. Luego,

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha} D^{\beta}(x^{\alpha}) &= \sum_{\alpha}\frac{\partial}{\partial x_i}D^{\gamma}(x^{\alpha})\\ &= \frac{\partial}{\partial x_i}\sum_{\alpha}D^{\gamma}(x^{\alpha})\end{aligned}$$

sobre $R(1,1,\ldots,1)$, gracias a los resultados de derivabilidad que se tienen para una variable. Así, por hipótesis de inducción se tiene que

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha} D^{\beta}(x^{\alpha}) &= \frac{\partial}{\partial x_i}D^{\gamma}\left[(1-x_1)^{-1}\cdots(1-x_n)^{-1}\right]\\ &= D^{\beta}\left[(1-x_1)^{-1}\cdots(1-x_n)^{-1}\right]\end{aligned}$$

sobre $R(1,1,\ldots,1)$.

Ahora, como $\{c_\alpha y^\alpha\}_\alpha$ es acotado, existe un $M>0$ tal que $|c_\alpha y^\alpha|\leq M$ para todo α. Sea K un compacto contenido en $R(y)$, entonces existe un $t\in(0,1)$ tal que $K\subset R(ty)$. Por lo tanto, para todo $x\in K$ y para todo multiíndice α,

$$|c_\alpha x^\alpha|\leq t^{|\alpha|}|c_\alpha y^\alpha|\leq Mt^{|\alpha|}$$

Poniendo $\beta=0$ y $x_1=\cdots=x_n=t$ en la ecuación 2.2 se tiene que

$$\sum_{\alpha} t^{|\alpha|}=(1-t)^{-n}$$

lo cual implica la convergencia absoluta y uniforme de la serie $\sum_{\alpha} c_\alpha x^\alpha$ sobre K. Un razonamiento similar, pero ligeramente más elaborado, nos permite concluir que $\sum_{\alpha} D^{\beta}(c_\alpha x^\alpha)$ converge absolutamente y uniformemente sobre K. Esto completa la prueba de 1. Para mostrar 2, basta notar que la convergencia de $\sum_{\alpha} D^{\beta}(c_{\alpha}x^{\alpha})$ sobre compactos de $R(y)$ para todo β implica que $f(x) = \sum_{\alpha} c_{\alpha}x^{\alpha}$ es infinitamente diferenciable sobre $R(y)$ y que $D^{\beta}f(x) = \sum_{\alpha} D^{\beta}(c_{\alpha}x^{\alpha})$. La fórmula para los coeficientes c_{α} sigue de calcular las derivadas de f en 0.■

El siguiente teorema muestra que las funciones analíticas reales tienen ciertas propiedades que no tienen todas las funciones infinitamente diferenciables.
(Ver pág. 21 [SA1])

Teorema 2.3.2. *Supongamos que Ω es conexo, que f es analítica real sobre Ω y que $f \equiv 0$ sobre un subconjunto abierto no vacío de Ω. Entonces $f \equiv 0$ sobre Ω.*

Demostración: Sea Λ el interior de $\{x \in \Omega : f(x) = 0\}$. Luego Λ es un subconjunto abierto no vacío de Ω. Sea a un punto límite de Λ, entonces existe una sucesión $\{a_n\} \subseteq \Lambda$ con $a_n \longrightarrow a$ cuando $n \to \infty$. Como $a_n \in \Lambda$ entonces todas las derivadas de f se anulan en a_n, pues existe un abierto contenido en Ω que contiene a a_n en donde f se anula, luego por continuidad de las derivadas de f entonces todas las derivadas de f se anulan en a. Así, la serie de potencias de f en a es idénticamente nula, y como f es analítica real, entonces existe una vecindad de a sobre la cual f se anula. Por lo tanto, $a \in \Lambda$ y se concluye que Λ es un subconjunto cerrado de Ω. Como Λ no es vacío y Ω es conexo, entonces $\Omega = \{x \in \Omega : f(x) = 0\} = \Lambda$.■

Nota: El conjunto de funciones analíticas reales sobre un subconjunto Ω de $\mathbb{R}^n$ forman un anillo conmutativo con la multiplicación y suma usual. Verificar que la suma de dos funciones analíticas es analítica es trivial, pero verificar que el producto también preserva analiticidad es tedioso por el manejo de multiíndices. Aún más engorroso (pero no difícil teóricamente) es mostrar que si p es un polinomio en n variables y $Z(p)$ es el conjunto de ceros de p, entonces $\frac{1}{p}$ es una función analítica sobre $\mathbb{R}^n - Z(p)$; esto se puede hacer escribiendo $\frac{1}{p}$ como de serie de potencias y encontrando recursivamente los coeficientes de dicha serie. Por lo tanto, si p y q son dos polinomios en n variables, entonces la función $\frac{p}{q}$ es analítica real sobre $\mathbb{R}^n - Z(q)$.

Del anterior teorema se deduce inmediatamente el siguiente corolario,

Corolario 2.3.3. *Si dos funciones analíticas sobre $\mathbb{R}^n$ coinciden en un subconjunto abierto no vacío de $\mathbb{R}^n$, entonces son iguales en todo $\mathbb{R}^n$*

En particular, esta afirmación será bastante útil para un par de polinomios en n variables que sean iguales en un abierto no vacío de $\mathbb{R}^n$.

2.4. Funciones armónicas y el problema de Dirichlet para el Laplaciano

Sea $n \geq 2$. Si $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice que u es armónica sobre Ω si $u \in C^2(\Omega)$ y

$$\Delta u \equiv 0 \quad \text{sobre } \Omega$$

Los ejemplos más sencillos de funciones armónicas son los polinomios de grado menor o igual que uno. La función

$$u(x) = \|x\|^{2-n}$$

donde $\|\cdot\|$ es la norma euclidiana, es armónica sobre $\mathbb{R}^n$ si $n = 2$ pues es constante, y es armónica sobre $\mathbb{R}^n - \{0\}$ para $n > 2$ y es de gran importancia. La función $\ln \|x\|$ juega el mismo papel que $\|x\|^{2-n}$ cuando $n = 2$.

Nota: Se puede mostrar que toda función armónica sobre Ω es infinitamente diferenciable sobre Ω, de hecho es analítica real sobre Ω. Así, se pueden obtener más funciones armónicas derivando funciones armónicas.

Como el operador Laplaciano es lineal, entonces la suma y el producto por escalar de funciones armónicas son armónicas. Además, el operador Laplaciano conmuta con las transformaciones lineales ortogonales, es decir,

$$\Delta(u \circ T) = (\Delta u) \circ T$$

donde T es una transformación lineal ortogonal y u es una función C^2. Luego si se compone una función armónica con una transformación lineal ortogonal se preserva la armonicidad.

Las funciones armónicas tienen propiedades análogas a las funciones analíticas de una variable compleja (recordemos que una función es armónica si y sólo si es localmente la parte real de una función analítica, para $n = 2$). Por ejemplo, si u es armónica sobre Ω, entonces u verifica las siguientes propiedades:

- *Propiedad del valor medio, versión superficie:*

$$u(x) = \frac{1}{S(B(x,r))} \int\limits_{\partial B(x,r)} u(y)dS(y)$$

  para cada bola $B(x,r) \subseteq \Omega$, donde S denota la medida de superficie de área en $\mathbb{R}^n$. De hecho, si $u \in C^2(\Omega)$ y cumple esta propiedad del valor medio entonces es armónica.

- *Propiedad del valor medio, versión volumen:*

$$u(x) = \frac{1}{V(B(x,r))} \int\limits_{B(x,r)} u(y)dV(y)$$

  para cada bola $B(x,r) \subseteq \Omega$, donde V denota la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$. Aquí, al igual que en el ítem anterior, la recíproca bajo las mismas hipótesis es cierta.

La primera propiedad nos dice que el valor de u en cada punto $x \in \Omega$ está dado por el promedio de los valores de u en la frontera de cualquier bola con centro en x contenida en Ω; la segunda nos dice que dicho valor está dado también por el promedio de los valores de u sobre toda la bola. Como consecuencia de estas propiedades se tiene un resultado muy importante:

- **Principio del módulo máximo:** Supongamos que Ω es conexo, que u es armónica sobre Ω y que u alcanza un máximo o un mínimo en Ω. Entonces u es constante.

De esta afirmación se deduce inmediatamente que si Ω es un conjunto acotado y u es continua sobre $\overline{\Omega}$ y armónica sobre Ω, entonces u alcanza sus valores máximos y mínimos sobre $\partial\Omega$, la frontera de Ω.

Este resultado implica, que sobre un dominio acotado, una función armónica continua hasta el borde está determinada por sus valores en la frontera. Más precisamente, si u y v son dos funciones continuas sobre $\overline{\Omega}$ y armónicas sobre Ω que coinciden sobre $\partial\Omega$ con Ω acotado, entonces u y v coinciden sobre todo $\overline{\Omega}$. Esto no es cierto si el dominio no es acotado, pues $u \equiv 0$ y $v(x) = x_n$ con $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$ constituyen un contraejemplo.

El anterior párrafo contiene la razón de por qué, para Ω acotado, el problema de Dirichlet para el Laplaciano sobre Ω tiene a lo más una solución.

Si se supone que Ω es acotado y $\partial\Omega$ es C^1, entonces existe una fórmula para representar la solución del problema

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \quad \text{sobre } \Omega \\ u &= f \quad \text{en } \partial\Omega \end{aligned}$$

para $f \in C\left(\overline{\Omega}\right)$, por medio de la función de Green (o núcleo de Poisson). Esta fórmula es,

$$u(x) = -\int_{\partial\Omega} f(y)\frac{\partial G}{\partial \nu}(x,y)dS(y)$$

donde $\frac{\partial G}{\partial \nu}(x,y) = \nabla_y G(x,y) \cdot \nu(y)$ es la derivada normal exterior con respecto a y y G es la función de Green asociada al conjunto Ω, a saber,

$$G(x,y) \doteq \Phi(y-x) - \phi^x(y) \qquad (x, y \in \Omega, x \neq y)$$

con $\Phi(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi}\ln\|x\| & \text{si } n = 2 \\ \frac{\|x\|^{2-n}}{n(n-2)\alpha(n)} & \text{si } n > 2 \end{cases}$, $\alpha(n)$ el volumen de la bola unitaria de $\mathbb{R}^n$, y ϕ^x la solución al problema

$$\begin{aligned} \Delta\phi^x(y) &= 0 \quad \text{sobre } \Omega \\ \phi^x(y) &= \Phi(y-x) \quad \text{en } \partial\Omega \end{aligned}$$

para cada $x \in \Omega$. En general, calcular G es difícil y sólo se ha hecho cuando Ω tiene una geometría simple (ver pág. 36 [LE]).

3. Generalizando el teorema de descomposición de Fischer

El problema de Dirichlet sobre elipsoides con información polinomial en la frontera fue resuelto, de manera no convencional, gracias a un resultado elegante de Ernst Fischer, el mismo del teorema de Riesz-Fischer, el cual fue mostrado en 1917. Más teoremas de descomposición de polinomios como el que se presenta acá se han desarrollado para resolver ciertas ecuaciones diferenciales parciales (Ver [JB]).

3.1. Teorema de descomposición de Fischer

Dados b y x en $\mathbb{R}^n$ se denotará por $\|bx\|^2$ a $\sum_{i=1}^{n} b_i^2 x_i^2$ y por E al conjunto

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \|bx\|^2 < 1\}$$

Además, para $m \geq 0$ sea $\mathbb{P}_m$ el espacio vectorial de polinomios de grado a lo más m en n variables, y pongamos $\mathbb{P}_m = \{0\}$ para $m < 0$. Se presenta ahora un lema probado por Ernst Fischer en 1917.

Lema 3.1.1. *Sea $b \in \mathbb{R}^n$ con $b_j \neq 0$ para todo j. Sea $L : \mathbb{P}_m \longrightarrow \mathbb{P}_m$ definida por L(f)=$\Delta\left(\left(\|bx\|^2 - 1\right) f\right)$. Entonces L es un isomorfismo de espacios vectoriales.*

Demostración: Es claro que L es una transformación lineal bien definida, y dado que $\mathbb{P}_m$ tiene dimensión finita como espacio vectorial, es suficiente verificar que L es inyectiva para concluir que es un isomorfismo.

Supongamos que $L(f) = 0$. Entonces $g(x) = \left(\|bx\|^2 - 1\right) f(x)$ es un polinomio armónico y $g \downharpoonright_{\partial E} = 0$. Como E es un conjunto acotado, ya que $b_j \neq 0 \; \forall j$, por el principio del módulo máximo se tiene que $g \equiv 0$ sobre $\overline{E}$, la clausura de E. Pero $\|bx\|^2 - 1 \neq 0$ para todo $x \in E$, luego $f \equiv 0$ en E lo cual a su vez implica que $f \equiv 0$ en $\mathbb{R}^n$ ya que E es un abierto de $\mathbb{R}^n$. Así, se tiene que $f = 0$ en $\mathbb{P}_m$ y por lo tanto que L es inyectiva. ■

El anterior lema implica el famoso teorema de descomposición de E. Fischer, el cual se muestra a continuación. Denotemos por $\mathbb{PA}_m$ el conjunto de polinomios armónicos de grado a lo más m, el cual es un subespacio de $\mathbb{P}_m$.

Teorema 3.1.2. *Sea $b \in \mathbb{R}^n$ con $b_j \neq 0$ para todo j y sea $p \in \mathbb{P}_m$. Entonces existe un único $h \in \mathbb{PA}_m$ tal que $p = h + (\|bx\|^2 - 1) f$ para algún $f \in \mathbb{P}_{m-2}$.*

Demostración: Sea $p \in \mathbb{P}_m$. Si $m = 0$ o $m = 1$ entonces p es armónico y la afirmación es clara. Luego sea $m \geq 2$ y consideremos $L : \mathbb{P}_{m-2} \longrightarrow \mathbb{P}_{m-2}$ como en el lema anterior. Como $\Delta p \in \mathbb{P}_{m-2}$ entonces existe un único $f \in \mathbb{P}_{m-2}$ tal que $\Delta\left((\|bx\|^2 - 1)f\right) = \Delta p$.

Por lo tanto,

$$\Delta\left(p - \left(\|bx\|^2 - 1\right) f\right) = 0$$

Sea $h = p - (\|bx\|^2 - 1) f$. Entonces $h \in \mathbb{PA}_m$ y está únicamente determinado por f.■

En conclusión, h es la única función continua sobre $\overline{E}$ que es armónica sobre E y es igual a p en el elipsoide ∂E, solucionando así el problema de Dirichlet. Además, en vista del teorema anterior, $\mathbb{P}_m$ se descompone de la forma

$$\mathbb{P}_m = \mathbb{PA}_m \oplus \left(\|bx\|^2 - 1\right) \mathbb{P}_{m-2}$$

3.2. Un teorema de descomposición más general

Sheldon Axler y Wade Ramey se basaron en un teorema de descomposición como el de E. Fischer para construir un algoritmo, bastante eficiente, para encontrar la solución al problema de Dirichlet del Laplaciano sobre la bola unitaria. La idea ahora es considerar polinomios cuadráticos que contengan a los de la forma $\|bx\|^2 - 1$, que sigan proporcionando un teorema de descomposición como el anterior y eventualmente un algoritmo para hallar alguna solución (o la única si es el caso) del problema de Dirichlet correspondiente. Los polinomios que se considerarán permitirán trabajar sobre superficies cuadráticas no acotadas como paraboloides, cilindros y conos, y sobre las superficies ya trabajadas como los elipsoides.

El siguiente lema nos será de utilidad para generalizar el teorema de descomposición.

Lema 3.2.1. *Si $b \in \mathbb{R}^n$ con $b_j \neq 0$ para todo j, entonces ningún múltiplo polinomial no nulo de $\|bx\|^2$ es armónico.*

Demostración: Supongamos que existe $p \in \mathbb{P}_m$ no nulo, con grado exactamente m, tal que $q = \|bx\|^2 p$ es armónico. Luego tenemos una función q que es armónica sobre E, $q \mid_{\partial E} = p \mid_{\partial E}$ y continua sobre $\overline{E}$, así que debe ser idéntica a h, la parte armónica de p según el teorema de descomposición de Fischer, ya que E es acotado; pero q tiene grado $m+2$ y h tiene grado a lo más m, lo cual es una contradicción.■

Denotaremos por $\mathbb{PH}_m$ al conjunto de polinomios homogéneos de grado m en donde se conviene que $0 \in \mathbb{PH}_m$ para todo m. Empecemos por la siguiente proposición,

Proposición 3.2.1. *Sea $q : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por $q(x) = \sum_{i=1}^{r} b_i^2 x_i^2$ para algún r con $1 \leq r \leq n$ y $b_i \neq 0$ para todo i con $1 \leq i \leq r$. Si $f \in \mathbb{PH}_m$, entonces*

$$\Delta(qf) = 0 \Longrightarrow f = 0$$

Demostración: Si $r = n$, por el lema anterior se concluye. Entonces, supongamos que $r < n$. Se demostrará la afirmación por inducción en m:

- Caso base, $m = 0$: Sea $f \in \mathbb{PH}_0$, es decir una constante. Como $\Delta q = \sum_{i=1}^{r} 2b_i^2 > 0$ entonces es claro que $\Delta(qf) = 0 \Longrightarrow f = 0$.
- Ahora, supongamos que $\Delta(qf) = 0 \Longrightarrow f = 0$ para $f \in \mathbb{PH}_{m-1}$. Sea $f \in \mathbb{PH}_m$ y que $\Delta(qf) = 0$. Para $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$,

  $$\frac{\partial}{\partial x_i}\Delta(qf) = \Delta\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(qf)\right) = 0$$

  Luego para $i \in \{r+1, ..., n\}$ se tiene que $\Delta\left(q\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = 0$ y como $\frac{\partial f}{\partial x_i} \in \mathbb{PH}_{m-1}$ entonces por hipótesis de inducción se tiene que $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$ para $i = r+1, ..., n$.

  Por lo tanto f depende sólo de las primeras r variables y se tiene que $\Delta(qf) = 0$ en $\mathbb{R}^r$. Luego por el lema 3.2.1 se tiene que $f \equiv 0$ en $\mathbb{R}^r$, pero como no depende de $x_{r+1}, ..., x_n$ entonces $f \equiv 0$ en $\mathbb{R}^n$, es decir $f = 0$ en $\mathbb{PH}_m$.■

Definición 3.2.2. Se dice que un polinomio q en n variables es **cuadrático no hiperbólico** si es de la forma

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} b_i^2 x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} c_i x_i + d$$

con $b_i, c_i, d \in \mathbb{R}$ para todo i y existe al menos un $b_j \neq 0$.

Nota: Dado q un polinomio cuadrático no hiperbólico, el conjunto $\partial Q = \{x \in \mathbb{R}^n : q(x) = 0\}$ puede ser alguna de las siguientes notables superficies:

- Un paraboloide con sección elíptica.
- Un cilindro con sección elíptica o parabólica. Inclusive puede ser cilíndrico en varias direcciones de los ejes coordenados.
- Un cono con sección elíptica.
- Un elipsoide.

De hecho, ∂Q podría ser un punto o inclusive vacío, pero son casos que no nos interesan. A los casos que nos interesan los llamaremos **cónicas no hiperbólicas**. Las anteriores superficies tendrán sus ejes principales en las direcciones de los ejes coordenados; aunque si se consideran las mismas superficies pero rotadas, el problema de Dirichlet asociado se puede resolver con la misma metodología que se mostrará aquí, salvo un cambio de coordenadas, pues la armonicidad de una función se preserva bajo rotaciones.

Se comienza por generalizar el lema 3.1.1. Notemos que la proposición 3.2.1 es un caso particular del siguiente lema, pero en su demostración se verá que es equivalente.

Lema 3.2.3. *Sea q un polinomio cuadrático no hiperbólico. El operador lineal $L : \mathbb{P}_m \longrightarrow \mathbb{P}_m$ dado por $L(f) = \Delta(qf)$ es un isomorfismo de espacios vectoriales.*

Demostración: Nuevamente, es claro que L es una transformación lineal bien definida y para probar la afirmación es suficiente ver que L es inyectiva.

Supongamos que existe $f \in \mathbb{P}_m$, con $f \neq 0$ y $L(f) = 0$. Sea m' el grado de f y escribamos f de la forma

$$f = f_{m'} + f_{m'-1}$$

con $f_{m'} \in \mathbb{PH}_{m'}$ y $f_{m'-1} \in \mathbb{P}_{m'-1}$. Evidentemente, $f_{m'} \neq 0$. Además pongamos q de la forma

$$q = q_2 + q_1$$

con $q_2(x) = \sum\limits_{i-1}^{n} b_i^2 x_i^2$ y $q_1(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i x_i + d$. Como $L(f) = \Delta(qf) = 0$, reemplazando a q, entonces

$$\Delta\left(q_2 f + q_1 f\right) = 0$$

Expandiendo a f sólo en el término en el que acompaña a q_2 y distribuyendo el Laplaciano tenemos que

$$\Delta(q_2 f_{m'}) + \Delta(q_2 f_{m'-1}) + \Delta(q_1 f) = 0$$

Ahora, notemos que el primer término de la igualdad anterior, $\Delta(q_2 f_{m'})$, está en $\mathbb{P}_{m'}$, mientras que los otros dos están en $\mathbb{P}_{m'-1}$. Por lo tanto,

$$\Delta(q_2 f_{m'}) = 0$$

Así, se ha reducido el problema al caso en que q consiste sólo de monomios cuadráticos no mixtos y f es un polinomio homogéneo, luego por la proposición 3.2.1 (salvo un renombramiento de variables) se tiene que $f_{m'} = 0$, lo cual es una contradicción.■

Ahora, por el último lema tenemos un teorema de descomposición más general, que se prueba exactamente como el teorema 3.1.2.

Teorema 3.2.4. *Sea $p \in \mathbb{P}_m$ y sea q un polinomio cuadrático no hiperbólico. Entonces existe un único $h \in \mathbb{PA}_m$ tal que $p = h + qf$ para algún $f \in \mathbb{P}_{m-2}$. De hecho,*

$$\mathbb{P}_m = \mathbb{PA}_m \oplus q\mathbb{P}_{m-2}$$

3.3. Un resultado de unicidad en la solución al problema de Dirichlet

Dados $p \in \mathbb{P}_m$ y q un polinomio cuadrático no hiperbólico, consideremos el siguiente problema de Dirichlet

$$\Delta u = 0 \quad \text{en } Q \tag{3.1}$$

$$u = p \quad \text{en } \partial Q \tag{3.2}$$

donde $Q = \{x \in \mathbb{R}^n : q(x) < 0\}$.

Si Q es acotado, se sabe que el problema 3.1-3.2 tiene una única solución en $C^2(Q) \cap C\left(\overline{Q}\right)$, la cual será el polinomio h, la parte armónica de p con respecto al teorema 3.2.4. Si Q no es acotado, el polinomio h no es necesariamente la única solución en $C^2(Q) \cap C\left(\overline{Q}\right)$ al problema 3.1-3.2, sin embargo, gracias a q, este problema tiene solución única en $\mathbb{P} = \bigcup_{m \geq 0} \mathbb{P}_m$, el conjunto de polinomios. Para ver esto, primero se mostrará una proposición que tiene interés por si misma (pensar en el teorema de los ceros de Hilbert).

Proposición 3.3.1. *Sea q un polinomio cuadrático no hiperbólico tal que $q(x) < 0$ para algún $x \in \mathbb{R}^n$. Si h es un polinomio en n variables tal que $h(x) = 0$ cuando $q(x) = 0$, entonces h es un múltiplo polinomial de q.*

Demostración: Sea $A_n = \{x \in \mathbb{R}^n : q(x) < 0\}$; A_n es abierto y por hipótesis es no vacío. La afirmación se mostrará por inducción en n:

- Caso base, $n = 1$: Como existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $q(x) < 0$ entonces q es de la forma $q(x) = a(x - r_1)(x - r_2)$ para $a > 0$ y $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ con $r_1 \neq r_2$. Luego $h(r_1) = h(r_2) = 0$ teniendo entonces que $(x - r_1)(x - r_2)$ divide a h, es decir q divide a h.

- Ahora supongamos que la afirmación es cierta para $n - 1$. Sea $q(x) = \sum_{i=1}^{n} b_i^2 x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} c_i x_i + d$ un polinomio cuadrático no hiperbólico en n variables y sea h otro polinomio en n variables de grado m tal que $q(x) = 0 \Longrightarrow h(x) = 0$.

  Como q es cuadrático no hiperbólico entonces $\exists b_i \neq 0$ con $i \in \{1, ..., n\}$. Si el único $b_i \neq 0$ es b_n entonces se renombran las variables de tal manera que $\exists b_i \neq 0$ con $i \in \{1, ..., n-1\}$.

  Reescribamos A_n como $A_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} : q(x, y) < 0\}$ y sea $y \in \pi_2(A_n)$, la proyección en la n-ésima componente, y pongamos $q_y(\cdot) \doteq q(\cdot, y)$. Luego $q_y(x)$ es un polinomio en las primeras $n-1$ variables, es decir, $q_y(x) \in \mathbb{R}[x_1, ..., x_{n-1}]$. Nótese que $q_y(x)$ es un polinomio cuadrático no hiperbólico y que $\exists x \in \mathbb{R}^{n-1}$ tal que $q_y(x) < 0$. Sea $h_y(\cdot) \doteq h(\cdot, y) \in \mathbb{R}[x_1, ... x_{n-1}]$, el cual tiene grado a lo más m.

  Verifiquemos que $q_y(x) = 0 \Longrightarrow h_y(x) = 0$: Sea $x \in \mathbb{R}^{n-1}$,

  $$q_y(x) = 0 \Rightarrow q(x, y) = 0 \Rightarrow h(x, y) = 0 \Rightarrow h_y(x) = 0$$

Luego por hipótesis de inducción existe $a_y(x) \in \mathbb{R}[x_1, ..., x_{n-1}]$ tal que

$$h_y(x) = a_y(x)q_y(x)$$

Notemos que el grado de $a_y(x)$ es a lo más $m-2$. Así, para todo $y \in \pi_2(A_n)$ se tiene que $\frac{h_y(x)}{q_y(x)}$ es un polinomio de grado a la más $m-2$.

Similarmente sea $x \in \pi_1(A_n)$, la proyección en las primeras $n-1$ componentes, y definamos

$$q^x(\cdot) \doteq q(x, \cdot)$$
$$h^x(\cdot) \doteq h(x, \cdot)$$

los polinomios en una variable que resultan de fijar en x las primeras $n-1$ variables, es decir que $q^x(y)$ y $h^x(y)$ pertenecen a $\mathbb{R}[y]$. En este caso nuevamente es fácil verificar que para todo $y \in \mathbb{R}$ se tiene que $q^x(y) = 0 \Longrightarrow h^x(y) = 0$.

Para proseguir hay que analizar tres casos. Si $b_n \neq 0$, al igual que en el caso base, entonces $q^x(y)$ divide a $h^x(y)$. Si $b_n = 0$ y $c_n \neq 0$ entonces $q^x(y)$ es lineal y como $q^x(y) = 0 \Longrightarrow h^x(y) = 0$ es claro entonces que $q^x(y)$ divide a $h^x(y)$. Finalmente, si $b_n = 0$ y $c_n = 0$ entonces $q^x(y)$ es una constante negativa, luego $q^x(y)$ divide a $h^x(y)$. Por lo tanto se ha mostrado que existe $b^x(y) \in \mathbb{R}[y]$ tal que

$$h^x(y) = b^x(y)q^x(y)$$

Así, para todo $x \in \pi_1(A_n)$ se tiene que $\frac{h^x(y)}{q^x(y)}$ es un polinomio en y, en donde hay que notar que tiene grado a lo más m. En resumen se tiene que

$$\forall (x, y) \in A_n, \quad a_y(x) = b^x(y) = \frac{h(x, y)}{q(x, y)}$$

Definamos una nueva función $c : A_n \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$c(x, y) = \frac{h(x, y)}{q(x, y)}$$

c está bien definida pues si $(x, y) \in A_n$ se tiene que $q(x, y) < 0$.

Como c es un cociente de polinomios sobre A_n, entonces c es analítica real sobre A_n, que es abierto. Sea $\alpha \in \mathbb{N}^n$ un multiíndice con $|\alpha| = 3m$ y escribámoslo de la forma $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ con $\alpha_1 \in \mathbb{N}^{n-1}$ y $\alpha_2 \in \mathbb{N}$. Entonces $|\alpha| = |\alpha_1| + \alpha_2$, y por lo tanto $|\alpha_1| \geq m$ o $\alpha_2 \geq 2m$.

Si $|\alpha_1| \geq m$, como

$$D^{\alpha}c(x,y) = D^{\alpha_2}D^{\alpha_1}c(x,y) = D^{\alpha_2}D^{\alpha_1}\left(a_y(x)\right)$$

y $a_y(x)$ es un polinomio de grado a lo más $m-2$, entonces $D^{\alpha_1}(a_y(x)) = 0$ lo cual implica que $D^{\alpha}c(x,y) = 0$.

Si $\alpha_2 \geq 2m$, entonces

$$D^{\alpha}c(x,y) = D^{\alpha_1}D^{\alpha_2}c(x,y) = D^{\alpha_1}D^{\alpha_2}\left(b^x(y)\right)$$

y como el grado de $b^x(y)$ es a lo más m entonces también se tiene en este caso que $D^{\alpha}(c(x,y)) = 0$. Por lo tanto,

$$\exists \beta \in \mathbb{N}^n \quad \text{tal que} \quad D^{\alpha}c(x,y) = 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n \quad \text{con} \quad \alpha \geq \beta$$

Teniendo en cuenta la representación en series de potencias de c, entonces se concluye que c es un polinomio sobre A_n y $h(x,y) = c(x,y)q(x,y)$ para todo $(x,y) \in A_n$.

Sea $\widetilde{c}$ el polinomio dado por la representación de c sobre A_n y sea $\widetilde{h} = \widetilde{c}q$. Entonces

$$\widetilde{h}(x,y) = h(x,y) \quad \forall (x,y) \in A_n$$

Como A_n es un abierto no vacío de $\mathbb{R}^n$ y dado que $\widetilde{h}$ y h coinciden en A_n entonces $\widetilde{h}$ y h coinciden en todo $\mathbb{R}^n$, es decir, $\widetilde{c}q = \widetilde{h} = h$ en $\mathbb{P}$. Por lo tanto q divide a h que era lo que se quería demostrar.■

Gracias a la proposición 3.3.1 ahora se puede mostrar que el problema 3.1-3.2 tiene solución única en $\mathbb{P}$ cuando ∂Q no se reduce al conjunto vacío o a un solo punto.

Teorema 3.3.1. *Sea q un polinomio cuadrático no hiperbólico tal que existe un $x \in \mathbb{R}^n$ con $q(x) < 0$. Entonces, el problema 3.1-3.2 tiene una y sólo una solución en $\mathbb{P}$.*

Demostración: Sólo falta mostrar la unicidad. Supongamos que se tienen u_1 y u_2 en $\mathbb{P}$ soluciones del problema 3.1-3.2. Es decir que u_1 y u_2 son polinomios armónicos tales que $u_1 \downharpoonright_{\partial Q} = u_2 \downharpoonright_{\partial Q}$. Luego $u_1 - u_2$ es un polinomio armónico que se anula en ∂Q.

Por la proposición anterior se tiene entonces que existe c polinomio en n variables tal que $u_1 - u_2 = cq$. Luego $\Delta(cq) = \Delta(u_1 - u_2) = 0$ que junto con el Teorema 3.2.4 implican que $c = 0$, teniendo así que $u_1 = u_2$.■

La hipótesis "q cuadrático no hiperbólico"no es superflua. Consideremos $q(x, y) = x^2 - 3y^2 - 1$ y supongamos que u es solución de 3.1-3.2. Entonces v definida como

$$v = u + (x^2 - 3y^2 - 1)x = u + x^3 - 3xy^2 - x$$

también satisface 3.1-3.2.

4. El algoritmo de Sheldon Axler y Wade Ramey

Sheldon Axler y Wade Ramey encontraron resultados muy interesantes acerca de las funciones armónicas al observar las derivadas de la función $\|x\|^{2-n}$ en $\mathbb{R}^n$.

Sea B la bola unitaria abierta de $\mathbb{R}^n$ y sea $f \in C(\partial B)$. El problema de Dirichlet para el Laplaciano sobre B con información en la frontera dada por f tiene como solución la integral de Poisson, la cual es la función que para cada $x \in B$ está dada por

$$\int_{\partial B} \frac{1 - \|x\|^2}{\|x - y\|^n} f(y) d\sigma(y)$$

donde $d\sigma$ denota la medida de superficie de área normalizada sobre ∂B.

Esta integral es difícil de calcular exactamente (no de manera aproximada) inclusive en el caso en que f es la restricción de un polinomio a ∂B; pero para este caso Sheldon y Wade desarrollaron un algoritmo rápido para evitar el proceso de integración.

Por completitud incluiré en este documento sus resultados con una mayor explicación y detalle hasta mostrar el algoritmo (ver [SA2]).

4.1. Las derivadas de $\|x\|^{2-n}$

Denotemos por D_i la derivada parcial con respecto a la i-ésima variable. Las siguientes son igualdades sencillas de verificar que nos serán útiles más adelante

$$D_i \|x\|^t = t x_i \|x\|^{t-2} \tag{4.1}$$

$$\Delta \|x\|^t = t(t + n - 2) \|x\|^{t-2} \tag{4.2}$$

$$\Delta(uv) = u\Delta v + v\Delta u + 2\nabla u \cdot \nabla v \tag{4.3}$$

Las primeras dos ecuaciones valen en $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ y la tercera vale en cualquier abierto de $\mathbb{R}^n$ donde u y v sean dos veces continuamente diferenciables. La segunda ecuación implica que la función $\|x\|^{2-n}$ es armónica sobre $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ y será no constante si n es mayor que 2. En todo lo que sigue se asumirá que $n > 2$ aunque el caso $n = 2$ se puede llevar acabo de la misma manera cambiando $\|x\|^{2-n}$ por $\ln \|x\|$.

Sea $\mathbb{PHA}_m$ el espacio vectorial de polinomios homogéneos armónicos de grado m, en n variables. Sea $c_0 \doteq 1$ y para $m > 0$ sea $c_m \doteq \prod_{j=0}^{m-1}(2-n-2j)$. Notemos que $c_m \neq 0$ para todo m. Además pongamos $\mathbb{PH}_{-1} \doteq \mathbb{PH}_{-2} \doteq \{0\}$. La primera observación que se notó fue el siguiente lema.

Lema 4.1.1. *Sea $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tal que $|\alpha| = m$, es decir un multiíndice de orden m, entonces*

$$D^\alpha \|x\|^{2-n} = \|x\|^{2-n-2m}(c_m x^\alpha + \|x\|^2 q_\alpha)$$

con $q_\alpha \in \mathbb{PH}_{m-2}$.

Demostración: La afirmación se mostrará por inducción en m.

- Caso base, m=0:

$$D^\alpha \|x\|^{2-n} = \|x\|^{2-n} = \|x\|^{2-n-2\cdot 0}(c_0 x^\alpha + \|x\|^2 q_\alpha)$$

  ya que $c_0 = 1$, $\alpha = (0, ..., 0)$, $x^\alpha = 1$ con $q_\alpha = 0 \in \mathbb{PH}_{-2}$.

- Ahora supongamos que la afirmación es cierta para m y sea $\beta \in \mathbb{N}^n$ con $|\beta| = m + 1$. Entonces existe $\alpha \in \mathbb{N}^n$ y existe $j \in \{1, 2, ..., n\}$ tal que $\beta = \alpha + e_j$ donde e_j es el multiíndice con 0's en todas las posiciones salvo en la j-ésima en la que tiene un 1. Luego se tiene que $|\alpha| = m$ y

$$D^\beta \|x\|^{2-n} = D_j D^\alpha \|x\|^{2-n} = D_j \left(\|x\|^{2-n-2m}(c_m x^\alpha + \|x\|^2 q_\alpha)\right)$$

  por hipótesis de inducción. Derivando y utilizando 4.1 tenemos que

$$\begin{aligned} D^\beta \|x\|^{2-n} &= (2-n-2m)\|x\|^{-n-2m} x_j (c_m x^\alpha + \|x\|^2 q_\alpha) \\ &\quad + \|x\|^{2-n-2m} D_j (c_m x^\alpha + \|x\|^2 q_\alpha) \\ &= \|x\|^{-n-2m} \left[c_{m+1} x^\beta + \|x\|^2((2-n-2m)x_j q_\alpha \right. \\ &\quad \left. + D_j(c_m x^\alpha + \|x\|^2 q_\alpha))\right] \\ &= \|x\|^{2-n-2(m+1)} \left[c_{m+1} x^\beta + \|x\|^2 q_\beta\right] \end{aligned}$$

  con $q_\beta = (2-n-2m)x_j q_\alpha + D_j(c_m x^\alpha + \|x\|^2 q_\alpha)$. Como $q_\alpha \in \mathbb{PH}_{m-2}$ entonces $q_\beta \in \mathbb{PH}_{m-1} = \mathbb{PH}_{(m+1)-2}$.■

Así, al tomar todas las derivadas de orden m de $\|x\|^{2-n}$ se producen polinomios homogéneos de grado m, salvo una potencia de $\|x\|$, a saber $\|x\|^{2-n-2m}$. De hecho se están produciendo polinomios homogéneos armónicos de grado m como lo muestra el siguiente lema.

Lema 4.1.2. *Si* $p \in \mathbb{PH}_m$, *entonces*

$$\Delta\left(\|x\|^{2-n-2m}p\right) = \|x\|^{2-n-2m}\Delta p$$

Demostración: Se calculará de una vez la expresión $\Delta(\|x\|^t p)$ para $p \in \mathbb{PH}_m$. Utilizando las ecuaciones 4.3, 4.2, 4.1, en ese orden, obtenemos que

$$\begin{aligned}\Delta\left(\|x\|^t p\right) &= \|x\|^t\Delta p + p\Delta\|x\|^t + 2\nabla\|x\|^t\cdot\nabla p\\ &= \|x\|^t\Delta p + pt(t+n-2)\|x\|^{t-2} + 2t\|x\|^{t-2}x\cdot\nabla p\end{aligned}$$

Como p es un polinomio homogéneo de grado m, se sabe que $x\cdot\nabla p = mp$, y así se tiene que

$$\Delta\left(\|x\|^t p\right) = \|x\|^t\Delta p + t(t+n+2m-2)\|x\|^{t-2}p \tag{4.4}$$

Poniendo $t = 2-n-2m$, entonces se concluye lo que se quería.■

Nota: Como $\|x\|^{2-n}$ es una función armónica en $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$, entonces $D^\alpha\|x\|^{2-n}$ también lo es para todo multiíndice α. Sea $\alpha \in \mathbb{N}^n$ con $|\alpha| = m$, entonces por los anteriores dos lemas tenemos que

$$\begin{aligned}0 = \Delta\left(D^\alpha\|x\|^{2-n}\right) &= \Delta\left(\|x\|^{2-n-2m}(c_m x^\alpha + \|x\|^2 q_\alpha)\right)\\ &= \|x\|^{2-n-2m}\Delta(c_m x^\alpha + \|x\|^2 q_\alpha)\end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$. Por lo tanto,

$$\Delta(c_m x^\alpha + \|x\|^2 q_\alpha) = 0$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$, lo cual implica que $\Delta(c_m x^\alpha + \|x\|^2 q_\alpha) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ por continuidad. Luego $c_m x^\alpha + \|x\|^2 q_\alpha$ es un polinomio homogéneo armónico de grado m, es decir $c_m x^\alpha + \|x\|^2 q_\alpha \in \mathbb{PHA}_m$. Así, se tiene una forma de producir elementos de $\mathbb{PHA}_m$, pero cuántos de estos se estarán produciendo? Más adelante se mostrará que

$$\operatorname{gen}\left\{c_m x^\alpha + \|x\|^2 q_\alpha\right\}_{|\alpha|=m} = \mathbb{PHA}_m$$

Por ahora, sea $p \in \mathbb{PH}_m$ fijo, de la forma $p(x) = \sum\limits_{|\alpha|=m} a_\alpha x^\alpha$, y sea $p(D)$ el operador diferencial asociado a p. Entonces

$$\begin{aligned} p(D)\|x\|^{2-n} &= \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha D^\alpha \|x\|^{2-n} \\ &= \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha \|x\|^{2-n-2m}(c_m x^\alpha + \|x\|^2 q_\alpha) \\ &= \|x\|^{2-n-2m}\left(c_m p + \|x\|^2 \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha q_\alpha\right) \end{aligned}$$

Notemos que el polinomio entre paréntesis en la última ecuación es un elemento de $\mathbb{PHA}_m$ pues es combinación lineal de elementos de $\mathbb{PHA}_m$. Así, como $c_m \neq 0$, entonces

$$\frac{1}{c_m}\|x\|^{n+2m-2}\left[p(D)\|x\|^{2-n}\right] = p + \|x\|^2 \sum_{|\alpha|=m} \frac{a_\alpha}{c_m} q_\alpha \in \mathbb{PHA}_m$$

Por lo tanto, si se define un operador Λ_m por la asignación

$$\Lambda_m(p) = \frac{1}{c_m}\|x\|^{n+2m-2}\left[p(D)\|x\|^{2-n}\right]$$

entonces $\Lambda_m(p) \in \mathbb{PHA}_m$ para todo $p \in \mathbb{PH}_m$. Se tiene así el siguiente teorema,

Teorema 4.1.3. *Si $p \in \mathbb{PH}_m$, entonces*

i) $\Lambda_m(p) \in \mathbb{PHA}_m$

ii) $p = \Lambda_m(p) + \|x\|^2 q$ *para algún* $q \in \mathbb{PH}_{m-2}$

iii) $\mathbb{PH}_m = \mathbb{PHA}_m \oplus \|x\|^2 \mathbb{PH}_{m-2}$

Demostración: Dados los comentarios anteriores al enunciado del teorema, sólo falta mostrar que la suma es una suma directa, pero esto es consecuencia del lema 3.2.1.■

Nota: Notemos que *i*) y *ii*) significan que $\Lambda_m = \Pi_{\mathbb{PHA}_m}$, la proyección de $\mathbb{PH}_m$ sobre $\mathbb{PHA}_m$, pues claramente Λ_m es lineal.

Del anterior teorema se deduce fácilmente una notable descomposición para los polinomios homogéneos,

Corolario 4.1.4. *Todo $p \in \mathbb{PH}_m$ puede ser escrito de manera única de la forma*

$$p = p_m + \|x\|^2 p_{m-2} + \ldots + \|x\|^{2k} p_{m-2k}$$

donde $k = \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor$, la parte entera de $\frac{m}{2}$, y $p_{m-2j} \in \mathbb{PHA}_{m-2j}$ para todo j. Además, $p_m = \Lambda_m(p)$.

Este resultado de descomposición es conocido y demostrado por métodos más cortos, sin embargo, el acercamiento constructivo que Sheldon y Wade hacen es lo valioso.

4.2. El algoritmo para la bola unitaria

Los resultados anteriores llevaron a construir algoritmos rápidos para calcular soluciones exactas al problema de Dirichlet para el Laplaciano sobre la bola unitaria con información en la frontera dada por la restricción de un polinomio. Como este problema es lineal, es suficiente tratar el caso en que la función sobre la frontera es la restricción de un polinomio homogéneo. Se comenzará por una conocida consecuencia del corolario anterior,

Corolario 4.2.1. *Si $p \in \mathbb{PH}_m$, entonces la solución al problema de Dirichlet*

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \quad \text{en } B \\ u &= p\restriction_{\partial B} \text{ en } \partial B \end{aligned}$$

con $u \in C^2(B) \cap C\left(\overline{B}\right)$ es

$$\widehat{p} = p_m + p_{m-2} + \ldots + p_{m-2k}$$

donde $k = \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor$ y $p_{m-2j} \in \mathbb{PHA}_{m-2j}$ dados en el corolario anterior.

Demostración: El problema de Dirichlet para el Laplaciano sobre un dominio acotado tiene a lo más una solución en $C^2(B) \cap C\left(\overline{B}\right)$. Como el polinomio $\widehat{p}$ es armónico pues es suma de polinomios armónicos y es igual a p sobre ∂B, en vista del corolario anterior, entonces es la única solución al problema de Dirichlet en $C^2(B) \cap C\left(\overline{B}\right)$.$\blacksquare$

Para encontrar dicha solución lo único que hay que hacer es encontrar los p_{m-2j}. A continuación se mostrará una identidad entre operadores y se dará un fuerte uso del corolario 4.1.4 para mostrar que los p_{m-2j} son simplemente combinaciones lineales de un conjunto de polinomios fijo que dependen directamente de p, reduciendo el problema a resolver un sistema lineal. Deduzcamos primero la identidad,

i) *La identidad entre operadores*:
Para esto, se parte de la ecuación 4.4,

$$\Delta\left(\|x\|^t p\right) = \|x\|^t \Delta p + t(t+n+2m-2)\|x\|^{t-2} p$$

la cual es válida para $p \in \mathbb{PH}_m$. Luego, cambiando m por $m-2j$, t por $2j$ y suponiendo que $p \in \mathbb{PHA}_{m-2j}$, se tiene que

$$\Delta\left(\|x\|^{2j} p\right) = 2j(n+2m-2j-2)\|x\|^{2j-2} p$$

lo cual implica a su vez que $\forall m, \forall j,$ y $\forall p \in \mathbb{PHA}_{m-2j}$

$$\|x\|^2 \Delta\left(\|x\|^{2j} p\right) = 2j(n+2m-2j-2)\|x\|^{2j} p \tag{4.5}$$

De hecho, denotando por I_j el operador identidad sobre el espacio $\|x\|^{2j}\mathbb{PHA}_{m-2j}$, lo que se observó fue que para todo i y j existía una constante $c_{i,j}$ tal que

$$\|x\|^{2i}\Delta^i \equiv c_{i,j} I_j \quad \text{en} \quad \|x\|^{2j}\mathbb{PHA}_{m-2j} \tag{4.6}$$

Esto se mostrará por inducción sobre i, y lo que se tiene en la ecuación 4.5 es el caso base ($i=1$), con $c_{1,j} = 2j(2m+n-2j-2)$. Para $i=0$ es claro que la ecuación 4.6 también se cumple con $c_{0,j} = 1$ para todo j.

Supongamos por inducción que $\|x\|^{2i}\Delta^i \equiv c_{i,j} I_j$ en $\|x\|^{2j}\mathbb{PHA}_{m-2j}$. Al calcular $\|x\|^{2i+2}\Delta^{i+1}$ en un elemento de $\|x\|^{2j}\mathbb{PHA}_{m-2j}$ se obtiene que

$$\begin{aligned}
\|x\|^{2i+2}\Delta^{i+1}\left(\|x\|^{2j}p\right) &= \|x\|^{2i+2}\Delta\Delta^i\left(\|x\|^{2j}p\right) \\
&= \|x\|^{2i+2}\Delta\left(\frac{1}{\|x\|^{2i}}\|x\|^{2i}\Delta^i\left(\|x\|^{2j}p\right)\right)
\end{aligned}$$

Utilizando la hipótesis de inducción se tiene entonces que

$$\begin{aligned}
\|x\|^{2i+2}\Delta^{i+1}\left(\|x\|^{2j}p\right) &= \|x\|^{2i+2}\Delta\left(\frac{1}{\|x\|^{2i}}c_{i,j}\|x\|^{2j}p\right) \\
&= \|x\|^{2i+2}c_{i,j}\Delta\left(\|x\|^{2(j-i)}p\right)
\end{aligned}$$

Para seguir calculando se utilizará la ecuación 4.4 poniendo $t = 2j - 2i$ y cambiando m por $m - 2j$ pues $p \in \mathbb{PHA}_{m-2j}$. Así, después de simplificar,

$$\|x\|^{2i+2}\Delta^{i+1}\left(\|x\|^{2j}p\right) = c_{i,j}(2j-2i)(2m-2j-2i+n-2)\|x\|^{2j}p$$

luego, colocando $c_{i+1,j} \doteq (2j-2i)(2m-2j-2i+n-2)c_{i,j}$ se tiene que

$$\|x\|^{2(i+1)}\Delta^{i+1} \equiv c_{i+1,j}I_j$$

sobre $\|x\|^{2j}\mathbb{PHA}_{m-2j}$. Además, recursivamente, es fácil ver que

$$c_{i,j} = \begin{cases} 2^i \frac{j!}{(j-i)!}\prod\limits_{l=1}^{i}(2m-2j+n-2l) & \text{si } i \leq j \\ 0 & \text{si } i > j \end{cases}$$

ii) *Utilizando el corolario 4.1.4:*
Sea $p \in \mathbb{PH}_m$. Volviendo al cálculo de los p_{m-2j}, para $k = \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor$, se tiene que

$$p = p_m + \|x\|^2 p_{m-2} + \cdots + \|x\|^{2k}p_{m-2k}$$

Aplicando el operador $\|x\|^{2i}\Delta^i$ a ambos lados de la igualdad y utilizando la identidad entre operadores, la ecuación 4.6, se obtiene que para todo $i \in \{0, 1, \ldots, k\}$ y para todo $p \in \mathbb{PH}_m$,

$$\|x\|^{2i}\Delta^i p = \|x\|^{2i}\Delta^i \sum_{j=0}^{k} \|x\|^{2j}p_{m-2j} = \sum_{j=0}^{k} c_{i,j}\|x\|^{2j}p_{m-2j}$$

Las constantes $c_{i,j}$ definen una matriz $C \in \mathbf{M}_{k+1}(\mathbb{R})$, triangular superior, cuya entrada $C(i,j)$ es precisamente $c_{i,j}$. Así el último sistema de igualdades se puede escribir de la forma

$$\begin{pmatrix} p \\ \|x\|^2\Delta p \\ \vdots \\ \|x\|^{2i}\Delta^i p \\ \vdots \\ \|x\|^{2k}\Delta^k p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{0,0} & c_{0,1} & \cdots & c_{0,i} & \cdots & c_{0,k} \\ 0 & c_{1,1} & \cdots & c_{1,i} & \cdots & c_{1,k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_{i,i} & \cdots & c_{i,k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & c_{k,k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_m \\ \|x\|^2 p_{m-2} \\ \vdots \\ \|x\|^{2i}p_{m-2i} \\ \vdots \\ \|x\|^{2k}p_{m-2k} \end{pmatrix} \tag{4.7}$$

para todo $p \in \mathbb{PH}_m$. De la ecuación general de $c_{i,j}$ se deduce que $c_{i,i} \neq 0$ para todo i, teniendo así que la matriz C es invertible. Si se denota por D la inversa de C, la cual también es triangular superior, entonces se tiene el sistema lineal

$$\begin{pmatrix} p_m \\ \|x\|^2 p_{m-2} \\ \vdots \\ \|x\|^{2i} p_{m-2i} \\ \vdots \\ \|x\|^{2k} p_{m-2k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{0,0} & d_{0,1} & \cdots & d_{0,i} & \cdots & d_{0,k} \\ 0 & d_{1,1} & \cdots & d_{1,i} & \cdots & d_{1,k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{i,i} & \cdots & d_{i,k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & d_{k,k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ \|x\|^2 \Delta p \\ \vdots \\ \|x\|^{2i} \Delta^i p \\ \vdots \\ \|x\|^{2k} \Delta^k p \end{pmatrix} \tag{4.8}$$

para todo $p \in \mathbb{PH}_m$, donde $d_{i,j}$ es $D(i,j)$. Este sistema de ecuaciones escrito de manera no matricial sería

$$\|x\|^{2i} p_{m-2i} = \sum_{j=i}^{k} d_{i,j} \|x\|^{2j} \Delta^j p \tag{4.9}$$

para $i = 0, \ldots, k$, lo cual es equivalente a

$$p_{m-2i} = \sum_{j=i}^{k} d_{i,j} \|x\|^{2(j-i)} \Delta^j p \tag{4.10}$$

para $i = 0, \ldots, k$. Hemos mostrado que los p_{m-2i} son combinaciones lineales de un conjunto de polinomios fijo que depende de p, haciendo que nuestro problema ahora sea calcular los $d_{i,j}$. Para calcularlos vamos a mostrar una cierta unicidad de los $d_{i,j}$,

iii) *Una anotación acerca de los $d_{i,j}$:*
Denotemos por u_p el vector que multiplica a la matriz C en la ecuación 4.7 y por v_p el vector que multiplica a D en la ecuación 4.8. Notemos que si existiera otra matriz triangular superior $\widetilde{D} \in \mathcal{M}_{k+1}(\mathbb{R})$ que validara la ecuación 4.8 para todo $p \in \mathbb{PH}_m$ tomando el papel de D, entonces

$$\left(D - \widetilde{D}\right) v_p = 0$$

para todo $p \in \mathbb{PH}_m$. Como $v_p = C u_p$ y $DC = I_{k+1}$, la matriz identidad de dimensión $k+1$, entonces

$$\left(I_{k+1} - \widetilde{D}C\right) u_p = 0_{k+1}$$

para todo $p \in \mathbb{PH}_m$, donde 0_{k+1} es el vector de ceros. Ahora, sea $p \in \mathbb{PH}_m$ fijo, tal que los p_{m-2j} dados por el corolario 4.1.4 sean distintos de cero y supongamos que existe una combinación lineal de los $\|x\|^{2j}p_{m-2j}$, las componentes de u_p, que da cero; es decir, existen constantes $\{a_j\}_j$ tales que

$$a_0p_m + a_1\|x\|^2p_{m-2} + \cdots + a_k\|x\|^{2k}p_{m-2k} = 0$$

Por el corolario 4.1.4, como $0 \in \mathbb{PH}_m$, entonces $a_jp_{m-2j} = 0$ para todo j, implicando que $a_j = 0$ para todo j. Por lo tanto, las componentes de este u_p son un conjunto de polinomios linealmente independientes y nos permite concluir que la matriz $I_{k+1} - \widetilde{D}C$ es la matriz cero. Luego, $\widetilde{D}$ es la inversa de C, es decir, $\widetilde{D} = D$. Así, tenemos que D es la única matriz que valida la ecuación 4.8 para todo $p \in \mathbb{PH}_m$.

Volviendo al problema original, para encontrar la solución a nuestro problema de Dirichlet, lo que hay que buscar es a los $d_{i,j}$. Varios programas de computador calculan eficientemente la inversa de una matriz, sin embargo se presentará una fórmula recursiva entre los $d_{i,j}$ que permite llevar acabo cálculos más eficientes que calcular la inversa de una matriz.

iv) *Una fórmula recursiva para los $d_{i,j}$:*
Sabemos que $d_{i,i} = \frac{1}{c_{i,i}}$. Aplicando el Laplaciano de cada lado de la ecuación 4.10, recordando que p_{m-2i} es armónico y utilizando la ecuación 4.4 se tiene que

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta(p_{m-2i}) = \sum_{j=i}^{k} d_{i,j}\Delta\left(\|x\|^{2(j-i)}\Delta^j p\right) \\ &= \sum_{j=i}^{k} d_{i,j}\left[\|x\|^{2(j-i)}\Delta^{j+1}p\right. \\ &\quad \left. +2(j-i)(2m-4j+2j-2i+n-2)\|x\|^{2(j-i-1)}\Delta^j p\right] \end{aligned}$$

Ahora, multiplicando por $\|x\|^{2i}$ y separando las sumas,

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{j=i}^{k} d_{i,j}\left[\|x\|^{2j}\Delta^{j+1}p + 2(j-i)(2m-2j-2i+n-2)\|x\|^{2(j-1)}\Delta^j p\right] \\ &= \sum_{j=i}^{k} d_{i,j}\|x\|^{2j}\Delta^{j+1}p + \sum_{j=i}^{k} 2(j-i)(2m-2j-2i+n-2)d_{i,j}\|x\|^{2(j-1)}\Delta^j p \end{aligned}$$

Notando que el último término de la primera suma es cero pues $p \in \mathbb{PH}_m$ y que el primer término de la segunda suma claramente es cero, entonces

$$0 = \sum_{j=i}^{k-1} d_{i,j}\|x\|^{2j}\Delta^{j+1}p + \sum_{j=i+1}^{k} 2(j-i)(2m-2j-2i+n-2)d_{i,j}\|x\|^{2(j-1)}\Delta^j p$$

entendiendo que en el caso en que $i = k$ ambas sumas valen cero. Ahora, multiplicando por $\|x\|^2$ y haciendo un cambio en el índice de la primera suma, y sumando, se obtiene que

$$0 = \sum_{j=i+1}^{k} \left[d_{i,j-1} + 2(j-i)(2m-2j-2i+n-2)d_{i,j}\right] \|x\|^{2j}\Delta^j p$$

para $i \in \{0, \ldots, k\}$. Notemos que $d_{i,i-1} = 0$ para $i \geq 1$ pues la matriz D es triangular superior. Definamos $d_{0,-1} \doteq 0$. Luego podemos comenzar el índice en la suma anterior desde i y por lo tanto tener que

$$0 = \sum_{j=i}^{k} \left[d_{i,j-1} + 2(j-i)(2m-2j-2i+n-2)d_{i,j}\right] \|x\|^{2j}\Delta^j p$$

para $i \in \{0, \ldots, k\}$. Sumando ahora la ecuación 4.10 a la ecuación anterior multiplicada por $\|x\|^{-2i}$, se tiene que

$$\begin{aligned} p_{m-2i} &= \sum_{j=i}^{k} [d_{i,j} + d_{i,j-1} \\ &\quad +2(j-i)(2m-2j-2i+n-2)d_{i,j}] \|x\|^{2(j-i)}\Delta^j p \end{aligned} \tag{4.11}$$

para todo $i \in \{0, \ldots, k\}$. Este sistema de ecuaciones es como el que está en la ecuación 4.10, del cual sabemos que el conjunto de constantes $\{d_{i,j}\}$ (que forman a D) es el único que hace que las igualdades sean ciertas simultáneamente para todo $p \in \mathbb{PH}_m$. Por lo tanto, se concluye que

$$\forall i, \forall j \geq i, \qquad d_{i,j} = d_{i,j} + d_{i,j-1} + 2(j-i)(2m-2j-2i+n-2)d_{i,j}$$

Es decir,

$$\forall i, \forall j \geq i, \qquad -d_{i,j-1} = 2(j-i)(2m-2j-2i+n-2)d_{i,j}$$

El caso en que $j = i$, se obtiene de la igualdad anterior algo que ya se sabía del hecho de que D fuera una matriz triangular. Así, para todo $i \in \{0, \ldots, k\}$ y para todo $j \geq i$, con $j \leq k-1$, se tiene entonces que

$$d_{i,j+1} = \frac{-d_{i,j}}{2(j-i+1)(2m-2j-2i+n-4)}$$

Esta fórmula permite calcular a D fácilmente y por lo tanto calcular a los p_{m-2i}, solucionando así el problema de Dirichlet para el Laplaciano sobre la bola unitaria.

5. El algoritmo generalizado

Nuestro objetivo en este capítulo es construir un algoritmo eficiente para encontrar una solución del problema de Dirichlet para el Laplaciano sobre una cónica no hiperbólica, con información polinomial en la frontera. Específicamente, dado p un polinomio cualquiera en n variables y q un polinomio cuadrático no hiperbólico, resolver el problema

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \quad \text{en } Q \\ u &= p \quad \text{en } \partial Q \end{aligned}$$

en $C^2(Q) \cap C\left(\overline{Q}\right)$, donde $Q = \{x \in \mathbb{R}^n : q(x) < 0\}$.

El algoritmo de la sección anterior funciona cuando $q(x) = \|x\|^2 - 1$, y por lo tanto $Q = B$, la bola unitaria de $\mathbb{R}^n$. Ahora se quiere generalizar dicho algoritmo a funciones cuadráticas más generales. Inspirándonos en los pasos de Sheldon Axler y Wade Ramey, el teorema 3.2.4 es la clave para encontrar este algoritmo y al igual que ellos, dada la linealidad del problema, se supondrá que $p \in \mathbb{PH}_m$, es decir un polinomio homogéneo.

5.1. Desarrollo del algoritmo

Si $m \leq 1$, entonces no hay nada que hacer pues todo polinomio de grado menor o igual que uno es armónico. Luego, sea $m \geq 2$; en vista del teorema 3.2.4 existe un único $h \in \mathbb{PA}_m$ y un único $f \in \mathbb{P}_{m-2}$ tal que

$$p = h + qf \tag{5.1}$$

La tarea consiste en encontrar h, pero antes introducimos un poco de notación. Dado un polinomio cualquiera s, para cada i con $0 \leq i \leq \text{grado}(s)$ denotemos por s_i la parte homogénea de s de grado i. Así, la ecuación 5.1 se escribe de la forma

$$p = \sum_{i=0}^{m} h_i + (q_0 + q_1 + q_2) \sum_{i=0}^{m-2} f_i$$

Igualando las partes homogéneas se tiene el siguiente sistema de ecuaciones,

$$\begin{aligned}
p &= h_m + q_2 f_{m-2} \\
0 &= h_{m-1} + q_1 f_{m-2} + q_2 f_{m-3} \\
0 &= h_{m-2} + q_0 f_{m-2} + q_1 f_{m-3} + q_2 f_{m-4} \\
0 &= h_{m-3} + q_0 f_{m-3} + q_1 f_{m-4} + q_2 f_{m-5} \\
&\vdots \\
0 &= h_2 + q_0 f_2 + q_1 f_1 + q_2 f_0 \\
0 &= h_1 + q_0 f_1 + q_1 f_0 \\
0 &= h_0 + q_0 f_0
\end{aligned}$$

Para encontrar los h_i, y por lo tanto h, es necesario simultáneamente ir encontrando los f_i. Para esto se reescribe el sistema de ecuaciones anterior de la forma

$$\begin{aligned}
p &= h_m + q_2 f_{m-2} \\
-q_1 f_{m-2} &= h_{m-1} + q_2 f_{m-3} \\
-q_0 f_{m-2} - q_1 f_{m-3} &= h_{m-2} + q_2 f_{m-4} \\
-q_0 f_{m-3} - q_1 f_{m-4} &= h_{m-3} + q_2 f_{m-5} \\
&\vdots \\
-q_0 f_2 - q_1 f_1 &= h_2 + q_2 f_0 \\
-q_0 f_1 - q_1 f_0 &= h_1 \\
-q_0 f_0 &= h_0
\end{aligned}$$

Notemos que todas la ecuaciones, para l desde m hasta 2, son de la forma

$$P_l = H_l + q_2 F_{l-2} \tag{5.2}$$

donde P_l es un polinomio homogéneo de grado l, H_l es un polinomio homogéneo armónico de grado l y F_{l-2} es un polinomio homogéneo de grado $l-2$. En la primera ecuación P_m es conocido pues es p y si encontramos $F_{m-2}(f_{m-2})$ no sólo se encontraría el $H_m(h_m)$ correspondiente sino que $P_{m-1}(-q_1 f_{m-2})$ en la segunda ecuación sería ahora conocido. Este procedimiento se repite para todas las ecuaciones encontrando así los h_l, para l entre m y 2. De las dos últimas ecuaciones se calculan fácilmente h_1 y h_0 pues f_1 y f_0 ya fueron encontrados en las ecuaciones anteriores. Con todos los h_l se finaliza calculando h, la solución al problema original.

Luego, para l fijo entre 2 y m, se estudiará la ecuación $P_l = H_l + q_2 F_{l-2}$. Aplicando Δ a esta ecuación se tiene que

$$\Delta P_l = \Delta(q_2 F_{l-2}) \tag{5.3}$$

Por el lema 3.2.3 existe un único F_{l-2} que cumple esta ecuación. Como F_{l-2} es homogéneo de grado $l-2$, se le pondrá de la forma $F_{l-2}(x) = \sum_{\alpha,|\alpha|=l-2} \frac{D^\alpha F_{l-2}(0)}{\alpha!} x^\alpha$ y por lo tanto

$$\Delta P_l = \sum_{\alpha,|\alpha|=l-2} \frac{D^\alpha F_{l-2}(0)}{\alpha!} \Delta(q_2 x^\alpha) \tag{5.4}$$

Así, lo que hay que calcular son los coeficientes en esta expansión. Como $q_2(x) = \sum_i b_i^2 x_i^2 = \sum_i b_i^2 x^{2e_i}$, multiplicando por x^α, $q_2 x^\alpha = \sum_i b_i^2 x^{\alpha+2e_i}$. Tomando el laplaciano,

$$\begin{aligned}
\Delta(q_2 x^\alpha) &= \sum_j \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}(q_2 x^\alpha) = \sum_j \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\left(\sum_i b_i^2 x^{\alpha+2e_i}\right) \\
&= \sum_i \sum_j b_i^2 \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} x^{\alpha+2e_i} = \sum_i \sum_j b_i^2 (\alpha_j + 2\delta_{i,j})(\alpha_j + 2\delta_{i,j} - 1) x^{\alpha+2e_i-2e_j}
\end{aligned}$$

donde $\delta_{i,j}$ es el delta de Kronecker. Ahora, combinando con la ecuación 5.4 se tiene que

$$\Delta P_l = \sum_i \sum_j b_i^2 \sum_{\alpha,|\alpha|=l-2} \frac{(\alpha_j + 2\delta_{i,j})(\alpha_j + 2\delta_{i,j} - 1) D^\alpha F_{l-2}(0)}{\alpha!} x^{\alpha+2e_i-2e_j}$$

Sea $\beta \in \mathbb{N}^n$, cualquier multiíndice de orden $l-2$, es decir $|\beta| = l-2$, y calculemos en la ecuación anterior le derivada de orden β,

$$D^\beta \Delta P_l = \sum_i \sum_j b_i^2 \sum_{\alpha,|\alpha|=l-2} \frac{(\alpha_j + 2\delta_{i,j})(\alpha_j + 2\delta_{i,j} - 1) D^\alpha F_{l-2}(0)}{\alpha!} D^\beta x^{\alpha+2e_i-2e_j}$$

Notemos que para todo α multiíndice de orden $l-2$,

$$D^\beta x^{\alpha+2e_i-2e_j} = \begin{cases} \beta! & \text{si } \beta = \alpha + 2e_i - 2e_j \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

ya que β también tiene orden $l-2$. Haciendo uso de esto se deduce que

$$\begin{aligned}
D^\beta \Delta P_l &= \sum_i \sum_j b_i^2 \frac{(\beta_j + 2)(\beta_j + 1) D^{\beta-2e_i+2e_j} F_{l-2}(0) \beta!}{(\beta - 2e_i + 2e_j)!} \\
&= \sum_i \sum_j b_i^2 (\beta_i + 2\delta_{j,i})(\beta_i + 2\delta_{j,i} - 1) D^{\beta-2e_i+2e_j} F_{l-2}(0)
\end{aligned} \tag{5.5}$$

para todo $\beta \in \mathbb{N}^n$ con $|\beta| = l-2$. Esto es precisamente un sistema lineal de $\begin{pmatrix} l+n-3 \\ n-1 \end{pmatrix}$ ecuaciones con el mismo número de incógnitas, a saber los $\{D^\beta F_{l-2}(0)\}_{\beta,|\beta|=l-2}$. Para resolver este sistema lineal primero se organizarán las incógnitas. Notemos que, con β fijo, si $\beta - 2e_{i_1} + 2e_{j_1} = \beta - 2e_{i_2} + 2e_{j_2}$, entonces $-2e_{i_1} + 2e_{j_1} = -2e_{i_2} + 2e_{j_2}$. Si además $i_1 \neq j_1$ entonces $i_1 = i_2$ y $j_1 = j_2$. Luego al variar los índices de las sumatorias en la ecuación 5.5, la expresión $D^{\beta-2e_i+2e_j}F_l(0)$ no se repetirá salvo cuando $i = j$. Por lo tanto, separando las sumas, en esta misma ecuación se concluye que

$$\begin{aligned}
D^\beta \Delta P_l &= \sum_i \Big[b_i^2(\beta_i+2)(\beta_i+1)D^\beta F_{l-2}(0) \\
&\quad + \sum_{j\neq i} b_i^2 \beta_i(\beta_i-1) D^{\beta-2e_i+2e_j} F_{l-2}(0) \Big] \\
&= \left[\sum_i b_i^2(\beta_i+2)(\beta_i+1) \right] D^\beta F_{l-2}(0) \\
&\quad + \sum_i \sum_{j\neq i} b_i^2 \beta_i(\beta_i-1) D^{\beta-2e_i+2e_j} F_{l-2}(0)
\end{aligned}$$

para todo β multiíndice de orden $l-2$.

Al resolver este sistema lineal se obtendrán las derivadas de orden $l-2$ de F_{l-2} y por lo tanto F_{l-2} ya que

$$F_{l-2}(x) = \sum_{\alpha,|\alpha|=l-2} \frac{D^\alpha F_{l-2}(0)}{\alpha!} x^\alpha$$

Una vez F_{l-2} sea conocido se podrá calcular el $H_l(h_l)$ correspondiente de acuerdo con la ecuación 5.2. Haciendo esto para cada l entre 2 y m se obtendrá la parte homogénea de grado l de h y una vez se calcule h_1 y h_0 como se específico antes entonces se calcula h mismo pues es la suma de sus partes homogéneas.

5.2. Ejemplos

A continuación se presentan tres ejemplos de problemas de Dirichlet resueltos con el algoritmo generalizado, cuyo código se encuentra como un anexo a este documento. En cada ejemplo se presenta una solución, o la única, al problema de Dirichlet para el Laplaciano con información polinomial dada por un polinomio homogéneo p.

5.2.1. Ejemplo 1

Sea $n = 3$ y $q(x) = \sum_{i=1}^{3} x_i^2 - 1$. En este caso Q es B, la bola abierta unitaria de $\mathbb{R}^3$.

a) Para $p(x) = x_1^3$, $h(x) = \frac{3}{5}x_1 + \frac{2}{5}x_1^3 - \frac{3}{5}x_1x_2^2 - \frac{3}{5}x_1x_3^2$. Aquí es fácil verificar que h coincide con p sobre $\partial Q = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ y que h es armónico.

b) Con $p(x) = x_1^4 - x_2^4$, $h(x) = -\frac{6}{7}x_2^2 + \frac{6}{7}x_1^2 + \frac{1}{7}x_1^4 - \frac{1}{7}x_2^4 + \frac{6}{7}x_3^2x_2^2 - \frac{6}{7}x_3^2x_1^2$

c) Si $p(x) = x_1^2x_2^2x_3^2$, entonces

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{1}{105} - \frac{1}{55}x_3^4 + \frac{3}{55}x_2^2x_3^2 - \frac{1}{55}x_2^4 + \frac{3}{55}x_1^2x_3^2 + \frac{3}{55}x_1^2x_2^2 - \frac{1}{55}x_1^4 \\ &\quad + \frac{60}{77}x_1^2x_2^2x_3^2 - \frac{5}{77}x_1^2x_3^4 - \frac{5}{77}x_1^2x_2^4 - \frac{5}{77}x_1^4x_3^2 - \frac{5}{77}x_1^4x_2^2 + \frac{2}{231}x_1^6 \\ &\quad - \frac{5}{77}x_2^2x_3^4 - \frac{5}{77}x_2^4x_3^2 + \frac{2}{231}x_2^6 + \frac{2}{231}x_3^6 \end{aligned}$$

Para este caso ya no es fácil verificar fácilmente si h es solución del problema. En el mismo Maple se puede calcular el Laplaciano de h para verificar que es armónico, pero cómo verificar que h es igual a p en la frontera de Q?

En cuanto a la anterior pregunta, gracias a la proposición 3.3.1, notemos que $h = p$ sobre ∂Q si y sólo si $h - p$ es divisible por q. Luego podemos utilizar el mismo Maple para responder esto con tan sólo invocar una función que decida la divisibilidad. Para los tres casos mostrados, h es la única función en $C^2(B) \cap C\left(\overline{B}\right)$ que satisface el problema de Dirichlet.

5.2.2. Ejemplo 2

Sea $n = 3$ y $q(x) = x_1^2 + \frac{x_2^2}{4} + \frac{x_3^2}{9} - 1$. En este caso Q es un elipsoide de $\mathbb{R}^3$.

a) Con $p(x) = x_2^3$, $h(x) = \frac{108}{67}x_2 + \frac{40}{67}x_2^3 - \frac{108}{67}x_1^2x_2 - \frac{12}{67}x_3^2x_2$

b) Para $p(x) = x_2^4 - x_3^2$,

$$\begin{aligned} h(x) &= -\frac{1000512}{2358125} - \frac{38206296}{11790625}x_3^2 + \frac{31933656}{11790625}x_2^2 + \frac{114048}{214375}x_1^2 + \frac{84079}{240625}x_2^4 \\ &\quad - \frac{152729}{240625}x_3^4 + \frac{788184}{240625}x_1^2x_3^2 - \frac{632664}{240625}x_1^2x_2^2 - \frac{5184}{48125}x_1^4 + \frac{25638}{48125}x_2^2x_3^2 \end{aligned}$$

c) Si $p(x) = x_1^2x_2^2x_3^2$, entonces

$$\begin{aligned}
h(x) \quad = \quad & \frac{412490363760}{639960362789}x_1^2x_2^2x_3^2 - \frac{112294510150608}{559965317440375}x_1^2 \\
& -\frac{202691034996588}{4399727494174375}x_2^4 - \frac{153861753998112}{4399727494174375}x_3^4 \\
& -\frac{3105344700}{639960362789}x_1^2x_2^4 - \frac{71168536260}{639960362789}x_1^4x_3^2 \\
& -\frac{65643049260}{639960362789}x_1^4x_2^2 - \frac{19820741580}{639960362789}x_2^2x_3^4 \\
& -\frac{48927652380}{639960362789}x_2^4x_3^2 + \frac{2420142300}{639960362789}x_1^2x_3^4 \\
& +\frac{5724803223648}{879945498834875}x_1^4 + \frac{1620098602653024}{30798092459220625}x_2^2 \\
& +\frac{4556099455630416}{30798092459220625}x_3^2 + \frac{1107378555049152}{6159618491844125} \\
& -\frac{232359891350148}{4399727494174375}x_1^2x_3^2 + \frac{60615794640708}{4399727494174375}x_1^2x_2^2 \\
& +\frac{231106083067764}{879945498834875}x_2^2x_3^2 + \frac{1160039952}{639960362789}x_3^6 \\
& +\frac{3468866472}{639960362789}x_2^6 + \frac{9120772368}{639960362789}x_1^6
\end{aligned}$$

Este si que no sería para nada fácil de verificar!

5.2.3. Ejemplo 3

Sea $n = 3$ y $q(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1$. Luego Q es un subconjunto de $\mathbb{R}^3$ no acotado, pues es un cilindro que se extiende en la dirección del eje x_3 con sección transversal circular.

a) Si $p(x) = x_3^3$, entonces $h(x) = \frac{3}{2}x_3 + x_3^3 - \frac{3}{2}x_3x_1^2 - \frac{3}{2}x_3x_2^2$

b) Con $p(x) = x_3^4 - x_1^4$,

$$h(x) = \frac{3}{4} + 3x_3^2 - x_2^2 - 2x_1^2 + x_3^4 + \frac{1}{4}x_1^4 - 3x_1^2x_3^2 + \frac{3}{2}x_1^2x_2^2 - 3x_2^2x_3^2 + \frac{1}{4}x_2^4$$

c) Para $p(x) = x_1^2x_2^2x_3^2$,

$$\begin{aligned}
h(x) \quad = \quad & \frac{1}{16} + \frac{1}{8}x_3^2 - \frac{1}{16}x_1^2 - \frac{1}{16}x_2^2 - \frac{1}{80}x_2^4 + \frac{3}{40}x_1^2x_2^2 - \frac{1}{80}x_1^4 + \frac{3}{4}x_1^2x_2^2x_3^2 \\
& -\frac{1}{16}x_1^2x_2^4 - \frac{1}{8}x_1^4x_3^2 - \frac{1}{16}x_1^4x_2^2 + \frac{1}{80}x_1^6 - \frac{1}{8}x_2^4x_3^2 + \frac{1}{80}x_2^6
\end{aligned}$$

5.2.4. Ejemplo 4

Sea $n = 4$ y $q(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4$. Q es un subconjunto de $\mathbb{R}^4$ no acotado ya que es un cilindro que se extiende a lo largo de un eje paralelo al eje x_4, cuyas secciones transversales son paraboloides contenidos en $\mathbb{R}^3$ que se abren en ejes paralelos al eje x_3.

a) Para $p(x) = x_4^3$, $h(x) = -6x_4 + \frac{3}{2}x_4x_1 - 3x_4x_2 + \frac{9}{2}x_4x_3 + x_4^3 - \frac{3}{2}x_4x_1^2 - \frac{3}{2}x_4x_2^2$

b) Con $p(x) = x_1x_2x_3x_4$, $h(x) = x_1x_2x_3x_4$

6. Conclusiones y perspectivas

Las siguientes son formas de continuar el camino recorrido ya sea para darle aplicabilidad a este tema (en teoría de elasticidad, química, etc) o para ahondar más teóricamente.

6.1. En cuanto a la unicidad

- Sea p un polinomio. Sabemos que si q es un polinomio cuadrático no hiperbólico, entonces existe un único polinomio que soluciona el problema

$$\Delta u = 0 \quad \text{en } Q \tag{6.1}$$
$$u = p \quad \text{en } \partial Q \tag{6.2}$$

  donde $Q = \{x \in \mathbb{R}^n : q(x) < 0\}$. Sin embargo, será el conjunto de polinomios el subconjunto más grande de $C^2(\Omega) \cap C\left(\overline{\Omega}\right)$ en donde se de un resultado de unicidad en la solución para este problema?

- Por otro lado, por medio de un ejemplo, mostramos que el problema 6.1-6.2 con q un polinomio cuadrático hiperbólico no necesariamente tenía una única solución en el conjunto de los polinomios. Entonces cabe cuestionarnos, sobre qué familia de polinomios (o funciones) que contenga a los cuadráticos no hiperbólicos el resultado de unicidad se seguirá dando?

6.2. En cuanto al algoritmo

Sea q un polinomio cuadrático no hiperbólico. El algoritmo desarrollado para el problema 6.1-6.2 podría ahora ser complementado para resolver el problema de Dirichlet,

$$\Delta u = f \quad \text{en } Q \tag{6.3}$$
$$u = g \quad \text{en } \partial Q \tag{6.4}$$

donde $Q = \{x \in \mathbb{R}^n : q(x) < 0\}$ es acotado, $f \in C\left(\overline{Q}\right)$ y $g \in C(\partial Q)$.

Una manera de proceder podría ser utilizar el teorema de aproximación de Weierstrass para encontrar dos sucesiones de polinomios (de manera efectiva) que converjan uniformemente a f y a g, y así reducir la tarea a resolver el problema 6.3-6.4 para cuando f y g son polinomios.

Si $f \in \mathbb{P}_m$, por el teorema 3.2.3, existe un único polinomio $\widetilde{f} \in \mathbb{P}_{m-2}$ tal que

$$f = \Delta\left(q\widetilde{f}\right)$$

el cual puede ser calculado de la misma manera como se resolvió la ecuación 5.3. Por lo tanto, módulo el cambio de variable $v = u - q\widetilde{f}$, resolver el problema 6.3-6.4 es equivalente a resolver el problema

$$\begin{aligned} \Delta v &= 0 \quad \text{en } Q \\ v &= g \quad \text{en } \partial Q \end{aligned}$$

el cual ya tiene un algoritmo para ser resuelto.

A. Anexo: El algoritmo

El algoritmo generalizado fue programado en Maple para llevar acabo cálculos simbólicos. Sea p un polinomio homogéneo de grado m, con m mayor o igual que 2, y q un polinomio cuadrático no hiperbólico de la forma

$$\begin{aligned} q(x) &= q_2(x) + q_1(x) + q_0(x) \\ &= \sum_{i=1}^{n} b_i^2 x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} c_i x_i + d \end{aligned}$$

con $q_2(x) = \sum_{i=1}^{n} b_i^2 x_i^2$, $q_1(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$ y $q_0(x) = d$. El siguiente código incluye la construcción del sistema lineal que permite calcular el polinomio F_{l-2} de la ecuación

$$P_l = H_l + q_2 F_{l-2}$$

para cada l entre 0 y m. Con F_{l-2} calculado se procede a calcular el polinomio H_l, que es precisamente h_l, la parte homogénea de grado l de h. Al final se imprime el polinomio solución al problema de Dirichlet para el Laplaciano sobre la cónica definida por q con información polinomial en la frontera dada por p.

Las variables de entrada al algoritmo aparecen en negrilla la primera vez que son invocadas y son las siguientes:

i) **n**: Es la dimensión en la que se esté trabajando; todos los polinomios deben tener a lo mas n variables.

ii) **b2**: Es el vector que contiene los coeficientes de los términos cuadráticos de q. Luego para cada i entre 1 y n la posición i-ésima de **b2** deberá ser b_i^2.

iii) **c**: Es el vector que contiene los coeficientes de los términos lineales de q. Para cada i entre 1 y n la posición i-ésima de **c** debe ser c_i.

iv) **d**: Variable que recibirá el coeficiente independiente de q.

v) **p, m**: **p** tiene que ser un polinomio homogéneo de grado **m**.

A.1. Código en Maple

```
with(linalg): with(LinearAlgebra): # INVOCACIÓN DE LIBRERIAS
n:=4: # Dimensión en la que se está trabajando
x:=vector(n): # Vector con las variables x_1,x_2,...,x_n
x2:=vector(n): # Vector para manejar las x's al cuadrado
b2:=vector(n,[1,1,0,0]): # Coeficientes de los términos cuadráticos
                           de q
c:=vector(n,0): # Coeficientes de los términos lineales de q
d:=-1: # Coeficiente independiente de q
for i to n do # Creación de las x´s al cuadrado
 x2[i]:=x[i]**2:
od:
q0:=d: q1:=innerprod(x,c): q2:=innerprod(x2,b2):
q:=q2+q1+q0: # Creación de q
LlenaMulti:=proc(i,mproc) local j: global contador,conta,multi:
 if i=n+1 then
  if innerprod(conta,unos)=mproc then
   for j to n do multi[contador,j]:=conta[j]od:
    contador:=contador+1:
  fi:
 else
  for conta[i] from 0 by 1 to mproc do
   LlenaMulti(i+1,mproc):
  od:
 fi:
end proc: # PROCEDIMIENTO QUE CALCULA LA MATRIZ DE MULTIINDICES multi
m:=4: # Grado de homogenidad del polinomio
p:=x[1]**m: # Información polinomial en la frontera
P:=p: # Polinomio que se estará actualizando en la ecuación P=H+q2*F
h:=vector(m+1): # Vector que tendrá las partes homogéneas de H
alfa:=vector(n): # Vector auxiliar que ayuda a armar F a partir
                   de sus coeficientes
mloop:=m-2: # Variable que contiene el grado de F
F:=vector(mloop+1,0): # Vector que tendrá las partes homogéneas de F,
```

```
                         el de P=H+q2*F
for ecu to m+1 while mloop>=0 do # CALCULA F y H, LAS DE P=H+q2*F
 NumEcu:=binomial(mloop+n-1,n-1): # Número de multiíndices, tamaño
                                    de la matriz
 multi:=matrix(NumEcu,n): # Matriz que almacenará los multiínidices
 conta:=vector(n): # Vector auxiliar que variará sus coordenadas en
                    el proceso LlenaMulti
 unos:=vector(n,1): # Vector auxiliar para llevar a cabo sumas
 contador:=1: # Variable que llevará el control para cambiar de
               multiíndice en multi
 B:=vector(NumEcu): # Vector que contendrá a B, el de B=A*Coef(F)
 DP:=laplacian(P,x): # Variable que almacena el laplaciano del P de
                      turno
 LlenaMulti(1,mloop): # LLAMADO DEL PROCEDIMIENTO QUE CALCULA multi
 for i to NumEcu do # LOOP QUE CALCULA B, EL DE B=A*Coef(F)
  auxiliar:=DP:
  for j to n do
   if multi[i,j]=0 then
    auxiliar:=auxiliar:
   else
    auxiliar:=diff(auxiliar,x[j]$multi[i,j]):
   fi:
  od:
  B[i]:=auxiliar:
 od:
 A:=matrix(NumEcu,NumEcu,0): # Matriz que contendrá a A, la de B=A*Coef(F)
 ei:=vector(n,0): # Multiíndice con ceros salvo en i con un uno
 ej:=vector(n,0): # Multiíndice con ceros salvo en j con un uno
 suma:=0: # Variable que asigna valores a las entradas de la diagonal
           de A
 beta1:=vector(n): # Cambia con las filas de A, valiendo el
                    multiíndice correspondiente según multi
 beta2:=vector(n): # Cambia con las columnas de A, valiendo el
                    multiíndice correspondiente según multi
 igual:=1: # Variable que controla si beta2 coincide con beta1+2ej-2ei
```

```
for i to NumEcu do # LOOP QUE CALCULA LA MATRIZ A, LA DE B=A*Coef(F)
 for j to n do beta1[j]:=multi[i,j]: od:
 for k to NumEcu do
  for j to n do beta2[j]:=multi[k,j]: od:
  for i1 to n do
   ei[i1]:=1:
   for j1 to n do
    ej[j1]:=1:
    igual:=1:
    for j to n do
     if beta2[j]<>beta1[j]+2*ej[j]-2*ei[j] then
      igual:=0:
     fi:
    od:
    if igual=1 then
     if i=k then
      suma:=0:
      for j to n do
       suma:=suma+b2[j]*(beta1[j]+2)*(beta1[j]+1)
      od:
      A[i,k]:=suma:
     else
      A[i,k]:=b2[i1]*beta1[i1]*(beta1[i1]-1):
     fi:
    fi:
    ej:=vector(n,0):
   od:
   ei:=vector(n,0):
  od:
 od:
od:
ANum:=convert(A,Matrix): # Convierte A de símbolos a números
BNum:=convert(B,Vector): # Convierte B de símbolos a números
DerNum:=LinearSolve(ANum,BNum): # RESUELVE EL SISTEMA LINEAL B=A*Coef(F)
Der:=convert(DerNum,vector): # Convierte DerNum de números a símbolos
```

```
 F[mloop+1]:=0: # Valor inicial F que se afectará en el Loop siguiente
                  de acuerdo a Der
 for i to NumEcu do # LOOP QUE CALCULA F DE SUS COEFICIENTES,
                      ALMACENADOS EN Der
  denominador:=1:
  monomio:=1:
  for j to n do
   alfa[j]:=multi[i,j]:
   denominador:=denominador*(alfa[j]!):
   monomio:=monomio*x[j]**alfa[j]:
  od:
  F[mloop+1]:=F[mloop+1]+(Der[i]/denominador)*monomio:
 od:
 h[mloop+1+2]:=P-q2*F[mloop+1]: # Cálculo del H de P=H+q2*F
 if mloop=m-2 then P:=-q1*F[mloop+1]:
 else P:=-q0*F[mloop+1+1]-q1*F[mloop+1]:
 fi: # Cálculo del siguiente P, el de P=H+q2*F
 mloop:=mloop-1: # Actualiza a mloop
od:
h[1+1]:=-q0*F[1+1]-q1*F[0+1]:
h[0+1]:=-q0*F[0+1]:
hpoly:=0: # Valor inicial a la variable que almacenará al polonomio h,
            la solución
for u to m+1 do
 hpoly:=hpoly+h[u]:
od:
print(simplify(hpoly)): # Imprime en pantalla el polinomio h,
                          solución del problema
```

Bibliografía

[WR] Walter Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill series in Higher Mathematics (1980).

[LE] Lawrence Evans, *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics AMS (1998).

[SA1] Sheldon Axler, Paul Bordon and Wade Ramey, *Harmonic Function Theory*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 1992.

[SA2] Sheldon Axler y Wade Ramey, *Harmonic polynomials and Dirichlet-type problems*, Proc. Amer. Math.Soc. 123 (1995), 3675-3773.

[JB] John A. Baker, *The Dirichlet problem for ellipsoids*, Amer. Math. Monthly 106 (1999), 829-834.