NUEVOS PRECONDICIONADORES:

APROXIMACIÓN CON DISTANCIAS MATRICIALES

Por

Juan Carlos Martínez Escobar.

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

BOGOTÁ D.C.
2005

NUEVOS PRECONDICIONADORES:
APROXIMACIÓN CON DISTANCIAS MATRICIALES

Trabajo de Tesis presentado a la Facultad de Ciencias de la Universidad de los Andes como requisito parcial para optar al título de Magister en Matemáticas.

Por

Juan Carlos Martínez Escobar.

Director:

Ahmed Ould.

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

BOGOTÁ D.C.
2005

Tesis sustentada y aprobada
en la Universidad de los Andes
el día 15 de junio de 2005
ante un jurado compuesto por los doctores

Ahmed Ould
Universidad de los Andes

Carlos E. Mejia
Universidad Nacional de Colombia

René Meziat
Universidad de los Andes

Agradecimientos

Agradezco a mi esposa y a mis hijas, Beatriz Johanna, Paula Alejandra y Laura Daniela, a mis padres Isaias y Teresa, ya que su apoyo fue fundamental para mí durante estos dos años.
Quiero agradecer a la Universidad de los Andes por haberme dado la oportunidad de continuar mi formación académica en matemáticas, al profesor Ahmed Ould, ya que fue un maestro, que me acompañó y orientó durante el desarrollo de este trabajo.
A mis compañeros y a los profesores que a lo largo de estos años contribuyeron a mi formación en este centro educativo a todos ellos muchas gracias.

A Johanna, Paula y Daniela
que son la luz de mi vida.
A mis padres
Isaias y Teresa,
que me han dado tanto.

INTRODUCCIÓN

El objetivo de este trabajo es encontrar y estudiar nuevos precondicionadores para sistemas lineales $Ax = b$, con matrices generales. También consideramos el caso en que la matriz A es particionada por bloques. En especial centramos nuestra atención en sistemas de Toeplitz y Toeplitz por bloques.
Un precondicionador de un sistema $Ax = b$ es una matriz P por medio de la cual se puede modificar el sistema original, considerando en su lugar el problema modificado $P^{-1}Ax = P^{-1}b$. En general la matriz P se elige de forma que el sistema $Pr = d$ sea facil de resolver y que el espectro de $P^{-1}A$ esté acumulado alrededor de 1, lo cual es un concepto que definimos en el capítulo 1.
Los sistemas de Toeplitz surgen en una gran variedad de aplicaciones en matemática e ingeniería tales como procesamiento de señales, series de tiempo entre otras (ver [16] y [17]). En la actualidad existe una literatura abundante sobre sistemas de Toeplitz, la mayor parte desarrollada en las dos últimas décadas. En 1986 Strang (ver [18]) propone un precondicionador circulante para estos sistemas y a partir de ahi un gran número de precondicionadores para dichos sistemas han sido propuestos y de los cuales mencionamos algunos, como el precondicionador de Chan, el de Tyrtishnikov que pueden definirse para matrices arbitrarias pero son usados principalmente para sistemas de Toeplitz así como también el precondicionador de Strang que es para sistemas de Toeplitz.

En el primer capítulo enunciamos algunas definiciones y teoremas básicos de teoría de matrices, así como también damos una descripción del método de gradiente conjugado y algunas de sus propiedades más importantes. Se expone el precondicionador de Chan para matrices arbitrarias caracterizándolo y enunciando algunas de sus propiedades, el de Tyrtystnikov y en el caso de sistemas de Toeplitz el de Strang.

En el segundo y tercer capítulo exponemos nuestros aportes a este estudio. Así en el segundo capítulo definimos precondicionadores puntuales para matrices Hermitianas utilizando un problema de optimización con el fin de minimizar una norma matricial sobre ciertos espacios vectoriales específicos, esto va a permitir que preserven una caracteristica común importante de los precondicionadores conocidos que consideramos. Nosotros básicamente lo que hacemos es utilizar como norma la norma de Fröbenius respecto a dos matrices definidas positivas y reformular el problema de minimización como un problema en el cual hay que encontrar la proyección de la matriz del sistema sobre ciertos espacio particulares, este procedimiento nos permitio encontrar una familia muy general de precondicionadores de la cual los precondicionadores de Chan y Tyrtystnikov son casos particulares. También consideramos, tal vez los dos casos particulares más importantes de nuestra

familia de precondicionadores y probamos que en estos casos el espectro de $P^{-1}A$ está acumulado alrededor de 1 lo cual muestra que en este caso lo precondicionadores obtenidos por nosotros son en ese sentido "buenos precondicionadores".
En el tercer capítulo presentamos una serie de precondicionadores para bloques existentes en la literatura y además presentamos nuestras generalizaciones usando un camino similar al descrito en el capítulo dos para precondicionadores puntuales.

CAPÍTULO 1

Definiciones, notación y teoremas básicos

1.1. Introducción

En este capítulo, se introducen las definiciones básicas, la notación y los principales resultados para esta tesis. Se expone el método del gradiente conjugado no precondicionado y precondicionado, se definen los principales precondicionadores circulantes y se enuncian algunas de sus propiedades más importantes.

1.2. Espacios vectoriales

Asumiremos como conocidas, la noción de *espacio vectorial* V sobre un cuerpo F ($F = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$), las definiciones de *subespacio, transformación lineal, independencia lineal, base y dimensión.*
En general, si $x \in F^n$ ($F = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$), su componente i-ésima estará representada por x_i, es decir, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$.
Dado un espacio vectorial V sobre un cuerpo F ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$), diremos que una aplicación $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to F$ es un *producto interior*, si para todo $x, y, z \in V$:

1. $\langle x, x \rangle \geq 0$,

1a. $\langle x, x \rangle = 0$, si y sólo si $x = 0$,

2. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$,

3. $\langle cx, y \rangle = c\langle x, y \rangle$ para todo escalar $c \in F$,

4. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$,

Así por ejemplo, dados $x, y \in \mathbb{C}^n$, $x^T \overline{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$ es un producto interior de $\mathbb{C}^n$.
Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo F ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$), una función $\| \cdot \| : V \to \mathbb{R}$, es una *norma vectorial*, si para todo $x, y \in V$:

1. $\|x\| \geq 0$,

1a. $\|x\| = 0$ si, y sólo si, $x = 0$,

2. $\|cx\| =| c | \|x\|$, para todo $c \in F$,

3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Denotaremos con $\mathbb{R}^n$ al espacio de *n-vectores columna con componentes reales*, y con $\mathbb{C}^n$, el espacio de *n-vectores columna con componentes complejas.*
El vector de F^n cuyas componentes son todas iguales a 1, lo notaremos como $\mathbf{e} = (1, 1, \ldots, 1)$, mientras que e_j representará al vector cuya j-ésima componente es 1 y las demás componentes son 0.
Sea $x \in F^n$ ($F = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$). Se definen las normas l_p de x, con $1 \leq p < \infty$ como:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} | x_i |^p \right)^{1/p} .$$

Cuando no haya lugar a confusión notaremos $\| \cdot \|_2$ simplemente como $\| \cdot \|$.

1.3. Matrices

Asumiremos como conocida la definición de *matriz*, y sus operaciones básicas. Al conjunto de matrices $n \times n$, con coeficientes sobre un cuerpo F, lo notaremos como $\mathbb{M}_n(F)$.
A continuación enunciamos una serie de definiciones importantes dentro del desarrollo de este trabajo.
Sea $A = (a_{ij})$, con $a_{ij} \in \mathbb{C}$, la *transpuesta* de A es una matriz de $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, cuya componente (i, j) es la componente a_{ji} de A. Dicha matriz la notaremos como A^T. La matriz *adjunta hermitiana* A^* de A, se define por $A^* = \overline{A^T}$.
Diremos que A es *hermitiana*, si $A^* = A$, es *simétrica*, si $A^T = A$ y es *normal* si $A^*A = AA^*$.
La matriz *identidad* $I_n = (a_{ij})_{n \times n}$, se define como aquella para la cual se tiene que $a_{ii} = 1$, y $a_{ij} = 0$ en otro caso.
Diremos que v es un *vector propio* o *autovector* de $A \in \mathbb{M}_n(F)$, si $v \neq 0$ y existe $\lambda \in \mathbb{C}$, tal que $Av = \lambda v$. Al escalar λ, lo llamaremos un *valor propio* o *autovalor* de A asociado a v; también usaremos $\lambda_i(A)$ cuando queramos hacer énfasis sobre la matriz de la cual es autovalor. Al conjunto de valores propios de A lo llamaremos *espectro o conjunto espectral* de A y se nota como $\lambda(A)$. El *radio espectral* de una matriz $A \in \mathbb{M}_n$ es

$$\rho(A) = \text{máx}\{|\lambda|;\ \lambda \textit{ es un valor propio de } A\}.$$

Diremos que σ es un *valor singular* de A si es la raiz cuadrada positiva de un valor propio de A^*A. Los valores singulares de una matriz siempre son números reales nonegativos, además satisfacen el siguiente teorema.

Teorema 1.3.1. *Sea $A \in \mathbb{M}_n$ para todo valor propio λ de A se tiene que (ver [12])*

$$\sigma_{min}(A) \leq |\lambda| \leq \sigma_{max}(A). \tag{1.1}$$

El conjunto de todos los valores singulares de A se notará como $\sigma(A)$.
La *traza* de $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, es el valor

$$Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Una *norma matricial* $|||\cdot|||$ sobre $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, es una norma tal que si $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, entonces $|||AB||| \leq |||A||| \cdot |||B|||$.
La *norma de Fröbenius* o *norma euclidiana* de A, está definida como

$$\|A\|_F = (Tr(A^*A))^{1/2} = \left(\sum_{i,j}^{n} |a_{ij}|^2\right)^{1/2}.$$

Una propiedad importante de la norma de Fröbenius o norma euclidiana es

Teorema 1.3.2. *La norma de Fröbenius es una norma matricial.*

Se asocia con cada norma vectorial $||\cdot||$ en $\mathbb{C}^n$ una norma matricial natural $|||\cdot|||$ inducida por $||\cdot||$ en $\mathbb{M}_n$ (ver [11]).

Definición 1.3.1. *Sea $||\cdot||$ una norma vectorial en $\mathbb{C}^n$. Se define la norma matricial inducida por la norma vectorial como $|||\cdot|||$ en $\mathbb{M}_n$ mediante*

$$|||A||| = \max_{||x||=1} ||Ax||.$$

Los siguientes teoremas son tomados de [11]

Teorema 1.3.3. *La función $|||\cdot|||$ definida en 1.3.1 es una norma matricial en $\mathbb{M}_n$, además $||Ax|| \leq |||A|||\|x\|$ para toda matriz $A \in \mathbb{M}_n$ y todo $x \in \mathbb{C}^n$, y $|||I||| = 1$.*

Algunas normas matriciales inducidas de normas vectoriales son

1. $||A||_1 = \max\limits_{||x||_1=1} ||Ax||_1 = \max\limits_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$,
2. $||A||_\infty = \max\limits_{||x||_\infty=1} ||Ax||_\infty = \max\limits_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$,
3. $||A||_2 = \max\limits_{||x||_2=1} ||Ax||_2 = \max\{\sqrt{\lambda}; \lambda \text{ es un valor propio de } A^*A\} = \sigma_{max}(A)$.

Teorema 1.3.4. *Si $|||\cdot|||$ es una norma matricial y si $A \in \mathbb{M}_n$, entonces $\rho(A) \leq |||A|||$.*

También se tiene que

Teorema 1.3.5. *Sea $A \in \mathbb{M}_n$, entonces*

$$\|A\|_2^2 \leq \|A\|_1 \|A\|_\infty.$$

Además si A es Hermitiana, entonces $\|A\|_2 \leq \|A\|_1 = \|A\|_\infty$.

Una matriz $U \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ es *unitaria*, si $U^*U = UU^* = I_n$. Además, decimos que $Q \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ es *ortogonal*, si $Q^TQ = QQ^T = I_n$.
$T = (t_{ij})_{n\times n} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ es *triangular superior* si $t_{ij} = 0$ siempre que $i > j$. $D = (d_{ij})_{n\times n}$ es una matriz *diagonal*, si $d_{ij} = 0$, cuando $i \neq j$. En el caso en que $d_{11} = d_{22} = \cdots = d_{nn}$, diremos que D es una matriz *escalar*.
Una matriz $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ es *diagonalizable*, si existe una matriz no singular U y una matriz diagonal $D \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, tales que $D = U^{-1}AU$. Si U es unitaria, entonces diremos que A es *unitariamente diagonalizable*.
A continuación enunciamos uno de los teoremas sobre factorización de matrices más importantes (ver [11], pg. 79).

Teorema 1.3.6. *(Teorema de Schur) Sean, $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ y $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sus valores propios. Entonces, existe una matriz unitaria $U \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, tal que la matriz*

$$U^*AU = T = (t_{ij})_{n\times n}$$

es triangular superior, con $t_{ii} = \lambda_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Además, si $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, y todos los autovalores de A son reales, entonces U puede ser escogida de tal forma que sea real y ortogonal.

Uno de los teoremas fundamentales acerca de las matrices Hermitianas (ver [11]) es,

Teorema 1.3.7. *(Teorema espectral para matrices Hermitianas) Sea $A \in \mathbb{M}_n$. Entonces A es Hermitiana si, y sólo si, existe una matriz unitaria $U \in \mathbb{M}_n$ y una matriz real diagonal $\Lambda \in \mathbb{M}_n$ tal que $A = U\Lambda U^*$. Además, A es real y Hermitiana (es decir, simétrica real) si, y sólo si, existe una matriz real ortogonal $Q \in \mathbb{M}_n$ y una matriz real diagonal $\Lambda \in \mathbb{M}_n$ tal que $A = Q\Lambda Q^T$.*

Asumiremos la noción de *determinante* de una matriz, así como sus propiedades básicas, usaremos la notación $det(\cdot)$ para representarlo.
Sea $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ una matriz hermitiana, entonces decimos que A es:

(*i.*) *definida positiva (d.p.)*, si $x^TAx > 0$, para todo $x \in \mathbb{C}^n$, $x \neq 0$,

(*ii.*) *semidefinida positiva (s.d.p.)*, si $x^TAx \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{C}^n$,

(*iii.*) *definida negativa (d.n.)*, si $x^TAx < 0$, para todo $x \in \mathbb{C}^n$, $x \neq 0$,

(*iv.*) *semidefinida negativa (s.d.n.)*, si $x^TAx \leq 0$, para todo $x \in \mathbb{C}^n$.

El siguiente teorema, da una caracterización de las matrices definidas positivas (semidefinidas positivas) y de las definidas negativas (semidefinidas positivas), en términos de sus valores propios (ver [11], pg.402).

Teorema 1.3.8. *Sea $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ una matriz hermitiana, y sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sus valores propios. Entonces,* *(i.)* *A es d.p., si y sólo si,* $\lambda_i > 0$, *para todo* $i = 1, 2, \ldots, n$,

(ii.) *A es s.d.p., si y sólo si,* $\lambda_i \geq 0$, *para todo* $i = 1, 2, \ldots, n$,

(iii.) *A es d.n., si y sólo si,* $\lambda_i < 0$, *para todo* $i = 1, 2, \ldots, n$,

(iv.) *A es s.d.n., si y sólo si,* $\lambda_i \leq 0$, *para todo* $i = 1, 2, \ldots, n$.

A continuación enunciamos algunos teoremas sobre desigualdades para valores propios los cuales seran usados a lo largo de este trabajo (ver [15]). Además supondremos que los valores propios de A y de B están ordenados de manera decreciente es decir $\lambda_1(A) \geq \cdots \geq \lambda_n(A)$ y $\lambda_1(B) \geq \cdots \geq \lambda_n(B)$.

Teorema 1.3.9. *(Weyl) Sean A y B matrices Hermitianas de tamaño $n \times n$. Si $1 \leq k \leq i \leq n$ y $1 \leq l \leq n - i + 1$, entonces*

$$\lambda_{i+l-1}(A) + \lambda_{n-l+1}(B) \leq \lambda_i(A + B) \leq \lambda_{i-k+1}(A) + \lambda_k(B). \tag{1.2}$$

En particular,

$$\lambda_i(A) + \lambda_n(B) \leq \lambda_i(A + B) \leq \lambda_i(A) + \lambda_1(B) \tag{1.3}$$

y además

$$\lambda_n(A) + \lambda_n(B) \leq \lambda_n(A + B),$$

$$\lambda_1(A + B) \leq \lambda_1(A) + \lambda_1(B).$$

Para los valores singulares tenemos el siguiente resultado.

Teorema 1.3.10. *(Weyl) Sean A y B matrices de tamaño $n \times n$. Si $1 \leq k \leq i \leq n$ y $1 \leq l \leq n - i + 1$, entonces*

$$\sigma_i(A + B) \leq \sigma_{i-k+1}(A) + \sigma_k(B). \tag{1.4}$$

En particular,

$$\sigma_i(A + B) \leq \sigma_i(A) + \sigma_1(B) \tag{1.5}$$

y además

$$\sigma_1(A + B) \leq \sigma_1(A) + \sigma_1(B).$$

Teorema 1.3.11. *Sean A y B matrices Hermitianas positivas semidefinidas de tamaño $n \times n$. Si $1 \leq k \leq i \leq n$ y $1 \leq l \leq n - i + 1$, entonces*

$$\lambda_{i+l-1}(A)\lambda_{n-l+1}(B) \leq \lambda_i(AB) \leq \lambda_{i-k+1}(A)\lambda_k(B). \tag{1.6}$$

En particular,

$$\lambda_i(A)\lambda_n(B) \leq \lambda_i(AB) \leq \lambda_i(A)\lambda_1(B) \tag{1.7}$$

y además

$$\lambda_n(A)\lambda_n(B) \leq \lambda_n(AB),$$

$$\lambda_1(AB) \leq \lambda_1(A)\lambda_1(B).$$

Análogo al teorema anterior para valores singulares se tiene que

Teorema 1.3.12. *Sean A y B matrices de tamaño $n \times n$. Si $1 \leq k \leq i \leq n$ y $1 \leq l \leq n-i+1$, entonces*

$$\sigma_{i+l-1}(A)\sigma_{n-l+1}(B) \leq \sigma_i(AB) \leq \sigma_{i-k+1}(A)\sigma_k(B). \tag{1.8}$$

En particular,

$$\sigma_i(A)\sigma_n(B) \leq \sigma_i(AB) \leq \sigma_i(A)\sigma_1(B) \tag{1.9}$$

y además

$$\sigma_n(A)\sigma_n(B) \leq \sigma_n(AB),$$

$$\sigma_1(AB) \leq \sigma_1(A)\sigma_1(B).$$

1.3.1. Producto de Kronecker

Sea $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{m\times n}$ y $B \in \mathbb{M}_{p\times q}$. Definimos el *producto de Kronecker* como aquella matriz de tamaño $mp \times nq$ dada por

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{pmatrix}.$$

Algunas de las propiedades principales del producto de Kronecker están dadas en el siguiente teorema (ver [11])

Teorema 1.3.13. *Sean $\alpha \in \mathbb{C}$, $A \in \mathbb{M}_{m\times n}$ y $B \in \mathbb{M}_{p\times q}$. Se tiene que*

1. *Si $x, y \in \mathbb{C}^n$ entonces $xy^T = x \otimes y^T$.*
2. $(\alpha A) \otimes B = A \otimes (\alpha B)$.
3. $(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T$.
4. $(A \otimes B)^* = A^* \otimes B^*$.
5. $(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$
6. $(A + B) \otimes C = A \otimes C + A \otimes C$.
7. $A \otimes (B + C) = A \otimes B + A \otimes C$.
8. *$(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD)$, donde $C \in \mathbb{M}_{n\times k}$ y $D \in \mathbb{M}_{q\times r}$.*
9. *Si $A, B \in \mathbb{M}_n$ son matrices invertibles , entonces también $A \otimes B$ es invertible y además $(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$.*

10. $\text{rango}(A \otimes B) = \text{rango}(A) * \text{rango}(B)$.

11. *Sean $A \in \mathbb{M}_n$ y $B \in \mathbb{M}_m$. Si $\lambda \in \lambda(A)$ y $x \in \mathbb{C}^n$ es un vector propio de A asociado a λ, mientras que $\mu \in \lambda(B)$ e $y \in \mathbb{C}^n$ es un vector propio asociado a μ, entonces $\lambda\mu \in \lambda(A \otimes B)$ y $x \otimes y \in \mathbb{C}^{nm}$ es vector propio de $A \otimes B$ asociado a dicho valor propio. Todo valor propio de $A \otimes B$ puede ser expresado como producto de valores propios de A y B. Si $\lambda(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ y $\lambda(B) = \{\mu_1, \ldots, \mu_m\}$, entonces $\lambda(A \otimes B) = \{\lambda_i \mu_j;\ I = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, m\}$ (incluyendo multiplicidades algebraicas). En particular, $\lambda(A \otimes B) = \lambda(B \otimes A)$.*

12. *Si $A \in \mathbb{M}_n$ y $B \in \mathbb{M}_m$ son matrices Hermitianas (semi)definidas positivas, entonces $A \otimes B$ es también una matriz hermitiana (semi)definida positiva.*

1.3.2. Vectorización

A cada matriz $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{m,n}$ podemos asociarle el vector $\text{vec}(A) \in \mathbb{C}^{mn}$ definido como

$$\text{vec}(A) = (a_{11}, \ldots, a_{m1}, a_{12}, \ldots, a_{m2}, \ldots, a_{1n}, \ldots, a_{mn})^T.$$

Algunas propiedades del operador *vec* son las siguientes

1. Si $A \in \mathbb{M}_{m,n}$ y $B \in \mathbb{M}_{n,m}$, entonces
$$Tr(AB) = \text{vec}(A)^T \text{vec}(B^T) = \text{vec}(A^T)^T \text{vec}(B).$$

2. Si $A \in \mathbb{M}_{m,n}$, $B \in \mathbb{M}_{p,q}$ y $C \in \mathbb{M}_{n,p}$, entonces
$$\text{vec}(ACB) = (B^T \otimes A)\text{vec}(C).$$

1.3.3. Producto de Hadamard

Sean $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{m,n}$ y $B = (b_{ij}) \in \mathbb{M}_{m,n}$ Definimos el *producto de Hadamard* entre A y B como $A \odot B = (a_{ij} b_{ij}) \in \mathbb{M}_{m,n}$.
Dados los conjuntos de índices $\alpha \subseteq \{1, 2, \ldots, m\}$ y $\beta \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$, la submatriz de $C = (c_{ij}) \in \mathbb{M}_{m,n}$ obtenida tomando los c_{ij} tales que $i \in \alpha$ y $j \in \beta$ se denota como $C(\alpha, \beta)$.
Algunas propiedades del producto de Hadamard son las siguientes

1. Si $A, B \in \mathbb{M}_{m,n}$, entonces
$$A \odot B = (A \otimes B)(\alpha, \beta)$$
donde $\alpha = \{1, m+2, 2m+3, \ldots, m^2\}$ y $\beta = \{1, n+2, 2n+3, \ldots, n^2\}$. En particular, si $m = n$, $A \odot B$ es una submatriz principal de $A \otimes B$.

2. Si $A, B \in \mathbb{M}_{m,n}$ y si $D \in \mathbb{M}_m$ y $E \in \mathbb{M}_n$ son matrices diagonales entonces
$$\begin{aligned} D(A \odot B)E &= (DAE) \odot B = (DA) \odot (BE) \\ &= (AE) \odot (DB) = A \odot (DBE). \end{aligned} \tag{1.10}$$

Enunciamos a continuación el teorema más importante acerca del producto de Hadamard (ver [12])

Teorema 1.3.14. *Si $A, B \in \mathbb{M}_n$ son matrices Hermitianas definidas positivas, entonces también lo es la matriz $A \odot B$, además si A y B son positivas definidas, $A \odot B$ es positiva definida.*

1.4. Método del gradiente conjugado

El método del gradiente conjugado fue inventado en los años cincuenta como una técnica para resolver sistemas lineales positivos definidos de gran dimensión y ha sido usado de manera extensiva a lo largo de los últimos veinte años como un método iterativo.
Consideremos el sistema lineal de ecuaciones $Ax = b$, donde $A \in \mathbb{M}_n$ es una matriz no singular Hermitiana definida positiva y $b \in \mathbb{C}^n$. Consideremos además la función de costo cuadrático

$$\phi(x) := x^*Ax - x^*b. \tag{1.11}$$

Es facil ver que el vector $u \in \mathbb{C}^n$ que minimiza a ϕ satisface $Au - b = 0$ y por lo tanto coincide con la solución del sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$.
Dado un vector inicial $x_0 \in \mathbb{C}^n$ para x y el correspondiente residual inicial $r_0 = b - Ax_0$, la $k-$ésima iteración $x_k \in \mathbb{C}^n$ de el método del gradiente conjugado es determinada por el vector que minimiza ϕ sobre todos los vectores x en el subespacio $x_0 + K_k$, donde K_k es el *$k-$ésimo subespacio de Krylov*

$$K_k := \text{gen}\{r_0, Ar_0, \ldots, A^{k-1}r_0\}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Lo anterior quiere decir que la minimización en el $k-$ésimo paso es realizada sobre el conjunto de todos los vectores x que pueden ser expresados de la forma

$$x = x_0 + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j A^j r_0 \tag{1.12}$$

Para algunos coeficientes $\{\alpha_j\}$. Si ahora introducimos la norma

$$\|x\|_A := \sqrt{x^*Ax},$$

Se puede demostrar que el minimizador x_k de ϕ sobre $x_0 + K_k$ es el mismo minimizador de $\|x_t - x\|_A$ sobre $x_0 + K_k$. Usando (1.12), podemos decir que

$$x_t - x = x_t - x_0 - \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j A^j r_0.$$

Pero como $r_0 = b - Ax_0 = A(x_t^* - x_0)$, obtenemos

$$x_t - x = x_t - x_0 - \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j A^{j+1}(x_t - x_0) = p(A)(x_t - x_0),$$

Donde el polinomio

$$p(z) := 1 - \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j z^{j+1}$$

tiene grado k y satisface $p(0) = 1$. Por lo tanto nuestro problema de minimización para hallar x_k se transforma en

$$\min_{p \in \mathbb{P}_k, p(0)=1} \|p(A)(x_t - x_0)\|_a \tag{1.13}$$

Donde $\mathbb{P}_k$ es el conjunto de polinomios de grado menor o igual que k.

Ahora el teorema espectral para matrices Hermitianas definidas positivas afirma que $A = U\Lambda U^*$, donde U es una matriz unitaria cuyas columnas son valores propios de A y Λ es una matriz diagonal cuyas entradas de la diagonal son los valores propios positivos de A. Como $UU^* = I$, se tiene que $A^j = U\Lambda^j U^*$ y, consecuentemente, $p(A) = Up(\Lambda)U^*$.

Si Definimos la raiz cuadrada de A como $A^{1/2} := U\Lambda^{1/2}U^*$. Se tiene entonces

$$\|p(A)x\|_A = \|A^{1/2}p(A)x\|_2 \leq \|p(A)\|_2 \|x\|_A,$$

donde $\| \cdot \|_2$ denota la norma generada por la norma euclidiana de $\mathbb{R}^n$. Junto con (1.13), esta desigualdad implica que

$$\|x_t - x_k\|_A \leq \|x_t - x_0\|_A \left(\min_{p \in \mathbb{P}_k, P(0)=1} \max_{\lambda \in \lambda(A)} |p(\lambda)| \right). \tag{1.14}$$

Claramente si $k = n$, podemos elegir p como el polinomio de grado n que se anula en todos los valores propios $\lambda \in \lambda(A)$ con $p(0) = 1$ Entonces el máximo en lado derecho de (1.14) se hace cero y por lo tanto tenemos el siguiente resultado (ver [2], pg. 24).

Teorema 1.4.1. *Sea A una matrix Hermitiana definida positiva de orden n. Entonces el algoritmo del gradiente conjugado (descrito con mayor detalle más adelante) halla la solución de $Ax = b$ en a lo sumo n iteraciones en ausencia de errores de redondeo.*

En muchas aplicaciones, el número de indeterminadas n es muy grande. En esos casos, es mejor ver el método del gradiente conjugado como un método iterativo y terminar las iteraciones cuando algún error de tolerancia específico sea alcanzado. La implementación usual del método del gradiente conjugado es para hallar, para un ϵ dado, un vector x tal que $\|b - Ax\|_2 \leq \epsilon\|b\|_2$.

Algoritmo 1.4.1. *Consideremos un sistema de ecuaciones Hermitiano definido positivo $Ax = b$. Las entradas del algoritmo para el gradiente conjugado son el lado derecho b, una rutina que calcula la acción de A en un vector, y un vector inicial x_0, el cual debería ser sobreescrito por las subsecuentes iteraciones x_k. Nosotros limitamos el número de iteraciones a kmax y el algoritmo regresa la solución x_k y la norma residual ρ_k.*

$CG(x_0, b, \epsilon, kmax)$

1. *Empieza con $r = b - Ax_0$, $\rho_0 = \|r\|_2^2$,$k = 1$.*

2. Mientras $\sqrt{\rho_{k-1}} > \epsilon\|b\|_2^2$ *y* $k < kmax$ *:, haga*
si $k = 1$ *entonces, haga* $q = r$
de lo contrario, haga
$\beta = \rho_{k-1}/\rho_{k-2}$ *y* $q = r + \beta q$
$w = Aq$
$\alpha = \rho/q^* w$
$x_0 = x_0 + \alpha q$
$r = r - \alpha w$
$\rho = \|r\|_2^2$
$k = k + 1.$

Para $k \leq n$ la rapidez de convergencia del método de gradiente conjugado puede ser determinada por el *número de condición* $\kappa(A)$ de la matriz A, donde $\kappa(A) = \lambda_{max}(A)/\lambda_{min}(A)$, el cociente entre el valor propio más grande de A y el más pequeño. En efecto , eligiendo p en (1.14) como el polinomio de Chebyshev de grado k, se puede establecer el siguiente teorema

Teorema 1.4.2. *Sea A es una matriz Hermitiana definida positiva con número de condición $\kappa(A)$. Entonces la $k-$ésima iteración del método del gradiente conjugado satisface*

$$\|x_t - x_k\|_A \leq 2\|x_t - x_0\|_A \left(\frac{\sqrt{\kappa(A)} - 1}{\sqrt{\kappa(A)} + 1} \right)^k. \tag{1.15}$$

El anterior teorema prueba que la razón de convergencia del método de gradiente conjugado es superlineal, ya que

$$\frac{\|x_t - x_k\|_A}{\|x_t - x_0\|_A} \leq 2r^k,$$

donde $r < 1$. De hecho si tenemos más información sobre la distribución de los valores propios de la matriz A, entonces podemos obtener una mejor cota para el error como lo muestra el siguiente teorema.
Consideremos el caso especial donde los valores propios de A están acumulados alrededor de 1, es decir excepto para los valores propios extremos, todos los valores propios están en el intervalo $[1 - \epsilon, 1 + \epsilon]$, donde $\epsilon < 1$ es un número positivo pequeño. Entonces el método del gradiente conjugado converge muy rapidamente (ver [1]).

Teorema 1.4.3. *Bajo las mismas hipótesis del teorema 1.4.2. Si los valores propios de A son tales que*

$$0 < \delta \leq \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_i \leq 1 - \epsilon \leq \lambda_{i+1} \leq \cdots \leq \lambda_{n-j} \leq 1 + \epsilon \leq \lambda_{n-j+1} \leq \cdots \leq \lambda_n,$$

Entonces

$$\frac{\|x_t - x_k\|_A}{\|x_t - x_0\|_A} \leq 2 \left(\frac{1 + \epsilon}{\delta} \right)^i \epsilon^{k-i-j}, \quad k \geq i + j. \tag{1.16}$$

Este resultado sugiere que el desempeño del método de gradiente conjugado está muy influenciado por la distribución de los valores propios de la matriz de coeficientes del sistema. Nosotros estamos interesados en matrices con estructura tales como matrices de Toeplitz o matrices Toeplitz por bloques por esta razón en la próxima sección comenzaremos con el caso Toeplitz y revisamos algunos hechos básicos sobre su distribución espectral.

1.5. Métodos iterativos para resolver sistemas Toeplitz

Una *matriz de Toeplitz* $T = (t_{ij}) \in \mathbb{M}_n$ es una matriz de la forma

$$T_n = \begin{pmatrix} t_0 & t_{-1} & \cdots & t_{2-n} & t_{1-n} \\ t_1 & t_0 & t_{-1} & & t_{2-n} \\ \vdots & t_1 & t_0 & \ddots & \vdots \\ t_{n-2} & & \ddots & \ddots & \\ t_{n-1} & t_{n-2} & \cdots & t_1 & t_0 \end{pmatrix}, \tag{1.17}$$

es decir sus componentes están definidas por $t_{ij} = t_{i-j}$ para alguna sucesión

$$t_{1-n}, t_{2-n}, \dots, t_{-1}, t_0, t_1, \dots, t_{n-2}, t_{n-1} \in \mathbb{C}$$

y por lo tanto las entradas de cada diagonal paralela a la diagonal principal son constantes.
Las *matrices Toeplitz* se denotarán como T, de hecho cuando se quiera hacer énfasis en el tamaño de la matriz denotaremos la matriz como T_n para indicar que es de tamaño $n \times n$. Existe una cerrada relación entre el espectro de T_n y lo que llamaremos su función generatriz como explicaremos ahora.
$C_{2\pi}$ denota el conjunto de todas las funciones continuas de valor complejo, periódicas de periodo 2π, definidas en el intervalo $[-\pi, \pi]$. Para toda $f \in C_{2\pi}$, consideremos

$$t_k := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-\hat{\imath} k\theta} d\theta, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad \hat{\imath} := \sqrt{-1}, \tag{1.18}$$

los cuales son llamados coeficientes de Fourier de la función f. Para todo $n \geq 1$, sea T_n la matriz de Toeplitz de tamaño $n \times n$ cuyas entradas son $t_{j,k} = t_{j-k}$, $0 \leq j, k < n$.
La función f es llamada la *función generatriz* de la sucesión de matrices de Toeplitz $\{T_n\}$ (ver [10]). Si f es una función de valor real, tenemos que

$$t_{-k} = \overline{t_k}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \tag{1.19}$$

($\overline{z}$ denota el conjugado complejo de z) es decir $\{T_n\}$ es una sucesión de matrices Hermitianas. Note además que cuando f es una función de valor real y par, las matrices $\{T_n\}$ son reales y simétricas. Cabe resaltar que en muchas aplicaciones prácticas la función generadora f se puede obtener facilmente. Ejemplos típicos de funciones generatrices son los núcleos de las ecuaciones de Wiener-Hopf, las funciones que describen la amplitud característica de filtros digitales recursivos (ver [5]) y la función de densidad espectral de procesos estocásticos estacionarios (ver [10]).

El siguiente teorema clarifica la conexión entre el espectro de T_n y su función generadora f. La prueba de este teorema puede ser hallada en [10].

Teorema 1.5.1. *Sea $f \in C_{2\pi}$ una función de valor real. Entonces el espectro $\lambda(T_n)$ de T_n satisface*

$$\lambda(T_n) \subseteq [f_{min}, f_{max}] \quad \textit{para todo } n \geq 1, \tag{1.20}$$

donde f_{min} y f_{max} son el mínimo y el máximo de f, respectivamente. Además, los valores propios $\lambda_j(T_n)$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$, tienen la misma distribución que $f(2\pi j/n)$, es decir,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \left[g(\lambda_j(T_n)) - g\left(f\left(\frac{2\pi j}{n} \right) \right) \right] = 0 \tag{1.21}$$

para toda función continua g definida en $[-\pi, \pi]$.

1.5.1. Precondicionando

Vimos en la sección 1.4 que la convergencia del método de gradiente conjugado para la solución del sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$ depende parcialmente de como está acumulado el espectro de la sucesión de matrices $\{A_n\}$. Donde por esto queremos decir que

Definición 1.5.1. *Una sucesión de matrices $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ se dice que tiene el espectro acumulado alrededor de 1 si, para todo $\epsilon > 0$, existen enteros positivos n_1 y n_2 tales que para todo $n > n_1$, a lo sumo n_2 valores propios de la matriz $A_n - I_n$ (donde I_n denota a la matriz identidad de tamaño $n \times n$) tienen valor absoluto mayor que ϵ.*

La igual distribución de los valores propios de las matrices Toeplitz Hermitianas indica que los valores propios no deberían estar acumulados alrededor de 1 en general. Por esta razón, una manera de acelerar la velocidad de convergencia del método de gradiente conjugado es precondicionar el sistema de ecuaciones Toeplitz. Esto significa que en vez de resolver el sistema $T_n x = b$, nosotros resolvemos el sistema precondicionado

$$P_n^{-1} T_n x = P_n^{-1} b \tag{1.22}$$

para alguna matriz P_n la cual llamamos precondicionador y es elegida por nosotros.

Criterios para los precondicionadores

Los precondicionadores P_n deberían ser elegidos de acuerdo a los siguientes criterios:

1. Debe ser posible costruir P_n en un número aceptable de operaciones (en general se requieren $O(n \log n)$ operaciones).

2. Debe ser muy fácil resolver un sistema lineal de ecuaciones con matriz de coeficientes P_n, (en general para resolver el sistema $P_n v = y$, se requieren $O(n \log n)$ operaciones).

3. El espectro de $P_n^{-1} T_n$ debe estar acumulado alrededor de 1 o el número de condición $\kappa(P_n^{-1} T_n)$ de la matriz precondicionada debe estar cercano a 1.

El algoritmo para el método del gradiente conjugado precondicionado es el siguiente.

Algoritmo 1.5.1. *Consideremos un sistema de ecuaciones $Ax = b$ donde A es una matriz Hermitiana definida positiva. Las entradas del algoritmo para el PCG son el lado derecho de b, una rutina que calcula el producto entre A y un vector, un precondicionador P, y un vector inicial aleatorio x_0, el cual debería ser sobreescrito sobre las subsecuentes iteraciones x_k. Nosotros limitamos el número de iteraciones a kmax y devolvemos la solución x_k y la norma residual p_k.*
$PCG(x_0, b, A, P, \epsilon, kmax)$

1. $r = b - Ax$, $\rho_0 = \|r\|_2^2, k = 1.$

2. *Mientras* $\sqrt{\rho_{k-1}} > \epsilon \|b\|_2$ *and* $k > kmax$, *haga*
$z = P^{-1} r$ *(o resuelva* $Pz = r$*)*
$\tau_{k-1} = z^* r$
si $k = 1$ *entonces haga* $\beta = 0$ *y* $q = z$
de lo contrario, haga
$\beta = \tau_{k-1}/\tau_{k-2}$ *y* $q = z + \beta q$
$w = Aq$
$\alpha = \tau_{k-1}/q^* w$
$x_0 = x_0 + \alpha q$
$r = r - \alpha w$
$\rho_k = \|r\|_2^2$
$k = k + 1.$

En las próximas subsecciones, cosideraremos distintos precondicionadores que cumplen con estas condiciones, pero antes hacemos una discución sobre matrices circulantes.

1.5.2. Matrices circulantes

Una matriz C_n de tamaño $n \times n$ se dice que es *circulante* si es una matriz de Toeplitz

$$C_n = \begin{bmatrix} c_0 & c_{-1} & \cdots & c_{2-n} & c_{1-n} \\ c_1 & c_0 & c_{-1} & & c_{2-n} \\ \vdots & c_1 & c_0 & \ddots & \vdots \\ c_{n-2} & & \ddots & \ddots & \\ c_{n-1} & c_{n-2} & \cdots & c_1 & c_0 \end{bmatrix} \tag{1.23}$$

y

$$c_{-k} = c_{n-k} \quad \textit{para } 1 \leq k \leq n-1.$$

El conjunto de todas las matrices circulantes de tamaño $n \times n$ lo denotaremos como $C_{n\times n}$
Las matrices circulantes tienen la propiedad importante que son diagonalizables por la *matriz de Fourier* F_n, es decir,

$$C_n = F_n^* \Lambda_n F_n, \tag{1.24}$$

donde las entradas de F_n están dadas por

$$[F_n]_{j,k} = \frac{1}{\sqrt{n}} e^{2\pi \hat{\imath} jk/n}, \quad 0 \leq j, k \leq n-1$$

y Λ_n es una matriz diagonal cuyos elementos en la diagonal son los valores propios de C_n. La matriz F_n es unitaria, es decir, $F_n F_n^* = F_n^* F_n = I_n$.
Además, multiplicando un vector x por F_n, esto es, $F_n x$, obtenemos la *transformada discreta de Fourier* (DFT) de x. Es bien conocido que, debido a la estructura especial de F_n, productos de la forma $F_n x$ pueden ser calculados en $O(n \log n)$ operaciones usando el algoritmo para *transformada rapida de Fourier* (FFT) (ver [21]).
Ahora usando (1.24), observamos que la primera columna de F_n es $\frac{1}{\sqrt{n}}(1, 1, \ldots, 1)^T$. De donde

$$F_n C_n (1, 0, \ldots, 0)^T = \frac{1}{\sqrt{n}} \Lambda_n (1, 1, \ldots, 1)^T \tag{1.25}$$

Esto es, las entradas de Λ_n pueden ser obtenidas en $O(n \log n)$ operaciones mediante el cálculo de la FFT para la primer columna de C_n. En efecto, la expresión (1.25) prueba que las entradas diagonales λ_k de Λ_n están dadas por

$$\lambda_k = \sum_{j=0}^{n-1} c_j e^{2\pi \hat{\imath} jk/n} \quad k = 0, 1, \ldots, n-1 \tag{1.26}$$

Una vez Λ_n es obtenido, productos de la forma $C_n y$ y $C_n^{-1} y$, para todo vector y, pueden ser calculados usando FFT en $O(n \log n)$ operaciones usando (1.24).

1.5.3. Multiplicación entre una matriz Toeplitz y un vector

En cada iteración del método del gradiente conjugado precondicionado, una multiplicación de la matriz por un vector $T_n y$ es necesaria. Esto puede ser calculado por FFT considerando el sistema de tamaño $2n \times 2n$ cuya matriz de coeficientes es circulante

$$\begin{bmatrix} T_n & B_n \\ B_n & T_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_n y \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{1.27}$$

donde (ver [18])

$$B_n = \begin{bmatrix} 0 & t_{n-1} & \cdots & t_2 & t_1 \\ t_{1-n} & 0 & t_{n-1} & & t_2 \\ \vdots & t_{1-n} & 0 & \ddots & \vdots \\ t_{-2} & & \ddots & \ddots & t_{n-1} \\ t_{-1} & t_{-2} & \cdots & t_{1-n} & 0 \end{bmatrix}.$$

Entonces podemos llevar a cabo la multiplicación en (1.27) usando la descomposición (1.24). La multiplicación entre la matriz y el vector de esta forma requiere $O(2n\log(2n))$ operaciones. Se sigue que el número total de operaciones por iteración del algoritmo del gradiente conjugado en este caso es de $O(n\log n)$ operaciones.

1.5.4. Precondicionadores circulantes

El uso de matrices circulantes como precondicionadores de matrices Toeplitz Hermitianas en el método del gradiente conjugado fue inicialmente propuesto de manera independiente por Strang y Olkin. Parte de la motivación para esto radicó en el hecho que las matrices circulantes pueden ser invertidas rapidamente.

Precondicionador de Strang

Para una matriz T_n Toeplitz Hermitiana, el precondicionador circulante de Strang [18] es definido como la matriz que copia las diagonales centrales de T_n y luego las refleja para completar la matriz circulante. Para T_n dada por (1.17), las diagonales s_j del *precondicionador de Strang* $S_n = (s_{k-l})_{0\leq k,l<n}$ están dadas por

$$s_j = \begin{cases} t_j, & \text{si } 0 \leq j \leq \lfloor n/2 \rfloor, \\ t_{j-n}, & \text{si } \lfloor n/2 \rfloor < j < n, \\ s_{n+j}, & \text{si } 0 < -j < n. \end{cases} \tag{1.28}$$

Donde $\lfloor n/2 \rfloor$ denota el mayor entero menor o igual que $n/2$. Especificamente si $n = 2m$ y

$$T = \begin{pmatrix} t_0 & t_1 & \cdots & t_{n-2} & t_{n-1} \\ t_1 & t_0 & t_1 & & t_{n-2} \\ \vdots & t_1 & t_0 & \ddots & \vdots \\ t_{n-2} & & \ddots & \ddots & t_1 \\ t_{n-1} & t_{n-2} & \cdots & t_1 & t_0 \end{pmatrix},$$

entonces

$$S = \begin{pmatrix} t_0 & t_1 & \cdots & t_m & t_{m-1} & \cdots & t_1 \\ t_1 & t_0 & & & \cdots & & t_2 \\ \vdots & t_1 & & & \ddots & & \\ t_m & & & \ddots & & & \\ t_{m-1} & & \ddots & & & & \\ \vdots & & & & & & \\ t_1 & \cdots & t_{m-1} & t_m & \cdots & t_1 & t_0 \end{pmatrix}.$$

A continuación enunciamos sin prueba algunos resultados sobre el precondicionador de Strang. El primer resultado nos dice que S_n y S_n^{-1} están uniformemente acotados en la norma l_2 para una cierta subclase de las funciones generatrices (ver [3]).

Definición 1.5.2. *Dada una sucesión* $(T_n)_{n>0}$, *de matrices tales que* $T_n \in \mathbb{M}_n$, *decimos que la sucesión está uniformemente acotada en norma* l_2, *si existe un número real* c *tal que para todo* n *se tiene que* $|||T_n|||_2 < c$.

Definición 1.5.3. *Sea* f *una función de valor real, decimos que* f *está en la clase de Wiener si sus coeficientes de Fourier son absolutamentes sumables, es decir si*

$$\sum_{k=0}^{\infty} |t_k| < \infty.$$

Teorema 1.5.2. *Si* f *es una función a valor real, positiva en la clase de Wiener, entonces, para* n *grande, las matrices circulantes* S_n *y* S_n^{-1} *están uniformemente acotadas en norma* l_2.

El siguiente teorema establece que el espectro de $S_n - T_n$ está acumulado alrededor de cero. (ver [3]).

Teorema 1.5.3. *Sea* f *una función de valor real en la clase de Wiener. Sea* $\{T_n\}$ *una sucesión de matrices Toeplitz Hermitianas generadas por* f. *Entonces el espectro de* $S_n - T_n$ *está acumulado alrededor de cero para* n *grande.*

Usando el hecho que $S_n^{-1}T_n$ es semejante a $S_n^{-1/2}T_nS_n^{-1/2}$, junto con el resultado del teorema 1.5.2 y la igualdad

$$S_n^{-1/2}T_nS_n^{-1/2} = I_n + S_n^{-1/2}(T_n - S_n)S_n^{-1/2},$$

se concluye que el espectro de $S_n^{-1}T_n$ está acumulado alrededor de 1 para n grande.

Otra de las propiedades interesantes del precondicionador de Strang es la siguiente (ver [3])

Teorema 1.5.4. *Sea* T_n *una matriz Toeplitz de tamaño* $n \times n$, *la matriz circulante* S_n *minimiza* $||C_n - T_n||_1 = ||C_n - T_n||_\infty$ *sobre todas las posibles matrices Hermitianas circulantes* C_n.

De los teoremas 1.5.2 y 1.5.3 se puede probar que el método del gradiente conjugado precondicionado por S_n, cuando es aplicado para resolver el sistema

$$T_n x = b,$$

converge superlinealmente para n grande en el sentido especificado abajo (ver [8]).

Corolario 1.5.1. *Sea f una función de valor real, positiva en la clase de Wiener. Sea $\{T_n\}$ una sucesión de matrices Toeplitz generadas por f. Entonces para todo $\epsilon > 0$, existe una constante $c(\epsilon) > 0$ tal que el vector error $e_k = x - x_k$ en el método de gradiente conjugado en la $k-$ésima iteración satisfacen*

$$\frac{|||x - x_k|||}{|||x - x_0|||} \leq c(\epsilon)\epsilon^k, \tag{1.29}$$

donde x es la solución del sistema lineal $T_n x = b$, x_k es la aproximación obtenida en la $k-$ésima iteración y la norma $|||\cdot|||$ está definida por

$$|||v|||^2 := v^* S_n^{-1/2} T_n S_n^{-1/2} v.$$

Precondicionador de T. Chan

Debido a que el precondicionador propuesto por T. Chan está definido no sólo para matrices Toeplitz sino para matrices generales, empezaremos con el caso general. Dada una matriz unitaria $U \in \mathbb{M}_n$, sea

$$M_U = \{A \in \mathbb{M}_n | A = U^* \Lambda U,\ \Lambda \text{ es una matriz diagonal}\} \tag{1.30}$$

Observemos que si $U = F$, es la matriz de Fourier, $M_F = C_{n\times n}$ es el conjunto de todas las matrices circulantes.

Definición 1.5.4. *Sea $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_n$, se define el operador δ como*

$$\delta(A) = \operatorname{diag}(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}), \tag{1.31}$$

Ahora definimos el precondicionador de T. Chan

Definición 1.5.5. *Sea $A \in \mathbb{M}_n$, se define el precondicionador de T. Chan para A respecto a la matriz unitaria U como aquella matriz $C_U(A)$ que es solución al problema*

$$\min_{C_U \in M_U} ||A - C_U||_F \tag{1.32}$$

En el caso en que $U = F$, es la matrix de Fourier y $A = T$ es una matriz Toeplitz, C(A) es llamado el precondicionador circulante óptimo.

Los siguientes resultados fueron obtenidos inicialmente por R. Chan, Jin y Yeung [6] para el caso $U = F$ y fueron extendidos al caso unitario general por Huckle [13] y V. Strela y E. Tyrtyshnikov [19].

Teorema 1.5.5. *Sea $A \in \mathbb{M}_n$ entonces*

$$C(A) = U^*\delta(UAU^*)U. \tag{1.33}$$

Algunas propiedades algebraicas del operador $C(A)$ son las siguientes

Lema 1.5.1. 1. *Sean $A, B \in \mathbb{M}_n$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, entonces*

$$C(\alpha A + \beta B) = \alpha C(A) + \beta C(B).$$

Además, para toda matriz $A \in \mathbb{M}_n$

$$C^2(A) = C(C(A)) = C(A),$$

es decir, C(A) es un operador lineal proyección.

2. *Sea $A \in \mathbb{M}_n$. Entonces*

$$\operatorname{tr}(C(A)) = \operatorname{tr}(A) = \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j(A),$$

donde $\lambda_j(A)$ son los valores propios de A.

3. *Para toda $A \in \mathbb{M}_n$*

$$C(A^*) = C(A)^*.$$

4. *Sea $A \in \mathbb{M}_n$, $T \in M_U$, entonces*

$$C(TA) = TC(A), \quad C(AT) = C(A)T$$

Lema 1.5.2. *Para todo $n \geq 1$, se tiene que*

1. $||C||_1 := \sup\limits_{||A_n||_1=1} ||C(A_n)||_1 = 1,$
2. $||C||_\infty := \sup\limits_{||A_n||_\infty=1} ||C(A_n)||_\infty = 1,$
3. $||C||_F := \sup\limits_{||A_n||_F=1} ||C(A_n)||_F = 1,$
4. $||C||_2 := \sup\limits_{||A_n||_2=1} ||C(A_n)||_2 = 1,$

Con respecto a las propiedades espectrales de $C(A_n)$ tenemos el siguiente teorema.

Teorema 1.5.6. *Sea A_n una matriz Hermitiana de tamaño $n \times n$, entonces $C(A_n)$ es también Hermitiana. Además si λ_{min} y λ_{max} denotan el valor propio más pequeño y el más grande respectivamente, entonces*

$$\lambda_{min}(A_n) \leq \lambda_{min}(C(A_n)) \leq \lambda_{max}(C(A_n)) \leq \lambda_{max}(A_n). \tag{1.34}$$

En particular, si A_n es definida positiva, entonces $C(A_n)$ también lo es.

Para el caso en que $U = F$ es la matriz de Fourier, se tiene el teorema siguiente (ver [6])

Teorema 1.5.7. *Sea $A_n \in \mathbb{M}_n$ y U es la matriz de Fourier F, tenemos*

$$C(A_n) = \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{1}{n} \sum_{p-q \equiv j (mod) n} a_{pq} \right) Q^j, \tag{1.35}$$

Donde Q es una matriz circulante de tamaño $n \times n$ dada por

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{1.36}$$

En el caso en que $A_n = T_n$ es una matriz Toeplitz y U la matriz de Fourier F, las entradas de $C(A)$ están caracterizadas por el siguiente teorema.

Teorema 1.5.8. *Sea T_n una matriz Toeplitz de tamaño $n \times n$, si $U = F$ es la matriz de Fourier, entonces las entradas de la $j-$ésima diagonal del precondicionador circulante óptimo $C(T_n)$ están dadas por*

$$c_j = \begin{cases} \frac{(n-j)t_j + jt_{j-n}}{n}, & si\ 0 \leq j < n, \\ c_{n+j}, & si\ 0 < -j < n. \end{cases} \tag{1.37}$$

Usando (1.26) y (1.37), se puede ver que los valores propios $\lambda(C(T_n))$ de $C(T_n)$ en (1.37) están dados por

$$\lambda_k(C(T_n)) = \sum_{j=-n+1}^{n-1} t_j \left(1 - \frac{|j|}{n}\right) e^{2\pi \hat{\imath} jk/n},\ j = 1, \ldots, n. \tag{1.38}$$

Con respecto a la eficiencia de $C(T_n)$ como precondicionador para matrices Toeplitz Hermitianas, se prueba en [4] que si la función generatriz de la sucesión de matrices Toeplitz $\{T_n\}$ es una función de valor real, positiva en la clase de Wiener, entonces el espectro de $C(T_n) - T_n$ y $S_n - T_n$ son asintoticamente iguales cuando n tiende a infinito, es decir,

$$\lim_{n\to\infty} ||\big(C(T_n) - T_n\big) - \big(S_n - T_n\big)||_2 = \lim_{n\to\infty} ||C(T_n) - S_n||_2 = 0.$$

Por lo tanto, $C(T_n)$ trabaja tan eficientemente como S_n para las funciones en la clase de Wiener.

Teorema 1.5.9. *Sea f una función de valor real en la clase de Wiener. Sea $\{T_n\}$ una sucesión de matrices Toeplitz generadas por f. Entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \rho(S_n - C(T_n)) = 0,$$

donde $\rho(\cdot)$ denota el radio espectral.

También en [7] se prueba que

Teorema 1.5.10. *Sea f una función de valor real, positiva en la clase de Wiener que genera la matriz T_n. Si S_n es el precondicionador de Strang, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} ||C(T_n) - S_n||_1 = 0.$$

Lo cual junto con el teorema 1.5.3 permite concluir que el espectro de $C(T_n) - T_n$ está acumulado alrededor de cero (ver [3])

Teorema 1.5.11. *Sea f una función de valor real en la clase de Wiener. Sea $\{T_n\}$ una sucesión de matrices Toeplitz Hermitianas generadas por f. Entonces el espectro de $C(T_n) - T_n$ está acumulado alrededor de cero para n grande.*

Usando el teorema de Weierstrass para aproximar funciones generatrices, continuas $2\pi-$periódicas mediante funciones en la clase de Wiener, tenemos el siguiente teorema (ver [9])

Teorema 1.5.12. *Sea f una función positiva en $C_{2\pi}$. Entonces el espectro de $C(A)^{-1}A$ está acumulado alrededor de 1 para n grande.*

Precondicionador circulante superóptimo

El precondicionador circulante propuesto por Tyrtyshnikov (ver [20]) está definido como el minimizador de

$$\|I - C^{-1}A\|_F,$$

sobre todas las matrices circulantes no singulares C. En [20] es llamado el *precondicionador circulante superóptimo* y se prueba que dicho precondicionador es igual a

$$T = C(AA^*)C(A)^{-1}.$$

También Tyrtyshnikov prueba que para una matriz Toeplitz definida positiva, T también es definida positiva.

CAPÍTULO 2
Precondicionadores para matrices Toeplitz

2.1. Introducción

En este capítulo buscamos obtener algunos precondicionadores para sistemas de ecuaciones de la forma $Ax = b$, donde A es una matriz de Toeplitz definida positiva, mediante el planteamiento y solución de un problema de optimización y que busca minimizar ciertas normas matriciales sobre determinados espacios vectoriales. Dicho problema es reformulado como un problema en el cual hay que encontrar la proyección de la matriz del sistema sobre el espacio vectorial que se está considerando, esto nos permite obtener una gran familia de precondicionadores de los cuales el precondicionador de Chan y el de Tyrtyshnikov resultan ser casos particulares. Posteriormente consideramos ciertos casos particulares, los cuales a nuestro juicio son los casos más importantes y probamos que dichos precondicionadores encierran el espectro de A alrededor de 1. También proponemos otro precondicionador que si bien no se obtiene a partir del problema de optimización, si resulta ser una generalización natural de algunos de los precondicionadores que si se obtuvieron por esa via. Para estos precondicionadores también probamos que encierran el espectro de la matriz A alrededor de 1.

2.2. Precondicionadores puntuales

Teorema 2.2.1. *Si $D, E \in \mathbb{M}_n$ son matrices definidas positivas, entonces*

$$< A, B >_{E,D} = Tr(AEB^*D)$$

es un producto interno en $\mathbb{M}_n$.

Prueba: Tenemos que

$$\begin{aligned}
Tr(AEB^*D) &= \mathrm{vec}(A)^T \mathrm{vec}(D^T \overline{B} E^T) \qquad (\text{pues } Tr(AB) = \mathrm{vec}(A)^T \mathrm{vec}(B^T)) \\
&= \mathrm{vec}(A)^T (E \otimes D^T) \mathrm{vec}(\overline{B}) \quad (\text{pues } \mathrm{vec}(ABC) = (C^T \otimes A)\mathrm{vec}(B)) \\
&= [(E^T \otimes D)\mathrm{vec}(A)]^T \mathrm{vec}(\overline{B}) \\
&= < (E^T \otimes D)\mathrm{vec}(A), \mathrm{vec}(B) > (\text{producto interior en } \mathbb{R}^{n^2}) \\
&= < \mathrm{vec}(A), \mathrm{vec}(B) >_{E^T \otimes D} (\text{pues } E^T \otimes D \text{ es hermitiana definida positiva.})
\end{aligned}$$

Luego $< A, B >_{E,D}$ es un producto interior. $\square$

Definición 2.2.1. *Definimos la norma asociada a dicho producto interior como*

$$\begin{aligned}\|A\|^2_{F_{D,E}} &= Tr(AEA^*D)\\ &=< \mathrm{vec}(A), \mathrm{vec}(A) >_{E^T\otimes D}\\ &= \|\mathrm{vec}(A)\|^2_{E^T\otimes D}\end{aligned}$$

Definición 2.2.2. *Sea V un subespacio vectorial de $\mathbb{M}_n$ y $R \in \mathbb{M}_n$ una matriz no singular, definimos*

$$M_R(V) = \left\{A \in \mathbb{M}_n | A = R^{-1}\Lambda R, \quad \Lambda \in V\right\}.$$

También definimos

$$\mathrm{vec}(M_R(V)) = \{\mathrm{vec}(A) | A \in M_R(V)\}.$$

En el caso en que V sea el conjunto de matrices diagonales, denoteremos $M_R(V)$ simplemente como M_R.

Claramente $M_R(V)$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{M}_n$.

2.2.1. Precondicionador para el caso general

Sea $A \in \mathbb{M}_n$. Consideremos el problema

$$\min_{C\in M_R(V)} \|A - C\|_{F_{D,E}} = \min_{\mathrm{vec}(C)\in\mathrm{vec}(M_R(V))} \|\mathrm{vec}(A) - \mathrm{vec}(C)\|_{E^T\otimes D}.$$

Geométricamente el problema consiste en hallar la proyección de $\mathrm{vec}(A)$ sobre $\mathrm{vec}(M_R(V))$ respecto al producto interior definido por $E^T \otimes D$, lo cual garantiza la existencia y unicidad de la solución. Para resolverlo supongamos que $\{M_1, M_2, \ldots, M_k\}$ es una base de $M_R(V)$, por lo tanto la matriz

$$M = [\mathrm{vec}(M_1) \quad \mathrm{vec}(M_2) \ldots \mathrm{vec}(M_k)]_{n^2\times k}, \tag{2.1}$$

tiene como imagen al espacio $\mathrm{vec}(M_R(V))$ y el problema anterior puede ser reescrito como

$$\min_{x\in\mathbb{R}^k} \|Mx - \mathrm{vec}(A)\|_{E^T\otimes D}. \tag{2.2}$$

Definición 2.2.3. *Sea x_0 la solución al problema dado en la ecuación (2.2), entonces definimos el precondicionador de A respecto a las matrices D y E como aquella matriz $C(A)_{D,E}$ tal que $\mathrm{vec}\big(C(A)_{D,E}\big) = Mx_0$.*

Si definimos $\mathrm{vec}(y_0) = \mathrm{vec}(A) - Mx_0$, es claro que $< \mathrm{vec}(y_0), r >_{E^T\otimes D}= 0$ para todo vector $r \in \mathrm{vec}(M_R(V))$, es decir

$$< (E^T \otimes D)\mathrm{vec}(y_0), r >= \left((E^T \otimes D)\mathrm{vec}(y_0)\right)^T \overline{r} = 0$$

y transponiendo obtenemos que cada uno de los vectores $\mathrm{vec}(M_i)$ satisfacen

$$\mathrm{vec}(M_i^*)(E^T \otimes D)\mathrm{vec}(y_0) = 0$$

lo cual permite conluir que

$$M^*(E^T \otimes D)\mathrm{vec}(y_0) = 0,$$

donde M es la matriz definida en (2.1).
De lo anterior concluimos que $\mathrm{vec}(y_0)$ satisface las ecuaciones

$$\mathrm{vec}(y_0) = \mathrm{vec}(A) - Mx_0 \tag{2.3}$$

$$M^*(E^T \otimes D)\mathrm{vec}(y_0) = 0 \tag{2.4}$$

Multiplicando la primera ecuación por $M^*(E^T \otimes D)$ obtenemos

$$M^*(E^T \otimes D)\mathrm{vec}(A) = M^*(E^T \otimes D)Mx_0,$$

pero como $E^T \otimes D$ es definida positiva y el rango de M es k, entonces M tiene inversa a derecha. Se sigue que $M^*(E^T \otimes D)M$ es definida positiva y por lo tanto invertible, luego

$$x_0 = (M^*(E^T \otimes D)M)^{-1}M^*(E^T \otimes D)\mathrm{vec}(A).$$

Por lo tanto el precondicionador de A respecto a D y E escrito en forma vectorizada está dado por

$$\mathrm{vec}(C(A)_{D,E}) = M(M^*(E^T \otimes D)M)^{-1}M^*(E^T \otimes D)\mathrm{vec}(A). \tag{2.5}$$

Supongamos ahora que $\{\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_k\}$ es una base de V tal que $M_i = R^{-1}\Lambda_i R$ (ver la definición 2.2.2), entonces

$$\begin{aligned}
M =& [\mathrm{vec}(M_1) \quad \mathrm{vec}(M_2) \ldots \mathrm{vec}(M_k)] \\
=& \big[\mathrm{vec}(R^{-1}\Lambda_1 R) \quad \mathrm{vec}(R^{-1}\Lambda_2 R) \ldots \mathrm{vec}(R^{-1}\Lambda_k R)\big] \\
=& \big[(R^T \otimes R^{-1})\mathrm{vec}(\Lambda_1) \quad (R^T \otimes R^{-1})\mathrm{vec}(\Lambda_2) \ldots (R^T \otimes R^{-1})\mathrm{vec}(\Lambda_k)\big] \\
=& (R^T \otimes R^{-1}) [\mathrm{vec}(\Lambda_1) \quad \mathrm{vec}(\Lambda_2) \ldots \mathrm{vec}(\Lambda_k)] \\
=& (R^T \otimes R^{-1})\Lambda.
\end{aligned}$$

Donde $\Lambda = [\mathrm{vec}(\Lambda_1) \quad \mathrm{vec}(\Lambda_2) \ldots \mathrm{vec}(\Lambda_k)]$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}
M^*(E^T \otimes D)M =& \Lambda^*((R^*)^T \otimes (R^*)^{-1})(E^T \otimes D)(R^T \otimes R^{-1})\Lambda \\
=& \Lambda^*\Big(\big((R^*)^T E^T R^T\big) \otimes \big((R^*)^{-1}\big)DR^{-1}\Big)\Lambda.
\end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned}
M^*(E^T \otimes D)\mathrm{vec}(A) =& \Lambda^*\big((R^*)^T \otimes (R^*)^{-1}\big)(E^T \otimes D)\mathrm{vec}(A) \\
=& \Lambda^*\mathrm{vec}\Big((R^*)^{-1}DA\big((R^*)^T E^T\big)^T\Big) \\
=& \Lambda^*\mathrm{vec}\big((R^*)^{-1}DAER^*\big),
\end{aligned}$$

de (2.5) se obtiene que

$$\operatorname{vec}\big(C(A)\big)_{D,E} = (R^T \otimes R^{-1})\Lambda\left[\Lambda^*\big((R^{*^T} E^T R^T) \otimes (R^{*^{-1}} D R^{-1})\big)\Lambda\right]^{-1} \Lambda^* \operatorname{vec}(R^{*^{-1}} DAER^*). \tag{2.6}$$

En el caso en que $R = U$ es una matriz unitaria obtenemos

$$\operatorname{vec}\big(C(A)\big)_{D,E} = (U^T \otimes U^*)\Lambda\left[\Lambda^*\big((U^{*^T} E^T U^T) \otimes (UDU^*)\big)\Lambda\right]^{-1} \Lambda^* \operatorname{vec}(UDAEU^*). \tag{2.7}$$

De aquí en adelante vamos a suponer que V es el conjunto de matrices diagonales de tamaño $n \times n$ entonces $\dim(V) = n$ y si e_i representa al vector de $\mathbb{R}^n$ cuya $i-$ésima componente es 1 y la demás son 0, entonces

$$\beta = \{e_1 e_1^T, e_2 e_2^T, \ldots, e_n e_n^T\}$$

es una base de V. Si tomamos

$$\Lambda = \begin{bmatrix}\operatorname{vec}(e_1 e_1^T) & \operatorname{vec}(e_2 e_2^T) & \ldots \operatorname{vec}(e_n e_n^T)\end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{n^2 \times n} \tag{2.8}$$

se simplifican los términos de la ecuación (2.7) de las siguientes maneras:

Teorema 2.2.2. *Si $B, C \in \mathbb{M}_n$, entonces*

$$\Lambda^T (B \otimes C)\Lambda = B \odot C,$$

donde $\odot$ denota el producto de Hadamard.

Demostración. Si F_i^A denota la fila $i-$ésima de A y C_j^A la columna $j-$ésima, entonces

$$\begin{aligned}\big(\Lambda^T (B \otimes C)\Lambda\big)_{ij} =& F_i^{\Lambda^T} (B \otimes C) C_j^{\Lambda} \\ =& (C_i^{\Lambda})^T (B \otimes C) C_j^{\Lambda} \\ =& (B \otimes C)_{(i-1)n+i,(j-1)n+j} \\ =& b_{ij} c_{ij} \\ =& (B \odot C)_{ij}.\end{aligned}$$

□

Luego de (2.7) se tendría que en este caso

$$\operatorname{vec}\big(C(A)\big)_{D,E} = (U^T \otimes U^*)\Lambda\left[(UDU^*) \odot (UEU^*)^T\right]^{-1} \Lambda^T \operatorname{vec}(UDAEU^*). \tag{2.9}$$

Definición 2.2.4. *Sea $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_n$ recordemos que el operador δ se define como*

$$\delta(A) = \operatorname{diag}(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}),$$

mientras que si $x^T = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$, definimos el operador $\Delta : \mathbb{C}^n \to \mathbb{M}_n$ de la siguiente manera

$$\Delta(x) = \operatorname{diag}(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

además Δ^{-1} denotará el inverso de Δ como operador, es decir

$$\Delta^{-1}(\mathrm{diag}(x_1, x_2, \ldots, x_n)) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T.$$

Sea $B \in \mathbb{M}_n$ y si tomamos Λ como en la ecuación (2.8), entonces se tiene que $\Lambda B \Lambda^T \in \mathbb{M}_{n^2}$ y

$$(\Lambda B \Lambda^T)_{rs} = \begin{cases} b_{ij}, & \text{si } r = (i-1)n + i \text{ y } s = (j-1)n + j, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Por esta razón si $S \in \mathbb{M}_n$, entonces

$$(\Lambda B \Lambda^T)\mathrm{vec}(S) = (\Lambda B \Lambda^T)\mathrm{vec}(\delta(S)), \tag{2.10}$$

y por lo tanto de la ecuación (2.9) obtenemos

$$\mathrm{vec}\big(C(A)\big)_{D,E} = (U^T \otimes U^*)\Lambda \left[(UDU^*) \odot (UEU^*)^T\right]^{-1} \Lambda^T \mathrm{vec}\big(\delta(UDAEU^*)\big). \tag{2.11}$$

pero

$$\Big((\Lambda B \Lambda^T)\mathrm{vec}\big(\delta(S)\big)\Big)_r = \begin{cases} \sum_{j=1}^n b_{ij} s_{jj}, & \text{si } r = (i-1)n + i, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$
$$= \left(\mathrm{vec}\left(\Delta\Big(B\Delta^{-1}\big(\delta(S)\big)\Big)\right)\right)_r.$$

Luego $(\Lambda B \Lambda^T)\mathrm{vec}(S) = \mathrm{vec}\left(\Delta\Big(B\Delta^{-1}\big(\delta(S)\big)\Big)\right)$, con lo cual obtenemos

$$\mathrm{vec}\big(C(A)\big)_{D,E} = (U^T \otimes U^*)\mathrm{vec}\left(\Delta\left(\left[(UDU^*) \odot (UEU^*)^T\right]^{-1} \Delta^{-1}\big(\delta(UDAEU^*)\big)\right)\right), \tag{2.12}$$

y se concluye que el precondicionador de A respecto a las matrices D y E es

$$C(A)_{D,E} = U^*\Delta\left(\left[(UDU^*) \odot (UEU^*)^T\right]^{-1} \Delta^{-1}\big(\delta(UDAEU^*)\big)\right)U. \tag{2.13}$$

Observación 2.2.1. *1. Si $A, D \in \mathbb{M}_n$ y D es una matriz diagonal, entonces se tiene que $\Delta^{-1}\big(\delta(AD)\big) = \Delta^{-1}\big(\delta(A)D\big) = \Delta^{-1}\big(\delta(DA)\big) = \Delta^{-1}\big(D\delta(A)\big) = D\Delta^{-1}\big(\delta(A)\big)$.*
2. Usando el hecho que las matrices diagonales conmutan, si $D_1, D_2 \in \mathbb{M}_n$ son matrices diagonales no singulares, entonces

$$C(A)_{D,E} = U^*\Delta\left(\left[(UDU^*) \odot (UEU^*)^T\right]^{-1} D_1 D_2 D_1^{-1} D_2^{-1} \Delta^{-1}\big(\delta(UDAEU^*)\big)\right)U,$$

de la observación anterior se sigue que

$$\begin{aligned} &= U^*\Delta\left(\left[D_1^{-1}D_2^{-1}\left((UDU^*) \odot (UEU^*)^T\right)\right]^{-1} \Delta^{-1}\big(D_1^{-1}\delta(UDAEU^*)D_2^{-1}\big)\right)U \\ &= U^*\Delta\left(\left[(D_1^{-1} \odot D_2^{-1})\left((UDU^*) \odot (UEU^*)^T\right)\right]^{-1} \Delta^{-1}\big(D_1^{-1}\delta(UDAEU^*)D_2^{-1}\big)\right)U \\ &= U^*\Delta\left(\left[(D_1^{-1}UDU^*) \odot (D_2^{-1}UEU^*)^T\right]^{-1} \Delta^{-1}\big(D_1^{-1}\delta(UDAEU^*)D_2^{-1}\big)\right)U, \end{aligned}$$

haciendo $P_1 = U^*D_1U$ *y* $P_2 = U^*D_2U$ *y teniendo en cuenta que* $C(M) = U^*\delta(UMU^*)U$*, obtenemos que*

$$C(A)_{D,E} = U^*\Delta\left(\left[\left(UP_1^{-1}DU^*\right) \odot \left(UP_2^{-1}EU^*\right)^T\right]^{-1} \Delta^{-1}\left(UP_1^{-1}C(DAE)P_2^{-1}U^*\right)\right)U.$$

En especial si $D_1 = \delta(UDU^*)$ *y* $D_2 = \delta(UEU^*)$ *obtenemos que*

$$C(A)_{D,E} = U^*\Delta\left(\left[\left(UC(D)^{-1}DU^*\right) \odot \left(UC(E)^{-1}EU^*\right)^T\right]^{-1} \Delta^{-1}\left(UC(D)^{-1}C(DAE)C(E)^{-1}U^*\right)\right)U.$$

3. Observemos que como los precondicionadores de Chan son circulantes (y por lo tanto simultaneamente diagonalizables por U*), entonces ellos conmutan, es decir* $C(A)C(B) = C(B)C(A)$*.*

Casos particulares

Si $D, E \in M_U$, y si suponemos que $D_1 = UDU^*$ y $D_2 = UDU^*$ entonces de (2.13) se sigue que

$$\begin{aligned}
C(A)_{D,E} &= U^*\Delta\Big((D_1 \odot D_2)^{-1}\,\Delta^{-1}\big(\delta(D_1UAU^*D_2)\big)\Big)U \\
&= U^*\Delta\Big((D_1 \odot D_2)^{-1}\,(D_1 \odot D_2)\Delta^{-1}\big(\delta(UAU^*)\big)\Big)U \\
&= U^*\delta(UAU^*)U \\
&= C(A).
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Es decir en este caso obtenemos el precondicionador de Chang, en especial si $D = E = I$ se obtiene el precondicionador de Chang.
Si $D \in M_U$ y si suponemos que $D_1 = UDU^*$, entonces

$$\begin{aligned}
C(A)_{D,E} &= U^*\Delta\left(\left(D_1 \odot (UEU^*)^T\right)^{-1} D_1\Delta^{-1}\big(\delta(UAEU^*)\big)\right)U \\
&= U^*\Delta\left(\left(D_1\delta\big((UEU^*)^T\big)\right)^{-1} D_1\Delta^{-1}\big(\delta(UAEU^*)\big)\right)U \\
&= U^*\Delta\Big(\big(\delta(UEU^*)\big)^{-1}\Delta^{-1}\big(\delta(UAEU^*)\big)\Big)U, \text{(ya que } \delta(A) = \delta(A^T)\text{)}, \\
&= U^*\delta(UEU^*)^{-1}\delta(UAEU^*)U, \text{(Usando la observación 1.)}, \\
&= C(A)^{-1}C(AE).
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Notese que el precondicionador superóptimo resulta ser un caso particular del caso anterior tomando $E = A^*$.
Si $E \in M_U$ siguiendo un proceso análogo al seguido en la observación 4., obtenemos que en ese caso

$$C(A)_{D,E} = C(D)^{-1}C(DA). \tag{2.16}$$

2.3. Razón de convergencia de $C(E)^{-1}C(AE)$ y $C(D)^{-1}C(DA)$

En esta sección asumiremos que $U = F$ es la matriz de Fourier y que A_n, D_n y E_n son matrices de Toeplitz y establecemos las propiedades asintóticas de los precondicionadores dados en las ecuaciones (2.15) y (2.16).

2.3.1. Caso precondicionador $C(D)^{-1}C(AD)$

Supongamos que las matrices Hermitianas de Toeplitz A_n y D_n son secciones finitas de matrices fijas e infinitas A_∞ y D_∞ respectivamente. Es decir las entradas de A_n y A_∞ son $a_{ij} = a_{i-j}$, con $a_k = \overline{a_{-k}}$ para todo k, mientras que las de D_n y D_∞ son $d_{ij} = d_{i-j}$ con $d_k = \overline{d_{-k}}$ para todo k. Nosotros asociamos a A_∞ la función generatriz de valor real (ver (1.19))

$$f(\theta) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_k e^{-\hat{\imath}k\theta},$$

y a D_∞ la función

$$g(\theta) = \sum_{-\infty}^{\infty} d_k e^{-\hat{\imath}k\theta},$$

definidas en el intervalo $[-\pi, \pi)$. Asumimos además que f y g están en la clase de Wiener, es decir

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |a_k| = M_1 < \infty, \tag{2.17}$$

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |d_k| = M_2 < \infty, \tag{2.18}$$

y que son funciones positivas. Se sigue de (1.19) que A_n y D_n son matrices Hermitianas y del teorema 1.5.1 que son matrices definidas positivas, ya que si

$$0 < f_{min} < f < f_{max} < \infty, \tag{2.19}$$

y

$$0 < g_{min} < g < g_{max} < \infty, \tag{2.20}$$

entonces

$$\lambda(A_n) \subseteq [f_{min}, f_{max}], \tag{2.21}$$

y

$$\lambda(D_n) \subseteq [g_{min}, g_{max}]. \tag{2.22}$$

Si definimos que $T_n = C(D_n)^{-1}C(A_nD_n)$ entonces $T_n^{-1} = C(D_n)C(A_nD_n)^{-1}$, y por lo tanto tenemos que

$$\begin{aligned} T_n^{-1}A_n &= I_n + T_n^{-1}[A_n - C(A_n)] + T_n^{-1}[C(A_n) - T_n] \\ &= I_n + T_n^{-1}[A_n - C(A_n)] + C(A_nD_n)^{-1}[C(A_n)C(D_n) - C(A_nD_n)] \end{aligned} \tag{2.23}$$

Ahora probaremos que bajo las hipótesis anteriores T_n^{-1} y $C(A_nD_n)$ están uniformemente acotadas en norma l_2 y que $\lim_{n\to\infty} \|C(A_n)C(D_n) - C(A_nD_n)\|_2 = 0$. Esto junto con el hecho que el espectro de $A_n - C_n(A_n)$ está acumulado alrededor de cero (ver teorema 1.5.11) nos permitirá concluir que el espectro de $T_n^{-1}A_n$ está acumulado alrededor de uno.

Lema 2.3.1. *Sean f y g las correspondientes funciones generatrices de A_n y D_n, asumamos además que son funciones positivas en la clase de Wiener. Entonces para n suficientemente grande $C(A_nD_n)$, T_n y sus inversas están uniformemente acotadas en norma l_2.*

Demostración. Como f y g son positivas y en la clase de Wiener, A_n y D_n son Hermitianas y definidas positivas para todo n. Por lo tanto del teorema 1.3.12 se sigue que

$$\lambda_{min}(A_n)\lambda_{min}(D_n) \leq \sigma_i(A_nD_n) \leq \lambda_{max}(A_n)\lambda_{max}(D_n), \tag{2.24}$$

pero como (2.21) y (2.22) se tienen, obtenemos que

$$\sigma(A_nD_n) \subseteq [f_{min}g_{min}, f_{max}g_{max}] \tag{2.25}$$

luego del teorema 1.3.1 se sigue que

$$\lambda(A_nD_n) \subseteq [f_{min}g_{min}, f_{max}g_{max}] \tag{2.26}$$

y del teorema 1.5.6 se obtiene que

$$\lambda(C(A_nD_n)) \subseteq [f_{min}g_{min}, f_{max}g_{max}]. \tag{2.27}$$

Finalmente, tenemos que

$$\|T_n^{-1}\|_2 = \|C(D_n)C(A_nD_n)^{-1}\|_2 \leq \|C(A_nD_n)^{-1}\|_2\|C(D_n)\|_2 \leq \frac{g_{max}}{f_{min}g_{min}}$$
$$\|T_n\|_2 = \|C(D_n)^{-1}C(A_nD_n)\|_2 \leq \|C(A_nD_n)\|_2\|C(D_n)^{-1}\|_2 \leq \frac{f_{max}g_{max}}{g_{min}}$$

□

Ahora en vez de probar que $\|C(A_n)C(D_n) - C(A_nD_n)\|_2$ tiende a cero cuando n tiende a infinito, probaremos un resultado más fuerte a saber que

$$\|C(A_n)C(D_n) - C(A_nD_n)\|_1$$

y

$$\|C(A_n)C(D_n) - C(A_nD_n)\|_\infty$$

tienden a cero cuando n tiende a infinito. Por simplicidad asumiremos que $n = 2m + 1$ es impar . El caso para n par puede ser probado similarmente. Sea $S(D_n)$ el precondicionador de Strang de

D. Como S_n es circulante por la propiedad 4. del lema 1.5.1 tenemos que

$$\begin{aligned}\|C(A_n)C(D_n) - C(A_nD_n)\|_1 &= \|C(A_n)C(D_n) - C(A_nD_n) - C(A_n)S(D_n) + C(A_n)S(D_n)\|_1 \\ &\leq \|C(A_n)C(D_n) - C(A_n)S(D_n)\|_1 + \|C(A_n)S(D_n) - C(A_nD_n)\|_1 \\ &\leq \|C(A_n)\|_1\|C(D_n) - S(D_n)\|_1 + \|C\big(A_nS(D_n)\big) - C(A_nD_n)\|_1\end{aligned}$$

Pero por el lema 1.5.2 obtenemos que

$$\leq \|A_n\|_1\|C(D_n) - S(D_n)\|_1 + \|C\Big(A_n\big(S(D_n) - C(A_nD_n)\big)\Big)\|_1. \tag{2.28}$$

Pero de (2.17) se tiene que $\|A\|_1 \leq M_1$ luego del teorema 1.5.10 se sigue que el primer término de (2.28) tiende a cero cuando n tiende a infinito. Ahora probaremos que el segundo término en(2.28) también tiende a cero cuando n tiende a infinito.

Lema 2.3.2. *Sean f y g funciones de valor real en la clase de Wiener que generan a A_n y D_n respectivamente. Entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \|C(A_nS(D_n)) - C(A_nD_n)\|_1 = 0$$

Demostración. Para todo $\epsilon > 0$, por (2.17) y (2.18) existen N_1 y N_2 tales que

$$\sum_{|k|\geq N_1} |a_k| < \epsilon \quad y \quad \sum_{|k|\geq N_2} |d_k| < \epsilon \tag{2.29}$$

Sea $N = \max(N_1, N_2)$. Para todo $n > \max(7N, N^2/\epsilon)$, particionamos $A_n = A_n^{(N)} + A_n^{(n-N)}$ de la siguiente manera. Sea $A_n^{(N)}$ la matriz obtenida copiando las $4N - 1$ diagonales centrales de A_n y tomando las otras entradas iguales a cero. En forma de bloque $A_n^{(N)}$ está dada por

$$A_n^{(N)} = \begin{bmatrix} A_N & B_N^* & 0 & 0 & 0 \\ B_N & A_N & \dagger & 0 & 0 \\ 0 & \dagger & \dagger & \dagger & 0 \\ 0 & 0 & \dagger & A_N & B_N^* \\ 0 & 0 & 0 & B_N & A_N \end{bmatrix}, \tag{2.30}$$

donde $\dagger$ denota bloque no nulos, A_N es la $N \times N$ submatriz principal de A_n y B_N es una $N \times N$ matriz Toeplitz triangular superior dada por

$$B_N = \begin{bmatrix} 0 & a_{N-1} & a_{N-2} & \cdots & a_1 \\ & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & a_{N-2} \\ & 0 & & \ddots & a_{N-1} \\ & & & & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.31}$$

Defina $A_n^{(n-N)} = A_n - A_n^{(N)}$. De manera correspondiente, particionamos $S(D_n) - D_n$ de la siguiente forma. Sea $X_n^{(N)}$ la matriz obtenida a partir de $S(D_n) - D_n$ tomando las $n - 2N - 1$ diagonales centrales iguales a cero. Más precisamente $X_n^{(N)}$ tiene la forma por bloques

$$X_n^{(N)} = \begin{bmatrix} 0_N & 0 & 0 & 0 & Z_N^* \\ 0 & 0_N & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0_N & 0 \\ Z_N & 0 & 0 & 0 & 0_N \end{bmatrix}, \tag{2.32}$$

Donde 0_N es la matriz cero de tamaño $N \times N$ y Z_N es una matriz de Toeplitz triangular inferior de tamaño $N \times N$ dada por

$$Z_N = \begin{bmatrix} d_{-N} - d_{n-N} & & & 0 \\ \vdots & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ d_{-1} - d_{n-1} & \cdots & \cdots & d_{-N} - d_{n-N} \end{bmatrix}. \tag{2.33}$$

Sea $Y_n^{(N)} = S(D_n) - D_n - X_n^{(N)}$, entonces por el teorema 1.5.2,

$$\begin{aligned} \|C(A_n(S(D_n) - D_n))\|_1 &= \|C(A_n(X_n^{(N)} + Y_n^{(N)}))\|_1 \\ &\leq \|C(A_n(X_n^{(N)}))\|_1 + \|C(A_n(Y_n^{(N)}))\|_1 \\ &\leq \|C(A_n^{(N)}(X_n^{(N)}))\|_1 + \|C(A_n^{(n-N)}(X_n^{(N)}))\|_1 + \|C(A_n(Y_n^{(N)}))\|_1 \\ &\leq \|C(A_n^{(N)}(X_n^{(N)}))\|_1 + \|A_n^{(n-N)}\|_1 \|X_n^{(N)}\|_1 + \|A_n\|_1 \|Y_n^{(N)}\|_1 \end{aligned} \tag{2.34}$$

Es claro que por (2.17) $\|A_n\|_1$ está acotado por M_1 y por (2.18) $\|X_n^{(N)}\|_1$ está acotado por M_2. Además,

$$\|Y_n^{(N)}\|_1 = \sum_{k=m+1}^{n-N+1} |d_{k-n} - d_k| \leq \sum_{k=N+1}^{n-N+1} |d_k| < \epsilon,$$

y

$$\|A_n^{(n-N)}\|_1 \leq \sum_{|k| \leq N} |a_k| < \epsilon.$$

De (2.40) tenemos que

$$\|C(A_n(S(D_n) - D_n))\|_1 \leq \|C(A_n^{(N)}(X_n^{(N)}))\|_1 + (M_1 + M_2)\epsilon. \tag{2.35}$$

Luego sólo falta estimar $\|C(A_n^{(N)}(X_n^{(N)}))\|_1$.
Por (2.30) y (2.32), tenemos que

$$A_n^{(N)} X_n^{(N)} = \begin{bmatrix} 0_N & 0 & 0 & 0 & A_N Z_N^* \\ 0 & 0_N & 0 & 0 & B_N Z_N^* \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_N^* Z_N & 0 & 0 & 0_N & 0 \\ A_N Z_N & 0 & 0 & 0 & 0_N \end{bmatrix}. \tag{2.36}$$

Observemos que los valores absolutos de todos los elementos en $A_n^{(N)}X_n^{(N)}$ están acotados por M_1M_2. En efecto

$$\|A_N\|_1 \leq \sum_{|j|<N-1} |a_j| \leq M_1,$$
$$\|B_N\|_1 \leq \sum_{j=1}^{N-1} |a_j| \leq M_1,$$
$$\|Z_N\|_1 \leq \sum_{j=1}^{n-1} |d_j| \leq M_2,$$

vemos que para todo $0 \leq i, j < N$,

$$|(A_N Z_N^*)_{ij}| \leq \sum_{k=0}^{N-1} |(A_N)_{ik}||(Z_N^*)_{kj}| \leq \|A_N\|_1 \|Z_N\|_1 \leq M_1M_2.$$

Argumentos similares prueban que para todo $0 \leq i, j < n$,

$$|(A_N X_N)_{ij}| \leq M_1M_2. \tag{2.37}$$

De (2.36) es claro que si $n > 7N$, la primer columna de la matriz circulante $C(A_N X_N)$ es de la forma

$$(0, b_1, \ldots, b_{3N-2}, 0, \ldots, 0, b_{n-3N+2}, \ldots, b_{n-1})^*. \tag{2.38}$$

De (2.37), los valores absolutos de $b_1, \ldots, b_{3N-2}$ y $b_{n-3N+2}, \ldots, b_{n-1}$ están todos acotados por $\frac{NM_1M_2}{n}$. De donde,

$$\|C(A_n^{(N)} X_n^{(N)})\|_1 \leq 2(3N-2)\frac{2NM_1M_2}{n} \leq \frac{6N^2M_1M_2}{n} < 6M_1M_2\epsilon,$$

Para todo $n > \frac{N^2}{\epsilon}$. Luego por (2.35) resulta que,

$$\|C(A_n(S(D_n) - D_n))\|_1 \leq (6M_1M_2 + M_1 + M_2)\epsilon$$

para todo $n > \text{máx}(7N, N^2/\epsilon)$.

□

Ahora tenemos el mismo resultado para la norma infinito

Lema 2.3.3. *Sean f y g funciones de valor real en la clase de Wiener que generan a A_n y D_n respectivamente. entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \|C(A_n)C(D_n) - C(A_nD_n)\|_\infty = 0$$

Demostración. Procediendo de manera análoga a lo hecho en (2.28) y teniendo en cuenta que como A_n, $C(D_n)$ y $S(D_n)$ son Hermitianas entonces $\|A_n\|_1 = \|A_n\|_\infty$, $\|C(D_n)\|_1 = \|C(D_n)\|_\infty$ y $\|S(D_n)\|_1 = \|S(D_n)\|_\infty$, obtenemos

$$\|C(A_n)C(D_n) - C(A_nD_n)\|_\infty \leq \|A_n\|_1 \|C(D_n) - S(D_n)\|_1 + \|C(A_n(S(D_n) - C(A_nD_n)))\|_\infty. \tag{2.39}$$

Luego para obtener el resultado sólo es necesario probar que el segundo término de la derecha de (2.39) tiende a cero cuando n tiende a infinito. Procediendo de manera análoga a lo hecho en el lemma 2.3.2 y teniendo en cuenta que las matrices A_n, $A_n^{(n-N)}$, $X_n^{(N)}$ y $Y_n^{(N)}$ son Hermitianas y el teorema 1.3.5, obtenemos

$$\|C(A_n(S_n(D_n) - D_n))\|_\infty \leq \|C(A_n^{(N)}(X_n^{(N)}))\|_\infty + \|A_n^{(n-N)}\|_1\|X_n^{(N)}\|_1 + \|A_n\|_1\|Y_n^{(N)}\|_1. \quad (2.40)$$

Luego se sigue que

$$\|C(A_n(S_n(D_n) - D_n))\|_\infty \leq \|C(A_n^{(N)}(X_n^{(N)}))\|_\infty + (M_1 + M_2)\epsilon, \quad (2.41)$$

Y por lo tanto sólo es necesario estimar $\|C(A_n^{(N)}(X_n^{(N)}))\|_\infty$, pero como $C(A_n^{(N)}(X_n^{(N)}))$ es circulante, de (2.38) se sigue que también $\|C(A_n^{(N)}(X_n^{(N)}))\|_\infty \leq 6M_1M_3\epsilon$, lo cual completa la prueba. □

Usando (2.28) y (2.39), los teoremas 1.3.5 y 1.5.10 y los lema 2.3.2 y 2.3.3 se obtiene que

Corolario 2.3.1. *Si f y g las funciones generatrices de A_n y D_n respectivamente, son funciones de valor real en la clase de Wiener. Entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \|C(A_n)C(D_n) - C(A_nD_n)\|_1 = \lim_{n\to\infty} \|C(A_n)C(D_n) - C(A_nD_n)\|_2 = 0$$

.

Ahora establecemos el teorema más importante de esta sección.

Teorema 2.3.1. *Sean f y g funciones de valor real positivas en la clase de Wiener que generan a A_n y D_n respectivamente, entonces el espectro de $T_n^{-1}A_n$ está acumulado alrededor de uno. Más precisamente, para todo $\epsilon > 0$, existen $N_1, N_2 > 0$, tales que, para todo $n > N_1$, a lo sumo N_2 valores propios de $T_n^{-1}A_n - I$ tienen valor absoluto mayor que ϵ.*

Demostración. Consideremos

$$C(A_nD_n)C(D_n)^{-1}A_n^{-1} = \big(C(A_nD_n) - C(A_n)C(D_n)\big)C(D_n)^{-1}A_n^{-1} + C(A_n)A_n^{-1},$$

ahora

$$\|(C(A_nD_n) - C(A_n)C(D_n))C(D_n)^{-1}A_n^{-1}\|_2 \leq \|C(D)^{-1}\|_2\|A_n^{-1}\|_2\|C(A_nD_n) - C(A_n)C(D_n)\|_2.$$

pero como $C(D)^{-1}$ y A_n^{-1} están uniformemente acotados en norma l_2 y además $\lim_{n\to\infty} \|C(A_nD_n) - C(A_n)C(D_n)\|_2 = 0$ se sigue que

$$\lim_{n\to\infty}(C(A_nD_n) - C(A_n)C(D_n))C(D_n)^{-1}A_n^{-1} = 0$$

y ya que $C(A)A^{-1}$ está acumulado alrededor de uno (ver 1.5.12), entonces se sigue que $C(A_nD_n)C(D_n)^{-1}A_n^{-}$ y por lo tanto $T_n^{-1}A_n$ también están acumulados alrededor de uno. □

Para probar que $\lim_{n\to\infty} \|C(E_nA_n) - C(E_n)C(A_n)\|_2 = 0$ y que $C(E_n)C(E_nA_n)^{-1}A_n$ está acumulado alrededor de 1 se procede de manera idéntica a la anterior.

2.3.2. Precondicionador $H_n = C(D_n)^{-1}C(D_nA_nE_n)C(E_n)^{-1}$

Una generalización intuitivamente obvia de los precondicionadores $C(D_n)^{-1}C(D_nA_n)$ y $C(E_n)^{-1}C(A_nE_n)$ es $H_n = C(D_n)^{-1}C(D_nA_nE_n)C(E_n)^{-1}$ y aunque este precondicionador no se obtiene mediante un problema de minimización de normas, el objetivo de esta sección es probar que así como los precondicionadores $C(D_n)^{-1}C(D_nA_n)$ y $C(E_n)^{-1}C(A_nE_n)$ son eficientes ya que $C(D_n)C(D_nA_n)^{-1}A_n$ y $C(E_n)C(A_nD_n)^{-1}A_n$ tienen su correspondiente espectro acumulado alrededor de uno, también

$$C(D_n)^{-1}C(D_nA_nE_n)C(E_n)^{-1}$$

sería un buen precondicionador y tiene la ventaja que si tomamos $D = E$ es Hermitiano. Asumamos que $U = F$ es la matriz de Fourier y que A_n, D_n y E_n son matrices de Toeplitz. Supongamos que las matrices Hermitianas Toeplitz A_n, D_n y E_n son secciones finitas de matrices fijas e infinitas A_∞, D_∞ y E_∞ respectivamente es decir las entradas de A_n y A_∞ son $a_{ij} = a_{i-j}$, con $a_k = \overline{a_{-k}}$ para todo k, mientras que las de D_n y D_∞ son $d_{ij} = d_{i-j}$ con $d_k = \overline{d_{-k}}$ para todo k y las de E_n y E_∞ son $e_{ij} = e_{i-j}$ con $e_k = \overline{e_{-k}}$ para todo k. Asociamos a A_∞ la función generatriz de valor real

$$f(\theta) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_k e^{-\hat{\imath}k\theta},$$

a D_∞ la función

$$g(\theta) = \sum_{-\infty}^{\infty} d_k e^{-\hat{\imath}k\theta},$$

y a E_∞ la función

$$h(\theta) = \sum_{-\infty}^{\infty} e_k e^{-\hat{\imath}k\theta}$$

definidas en el intervalo $[-\pi, \pi)$. Asumimos además que f, g y h son funciones positivas y en la clase de Wiener, es decir

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |a_k| = M_1 < \infty \tag{2.42}$$

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |d_k| = M_2 < \infty \tag{2.43}$$

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |e_k| = M_3 < \infty \tag{2.44}$$

Se sigue de (1.19) que A_n, D_n y E_n son matrices Hermitianas y del teorema 1.5.1 que son matrices definidas positivas, ya que si

$$0 < f_{min} < f < f_{max} < \infty, \tag{2.45}$$

$$0 < g_{min} < g < g_{max} < \infty, \tag{2.46}$$

y

$$0 < h_{min} < h < h_{max} < \infty, \tag{2.47}$$

entonces

$$\lambda(A_n) \subseteq [f_{min}, f_{max}], \tag{2.48}$$

$$\lambda(D_n) \subseteq [g_{min}, g_{max}], \tag{2.49}$$

y

$$\lambda(E_n) \subseteq [h_{min}, h_{max}]. \tag{2.50}$$

Sea $H_n = C(D_n)^{-1}C(D_nA_nE_n)C(E_n)^{-1}$, entonces $H_n^{-1} = C(D_n)\big(C(D_nA_nE_n)\big)^{-1}C(E_n)$, y por lo tanto tenemos que

$$H_n^{-1}A_n = I_n + H_n^{-1}[A_n - C(A_n)] + C(D_nA_nE_n)^{-1}[C(D_n)C(A_n)C(E_n) - C(D_nA_nE_n)] \tag{2.51}$$

Ahora probaremos que bajo las hipótesis anteriores H_n^{-1} y $C(D_nA_nE_n)$ están uniformemente acotadas en norma l_2 y que

$$\lim_{n\to\infty} \|C(D_n)C(A_n)C(E_n) - C(D_nA_nE_n)\|_2 = 0.$$

Esto junto con el hecho que el espectro de $A_n - C_n(A_n)$ está acumulado alrededor de cero (ver teorema 1.5.11) nos permitirá concluir que el espectro de $H_n^{-1}A_n$ está acumulado alrededor de uno.

Lema 2.3.4. *Sean f, g y h las correspondientes funciones generatrices de A_n, D_n y E_n, asumamos además que son positivas y en la clase de Wiener. Entonces para n suficientemente grande, $C(D_nA_nE_n)$, H_n y sus inversas están uniformemente acotadas en norma l_2.*

Demostración. Como f, g y h son positivas y en la clase de Wiener, A_n y D_n son Hermitianas y definidas positivas para todo n. Por lo tanto del teorema 1.3.12 se sigue que

$$\lambda_{min}(D_n)\lambda_{min}(A_n)\lambda_{min}(E_n) \le \sigma_i(ADE) \le \lambda_{max}(D_n)\lambda_{max}(A_n)\lambda_{max}(E_n), \tag{2.52}$$

pero como (2.48), (2.49) y (2.50) se tienen obtenemos que

$$\sigma(D_nA_nE_n) \subseteq [f_{min}g_{min}h_{min}, f_{max}g_{max}h_{max}] \tag{2.53}$$

luego del teorema 1.3.1 se sigue que

$$\lambda(D_nA_nE_n) \subseteq [f_{min}g_{min}h_{min}, f_{max}g_{max}h_{max}] \tag{2.54}$$

y del teorema 1.5.6 se obtiene que

$$\lambda(C(D_nA_nE_n)) \subseteq [f_{min}g_{min}h_{min}, f_{max}g_{max}h_{max}]. \tag{2.55}$$

Finalmente, tenemos que

$$\begin{aligned} \|H_n^{-1}\|_2 &= \|C(D_n)C(D_nA_nE_n)^{-1}C(E_n)\|_2 \\ &\le \|C(D_n)\|_2\|C(D_nA_nE_n)^{-1}\|_2\|C(E_n)\|_2 \\ &\le \frac{g_{max}h_{max}}{f_{min}g_{min}h_{min}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|H_n\|_2 &= \|C(D_n)^{-1}C(D_nA_nE_n)C(E_n)^{-1}\|_2\\&\leq \|C(D_n)^{-1}\|_2\|C(D_nA_nE_n)\|_2\|C(E_n)^{-1}\|_2\\&\leq \frac{f_{max}g_{max}h_{max}}{g_{min}h_{min}}\end{aligned}$$

□

Ahora en vez de probar que $\|C(D_n)C(A_n)C(E_n) - C(D_nA_nE_n)\|_2$ tiende a cero cuando n tiende a infinito, probaremos un resultado más fuerte a saber que

$$\|C(D_n)C(A_n)C(E_n) - C(D_nA_nE_n)\|_1$$

y

$$\|C(D_n)C(A_n)C(E_n) - C(D_nA_nE_n)\|_\infty$$

tienden a cero cuando n tiende a infinito. Por simplicidad asumiremos que $n = 2m+1$ es impar . El caso para n par puede ser probado similarmente. Sea $S(D_n)$ y $S(E_n)$ los precondicionadores de Strang de D_n y E_n respectivamente. Como S_n es circulante por la propiedad 4. del lema 1.5.1 tenemos que

$$\begin{aligned}\|C(D_nA_nE_n) - C(D_n)C(A_n)C(E_n)\|_1 &\leq \|C(D_n)C(A_n)S(E_n) - C(D_n)C(A_n)C(E_n)\|_1\\&+ \|C(D_nA_n)S(E_n) - C(D_n)C(A_n)S(E_n)\|_1 + \|S(D_n)C(A_nE_n) - S(D_n)C(A_n)S(E_n)\|_1\\&+ \|C\Big(\big(S(D_n) - D_n\big)A_n\big(S(E_n) - E_n\big)\Big)\|_1, \quad (2.56)\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}\|C(D_nA_nE_n) - C(D_n)C(A_n)C(E_n)\|_1 &\leq \|C(D_n)\|_1\|C(A_n)\|_1\|S(E_n) - C(E_n)\|_1\\&+ \|C(D_nA_n) - C(D_n)C(A_n)\|_1\|S(E_n)\|_1 + \|S(D_n)\|_1\|C(A_nE_n) - C\big(A_nS(E_n)\big)\|_1\\&+ \|C\Big(\big(S(D_n) - D_n\big)A_n\big(S(E_n) - E_n\big)\Big)\|_1, \quad (2.57)\end{aligned}$$

Pero de (2.42) se tiene que $\|C(A_n)\|_1 \leq \|A\|_1 \leq M_1$ y de (2.43) que $\|C(D_n)\|_1 \leq M_2$, además $\|S(D_n)\| \leq M_2$ y $\|S(D_n)\| < M_3$. Del lema 2.3.2

$$\lim_{n\to\infty} \|C(A_nE_n) - C(A_nS(E_n))\|_1 = 0,$$

del corolario 2.3.1, obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} \|C(D_nA_n) - C(D_n)C(A_n)\|_1 = 0,$$

y del teorema 1.5.10

$$\lim_{n\to\infty} ||S(E_n) - C(E_n)||_1 = 0.$$

Luego sólo falta probar que

$$\lim_{n\to\infty} \|C\Big(\big(S(D_n) - D_n\big)A_n\big(S(E_n) - E_n\big)\Big)\|_1 = 0.$$

Lema 2.3.5. *Sean f, g y h las funciones generatrices de A_n, D_n y E_n respectivamente, funciones de valor real en la clase de Wiener. Entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \|C\Big(\big(S(D_n)-D_n\big)A_n\big(S(E_n)-E_n\big)\Big)\|_1 = 0$$

Demostración. Para todo $\epsilon > 0$, por (2.42), (2.43) y (2.42) existen N_1, N_2 y N_3 tales que

$$\sum_{|k|\geq N_1} |a_k| < \epsilon, \qquad \sum_{|k|\geq N_2} |d_k| < \epsilon \quad y \quad \sum_{|k|\geq N_3} |e_k| < \epsilon. \tag{2.58}$$

Sea $N = \text{máx}(N_1, N_2, N_3)$. Para todo $n > \text{máx}(2N, N^2/\epsilon)$, particionamos $A_n = A_n^{(N)} + A_n^{(n-N)}$ de la siguiente manera. Sea $A_n^{(N)}$ la matriz obtenida copiando las $2N-1$ diagonales centrales de A_n y tomando las otras entradas iguales a cero. En forma de bloque $A_n^{(N)}$ está dada por

$$A_n^{(N)} = \begin{bmatrix} A_N & B_N^* & 0 & 0 & 0 \\ B_N & A_N & \dagger & 0 & 0 \\ 0 & \dagger & \dagger & \dagger & 0 \\ 0 & 0 & \dagger & A_N & B_N^* \\ 0 & 0 & 0 & B_N & A_N \end{bmatrix}, \tag{2.59}$$

donde $\dagger$ denota bloque no nulos, A_N es la $N \times N$ submatriz principal de A_n y B_N es una $N \times N$ matriz Toeplitz triangular superior dada por

$$B_N = \begin{bmatrix} 0 & a_{N-1} & a_{N-2} & \cdots & a_1 \\ & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & a_{N-2} \\ & 0 & & \ddots & a_{N-1} \\ & & & & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.60}$$

Defina $A_n^{(n-N)} = A_n - A_n^{(N)}$. De manera correspondiente, particionamos $S(E_n) - E_n$ de la siguiente forma. Sea $X_n^{(N)}$ la matriz obtenida a partir de $S(E_n) - E_n$ tomando las $n - 2N - 1$ diagonales centrales iguales a cero. Más precisamente $X_n^{(N)}$ tiene la forma por bloques

$$X_n^{(N)} = \begin{bmatrix} 0_N & 0 & 0 & 0 & Z_N^* \\ 0 & 0_N & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0_N & 0 \\ Z_N & 0 & 0 & 0 & 0_N \end{bmatrix}, \tag{2.61}$$

Donde 0_N es la matriz cero de tamaño $N \times N$ y Z_N es una matriz de Toeplitz triangular inferior de tamaño $N \times N$ dada por

$$Z_N = \begin{bmatrix} e_{-N} - e_{n-N} & & & 0 \\ \vdots & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ e_{-1} - e_{n-1} & \cdots & \cdots & e_{-N} - e_{n-N} \end{bmatrix}. \tag{2.62}$$

Sea $Y_n^{(N)} = S(E_n) - E_n - X_n^{(N)}$. Análogamante particionemos $S(D_n) - D_n = W_n(N) + V_n(N)$, con

$$W_n^{(N)} = \begin{bmatrix} 0_N & 0 & 0 & 0 & R_N^* \\ 0 & 0_N & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0_N & 0 \\ R_N & 0 & 0 & 0 & 0_N \end{bmatrix}, \tag{2.63}$$

donde

$$R_N = \begin{bmatrix} d_{-N} - d_{n-N} & & & 0 \\ \vdots & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ d_{-1} - d_{n-1} & \cdots & \cdots & d_{-N} - d_{n-N} \end{bmatrix} \tag{2.64}$$

y $V_n^{(N)} = S(D_n) - D_n - W_n^{(N)}$. Entonces por el teorema 1.5.2,

$$\begin{aligned} \|C((S(D_n) - D_n)A_n(S(E_n) - E_n)\|_1 &= \|C\Big((W_n^{(N)} + V_n^{(N)})A_n(X_n^{(N)} + Y_n^{(N)})\Big)\|_1 \\ &\leq \|C(W_n^{(N)}A_nX_n^{(N)})\|_1 + \|C(W_n^{(N)}A_nY_n^{(N)})\|_1 \\ &\quad + \|C(V_n^{(N)}A_nX_n^{(N)})\|_1 + \|C(V_n^{(N)}A_nY_n^{(N)})\|_1 \\ &\leq \|C(W_n^{(N)}A_nX_n^{(N)})\|_1 + \|W_n^{(N)}\|_1\|A_n\|_1\|Y_n^{(N)}\|_1 \\ &\quad + \|V_n^{(N)}\|_1\|A_n\|_1\|X_n^{(N)}\|_1 + \|V_n^{(N)}\|_1\|A_n\|_1\|Y_n^{(N)}\|_1. \end{aligned} \tag{2.65}$$

Pero (2.42) $\|A_n\|_1$ está acotado por M_1, por (2.43) $\|X_n^{(N)}\|_1$ está acotado por M_2 y por (2.44) $\|W_n^{(N)}\|_1$ está acotado por M_3. Además,

$$\|Y_n^{(N)}\|_1 = \sum_{k=m+1}^{n-N+1} |e_{k-n} - e_k| \leq \sum_{k=N+1}^{n-N+1} |e_k| < \epsilon,$$

$$\|V_n^{(N)}\|_1 = \sum_{k=m+1}^{n-N+1} |d_{k-n} - d_k| \leq \sum_{k=N+1}^{n-N+1} |d_k| < \epsilon,$$

De (2.65) tenemos que

$$\|C((S(D_n) - D_n)A_n(S(E_n) - E_n))\|_1 \leq \|C(W_n^{(N)}A_nX_n^{(N)})\|_1 + (M_1M_2 + M_1M_3 + \epsilon M_1)\epsilon. \tag{2.66}$$

Luego sólo falta estimar $\|C(W_n^{(N)}A_nX_n^{(N)})\|_1$.
Por (2.59), (2.61) y (2.63), tenemos que

$$W_n^{(N)}A_n^{(N)}X_n^{(N)} = \begin{bmatrix} R_N^*A_NZ_N & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_NA_NZ_N \end{bmatrix}. \tag{2.67}$$

Observemos que los valores absolutos de todos los elementos en $W_n^{(N)}A_n^{(N)}X_n^{(N)}$ están acotados por $M_1M_2M_3$. En efecto

$$\|A_N\|_1 \leq \sum_{|j|<N-1} |a_j| \leq M_1,$$
$$\|Z_N\|_1 \leq \sum_{j=1}^{n-1} |d_j| \leq M_3,$$
$$\|R_N\|_1 \leq \sum_{j=1}^{N-1} |d_j| \leq M_2,$$

Luego para todo $0 \leq i, j < N$,

$$|(R_NA_NZ_N^*)_{ij}| \leq \sum_{t=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{N-1} |(R_N)_{it}||(A_N)_{tk}||(Z_N^*)_{kj}| \leq \|R_N\|_1\|A_N\|_1\|Z_N\|_1 \leq M_1M_2M_3$$

Argumentos similares prueban que para todo $0 \leq i, j < n$,

$$|(W_n^{(N)}A_n^{(N)}X_n^{(N)})_{ij}| \leq M_1M_2M_3. \tag{2.68}$$

De (2.36) es claro que si $n > 7N$, la primer columna de la matriz circulante $C(W_NA_NX_N)$ es de la forma

$$(r_1, \ldots, r_N, 0, \ldots, 0, r_{n-N+1}, \ldots, r_{n-1})^*. \tag{2.69}$$

Para ciertos números reales $r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}$. De (2.68), los valores absolutos de $r_1, \ldots, r_N$ y $r_{n-N+1}, \ldots, r_{n-1}$ están todos acotados por $\frac{2NM_1M_2M_3}{n}$. De donde,

$$\|C(A_n^{(N)}X_n^{(N)})\|_1 \leq 2N\frac{2NM_1M_2M_3}{n} \leq \frac{4N^2M_1M_2M_3}{n} < 4M_1M_2M_3\epsilon,$$

Para todo $n > \frac{N^2}{\epsilon}$. Luego por (2.66) resulta que,

$$\|C((S(D_n) - D_n))A_n(S(E_n) - E_n))\|_1 \leq (4M_1M_2M_3 + M_1M_2 + M_1M_3 + \epsilon M_1)\epsilon$$

para todo $n > \text{máx}(2N, N^2/\epsilon)$.

□

La prueba que

$$\|C(D_n)C(A_n)C(E_n) - C(D_nA_nE_n)\|_\infty$$

se hace de manera similar a la usada en el lema 2.3.3.
Usando (2.56), los teoremas 1.3.5 y 1.5.10, el lema 2.3.5 y el comentario anterior se obtiene que

Corolario 2.3.2. *Si f y g las funciones generatrices de A_n y D_n respectivamente, son funciones de valor real en la clase de Wiener. Entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \|C(D_n)C(A_n)C(E_n) - C(D_nA_nE_n)\|_1 = \lim_{n\to\infty} \|C(D_n)C(A_n)C(E_n) - C(D_nA_nE_n)\|_2 = 0$$

.

Ahora establecemos el teorema más importante de esta sección.

Teorema 2.3.2. *Supongamos que f, g y h las funciones generatrices de A_n, D_n y E_n respectivamente, son funciones positivas en la clase de Wiener y si definimos*

$$H_n = C(D_n)^{-1}C(D_nA_nE_n)C(E_n)^{-1},$$

entonces el espectro de $H_n^{-1}A_n$ está acumulado alrededor de uno. Más precisamente, para todo $\epsilon > 0$, existen $N_1, N_2 > 0$, tales que, para todo $n > N_1$, a lo sumo N_2 valores propios de $H_n^{-1}A_n - I$ tienen valor absoluto mayor que ϵ.

Demostración. Se sigue de (2.51), a partir de lo anteriormente expuesto. □

De lo expuesto a lo largo de este capítulo podemos concluir que nuestros precondicionadores $C(D_n)^{-1}C(D_nA_n)$, $C(A_nE_n)C(E_n)^{-1}$ y $C(D_n)^{-1}C(D_nA_nE_n)C(E_n)^{-1}$ pueden ser considerados como eficientes en cuanto a la velocidad de convergencia del método de gradiente conjugado precondicionado para resolver el sistema $Ax = b$, cuando A es una matriz de Toeplitz definida positiva. A pesar de esto en la práctica puede resultar muy costoso en cuanto al número de operaciones necesarias para el cálculo de estos precondicionadores, pero creemos que el número de operaciones necesarias es aceptable en el caso en que D_n y E_n sean matrices de Toeplitz tridiagonales o matrices dispersas.

CAPÍTULO 3
Precondicionadores para bloques

3.1. Introducción

La primer sección recopila algunos de los resultados más importantes existentes en la literatura sobre precondicionadores para matrices de Toeplitz por bloques. Posteriormente en las siguientes secciones nosotros presentamos nuestras generalizaciones de estos resultados usando un camino similar al caso puntual, es decir resolviendo un problema de optimización de ciertas normas matriciales sobre espacios vectoriales específicos.

3.2. Preliminares

En esta sección presentamos los resultados principales necesarios para el desarrollo de este capítulo sobre precondicionadores por bloques, estos resultados fueron tomados de [14].
Consideraremos un sistema general $A_{mn}x = b$, donde A_{mn} es una matriz de tamaño $mn \times mn$ particionada como

$$A_{mn} = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,m} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & A_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m,1} & A_{m,2} & \cdots & A_{m,m} \end{pmatrix}, \tag{3.1}$$

donde los bloques $A_{i,j}$ son matrices cuadradas de tamaño $n \times n$.

3.2.1. Operador $C_U^{(1)}$

Dada tal matriz A, una elección intuitiva es usar como precondicionador a la matriz

$$E_{mn} = \begin{pmatrix} C_U(A_{1,1}) & C_U(A_{1,2}) & \cdots & C_U(A_{1,m}) \\ C_U(A_{2,1}) & C_U(A_{2,2}) & \cdots & C_U(A_{2,m}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_U(A_{m,1}) & C_U(A_{m,2}) & \cdots & C_U(A_{m,m}) \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

donde los bloques $C(A_{i,j})$ corresponden al precondicionador de Chan de la matriz $A_{i,j}$. Esta elección es efectivamente la solución de un problema de optimización de una norma como se ve más adelante.

Definición 3.2.1. *Sea A_{mn} la matriz definida en la ecuación (3.1), definimos $\delta^{(1)}(A_{mn})$ como*

$$\delta^{(1)}(A_{mn}) = \begin{pmatrix} \delta(A_{1,1}) & \delta(A_{1,2}) & \cdots & \delta(A_{1,m}) \\ \delta(A_{2,1}) & \delta(A_{2,2}) & \cdots & \delta(A_{2,m}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta(A_{m,1}) & \delta(A_{m,2}) & \cdots & \delta(A_{m,m}) \end{pmatrix}, \tag{3.3}$$

donde cada bloque $\delta(A_{i,j})$, está definido como en 1.5.4. El siguiente lema da la relación entre $\sigma_{max}(A_{mn})$ y $\sigma_{max}(\delta^{(1)}(A_{mn}))$ donde σ_{max} denota el mayor valor singular.

Lema 3.2.1. *Para toda matriz arbitraria $A_{mn} \in \mathbb{M}_{mn}$ particionada como en (3.1) tenemos*

$$\sigma_{max}(\delta^{(1)}(A_{mn}) \leq \sigma_{max}(A_{mn}). \tag{3.4}$$

Además cuando A_{mn} es Hermitiana, $\delta^{(1)}(A_{mn})$ también es Hermitiana y

$$\lambda_{min}(A_{mn}) \leq \lambda_{min}(\delta^{(1)}(A_{mn})) \leq \lambda_{max}(\delta^{(1)}(A_{mn})) \leq \lambda_{max}(A_{mn}). \tag{3.5}$$

En particular, si A_{mn} es definida positiva, entonces también lo es $\delta^{(1)}(A_{mn})$.

$\mathcal{D}^{(1)}_{m,n}$ denotará el conjunto de todas las matrices de la forma dada en (3.3), es decir es el conjunto de todas la matrices con $m \times m$ bloques diagonales de tamaño $n \times n$. Sea $U \in \mathbb{M}_n$ una matriz unitaria y $I_m \in \mathbb{M}_m$ la matriz identidad, definimos

$$M^{(1)}_U = \{(I \otimes U)^* \Lambda^{(1)}_{mn} (I \otimes U); \Lambda^{(1)}_{mn} \in \mathcal{D}^{(1)}_{m,n}\}. \tag{3.6}$$

Definimos ahora un operador $C^{(1)}_U$ que envía toda matriz $A_{mn} \in \mathbb{M}_{mn}$ al minimizador de $\|W_{mn} - A_{mn}\|_F$ sobre todas las matrices $W_{mn} \in M^{(1)}_U$. Algunas propiedades de este operador están dadas en el siguiente teorema

Teorema 3.2.1. *Para toda matriz arbitraria $A_{mn} \in \mathbb{M}_{mn}$ particionada como en (3.1), sea $C^{(1)}_U(A_{mn})$ el minimizador de $\|W_{mn} - A_{mn}\|_F$ sobre todas las matrices $W_{mn} \in M^{(1)}_U$. Entonces*

1. *$C^{(1)}_U(A_{mn})$ está unicamente determinada por*

$$C^{(1)}_U(A_{mn}) = (I \otimes U)^* \delta^{(1)} \left[(I \otimes U) A_{mn} (I \otimes U)^*\right] (I \otimes U). \tag{3.7}$$

2. *$C^{(1)}_U(A_{mn})$ también está dada por*

$$C^{(1)}_U(A_{mn}) = \begin{pmatrix} C_U(A_{1,1}) & C_U(A_{1,2}) & \cdots & C_U(A_{1,m}) \\ C_U(A_{2,1}) & C_U(A_{2,2}) & \cdots & C_U(A_{2,m}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_U(A_{m,1}) & C_U(A_{m,2}) & \cdots & C_U(A_{m,m}) \end{pmatrix}, \tag{3.8}$$

donde C_U es el operador definido en la definición 1.5.5.

3. *Se tiene que*

$$\sigma_{max}\big(C_U^{(1)}(A_{mn})\big) \leq \sigma_{max}(A_{mn}). \tag{3.9}$$

4. *Si A_{mn} es Hermitiana, se tiene que*

$$\lambda_{min}(A_{mn}) \leq \lambda_{min}\big(C_U^{(1)}(A_{mn})\big) \leq \lambda_{max}\big(C_U^{(1)}(A_{mn})\big) \leq \lambda_{max}(A_{mn}). \tag{3.10}$$

En particular, si A_{mn} es definida positiva, entonces también lo es $C_U^{(1)}(A_{mn})$.

5. *El operador $C_U^{(1)}$ es un operador proyección lineal de $\mathbb{M}_{mn}$ en $M_U^{(1)}$ y tiene las normas de operador*

$$\|C_U^{(1)}\|_2 = 1$$

y

$$\|C_U^{(1)}\|_F = 1.$$

3.2.2. Operador $\widetilde{C}_V^{(1)}$

Para matrices A_{mn} particionadas como en (3.1), se puede definir otro precondicionador por bloques.

Definición 3.2.2. *Sea A_{mn} la matriz definida en la ecuación (3.1), definimos $\widetilde{\delta}^{(1)}(A_{mn})$ como*

$$\widetilde{\delta}^{(1)}(A_{mn}) = \begin{pmatrix} A_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_{2,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{m,m} \end{pmatrix}, \tag{3.11}$$

$\widetilde{\mathcal{D}}_{m,n}^{(1)}$ denotará el conjunto de todas las matrices de la forma dada en (3.11), es decir es el conjunto de todas la matrices diagonales por bloques de tamaño $mn \times mn$, donde cada uno de los m bloques de la diagonal son de tamaño $n \times n$. Sea $V \in \mathbb{M}_m$ una matriz unitaria y $I_n \in \mathbb{M}_n$ la matriz identidad, definimos

$$\widetilde{M}_V^{(1)} = \{(V \otimes I)^* \widetilde{\Lambda}_{mn}^{(1)} (V \otimes I); \widetilde{\Lambda}_{mn}^{(1)} \in \widetilde{\mathcal{D}}_{m,n}^{(1)}\}. \tag{3.12}$$

Definimos ahora un operador $\widetilde{C}_V^{(1)}$ que enviía toda matriz $A_{mn} \in \mathbb{M}_n$ al minimizador de $\|W_{mn} - A_{mn}\|_F$ sobre todas las matrices $W_{mn} \in \widetilde{M}_V^{(1)}$. Similar al teorema 3.2.1, tenemos el siguiente teorema

Teorema 3.2.2. *Para toda matriz arbitraria $A_{mn} \in \mathbb{M}_{mn}$ particionada como en (3.1), sea $\widetilde{C}_V^{(1)}(A_{mn})$ el minimizador de $\|W_{mn} - A_{mn}\|_F$ sobre todas las matrices $W_{mn} \in \widetilde{M}_V^{(1)}$. Entonces*

1. *$\widetilde{C}_V^{(1)}(A_{mn})$ está unicamente determinada por*

$$\widetilde{C}_V^{(1)}(A_{mn}) = (V \otimes I)^* \widetilde{\delta}^{(1)} \left[(V \otimes I) A_{mn} (V \otimes I)^*\right] (V \otimes I). \tag{3.13}$$

2. *Se tiene que*

$$\sigma_{max}(\widetilde{C}_V^{(1)}(A_{mn}) \leq \sigma_{max}(A_{mn}). \tag{3.14}$$

3. *Si A_{mn} es Hermitiana, se tiene que*

$$\lambda_{min}(A_{mn}) \leq \lambda_{min}(\widetilde{C}_V^{(1)}(A_{mn})) \leq \lambda_{max}(\widetilde{C}_V^{(1)}(A_{mn})) \leq \lambda_{max}(A_{mn}). \tag{3.15}$$

En particular, si A_{mn} es definida positiva, entonces también lo es $\widetilde{C}_V^{(1)}(A_{mn})$.

4. *El operador $\widetilde{C}_V^{(1)}$ es un operador proyección lineal de $\mathbb{M}_{mn}$ en $M_V^{(1)}$ y tiene las normas de operador*

$$\|\widetilde{C}_V^{(1)}\|_2 = 1$$

y

$$\|\widetilde{C}_V^{(1)}\|_F = 1.$$

Es posible además establecer una relación entre $C_U^{(1)}$ y $\widetilde{C}_V^{(1)}$ como veremos en el siguiente lema, pero antes definiremos $(A_{mn})_{i,j;k,l} := (A_{k,l})_{i,j}$ como la $(i,j)-$ésima entrada del $(k,l)-$ésimo bloque de A_{mn}, para todo $1 \leq i,j \leq n$, $1 \leq k,l \leq m$.

Lema 3.2.2. *Sea U una matriz unitaria y $P \in \mathbb{M}_{mn}$ la matriz de permutación que satisface*

$$(P^* A_{mn} P)_{k,l;i,j} = (A_{mn})_{i,j;k,l}\,, \tag{3.16}$$

P puede escribirse como una matriz con $m \times n$ bloques de tamaño $n \times m$, de la siguiente forma

$$\begin{pmatrix} P_{1,1} & P_{1,2} & \cdots & P_{1,n} \\ P_{2,1} & P_{2,2} & \cdots & P_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{m,1} & P_{m,2} & \cdots & P_{m,n} \end{pmatrix}, \tag{3.17}$$

donde la entrada (i,j) del bloque $P_{k,r} \in \mathbb{M}_{n\times m}$ está dada por

$$(P_{kr})_{i,j} = \begin{cases} 1, & si\ i = r\ y\ j = k, \\ 0, & de\ lo\ contrario. \end{cases} \tag{3.18}$$

Además, para toda matriz arbitraria $A_{mn} \in \mathbb{M}_{mn}$ particionada como en (3.1), se tiene que

$$\delta^{(1)}\left(A_{mn}\right) = P\widetilde{\delta}^{(1)}\left(P^* A_{mn} P\right) P^* \tag{3.19}$$

y

$$C_U^{(1)}\left(A_{mn}\right) = P\widetilde{C}_V^{(1)}\left(P^* A_{mn} P\right) P^* \tag{3.20}$$

3.2.3. Operador $C_{V,U}^{(2)}$

Consideremos el operador

$$C_{V,U}^{(2)} = \widetilde{C}_V^{(1)} \circ C_U^{(1)}$$

donde $\circ$ denota la composición de operadores. Del siguiente lema se obtienen algunas de las propiedades del operador $C_{V,U}^{(2)}$.

Lema 3.2.3. *Para toda matriz arbitraria $A_{mn} \in \mathbb{M}_{mn}$ particionada como en (3.1), tenemos que*

$$(I \otimes U)^* \widetilde{\delta}^{(1)}(A_{mn})(I \otimes U) = \widetilde{\delta}^{(1)}\left[(I \otimes U)^* A_{mn}(I \otimes U)\right] \tag{3.21}$$

y

$$(V \otimes I)\delta^{(1)}(A_{mn})(V \otimes I)^* = \delta^{(1)}\left[(V \otimes I)A_{mn}(V \otimes I)^*\right] \tag{3.22}$$

Sean $V \in \mathbb{M}_m$ y $U \in \mathbb{M}_n$ matrices unitarias, definimos

$$M_{V\otimes U} = \{(V \otimes U)^* \Lambda_{mn}(V \otimes U); \Lambda_{mn} \text{ es una matriz diagonal de tamaño } mn \times mn\}. \tag{3.23}$$

A partir del lema anterior se prueba el siguiente teorema

Teorema 3.2.3. *Para toda matriz arbitraria $A_{mn} \in \mathbb{C}^{mn\times mn}$ particionada como en (3.1), si la matriz $C_{V\otimes U}(A_{mn})$ es el minimizador de $|||W_{mn} - A_{mn}|||_F$ sobre todas las matrices $W_{mn} \in M_{V\otimes U}$, es decir $C_{V\otimes U}(A_{mn})$ es el precondicionador puntual de Chan de la matriz A_{mn} respecto de la matriz $V \otimes U$ (ver definición 1.5.5), entonces*

1. $$C_{V,U}^{(2)}(A_{mn}) = C_{V\otimes U}(A_{mn}). \tag{3.24}$$

2. *Si A_{mn} es Hermitiana, entonces $C_{V,U}^{(2)}(A_{mn})$ es también Hermitiana y*

$$\lambda_{min}(A_{mn}) \le \lambda_{min}(C_{V,U}^{(2)}(A_{mn})) \le \lambda_{max}(C_{V,U}^{(2)}(A_{mn})) \le \lambda_{max}(A_{mn}). \tag{3.25}$$

   En particular, si A_{mn} es definida positiva, entonces también lo es $C_{V,U}^{(2)}(A_{mn})$.

3. *El operador $C_{V,U}^{(2)}(A_{mn})$ es un operador proyección lineal de $\mathbb{M}_{mn\times mn}$ en $M_{V\otimes U}$ y tiene las normas de operador*

$$\|C_{V,U}^{(2)}\|_2 = 1$$

   y

$$\|C_{V,U}^{(2)}\|_F = 1.$$

3.3. Generalizaciones

3.3.1. Operador por bloques $C^{(1)}_{D^{(1)},E^{(1)}}$

Sea $A_{mn} \in \mathbb{M}_{mn}$ particionada como en (3.1), $\delta^{(1)}(A_{mn})$ definida como en (3.3) y $M_U^{(1)}$ como en (3.6). Si $D, E \in \mathbb{M}_n$ son matrices Hermitianas definidas positivas, definimos $D^{(1)} = I_m \otimes D$ y $E^{(1)} = I_m \otimes E$ y consideremos el problema

$$\min_{C_{mn} \in M_U^{(1)}} \|A_{mn} - C_{mn}\|_{F_{D^{(1)},E^{(1)}}}. \tag{3.26}$$

Sea $\Lambda^i_{k,l} \in \mathcal{D}^{(1)}_{m,n}$, $(1 \leq i \leq n)$ la matriz con $m \times m$ bloques de tamaño $n \times n$ dada por

$$\Lambda^i_{k,l} = \begin{bmatrix} \Lambda_{1,1} & \Lambda_{1,2} & \cdots & \Lambda_{1,m} \\ \Lambda_{2,1} & \Lambda_{2,2} & \cdots & \Lambda_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Lambda_{m,1} & \Lambda_{m,2} & \cdots & \Lambda_{m,m} \end{bmatrix}, \tag{3.27}$$

tal que la componente (i,i) del bloque (k,l) es 1 y todas las demás componentes son cero. Es claro que una base para $\mathcal{D}^{(1)}_{m,n}$ es

$$\{\Lambda^k_{i,j}; 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq m,\ 1 \leq k \leq n\}$$

de donde $\dim \mathcal{D}^{(1)}_{m,n} = nm^2$ además también definimos la matriz $\Lambda_{(1)} \in \mathbb{M}_{(mn)^2 \times nm^2}$ dada por

$$\Lambda_{(1)} = \left[\mathrm{vec}(\Lambda^1_{1,1}) \ldots \mathrm{vec}(\Lambda^n_{1,1})\ \mathrm{vec}(\Lambda^1_{1,2}) \ldots \mathrm{vec}(\Lambda^n_{1,2}) \ldots \mathrm{vec}(\Lambda^1_{m,m})\right]. \tag{3.28}$$

Si en la ecuación (2.6) tomamos $R = I \otimes U$, entonces obtenemos que

$$\mathrm{vec}(C^{(1)}(A))_{D^{(1)},E^{(1)}} = ((I \otimes U)^T \otimes (I \otimes U)^*)\Lambda_{(1)} G^{-1} \Lambda^T_{(1)} \mathrm{vec}((I \otimes U) D^{(1)} A E^{(1)} (I \otimes U)^*). \tag{3.29}$$

donde

$$G = \Lambda^T_{(1)} \left[((I \otimes U) E^{(1)} (I \otimes U)^*)^T \otimes ((I \otimes U) D^{(1)} (I \otimes U)^*)\right] \Lambda_{(1)}. \tag{3.30}$$

$\mathrm{vec}(C^{(1)}(A))_{D^{(1)},E^{(1)}}$ puede ser reescrito de una manera más conveniente usando el siguiente teorema.

Teorema 3.3.1. *Si A_{mn} y B_{mn} son matrices particionadas en $m \times m$ bloques de tamaño $n \times n$ definidas como*

$$A_{mn} = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,m} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & A_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m,1} & A_{m,2} & \cdots & A_{m,m} \end{pmatrix} \tag{3.31}$$

y

$$B_{mn} = \begin{pmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} & \cdots & B_{1,m} \\ B_{2,1} & B_{2,2} & \cdots & B_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{m,1} & B_{m,2} & \cdots & B_{m,m} \end{pmatrix}, \tag{3.32}$$

entonces se tiene que $\Lambda_{(1)}^{T}\left(A_{mn} \otimes B_{mn}\right)\Lambda_{(1)} = \left(H_{r,s}\right)$ *es una matriz de tamaño* $nm^2 \times nm^2$ *particionada en* $m^2 \times m^2$ *de bloques de tamaño* $n \times n$ *donde el bloque* r, s *es una matriz de tamaño* $n \times n$ *definida como* $H_{r,s} = A_{k,t} \odot B_{p,q}$*, con* p, q, k, t *números enteros positivos tales que* $r = (p-1)m + k$ *y* $s = (q-1)m + t$*,* $1 \leq p, q, k, t \leq m$*.*

Demostración. Consideremos la matriz $A_{mn} \otimes B_{mn}$ particionada en $mn \times mn$ matrices de tamaño $mn \times mn$ que denotaremos como $D_{k,l}$, las cuales a su vez son matrices con $m \times m$ bloques de tamaño $n \times n$, es decir

$$A_{mn} \otimes B_{mn} = \begin{pmatrix} D_{1,1} & D_{1,2} & \cdots & D_{1,mn} \\ D_{2,1} & D_{2,2} & \cdots & D_{2,mn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{mn,1} & D_{mn,2} & \cdots & D_{mn,mn} \end{pmatrix}, \tag{3.33}$$

donde el bloque (i, j) de $D_{k,l}$ está dado por

$$(D_{k,l})_{i,j} = a_{t,q}^{(r,s)} B_{i,j}, \tag{3.34}$$

donde suponemos que $k = n(r-1) + t$, $l = n(s-1) + q$, con $1 \leq t, q \leq n$, $1 \leq i, j, r, s \leq m$ y $a_{t,q}^{(r,s)}$ denota la componente (t, q) del bloque (r, s) de la matriz A_{mn}.
Supongamos inicialmente que la matriz B_{mn} no es una matriz por bloques sino es una matriz puntual donde el símbolo $B_{i,j}$ no representa un bloque sino una entrada puntual, entonces B_{mn} sería una matriz de tamaño $m \times m$, $A_{mn} \otimes B_{mn}$ tendría tamaño $m^2 n \times m^2 n$ y estaría particionada en $mn \times mn$ bloques de tamaño $m \times m$ los cuales denominaremos como $D_{k,l}$ y la entrada (i, j) de dicha matriz estaría dada por

$$(D_{k,l})_{i,j} = a_{t,q}^{(r,s)} B_{i,j}, \tag{3.35}$$

con $k = n(r-1) + t$, $l = n(s-1) + q$, y $1 \leq t, q \leq n$, $1 \leq i, j, r, s \leq m$. Por el lema 3.2.2 existe una matriz de permutación P de tamaño $m^2 n \times m^2 n$ particionada en $mn \times m$ bloques de tamaño $m \times mn$, donde la entrada (i, j) del bloque (k, r) está dada por

$$P_{kr;i,j} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = r \text{ y } j = k, \\ 0, & \text{de lo contrario.} \end{cases} \tag{3.36}$$

Es decir

$$P = \begin{pmatrix} P_{1,1} & P_{1,2} & \cdots & P_{1,m} \\ P_{2,1} & P_{2,2} & \cdots & P_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{m,1} & P_{m,2} & \cdots & P_{m,m} \end{pmatrix} \tag{3.37}$$

donde el bloque $P_{k,r}$ esta dado por

$$P_{k,r} = \begin{pmatrix} P_{1,1;k,r} & P_{1,2;k,r} & \cdots & P_{1,mn;k,r} \\ P_{2,1;k,r} & P_{2,2;k,r} & \cdots & P_{2,mn;k,r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{m,1;k,r} & P_{m,2;k,r} & \cdots & P_{m,mn;k,r} \end{pmatrix}, \tag{3.38}$$

tal que

$$\left(P^*(A_{mn} \otimes B_{mn})P\right)_{k,l;i,j} = (A_{mn} \otimes B_{mn})_{i,j;k,l}, \tag{3.39}$$

luego si pensamos en $B_{i,j}$ como en una entrada puntual de la matriz B_{mn} entonces $P^*(A_{mn} \otimes B_{mn})P = (K_{r,s})$ es una matriz de tamaño $m^2n \times m^2n$, particionada en $m^2 \times m^2$ bloques de tamaño $n \times n$ donde el bloque (r, s) esta definido como

$$K_{r,s} = A_{k,t} \otimes B_{p,q}, \tag{3.40}$$

con p, q, k, t números enteros positivos tales que $r = (p-1)m + k$ y $s = (q-1)m + t$ con $1 \leq p, q, k, t \leq m$.

Pero en realidad $B_{i,j}$ no representa un elemento puntual sino un bloque de tamaño $n \times n$. Entonces si definimos $P^{(1)}$ como la matriz obtenida a partir de P cambiando cada componente 1 por I_n, la matriz identidad de tamaño n y cada componente 0 por la matriz 0_n, es decir $P^{(1)}$ es una matriz de tamaño $(mn)^2 \times (mn)^2$, particionada en $mn \times m$ bloques cada uno de los cuales está formado a su vez por $m \times mn$ sub-bloques de tamaño $n \times n$, donde el sub-bloque (i, j) del bloque (k, r) está dado por

$$P^{(1)}_{i,j;k,r} = \begin{cases} I_n, & \text{si } i = r \text{ y } j = k, \\ 0_n, & \text{de lo contrario.} \end{cases} \tag{3.41}$$

Es decir

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} P^{(1)}_{1,1} & P^{(1)}_{1,2} & \cdots & P^{(1)}_{1,m} \\ P^{(1)}_{2,1} & P^{(1)}_{2,2} & \cdots & P^{(1)}_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P^{(1)}_{mn,1} & P^{(1)}_{mn,2} & \cdots & P^{(1)}_{mn,m} \end{pmatrix}, \tag{3.42}$$

donde cada bloque $P^{(1)}_{k,r}$ está particionado por sub-bloques así

$$P^{(1)}_{k,r} = \begin{pmatrix} P^{(1)}_{1,1;k,r} & P^{(1)}_{1,2;k,r} & \cdots & P^{(1)}_{1,mn;k,r} \\ P^{(1)}_{2,1;k,r} & P^{(1)}_{2,2;k,r} & \cdots & P^{(1)}_{2,mn;k,r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P^{(1)}_{m,1;k,r} & P^{(1)}_{m,2;k,r} & \cdots & P^{(1)}_{m,mn;k,r} \end{pmatrix}, \tag{3.43}$$

De lo dicho antes se sigue que $(P^{(1)})^*(A_{mn} \otimes B_{mn})P^{(1)} = (K^{(1)}_{r,s})$ es una matriz de tamaño $(mn)^2 \times (mn)^2$ particionada en $m^2 \times m^2$ bloques los cuales llamaremos como $K^{(1)}_{r,s}$ y están definidos como

$$K^{(1)}_{r,s} = A_{k,t} \otimes B_{p,q} \tag{3.44}$$

con p, q, k, t números enteros positivos tales que $r = (p-1)m+k$ y $s = (q-1)m+t$, $1 \leq k, t, p, q \leq m$. Por otro lado como $P^{(1)}$ es una matriz de permutación, tenemos que

$$\Lambda^T_{(1)}(A_{mn} \otimes B_{mn})\Lambda_{(1)} = \Lambda^T_{(1)}P^{(1)}\Big((P^{(1)})^*(A_{mn} \otimes B_{mn})P^{(1)}\Big)(P^{(1)})^*\Lambda_{(1)}. \tag{3.45}$$

Veamos que

$$(P^{(1)})^*\Lambda_{(1)} = \begin{pmatrix} \Lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \Lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \Lambda \end{pmatrix}, \tag{3.46}$$

donde la matriz $\Lambda \in \mathbb{M}_{n^2 \times n}$ esta definida igual que en la ecuación (2.8). Para esto particionemos la matriz $P^{(1)}$ como

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} P^{(1)}_1 & \cdots & P^{(1)}_{m^2 n} \end{pmatrix}, \tag{3.47}$$

donde $P^{(1)}_k$ es una matriz columna de tamaño $(mn)^2 \times n$ particionada a su vez en $m^2 n \times 1$ bloques de tamaño $n \times n$ y veamos que el sub-bloque $(p^{(1)}_h)_b$ esta dado por

$$(P^{(1)}_h)_b = \begin{cases} I_n, & \text{si } b = m(t-1) + r, \\ 0_n, & \text{de lo contrario,} \end{cases} \tag{3.48}$$

donde estamos suponiendo que $h = mn(r-1) + t$ y $1 \leq r \leq m$, $1 \leq t \leq mn$. Para ver esto observemos que si consideramos todos los sub-bloques $P^{(1)}_{i,j;k,l}$ de $P^{(1)}$ definidos como en la ecuación (3.43), ellos forman una partición de $P^{(1)}$ en $m^2 n \times m^2 n$ bloques de tamaño $n \times n$ divididos en $mn \times m$ clases representados por los bloques $P^{(1)}_{k,l}$. Entonces si $h = mn(s-1) + t$ con $1 \leq s \leq m$, $1 \leq t \leq mn$, es claro que

$$P^{(1)}_h = \begin{pmatrix} C_t^{P^{(1)}_{1,s}} & C_t^{P^{(1)}_{2,s}} & \cdots & C_t^{P^{(1)}_{mn,s}} \end{pmatrix}^T, \tag{3.49}$$

donde C^A_j denota la columna $j-$ésima de A, es decir

$$C_t^{P^{(1)}_{r,s}} = \begin{pmatrix} P^{(1)}_{1,t;r,s} & P^{(1)}_{2,t;r,s} & \cdots & P^{(1)}_{m,t;r,s} \end{pmatrix}^T. \tag{3.50}$$

Por lo tanto $C_t^{P_{1,s}^{(1)}}, \dots, C_t^{P_{mn,s}^{(1)}}$ particiona al bloque $P_{a,t;r,s}^{(1)}$ en mn clases cada una de ellas con m sub-matrices, luego si $b = m(q-1)+p$, con $1 \le q \le mn$ y $1 \le p \le m$, se sigue de la ecuación (3.87) que

$$(P_h^{(1)})_b = P_{p,t;q,s} = \begin{cases} I_n, & \text{si } p = s \text{ y } t = q, \\ 0_n, & \text{de lo contrario,} \end{cases} \tag{3.51}$$

es decir $(P_h^{(1)})_b = I_n$ si $b = m(t-1)+p$.

Para $\Lambda_{(1)}$ considere la partición en $mn \times m^2$ bloques de tamaño $n \times n$ dada por

$$\Lambda_{(1)} = \begin{pmatrix} C_{1,1} & C_{1,2} & \cdots & C_{1,m^2} \\ C_{2,1} & C_{2,2} & \cdots & C_{2,m^2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{m^2n,1} & C_{m^2n,2} & \cdots & C_{m^2n,m^2} \end{pmatrix}, \tag{3.52}$$

veamos que $C_{k,l} \neq 0$ si $k = mn(q-1)+m(s-1)+r$ y $l = m(r-1)+q$ si $1 \le r, q \le m$, $1 \le s \le n$ y $C_{k,l} = 0$ en otro caso, además si $C_{k,l} \neq 0$ entonces

$$(C_{k,l})_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j = s, \\ 0, & \text{de lo contrario.} \end{cases} \tag{3.53}$$

Para esto recordemos de la ecuación (3.27) que el bloque $\Lambda_{r,q}^i$ de Λ está definido por

$$(\Lambda_{r,q}^s)_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j = s, \\ 0, & \text{de lo contrario,} \end{cases} \tag{3.54}$$

pero la componente (s,s) de $\Lambda_{r,q}^s$ corresponde a la componente (k',l') de $\Lambda_{(1)}$ donde $l' = nm(r-1)+n(q-1)+s$ y $k' = n^2m(s-1)+n(r-1)+s$, pero como cada bloque $C_{k,l}$ es de tamaño $n \times n$, entonces esto significa que a la izquierda del bloque $C_{k,l}$ que contiene al 1 correspondiente a la componente (s,s) de $\Lambda_{r,q}^s$ hay $m(r-1)+q-1$ bloques y arriba de él hay $nm(q-1)+m(s-1)+r-1$ bloques lo cual verifica nuestra última afirmación.

De lo anterior se sigue que el bloque (h,p) de la matriz $(P^{(1)})^*\Lambda_{(1)}$ es

$$\sum_{1 \le k \le nm^2} \left(P_{h,k}^{(1)}\right)^* C_{k,p}, \tag{3.55}$$

donde asumimos que $h = mn(a-1)+b$ con $1 \le a \le m$, $1 \le b \le mn$ y $d = m(b-1)+a$, pero además como ya dijimos $C_{d,p} \neq 0$ si $d = mn(q-1)+m(s-1)+r$ y $p = m(r-1)+q$, donde $1 \le r, q \le m$ y $1 \le s \le n$, es decir para que $C_{d,p} \neq 0$ se debe cumplir que

$$h = mn(a-1)+b, \tag{3.56a}$$

$$d = m(b-1)+a, \tag{3.56b}$$

$$d = mn(q-1)+m(s-1)+r, \tag{3.56c}$$

$$p = m(r-1)+q, \tag{3.56d}$$

donde $1 \leq a, r, q \leq m$, $1 \leq s \leq n$ y $1 \leq b \leq mn$.
De (3.56b) y (3.56d) si obtenemos

$$m(b-1) - mn(q-1) - m(s-1) = r - a \tag{3.57}$$

luego m divide a $r-a$, pero como $1-m \leq r-a \leq m-1$, obtenemos que $r = a$ y en ese caso de (3.57) se sigue también que

$$b = n(q-1) + s \tag{3.58}$$

de (3.56a) obtenemos

$$h = mn(a-1) + b \tag{3.59}$$

y de (3.56d)

$$p = m(a-1) + q \tag{3.60}$$

de (3.58) y (3.59) resulta

$$h = n\Big(m(a-1) + q - 1\Big) + s, \tag{3.61}$$

con $1 \leq p \leq m^2$ (esto ya que $1 \leq a \leq m$ y $1 \leq q \leq m$), es decir el bloque (h,p) de $(P^{(1)})^*\Lambda_{(1)}$ es distinto de cero si y sólo si $h = n(p-1) + s$, con $1 \leq p \leq m^2$ y en ese caso de la ecuación (3.53) obtenemos

$$\Big((P^{(1)})^*\Lambda_{(1)}\Big)_{i,j;h,p} = (C_{d,p})_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j = s, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{3.62}$$

De todo lo anterior se concluye que $(P^{(1)})^*\Lambda_{(1)}$ es una matriz diagonal por bloques, con m^2 bloques en la diagonal, es más

$$(P^{(1)})^*\Lambda_{(1)} = \begin{pmatrix} \Lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \Lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \Lambda \end{pmatrix} \tag{3.63}$$

y por lo tanto del teorema 2.2.2 y la ecuación (3.45) se obtiene el resultado. $\square$

Definamos la operación $\widetilde{\odot}$ como $A \widetilde{\odot} B = \Lambda_{(1)}^T \left(A \otimes B\right) \Lambda_{(1)}$ entonces tenemos que

$$\begin{aligned} \Lambda_{(1)}^T & \left[((I \otimes U)(I \otimes E)(I \otimes U)^*)^T \otimes ((I \otimes U)(I \otimes D)(I \otimes U)^*)\right] \Lambda_{(1)} \\ &= \Lambda_{(1)}^T \left[(I \otimes UEU^*)^T \otimes (I \otimes UDU^*)\right] \Lambda_{(1)} \\ &= (I \otimes UEU^*)^T \widetilde{\odot} (I \otimes UDU^*) \\ &= \begin{bmatrix} (UEU^*)^T \odot (UDU^*) & & & \\ & (UEU^*)^T \odot (UDU^*) & & \\ & & \ddots & \\ & & & (UEU^*)^T \odot (UDU^*) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.64}$$

donde $(UEU^*)^T \odot (UDU^*) \in \mathbb{M}_n$.

Definición 3.3.1. *Sea $x \in \mathbb{R}^{nm^2}$ dado por*

$$x = (x^{(1,1)}, x^{(1,2)}, \dots, x^{(1,n)}, x^{(2,1)}, \dots, x^{(2,n)}, \dots, x^{(m,m)})^T$$

donde $x^{(k,l)} \in \mathbb{R}^n$, $1 \le k, l \le m$ está dado por

$$x^{(k,l)} = (x_{1,1}^{(k,l)}, \dots, x_{1,n}^{(k,l)})^T$$

definimos el operador $\Delta^{(1)}$ como

$$\Delta^{(1)}(x) = \begin{pmatrix} \Delta(x^{(1,1)}) & \Delta(x^{(1,2)}) & \cdots & \Delta(x^{(1,m)}) \\ \Delta(x^{(2,1)}) & \Delta(x^{(2,2)}) & \cdots & \Delta(x^{(2,m)}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta(x^{(n,1)}) & \Delta(x^{(n,2)}) & \cdots & \Delta(x^{(n,m)}) \end{pmatrix}, \tag{3.65}$$

mientras que $\left(\Delta^{(1)}\right)^{-1}$ representa el operador inverso de $\Delta^{(1)}$, es decir

$$\left(\Delta^{(1)}\right)^{-1}\left(\delta^{(1)}(B)\right) = \begin{pmatrix} \Delta^{-1}(\delta(B_{1,1})) \\ \vdots \\ \Delta^{-1}(\delta(B_{1,n})) \\ \vdots \\ \Delta^{-1}(\delta(B_{m,m})) \end{pmatrix}.$$

Supongamos ahora que $S \in \mathbb{M}_{nm^2}$, es claro que $\Lambda_{(1)} S \Lambda_{(1)}^T \in \mathbb{M}_{(mn)^2}$ y si $B \in \mathbb{M}_{mn}$, como P es una matriz de permutación, se obtiene

$$\Lambda_{(1)} S \Lambda_{(1)}^T \text{vec}\left(\delta^{(1)}(B)\right) = P(P^*\Lambda_{(1)})S(P^*\Lambda_{(1)})^T P^* \text{vec}\left(\delta^{(1)}(B)\right), \tag{3.66}$$

por lo cual del teorema 2.2.2 y la ecuación (3.63) obtenemos

$$\Lambda_{(1)} S \Lambda_{(1)}^T \text{vec}\left(\delta^{(1)}(B)\right) = \text{vec}\left(\Delta^{(1)}\left(S\left(\Delta^{(1)}\right)^{-1}\left(\delta^{(1)}(B)\right)\right)\right), \tag{3.67}$$

y además como

$$\Lambda_{(1)} S \Lambda_{(1)}^T \text{vec}\,(B) = P(P^*\Lambda_{(1)})S(P^*\Lambda_{(1)})^T P^* \text{vec}\,(B), \tag{3.68}$$

usando la ecuación (2.10) concluimos que

$$\Lambda_{(1)} S \Lambda_{(1)}^T \text{vec}\,(B) = \Lambda_{(1)} S \Lambda_{(1)}^T \text{vec}\left(\delta^{(1)}(B)\right), \tag{3.69}$$

por lo tanto

$$vec\left(C^{(1)}(A)_{D^{(1)},E^{(1)}}\right) = \left((I \otimes U)^T \otimes (I \otimes U)^*\right) \text{vec}\,(Q), \tag{3.70}$$

donde

$$Q = \Delta^{(1)}\left(\left((I \otimes UDU^*)\,\widetilde{\odot}\,(I \otimes UEU^*)^T\right)^{-1}\left(\Delta^{(1)}\right)^{-1}\left(\delta^{(1)}\left(\left(I \otimes (UD)\right)A\left(I \otimes (EU^*)\right)\right)\right)\right), \tag{3.71}$$

por lo tanto

$$C^{(1)}(A)_{D^{(1)},E^{(1)}} = (I \otimes U)^{*}\, Q\, (I \otimes U)\,, \tag{3.72}$$

pero

$$(I \otimes (UD))A(I \otimes (EU^{*})) = \begin{pmatrix} UDA_{1,1}EU^{*} & UDA_{1,2}EU^{*} & \cdots & UDA_{1,m}EU^{*} \\ UDA_{2,1}EU^{*} & UDA_{2,2}EU^{*} & \cdots & UDA_{2,m}EU^{*} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ UDA_{m,1}EU^{*} & UDA_{m,2}EU^{*} & \cdots & UDA_{m,m}EU^{*} \end{pmatrix} \tag{3.73}$$

además

$$\delta^{(1)}\left((I \otimes (UD))A(I \otimes (EU^{*}))\right) =$$
$$\begin{pmatrix} \delta\left(UDA_{1,1}EU^{*}\right) & \delta\left(UDA_{1,2}EU^{*}\right) & \cdots & \delta\left(UDA_{1,m}EU^{*}\right) \\ \delta\left(UDA_{2,1}EU^{*}\right) & \delta\left(UDA_{2,2}EU^{*}\right) & \cdots & \delta\left(UDA_{2,m}EU^{*}\right) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta\left(UDA_{m,1}EU^{*}\right) & \delta\left(UDA_{m,2}EU^{*}\right) & \cdots & \delta\left(UDA_{m,m}EU^{*}\right) \end{pmatrix}, \tag{3.74}$$

luego

$$C^{(1)}(A_{mn})_{D^{(1)},E^{(1)}} = \begin{pmatrix} C\left(A_{1,1}\right)_{D,E} & C\left(A_{1,2}\right)_{D,E} & \cdots & C\left(A_{1,m}\right)_{D,E} \\ C\left(A_{2,1}\right)_{D,E} & C\left(A_{2,2}\right)_{D,E} & \cdots & C\left(A_{2,m}\right)_{D,E} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C\left(A_{m,1}\right)_{D,E} & C\left(A_{m,2}\right)_{D,E} & \cdots & C\left(A_{m,m}\right)_{D,E} \end{pmatrix} \tag{3.75}$$

Resumimos estos resultados en el siguiente teorema

Teorema 3.3.2. *Para toda matriz arbitraria $A_{mn} \in \mathbb{M}_{mn}$ particionada como en (3.1), sea $C^{(1)}(A_{mn})_{D^{(1)},E^{(1)}}$ el minimizador de $\|W_{mn} - A_{mn}\|_{F_{D^{(1)},E^{(1)}}}$ sobre todas las matrices $W_{mn} \in M_U^{(1)}$. Entonces*

1. *$C^{(1)}(A_{mn})_{D^{(1)},E^{(1)}}$ está unicamente determinada por*

$$C^{(1)}(A_{mn})_{D^{(1)},E^{(1)}} = (I \otimes U)^{*}\, Q\, (I \otimes U)\,, \tag{3.76}$$

donde

$$Q = \Delta^{(1)}\left(\left((I \otimes UDU^{*})\, \widetilde{\odot}\, (I \otimes UEU^{*})^{T}\right)^{-1} \left(\Delta^{(1)}\right)^{-1} \left(\delta^{(1)}\left((I \otimes (UD))\, A\, (I \otimes (EU^{*}))\right)\right)\right). \tag{3.77}$$

2. *$C^{(1)}(A_{mn})_{D^{(1)},E^{(1)}}$ También está dada por*

$$C^{(1)}(A_{mn})_{D^{(1)},E^{(1)}} = \begin{pmatrix} C(A_{1,1})_{D,E} & C\left(A_{1,2}\right)_{D,E} & \cdots & C\left(A_{1,m}\right)_{D,E} \\ C\left(A_{2,1}\right)_{D,E} & C\left(A_{2,2}\right)_{D,E} & \cdots & C\left(A_{2,m}\right)_{D,E} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C\left(A_{m,1}\right)_{D,E} & C\left(A_{m,2}\right)_{D,E} & \cdots & C\left(A_{m,m}\right)_{D,E}\,, \end{pmatrix} \tag{3.78}$$

Donde $C(A_{i,j})_{D,E}$ es el operador definido en la definición 2.13.

3.3.2. Operador por bloques $\widetilde{C}^{(1)}_{D^{(1)},E^{(1)}}$

Sea $A_{mn} \in \mathbb{M}_{mn}$ particionada como en (3.1), $\widetilde{\delta}^{(1)}(A_{mn})$ definida como en (3.11) y $\widetilde{M}^{(1)}_V$ como en (3.12). Si $D, E \in \mathbb{M}_n$ son matrices Hermitianas definidas positivas, definimos $D_{(1)} = D \otimes I_n$ y $E_{(1)} = E \otimes I_n$ y consideremos el problema

$$\min_{C_{mn}\in \widetilde{M}^{(1)}_V} \|A_{mn} - C_{mn}\|_{F_{D_{(1)},E_{(1)}}}. \tag{3.79}$$

Sea $\Lambda^{i,j}_k \in \widetilde{\mathcal{D}}^{(1)}_{m,n}$, $(1 \leq k \leq m)$ la matriz con $m \times m$ bloques de tamaño $n \times n$ dada por

$$\Lambda^{i,j}_k = \begin{pmatrix} \Lambda_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \Lambda_{2,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \Lambda_{m,m} \end{pmatrix}, \tag{3.80}$$

tal que la componente (i, j) del bloque (k, k) es 1 y todas las demás componentes son cero. Es claro que una base de $\widetilde{\mathcal{D}}^{(1)}_{m,n}$ es

$$\{\Lambda^{i,j}_k; 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq n,\ 1 \leq k \leq m\}$$

de donde $\dim\widetilde{\mathcal{D}}^{(1)}_{m,n} = n^2 m$ además también definimos la matriz $\widetilde{\Lambda}_{(1)} \in \mathbb{M}_{(mn)^2\times n^2 m}$ como

$$\widetilde{\Lambda}_{(1)} = \Big[\mathrm{vec}(\Lambda^{1,1}_1)\ \mathrm{vec}(\Lambda^{2,1}_1)\ldots\mathrm{vec}(\Lambda^{n,1}_1)\ \mathrm{vec}(\Lambda^{1,2}_1)\ldots\mathrm{vec}(\Lambda^{n,2}_1)\ldots\mathrm{vec}(\Lambda^{1,1}_m)\ldots\mathrm{vec}(\Lambda^{n,n}_m)\Big]. \tag{3.81}$$

Si en la ecuación (2.6) tomamos $R = V \otimes I$, entonces obtenemos que

$$\mathrm{vec}(\widetilde{C}^{(1)}(A))_{D_{(1)},E_{(1)}} = ((V \otimes I)^T \otimes (V \otimes I)^*)\widetilde{\Lambda}_{(1)} H^{-1}\widetilde{\Lambda}^T_{(1)}\mathrm{vec}((V \otimes I)D_{(1)}AE_{(1)}(V \otimes I)^*). \tag{3.82}$$

donde

$$H = \widetilde{\Lambda}^T_{(1)} \left[((V \otimes I)E_{(1)}(V \otimes I)^*)^T \otimes ((V \otimes I)D_{(1)}(V \otimes I)^*)\right] \widetilde{\Lambda}_{(1)} \tag{3.83}$$

$\mathrm{vec}(\widetilde{C}^{(1)}(A))_{D_{(1)},E_{(1)}}$ puede ser reescrito de una manera más conveniente usando el siguiente teorema

Teorema 3.3.3. *Si A_{mn} y B_{mn} son matrices particionadas en $m \times m$ bloques de tamaño $n \times n$ definidas como*

$$A_{mn} = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,m} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & A_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m,1} & A_{m,2} & \cdots & A_{m,m} \end{pmatrix} \tag{3.84}$$

y

$$B_{mn} = \begin{pmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} & \cdots & B_{1,m} \\ B_{2,1} & B_{2,2} & \cdots & B_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{m,1} & B_{m,2} & \cdots & B_{m,m} \end{pmatrix}, \tag{3.85}$$

entonces se tiene que $\widetilde{\Lambda}_{(1)}^{T}\left(A\otimes B\right)\widetilde{\Lambda}_{(1)}=(G_{r,s})$ *es una matriz de tamaño* $n^2m\times n^2m$ *particionada en* $m\times m$ *de bloques de tamaño* $n^2\times n^2$ *donde el bloque* r,s *es una matriz de tamaño* $n^2\times n^2$ *definida como* $G_{r,s}=A_{r,s}\otimes B_{r,s}$, $1\le r,s\le m$.

Demostración. Se sigue de

$$\widetilde{\Lambda}_{(1)}^{T}\left(A\otimes B\right)\widetilde{\Lambda}_{(1)}=\widetilde{\Lambda}_{(1)}^{T}P^{(1)}\Big((P^{(1)})^{*}\left(A\otimes B\right)P^{(1)}\Big)(P^{(1)})^{*}\widetilde{\Lambda}_{(1)} \tag{3.86}$$

usando la ecuación (3.40) y teniendo en cuenta que $(P^{(1)})^{*}\widetilde{\Lambda}_{(1)}=(C_{k,l})$ es una matriz de tamaño $(mn)^2\times n^2m$ que se puede particionar en $m^2\times m$ bloques los cuales representaremos mediante $C_{k,l}$ de tamaño $n^2\times n^2$ donde

$$C_{k,l}=\begin{cases}I_{n^2}, & \text{si } r=q \text{ y } 1\le k\le m,\\ 0_{n^2}, & \text{de lo contrario,}\end{cases} \tag{3.87}$$

con $l=m(r-1)+q$, $1\le r,q\le m$ □

Definamos la operación $\widetilde{\otimes}$ como $A\widetilde{\otimes}B=\widetilde{\Lambda}_{(1)}^{T}\left(A\otimes B\right)\widetilde{\Lambda}_{(1)}$ y si asumimos que $(VEV^{*})_{i,j}^{T}=\alpha_{i,j}$ y $(VDV^{*})_{i,j}=\beta_{i,j}$ entonces tenemos que

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\Lambda}_{(1)}^{T}\left[((V\otimes I)(E\otimes I)(V\otimes I)^{*})^{T}\otimes((V\otimes I)(D\otimes I)(V\otimes I)^{*})\right]\widetilde{\Lambda}_{(1)}\\
&\qquad=\widetilde{\Lambda}_{(1)}^{T}\left[(VEV^{*}\otimes I)^{T}\otimes(VDV^{*}\otimes I)\right]\widetilde{\Lambda}_{(1)}\\
&\qquad=(VEV^{*}\otimes I)^{T}\widetilde{\otimes}(VDV^{*}\otimes I)\\
&=\begin{pmatrix}\alpha_{11}I_n & \alpha_{12}I_n & \cdots & \alpha_{1m}I_n\\ \alpha_{21}I_n & \alpha_{22}I_n & \cdots & \alpha_{2m}I_n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \alpha_{m1}I_n & \alpha_{m2}I_n & \cdots & \alpha_{mm}I_n\end{pmatrix}\widetilde{\otimes}\begin{pmatrix}\beta_{11}I_n & \beta_{12}I_n & \cdots & \beta_{1m}I_n\\ \beta_{21}I_n & \beta_{22}I_n & \cdots & \beta_{2m}I_n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \beta_{m1}I_n & \beta_{m2}I_n & \cdots & \beta_{mm}I_n\end{pmatrix}\\
&\qquad=\begin{pmatrix}\alpha_{11}\beta_{11}I_{n^2} & \alpha_{12}\beta_{12}I_{n^2} & \cdots & \alpha_{1m}\beta_{1m}I_{n^2}\\ \alpha_{21}\beta_{21}I_{n^2} & \alpha_{22}\beta_{22}I_{n^2} & \cdots & \alpha_{2m}\beta_{2m}I_{n^2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \alpha_{m1}\beta_{m1}I_{n^2} & \alpha_{m2}\beta_{m2}I_{n^2} & \cdots & \alpha_{mm}\beta_{mm}I_{n^2}\end{pmatrix}\\
&\qquad=\Big((VEV^{*})^{T}\odot(VDV^{*})\Big)\otimes I_{n^2}
\end{aligned} \tag{3.88}$$

Definición 3.3.2. *Sea* $x\in\mathbb{R}^{n^2m}$ *dado por*

$$x=(x^{(1)},x^{(2)},\ldots,x^{(m)})^{T}$$

donde $x^{(k)}\in\mathbb{R}^{n^2}$, $1\le k,l\le m$ *está dado por*

$$x^{(k)}=(x_{1,1}^{(k)},x_{2,1}^{(k)}\ldots,x_{n,1}^{(k)},\ldots x_{1,n}^{(k)},x_{2,n}^{(k)}\ldots,x_{n,n}^{(k)})^{T}$$

definimos el operador $\widetilde{\Delta}^{(1)}$ *como*

$$\widetilde{\Delta}^{(1)}(x) = \begin{pmatrix} \widetilde{\Delta}(x^{(1)}) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \widetilde{\Delta}(x^{(2)}) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \widetilde{\Delta}(x^{(m)}) \end{pmatrix}, \tag{3.89}$$

donde el operador $\widetilde{\Delta}$ *se define como*

$$\widetilde{\Delta}(x^{(k)}) = \begin{pmatrix} x_{11}^{(k)} & x_{12}^{(k)} & \cdots & x_{1n}^{(k)} \\ x_{21}^{(k)} & x_{22}^{(k)} & \cdots & x_{2n}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}^{(k)} & x_{n2}^{(k)} & \cdots & x_{nn}^{(k)} \end{pmatrix} \tag{3.90}$$

mientras que $\left(\widetilde{\Delta}^{(1)}\right)^{-1}$ *representa el operador inverso de* $\widetilde{\Delta}^{(1)}$*, es decir*

$$\left(\widetilde{\Delta}^{(1)}\right)^{-1}\left(\widetilde{\delta}^{(1)}(B_{mn})\right) = \begin{pmatrix} \mathrm{vec}(B_{1,1}) \\ \mathrm{vec}(B_{2,2}) \\ \vdots \\ \mathrm{vec}(B_{m,m}) \end{pmatrix},$$

donde $B_{i,i}$ *denota el bloque* (i,i) *de la matriz* B_{mn}*.*

Dada una matriz arbitraria $S \in \mathbb{M}_{n^2m}$, es claro que $\widetilde{\Lambda}_{(1)}S\widetilde{\Lambda}_{(1)}^T \in \mathbb{M}_{(mn)^2}$ y si $B \in \mathbb{M}_{mn}$, como P es una matriz de permutación, se obtiene

$$\widetilde{\Lambda}_{(1)}S\widetilde{\Lambda}_{(1)}^T\mathrm{vec}\left(\widetilde{\delta}^{(1)}(B)\right) = P(P^*\widetilde{\Lambda}_{(1)})S(P^*\widetilde{\Lambda}_{(1)})^T P^*\mathrm{vec}\big(\widetilde{\delta}^{(1)}(B)\big), \tag{3.91}$$

por lo cual del teorema 2.2.2 y la ecuación (3.87) obtenemos

$$\widetilde{\Lambda}_{(1)}S\widetilde{\Lambda}_{(1)}^T\mathrm{vec}\left(\widetilde{\delta}^{(1)}(B)\right) = \mathrm{vec}\left(\widetilde{\Delta}^{(1)}\left(S\left(\widetilde{\Delta}^{(1)}\right)^{-1}\left(\widetilde{\delta}^{(1)}(B)\right)\right)\right), \tag{3.92}$$

y además

$$\widetilde{\Lambda}_{(1)}S\widetilde{\Lambda}_{(1)}^T\mathrm{vec}\,(B) = \widetilde{\Lambda}_{(1)}S\widetilde{\Lambda}_{(1)}^T\mathrm{vec}\left(\widetilde{\delta}^{(1)}(B)\right), \tag{3.93}$$

por lo tanto

$$vec\left(\widetilde{C}^{(1)}(A)_{D_{(1)},E_{(1)}}\right) = \left((V\otimes I)^T \otimes (V\otimes I)^*\right)\mathrm{vec}\,(R), \tag{3.94}$$

donde

$$R = \widetilde{\Delta}^{(1)}\left(\left(\left((VDV^*)\odot(VEV^*)^T\right)\otimes I_{n^2}\right)^{-1}\left(\widetilde{\Delta}^{(1)}\right)^{-1}\left(\widetilde{\delta}^{(1)}\left((VD\otimes I)\,A\,(EV\otimes I)^*\right)\right)\right), \tag{3.95}$$

por lo tanto

$$\widetilde{C}^{(1)}(A)_{D_{(1)},E_{(1)}} = (V\otimes I)^*\,R\,(V\otimes I), \tag{3.96}$$

luego hemos probado el siguiente teorema

Teorema 3.3.4. *Para toda matriz arbitraria* $A_{mn} \in \mathbb{M}_{mn}$ *particionada como en (3.1), sea* $\widetilde{C}^{(1)}(A)_{D_{(1)},E_{(1)}}$ *el minimizador de* $\|W_{mn} - A_{mn}\|_{F_{D_{(1)},E_{(1)}}}$ *sobre todas las matrices* $W_{mn} \in \widetilde{M}_V^{(1)}$. *Entonces* $\widetilde{C}^{(1)}(A)_{D_{(1)},E_{(1)}}$ *está unicamente determinada por*

$$\widetilde{C}^{(1)}(A)_{D_{(1)},E_{(1)}} = (V \otimes I)^* R (V \otimes I), \tag{3.97}$$

donde

$$R = \widetilde{\Delta}^{(1)} \left(\left(\left((VDV^*) \odot (VEV^*)^T \right) \otimes I_{n^2} \right)^{-1} \left(\widetilde{\Delta}^{(1)} \right)^{-1} \left(\widetilde{\delta}^{(1)} \left((VD \otimes I) A (EV \otimes I)^* \right) \right) \right). \tag{3.98}$$

3.3.3. Operador por bloques $C^{(2)}_{D\otimes G,E\otimes H}$

Sea $A_{mn} \in \mathbb{M}_{mn}$ particionada como en (3.1), $M_{V\otimes U}$ definida como en (3.23). Si $D, E \in \mathbb{M}_m$ y $G, H \in \mathbb{M}_n$ son matrices Hermitianas definidas positivas, consideremos el problema

$$\min_{C_{mn} \in M_{V\otimes U}} \|A_{mn} - C_{mn}\|_{F_{D\otimes G, E\otimes H}}. \tag{3.99}$$

Usando (2.13) obtenemos que

$$C(A_{mn})_{D\otimes G, E\otimes H} = (V \otimes U)^* S (V \otimes U), \tag{3.100}$$

donde

$$S = \Delta\Big(\Big(((VDV^*) \otimes (UGU^*)) \odot ((VEV^*) \otimes (UHU^*))^T \Big)^{-1} \Delta^{-1} \Big(\delta((VD \otimes UG) A (EV^* \otimes HU^*)) \Big) \Big) \tag{3.101}$$

Luego hemos probado el siguiente teorema

Teorema 3.3.5. *Para toda matriz arbitraria* $A_{mn} \in \mathbb{M}_{mn}$ *particionada como en (3.1), sea* $C^{(2)}_{D\otimes G,E\otimes H}$ *el minimizador de* $\|W_{mn} - A_{mn}\|_{F_{D\otimes G,E\otimes H}}$ *sobre todas las matrices* $W_{mn} \in M_{V\otimes U}$. *Entonces* $C^{(2)}_{D\otimes G,E\otimes H}$ *está unicamente determinada por*

$$C(A_{mn})_{D\otimes G, E\otimes H} = (V \otimes U)^* S (V \otimes U), \tag{3.102}$$

donde

$$S = \Delta\Big(\Big(((VDV^*) \otimes (UGU^*)) \odot ((VEV^*) \otimes (UHU^*))^T \Big)^{-1} \Delta^{-1} \Big(\delta((VD \otimes UG) A (EV^* \otimes HU^*)) \Big) \Big) \tag{3.103}$$

Es facil ver que nuestras tres posibles familias de precondicionadores para matrices de Toeplitz por bloques generalizan los precondicionadores por bloque enunciados a principio del capítulo. Para ver esto tome las matrices D, E, G, H igual a la matriz identidad del tamaño correspondiente en cada caso y se obtendra el correspondiente precondicionador por bloques. Ahora para verificar que son precondicionadores eficientes falta probar que ellos acumulan el espectro de $P_n^{-1} A_n$ alrrededor de 1, Donde P_n denota el precondicionador en cuestión lo cual no alcanzo a ser incluido en este trabajo.

Bibliografía

[1] O. AXELSSON. *Iterative Solution Methods*, Cambridge University Press, 1996.

[2] O. AXELSSON AND V. BARKER, *Finite Elements Solution of Boundary Value Problems, Theory and computations*, Academic Press, 1984.

[3] R. CHAN, *Circulant preconditioners for Hermitian Toeplitz system*, SIAM J. Matrix Anal. Appl.,10, pp. 542-550, 1989.

[4] R. CHAN, *The Spectrum of a Family of Circulant Preconditioned Toeplitz system*, SIAM J. Numer. Anal., 26, pp. 503-506, 1989.

[5] R. CHAN AND M. K. NG, *Conjugate Gradient Methods for Toeplitz System*,SIAM Review, 38,pp. 427-482, 1996.

[6] R. CHAN, X. JIN AND M. YEUNG, *The circulant operator in the Banach algebra of matrices*, Linear Algebra Appl., 149, pp.41-53, 1992.

[7] R. CHAN, X. JIN AND M. YEUNG, *The Spectra of Super-Optimal Circulant Preconditioned Toeplitz system*, SIAM J.Numer. Anal., 28, pp. 871-879, 1991.

[8] R. CHAN AND G. STRANG, *Toeplitz equations by conjugate gradients with circulant preconditioner*, SIAM J. Sci. Statist. Comput., 10, pp. 104-119, 1989.

[9] R. CHAN AND M. YEUNG, *Circulant Preconditioners for Toeplitz Matrices with Positive Continous Generating Functions*, Math. Comput., 58, pp. 233-240, 1992.

[10] U. GRENANDER AND G. SZEGÖ, *Toeplitz Forms and Their Applications*, 2nd ed., Chelsea Publishing, 1984.

[11] R.A. HORN and C.R. JOHNSON. *Matrix Analysis*. Cambridge University Press, 1996.

[12] R.A. HORN and C.R. JOHNSON. *Topics in Matrix Analysis*. Cambridge University Press, 1999.

[13] T. HUCKLE, *Circulant and Skew Circulant Matrices for Solving Toeplitz Matrix Problems*, SIAM J. Matrix Anal. Appl., 13, pp. 544-559, 1998.

[14] X. JIN, *Developments and Applications of Block Toeplitz Iterative Solvers*. Kluwer Academic Publisher, 2002.

[15] J. MERIKOSKI AND R. KUMAR, *Inequalities for Spreads of Matrix Sums and Products*, Appl. Math. E-notes, 4, pp. 150-159, 2004.

[16] J. G. Nagy, *Iterative Techniques for the Solution of Toeplitz System*, SIAM NEWS, Volumen 28, Number 7, 1995.

[17] J. G. Nagy, *Applications of Toeplitz System*, SIAM NEWS, Volumen 28, Number 8, 1995.

[18] G. STRANG. *A proposal for Toeplitz matrix calculations*, Stud. Appl. Math., 74, pp. 171-176, 1986.

[19] V. STRELA AND E. TYRTYSHNIKOV *Some Generalizations of Circulant Preconditioners*, Matrix Methods and Algorithms, IVM Ran, p.p. 67-73, 1990.

[20] E. TYRTYSHNIKOV *Optimal and Superoptimal Circulant Preconditioners*, SIAM J. Matrix Anal. Appl., 13, pp. 459-453, 1992.

[21] C. VAN LOAN, *Computational Frameworks for the Fast Fourier Transform*, SIAM, 1992.

Índice alfabético