

**Universidad de los Andes**  
Facultad de Economía

Análisis I(2) del Endeudamiento Externo: Solvencia  
Intertemporal y Aplicaciones al Caso Colombiano

Juan Carlos Vargas Berdugo  
Programa en Economía para Graduados -PEG-  
Universidad de los Andes

Asesor:  
Hugo Oliveros C.  
Subgerencia de Estudios Económicos. Banco de la República

Bogotá, Diciembre de 2002

# Análisis I(2) del Endeudamiento Externo: Solvencia Intertemporal y Aplicaciones al Caso Colombiano

Juan Carlos Vargas Berdugo<sup>1†</sup>  
Programa en Economía para Graduados -PEG-  
Universidad de los Andes

## Resumen

El presente artículo discute la metodología para evaluar la solvencia de una economía frente al endeudamiento externo en el marco del análisis de series de tiempo y procesos estocásticos no estacionarios. Plantea la existencia de un problema de especificación bajo el enfoque tradicional de cointegración, el cual puede ser superado al considerar componentes I(2) en la relación que gobierna el equilibrio de un sistema derivado de la restricción presupuestaria intertemporal estándar de una economía pequeña y abierta. La metodología desarrollada se documenta con el análisis del endeudamiento externo Colombiano para el periodo 1970-2001. Se encuentra evidencia estadística en favor de la existencia de una relación de largo plazo entre las exportaciones, las importaciones y la posesión de activos externos rezagada un periodo. Esta relación es alcanzada bajo un sistema multicointegrado y en consecuencia el problema se analiza especificando una representación I(2) para la acumulación en el tiempo del proceso conjunto de las variables señaladas. En el contexto de la estimación, no se rechaza la hipótesis de solvencia intertemporal.

**Palabras Clave:** Cointegración, Multicointegración.

**Clasificación JEL:** F34, C32, C52.

---

<sup>1†</sup>El autor agradece la paciente y oportuna orientación de Hugo Oliveros durante el desarrollo del presente documento. Las opiniones, errores y omisiones son responsabilidad exclusiva del autor y en ningún caso comprometen al asesor ni a la institución a la cual pertenece.

# 1. Introducción

Los agentes encuentran en el endeudamiento externo una alternativa que les permite maximizar su utilidad intertemporal mediante el traslado de recursos financieros en el tiempo, sin embargo el acceso a los mercados internacionales se encuentra expuesto a imperfecciones originadas en la incertidumbre que media la relación entre economías prestamistas y prestatarias. Por tal motivo, quienes participan del intercambio buscan estrategias que les permitan conocer, en la medida de lo posible, el resultado futuro de una decisión sobre la asignación de los fondos prestables.

El presente documento se ocupa de interrogantes alrededor del esquema intertemporal de endeudamiento externo que sigue una economía pequeña y abierta, constituye un aporte en la discusión del concepto de solvencia en el contexto de las series de tiempo y los procesos estocásticos no estacionarios, sumándose así al examen de la vigencia metodológica del análisis I(2) desarrollada por Leachman y Francis (2000) desde una fundamentación diferente que le permite, a partir de los eventuales problemas estadísticos de la aproximación tradicional I(1), abordar el problema descrito y proponer una especificación alternativa más general, con la cual se realiza una la evaluación empírica del caso Colombiano.

El artículo está organizado en seis secciones, siendo la primera la presente introducción. La segunda se ocupa de la reflexión en torno a los conceptos de solvencia de la economía y sostenibilidad del endeudamiento. En la tercera parte, se estructura el marco de referencia que permite revisar las técnicas empleadas como pruebas empíricas de sostenibilidad basadas los contrastes econométricos de balance presupuestario intertemporal y el análisis de cointegración entre procesos I(1) .

Posteriormente se formula una prueba empírica alternativa basada en los desarrollos metodológicos sobre procesos estocásticos multicointegrados<sup>2</sup>, en este sentido se establece la correspondencia entre solvencia intertemporal y el equilibrio de largo plazo caracterizado por un caso particular de cointegración polinomial.

La quinta sección considera el caso Colombiano mediante una breve revisión de los trabajos recientes sobre el tema al tiempo que presenta los resultados de la estimación derivada del apartado anterior. En la última se concluye.

---

<sup>2</sup>El concepto de Multicointegración fue introducido por Granger y Lee (1989, 1990)

## 2. Definiciones preliminares

La definición de solvencia intertemporal y sostenibilidad cobra importancia ante una economía que sigue un patrón de endeudamiento externo en el tiempo.

Milesi-Ferretti y Razin (1996a, 1996b) muestran la interdependencia de los conceptos en el marco de un modelo intertemporal de la cuenta corriente de la balanza de pagos<sup>3</sup>.

Bajo esta especificación, la solvencia es una condición para la economía determinada por las restricciones intertemporales que enfrentan el sector público y los agentes privados. Esta condición se puede resumir como la equivalencia en valor presente del flujo de recursos de la balanza comercial y la posesión de activos externos netos<sup>4</sup>.

Milesi-Ferretti y Razin (1996b) indican que si una economía entra en un esquema persistente de deficit comercial y de la cuenta corriente, está acumulando deuda externa. Cuando esto ocurre, alcanzar la condición de solvencia requiere que se presente un quiebre en el comportamiento de la balanza comercial y se genere superávit.<sup>5</sup>

Precisamente el problema del quiebre en el comportamiento deficitario de la balanza comercial es el punto que señala la dirección en la que se define la sostenibilidad. Nótese que la idea de solvencia descrita anteriormente plantea una condición de equivalencia entre flujos de caja descontados y un stock de activos externos, lo cual no toma en cuenta la dimensión inherente al comportamiento de los agentes económicos.

El comportamiento de los agentes resulta crucial frente a los ajustes dinámicos requeridos en un esquema persistente de deficit comercial. En este sentido una violación sistemática de la condición de solvencia implica condiciones cada vez más extremas para generar superávit.

Los autores citados señalan que la sostenibilidad es un concepto único que tiene dos perspectivas, de un lado, se concibe como una sucesión de políticas caracterizadas por el respeto de la condición de solvencia intertemporal sobre un horizonte indefinido, por otra parte, se ve como el resultado del cambio

---

<sup>3</sup>Para más detalles sobre el enfoque intertemporal de la cuenta corriente de la balanza de pagos se remite al lector a los trabajos originales de Obstfeld y Rogoff (1994, 1996)

<sup>4</sup>Implícitamente esta noción de solvencia requiere que la condición de transversalidad estándar se cumpla. Esta condición se presenta en Obstfeld y Rogoff (1994, 1996). Para Más detalles ver Milesi-Ferretti y Razin (1996b)

<sup>5</sup>Milesi-Ferretti y Razin (1996b) Pág. 6.

en la tendencia deficitaria de la balanza comercial, libre de ajustes drásticos en el consumo y el nivel de actividad económica.

Siguiendo la definición anterior, si la política de ajuste requerida para alcanzar solvencia implica el colapso de la tasa de cambio, una pérdida de confianza de los agentes que impida el acceso a los fondos prestables, o una situación que lleve a la economía a una recesión entonces el endeudamiento no es sostenible.

### 3. Restricciones presupuestarias y análisis empírico de solvencia intertemporal

Esta sección replica los trabajos de Trehan y Walsh (1988,1991), los cuales constituyen el marco analítico del desarrollo de la sección posterior. Retomará el significado del concepto de solvencia intertemporal frente al endeudamiento cuando éste sigue un proceso presupuestario estándar derivado de las restricciones reales que enfrenta una economía que accede a los recursos de los fondos prestables a una tasa de interés determinada exógenamente.

Posteriormente se discute el contraste empírico derivado por éstos autores en el contexto del teorema de representación de Granger.

#### 3.1. Contabilidad intertemporal.

Una Economía pequeña y abierta con acceso a un mercado de capitales perfecto enfrenta la siguiente restricción presupuestaria general, que describe la dinámica intertemporal de la acumulación de activos externos netos:

$$b_t - b_{t-1} = y_t + r_t b_{t-1} - c_t - i_t - g_t \quad (1)$$

Donde  $b_t$  es el stock de activos externos del periodo  $t$  acumulado en periodos anteriores;  $y_t$ ,  $c_t$ ,  $g_t$  e  $i_t$  son el producto, el consumo, el gasto público y la inversión del periodo  $t$  respectivamente y  $r_t$  es la tasa de interés, determinada exógenamente. Se define  $I_{t-1}$  como el conjunto de información de los agentes privados al inicio del periodo  $t$  y se asume que la tasa real esperada es constante:  $E[r_{t+i} | I_{t-1}] = r$  para todo  $i \geq 0$ .

Se define el balance comercial como el monto neto del producto que la economía transfiere al resto del mundo:

$$d_t \equiv y_t - c_t - i_t - g_t = (x_t - m_t) \quad (2)$$

donde  $x_t$  y  $m_t$  son las exportaciones e importaciones reales en el periodo  $t$ .

Tomando valor esperado a (1) condicionado a  $I_{t-1}$ , sustituyendo recursivamente los valores futuros de  $b_t$  y empleando la identidad del balance comercial, se deriva una condición dinámica para el stock de deuda<sup>6</sup>:

$$b_{t-1} = \frac{1}{(1+r)^{k+1}} E[b_{t+k} | I_{t-1}] - \sum_{j=0}^k \frac{1}{(1+r)^{j+1}} E[d_{t+j} | I_{t-1}] \quad (3)$$

Esta condición dinámica bajo un horizonte infinito se puede expresar como:

$$b_{t-1} = \lim_{k \rightarrow \infty} (1+r)^{-(k+1)} E[b_{t+k} | I_{t-1}] - \sum_{j=0}^{\infty} (1+r)^{-(j+1)} E[d_{t+j} | I_{t-1}] \quad (4)$$

La relación (4) señala que la suma descontada de los superávit (deficit) comerciales futuros más el stock al que convergen los activos externos conforme pasa el tiempo, son el nivel de estos últimos en el periodo  $t-1$ .

El endeudamiento de la economía cumple las condiciones de solvencia si

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (1+r)^{-(k+1)} E[b_{t+k} | I_{t-1}] = 0 \quad .^7$$

Este resultado exige que la economía haga uso eficiente de los recursos aumentando el consumo doméstico tan solo cuando ello no signifique costos adicionales de endeudamiento en términos intertemporales y es consistente con el hecho que en general el resto del mundo, como agente de financiamiento, no está dispuesto a involucrarse en un *Ponzi Scheme*.

---

<sup>6</sup>Se asume que mientras  $b_{t-1}$  haga parte de  $I_{t-1}$ , tanto  $r_t$  como  $d_t$  se encuentran excluidos del conjunto de información, esto implica que la tasa de interés y el deficit (superávit) son independientes bajo  $I_{t-1}$ . Trehan y Walsh (1991)

<sup>7</sup>En la literatura se conoce como condición de transversalidad estándar el hecho que el primer término de (4) sea igual 0. Para más detalles se remite al lector a Obstfeld y Rogoff (1996) Cap. 2 Pg. 64

La solvencia es un concepto basado exclusivamente en la restricción presupuestaria intertemporal, si la condición de transversalidad estándar se cumple en todos los periodos la economía será solvente y en consecuencia el endeudamiento sostenible.

### 3.2. Contrastes empíricos de solvencia intertemporal

Los contrastes empíricos se fundamentan en el propósito de estudiar el comportamiento de una economía, en particular de su endeudamiento externo, dada la presencia de restricciones intertemporales. Su desarrollo observa una motivación entorno al examen de la consistencia de la teoría sobre procesos generadores de datos (DGP's) para analizar las observaciones y en general, los patrones que siguen las variables económicas.

En este sentido se han derivado pruebas econométricas que vinculan a la investigación económica la metodología de series de tiempo explorando en el contexto de modelos intertemporales, la presencia de relaciones cointegrantes entre los gastos, ingresos, pagos de intereses y stock de deuda.<sup>8</sup>

Estos análisis, se diferencian en aspectos como los supuestos sobre los cuales están formulados, en particular se hacen distinciones en torno al orden de integración de los procesos estocásticos asociados a las variables en consideración o a las características de la tasa de interés.

Como estrategia de contraste empírico, la mayoría estas pruebas acuden al examen de los residuales pese a la documentada superioridad del enfoque de máxima verosimilitud de Johansen para evaluar la presencia de relaciones de cointegración en tanto no incluye el supuesto de unicidad del vector involucrado y permite la imposición y validación de restricciones para la identificación del mismo (Tanner y Liu 1995).

Trehan y Walsh (1989, 1991) demuestran que la condición de transversalidad discutida anteriormente se puede ver como una restricción particular sobre el proceso conjunto generador de datos de la posesión de activos externos  $b_t$  y el balance comercial  $d_t$ .

---

<sup>8</sup>Un resumen detallado de la literatura en este sentido es Trehan y Walsh (1991). Los autores discuten los contrastes econométricos de balance presupuestario intertemporal basados en cointegración de Hamilton y Flavin (1986), Hansen, Roberds y Sargent (1987), Wilcox(1989), Hakkio y Rush y Haug entre otros. Demuestran que la especificación propuesta en su trabajo es más general y por lo tanto las anteriores pueden ser consideradas como casos particulares.

En el trabajo de 1991, relajan el supuesto de estacionariedad en diferencias de los ingresos y gastos y conservan la hipótesis de tasa de interés esperada constante. De esta forma establecen que un *test* de cointegración es válido para analizar un proceso presupuestario estándar en la medida en que la quasi-diferencia del déficit neto de intereses sea estacionaria<sup>9</sup>.

El *test* se deriva de la siguiente proposición:

**Proposición 1** (Trehan y Walsh 1991). *Si la evolución de  $b_t$  está dada por  $b_t - b_{t-1} = d_t + r_t b_{t-1}$  con  $E[r_{t+i} | I_{t-1}] = r$  para todo  $i \geq 0$ ,  $(1 - \lambda L) d_t$  es un proceso estocástico estacionario con media cero y  $0 \leq \lambda < (1 + r)$ , se cumple que  $\lim_{k \rightarrow \infty} (1 + r)^{-(k+1)} E[b_{t+k} | I_{t-1}] = 0$  si y solo si existe una combinación lineal de  $d_t$  y  $b_{t-1}$  que sea estacionaria.*<sup>10</sup>

Nótese que mientras el valor esperado de la tasa de interés sea positivo el parámetro de la quasi-diferencia cumple con la condición  $|\lambda| > 1$  que significa que el proceso estocástico asociado al desequilibrio comercial es explosivo. Al margen de lo anterior, las condiciones de la proposición 1 permiten establecer que es posible alcanzar la solvencia intertemporal mientras  $\lambda$  este acotado por  $E[r_{t+i} | I_{t-1}] = r$ .

Esta característica del proceso estocástico indica que los choques sobre el desequilibrio comercial no solo persisten a lo largo de la historia de la serie sino que su efecto se amplifica conforme pasa el tiempo, así se establece que las condiciones de solvencia intertemporal bajo la proposición 1 exigen la correspondencia entre el aumento de la magnitud del parámetro  $\lambda$  y su cota superior, el valor esperado de la tasa de interés a la que se accede al endeudamiento externo.

### 3.3. Teorema de representación de Granger y especificación del contraste de solvencia intertemporal

Se considera  $w'_t = [x_t \quad m_t \quad b_{t-1}]$  como el proceso estocástico conjunto para las exportaciones, las importaciones y el stock de deuda.

<sup>9</sup>Sea  $d_t$  el déficit de la balanza comercial. La quasi-diferencia de  $d_t$  se define como  $(1 - \lambda L) d_t$ , donde  $L$  es el operador de rezago y  $\lambda$  una constante positiva.

<sup>10</sup>Se remite al lector interesado en la demostración de la proposición 1 a Trehan y Walsh (1991)



Donde  $x_t$ ,  $m_t$  y  $b_{t-1}$  son procesos integrados de orden 1 y por lo tanto  $w_t \sim I(1)$ .<sup>11</sup>

Al definir el orden de integración de  $w_t$  se establece directamente que a lo sumo  $d_t = (x_t - m_t) \sim I(1)$  de tal manera, por construcción el proceso estocástico asociado al desequilibrio comercial es estacionario en diferencias, lo cual significa que  $(1 - L)d_t \sim I(0)$ .<sup>12</sup>

El caso anterior implica que siempre que se consideren procesos integrados de orden 1 para las exportaciones e importaciones el valor de  $\lambda$  es 1.

Trehan y Walsh (1991) indican bajo este caso particular que la restricción sobre el proceso conjunto es la estacionariedad de la combinación lineal dada por  $(x_t - m_t) + rb_{t-1}$ .<sup>13</sup>

Definido el proceso conjunto  $w_t$  y reconocida la implicación de ésta definición sobre el parámetro  $\lambda$ , los autores establecen que bajo la proposición 1 la economía es solvente si y solo si existe un vector  $\beta' = [1 \quad -1 \quad r]$  tal que  $\beta'w_t = x_t - m_t + rb_{t-1} \equiv d_t + rb_{t-1} \sim I(0)$ . Esto es  $w_t \sim CI(1, 1)$ .<sup>14</sup>

Considerando los supuestos e implicaciones de la proposición 1 con  $\lambda = 1$  en relación con el teorema de representación de Granger<sup>15</sup> se puede establecer que cuando se cumple la condición de transversalidad estándar, el proceso conjunto generador de datos conformado por el balance comercial y los activos externos netos se puede representar mediante un modelo vectorial de

<sup>11</sup>Se dice que el proceso  $x_t$  es integrado de orden  $d$ ,  $x_t \sim I(d)$ , si  $\Delta^d x_t$  es estacionario. Johansen (1995) Cap. 3.

<sup>12</sup>La caracterización del orden de integración de la combinación lineal  $d_t$  no alude a un hecho empírico, simplemente es consistente con que la no estacionariedad de una serie de tiempo es una propiedad dominante en ausencia de una relación de cointegración.

<sup>13</sup>Si bien en Trehan y Walsh (1991) Pg 211 se menciona el contraste como un caso particular de la proposición 1, la derivación más detallada se encuentra en Trehan y Walsh (1989).

<sup>14</sup>Usualmente se emplea para la notación  $x_t \sim CI(d, b)$  para indicar que dado el proceso  $x_t$  integrado de orden  $d$ , existe un vector  $\delta \neq 0$  tal que  $\delta'x_t \sim I(d - b)$  con  $0 < b \leq d$ .

<sup>15</sup>El Teorema de representación de Granger señala que Si  $x_t$  y  $y_t$  son dos procesos integrados de orden 1,  $I(1)$ , entonces generalmente una combinación de ellos  $x_t + by_t$  será  $I(1)$ . Sin embargo, para algunos pares de series  $I(1)$  existe una combinación lineal  $z_t = x_t + Ay_t$  que es estacionaria,  $I(0)$ . Cuando esto ocurre, se dice que  $x_t$  y  $y_t$  están cointegradas. Si  $x_t$  y  $y_t$  están cointegradas, se puede considerar una representación para sus DGP's a través de un modelo de corrección de errores de la siguiente forma:

$$\Delta x_t = \rho_1 z_{t-1} + \text{rezagos}(\Delta x_t, \Delta y_t) + \varepsilon_{xt}$$

$$\Delta y_t = \rho_2 z_{t-1} + \text{rezagos}(\Delta x_t, \Delta y_t) + \varepsilon_{yt}$$

donde  $\rho_1, \rho_2$  son distintos de 0 y  $\varepsilon_{xt}, \varepsilon_{yt}$  son conjuntamente ruido blanco. La implicación contraria es igualmente verdadera. (Para mas detalles Ver Granger y Lee 1989, Engle y Granger 1991)

corrección de errores (VECM)<sup>16</sup>:

$$\Delta w_t = \Pi w_{t-1} + \sum_{i=1}^{k-1} \Gamma_i \Delta w_{t-i} + \varepsilon_{w_t} \quad (5)$$

Donde  $\Pi = \alpha\beta'$  es una matriz cuyo rango es el rango de cointegración,  $\alpha$  es el vector de coeficientes de ajuste el cual describe la velocidad con la que las variables involucradas en el proceso conjunto retornan al espacio de cointegración.  $\beta$  es el vector de cointegración y  $\varepsilon'_{w_t} = [\varepsilon_{x_t} \ \varepsilon_{m_t} \ \varepsilon_{b_t}]$  es una perturbación estocástica ruido blanco con media cero y matriz de varianza covarianza  $\text{Var}(\varepsilon_{w_t}) = \Omega$  no singular.

La proposición 1 y la relación de cointegración entre los desequilibrios comerciales y la posesión de activos externos caracterizada por la representación (5) indican que el comportamiento dinámico de este par de procesos no estacionarios involucra la existencia de un conjunto atractor<sup>17</sup>.

La existencia de este conjunto significa que los desequilibrios de corto plazo, en este caso la violación de la condición de solvencia, se corrigen en el largo plazo.

Esto quiere decir que en un periodo de tiempo la economía puede alejarse de la condición de equilibrio con un endeudamiento excesivo o haciendo uso ineficiente de los recursos disponibles de financiamiento, sin embargo la implicación de  $\beta'w_t \sim I(0)$  garantiza que se retornará a la condición de solvencia intertemporal con una velocidad de ajuste dada por  $\alpha$ .

Así se puede concluir que si el endeudamiento es no estacionario y (5) es una representación válida para  $w_t$  la economía es solvente en términos intertemporales y viceversa.

## 4. Una especificación $I(2)$ para el análisis de solvencia intertemporal

El siguiente desarrollo se enmarca en el concepto de solvencia intertemporal y la metodología discutida para realizar su contraste empírico. El propósi-

<sup>16</sup>La relación entre el teorema de representación de Granger y la ecuación (5) se puede consultar en detalle en Johansen (1995) cap. 3 y 4.

<sup>17</sup>Formalmente el conjunto atractor es el espacio generado por  $\beta_{\perp}$ . Se remite al lector al desarrollo de este punto en Engle y Granger (1991) y Johansen (1995)

to es mostrar que la especificación considerada en la ecuación (5) puede tener problemas si las variables de  $w_t$  están multicointegradas.

Para desarrollar la idea expuesta, en primera instancia se introduce el concepto de multicointegración, posteriormente se discute el sesgo de especificación en el que se incurre al representar mediante un modelo de corrección de errores  $I(1)$ , un problema donde existen componentes  $I(2)$  involucrados en las relaciones de largo plazo y las tendencias comunes que dominan la estabilidad del sistema.

#### 4.1. Multicointegración.

El concepto de multicointegración fue introducido por Granger y Lee (1989, 1990) para describir relaciones de equilibrio en un sistema que se caracteriza por ser más robusto frente a las perturbaciones de corto plazo que el descrito por el equilibrio de largo plazo implícito en una relación de cointegración tradicional.

Esta característica se atribuye a que bajo multicointegración se presenta más de una relación de cointegración entre las variables que conforman el proceso estocástico conjunto, en efecto, una de estas relaciones involucra un término que acumula en el tiempo la combinación lineal estacionaria y constituye un proceso que absorbe el impacto de los desequilibrios.

Se dice que un vector de series integradas está multicointegrado si la suma acumulada de sus combinaciones lineales estacionarias está cointegrada con alguna de las series involucradas en dicha combinación lineal. Granger y Lee (1990) ilustran este hecho mediante un ejemplo que estudia las relaciones entre los inventarios, la producción y las ventas a nivel genérico.

Considerando dos procesos no estacionarios integrados de orden 1,  $I(1)$ , para las ventas  $s_t$  y la producción  $q_t$ , se asume la existencia de ciertas combinaciones lineales de la forma  $z_t = s_t - Aq_t$  que son estacionarias,  $z_t \sim I(0)$ . Si  $z_t$  se entiende como el cambio en stock de los inventarios en el periodo  $t$ , el stock de inventarios  $Z_t$  es la acumulación en el tiempo de los desequilibrios de corto plazo entre la producción y las ventas, de esta forma se tiene  $Z_t = \sum_{j=1}^t z_j$ , un proceso  $I(1)$  por definición (ver nota no.11).

Cuando  $Z_t$  está cointegrada con alguno de los procesos asociados a la producción o a las ventas se dice que  $s_t$  y  $q_t$  están multicointegradas.

Si los inventarios y las ventas resultan cointegrados, se tiene la siguiente combinación lineal estacionaria  $\omega_t = s_t - DZ_t \sim I(0)$ .

Granger y Lee (1989) señalan que la representación del proceso conjunto generador de datos para este par de series multicointegradas está dada por un modelo de corrección de errores (ECM) diferente a la especificación  $I(1)$  tradicional<sup>18</sup>, asociado a un caso de cointegración polinomial pues  $w_t$  se puede ver como el resultado de una combinación lineal entre los niveles y las diferencias de un proceso estocástico  $I(2)$  definido como  $S'_t \equiv \sum_{j=1}^t [s_j \quad q_j]$ .

## 4.2. Problemas de especificación

En presencia de multicointegración la representación dada por (5) no es válida. Para ilustrar este hecho considérese que mientras  $w_t \sim CI(1, 1)$ , (5) tiene una representación alternativa de media móvil<sup>19</sup> dada por:

$$w_t = C \sum_{i=1}^t \varepsilon_{w_i} + C(L) \varepsilon_{w_t} \quad (6)$$

Donde  $C = \beta_{\perp} (\alpha_{\perp} \Gamma \beta_{\perp})^{-1} \alpha'_{\perp}$ , las matrices  $\alpha_{\perp}$  y  $\beta_{\perp}$  son el complemento ortogonal de  $\alpha$  y  $\beta$  respectivamente y  $C(L) \varepsilon_{w_t}$  es un componente estacionario.

Esta representación se basa en las condiciones necesarias y suficientes de cointegración señaladas por Johansen (1995) en el sentido en que  $\alpha_{\perp} \Gamma \beta_{\perp}$  debe tener rango completo (esta condición garantiza que  $(\alpha_{\perp} \Gamma \beta_{\perp})^{-1}$  esté definida). Engsted y Johansen (1997) proveen una generalización del análisis de un proceso  $I(1)$  n-dimensional cuando se presenta multicointegración donde establecen que la matriz  $\alpha_{\perp} \Gamma \beta_{\perp}$  es singular y por lo tanto  $C$  derivada de la representación de media móvil no está definida. Se implica que las condiciones necesarias y suficientes que garantizan a (5) como una representación adecuada del proceso conjunto generador de datos no se cumplen.<sup>20</sup>

Con el fin de ilustrar la eventual multicointegración del proceso estocástico conjunto  $w_t$  definido en la sección 3.2, se introduce la definición contable de la cuenta corriente de balanza de pagos.

<sup>18</sup>Sobre el ECM bajo multicointegración se volverá en la sección 4.3

<sup>19</sup>*Common stochastic trends representation*. Johansen (1995)

<sup>20</sup>La matriz  $C$  es fundamental en el análisis estadístico del modelo  $I(1)$  pues de ella se deriva la varianza de largo plazo. El problema de especificación del modelo  $I(1)$  bajo multicointegración es señalado igualmente en Engsted y Haldrup (1999) y en Haldrup (1998). La demostración formal puede encontrarse en Engsted y Johansen (1997).

La cuenta corriente  $ca_t$ , es el desequilibrio entre el ahorro y la inversión doméstica del período  $t$  el cual, en presencia de un mercado de capitales perfecto, puede financiarse a través de endeudamiento externo.

A partir de la ecuación (1) se define como una identidad:

$$ca_t \equiv (x_t - m_t) + rb_{t-1} \quad (7)$$

Retomando la definición del proceso  $w_t$ , la implicación  $\lambda = 1$  y su significado sobre la proposición 1 discutida en 3.2 (7) se puede reescribir como:  $ca_t = \beta' w_t$ .

Es evidente que la combinación lineal estacionaria implicada en la relación de cointegración de  $w_t$  es la cuenta corriente definida en (7). En este sentido, si el endeudamiento externo es consistente con la restricción intertemporal de la economía y la condición de transversalidad se tiene que  $ca_t \sim I(0)$ .

Sea  $CA_t = \sum_{j=1}^t ca_j$  el proceso que acumula los desequilibrios de cuenta corriente en el tiempo:

$$CA_t \equiv \sum_{j=1}^t \beta' w_j \equiv \sum_{j=1}^t (x_j - m_j + rb_{j-1})$$

$CA_t$  por construcción es  $I(1)$  bajo las condiciones señaladas de solvencia intertemporal.

Si existe una relación de largo plazo entre  $CA_t$  y alguna de las variables de  $w_t$  que implique cointegración, entonces la combinación:  $CA_t + \psi' w_t$  para  $\psi \neq 0$ , es estacionaria y  $w_t$  está multicointegrado.

A partir de lo anterior se establecerá que mientras  $w_t$  está multicointegrado el proceso definido como  $W_t = \sum_{j=1}^t w_j \sim I(2)$  está cointegrado polinomialmente<sup>21</sup>.

Cuando  $CA_t$  está cointegrado con alguna de las variables de  $w_t$ , el proceso descrito por la siguiente combinación es estacionario para  $\psi$  distinto de 0.<sup>22</sup>

---

<sup>21</sup>Se dice que el proceso  $X_t \sim I(2)$  está cointegrado polinomialmente si existen  $\beta_0$  y  $\beta_1$  distintos de 0 tal que  $\beta_0' X_t + \beta_1' \Delta X_t$  sea estacionario. Nótese que  $\Delta X_t \sim I(1)$ . (Johansen 1995 Cap. 3)

<sup>22</sup>La condición  $\psi \neq 0$  permite que la relación cointegrante pueda establecerse con cualquier combinación de los componentes de  $w_t$ , a saber, las exportaciones, las importaciones o el stock de deuda rezagado un periodo. Por ejemplo, si  $\psi' = [\psi_1 \ 0 \ 0]$  el proceso que describe acumulación de los desequilibrios de corto plazo de la cuenta corriente,  $CA_t$  está cointegrado con las exportaciones.

$$\sum_{j=1}^t \beta' w_j + \psi' w_t \equiv \sum_{j=1}^t c a_j + \psi' w_t \equiv C A_t + \psi' w_t \quad (8)$$

En consecuencia  $w_t$  está multicointegrado.

Al definir  $W_t = \sum_{j=1}^t w_j$  (8) se puede reescribir como (9) teniendo en cuenta que  $W_t$  es un proceso integrado de orden 2,  $\Delta W_t = w_t$  de orden 1 y  $\beta' \Delta W_t = \beta' w_t$  un proceso estacionario.

$$\beta' W + \psi' \Delta W_t \sim I(0) \quad (9)$$

La ecuación anterior indica que una combinación lineal de los niveles y las diferencias de  $W_t$  es estacionaria, por lo tanto mientras  $x_t$ ,  $m_t$  y  $b_{t-1}$  estén multicointegradas,  $W_t$  está cointegrado polinomialmente.

Multicointegración es en este sentido, un caso particular de cointegración polinomial.

### 4.3. Un modelo de corrección de errores $I(2)$ en presencia de multicointegración

Engsted y Johansen (1997) derivan la representación VECM para un proceso multicointegrado de más de dos variables, superando así los problemas de estimación asintóticos que presenta el procedimiento bietápico (basado en mínimos cuadrados) propuesto originalmente por Granger y Lee (1989, 1990).

El VECM para  $W_t \equiv \sum_{i=1}^t w_i \sim I(2)$  cuando  $w_t$  está multicointegrado se especifica de la siguiente forma:

$$\Delta^2 W_t = \alpha (\beta' W_{t-1} + \psi' \Delta W_{t-1}) + \Omega \alpha_{\perp} (\alpha'_{\perp} \Omega \alpha_{\perp})^{-1} \kappa' \Delta W_{t-1} + \varepsilon_{w_t} \quad (10)$$

Donde  $(\alpha, \beta, \psi, \kappa, \Omega)$  son parámetros del modelo.  $\alpha$  tiene la misma interpretación que en el contexto de (5),  $\beta$  y  $\psi$  son los vectores involucrados en las combinaciones lineales estacionarias descritas en la sección 4.2 y  $\Omega$  es la matriz no singular de varianzas-covarianzas de  $\varepsilon_{w_t}$ .

Si la representación (10) es válida para  $w_t$ , el proceso está multicointegrado<sup>23</sup>.

Como fue señalado en 4.2 la conexión entre la condición de solvencia y la especificación (10) la establecen conjuntamente el significado de la estacionariedad de  $\beta'w_t$  en el contexto de la proposición 1 y el sentido económico que soporta una relación de largo plazo entre la acumulación en el tiempo de los desequilibrios de la cuenta corriente de la balanza de pagos y  $w_t$ .

Lo expuesto hasta este punto describe una estrategia de contraste empírico que incluye la propuesta por Trehan y Walsh y supera los problemas estadísticos generados al especificar un VECM  $I(1)$  en presencia de multicointegración. Igualmente se debe señalar que el aporte de Leachman y Francis (2000) se puede considerar como una versión restringida del modelo, la cual excluye de la relación de largo plazo al stock de deuda, pues asume que el desequilibrio comercial es estacionario, es decir que las exportaciones e importaciones están cointegradas de lo cual sigue que  $b_{t-1} \sim I(0)$  y que los valores que toman los vectores  $\beta$  y  $\psi$  restringen a 0 el componente asociado a  $b_{t-1}$ . Sobre este punto es necesario decir que se ha demostrado que la no estacionariedad del desequilibrio comercial y del stock de deuda no rechaza de facto la solvencia intertemporal.<sup>24</sup>

De otro lado, las características del equilibrio descrito por la especificación (10) señalan que la solvencia no es consecuencia exclusiva de la relación de largo plazo entre la balanza comercial y el stock de deuda, existe otro nivel constituido por una combinación entre la acumulación de los desequilibrios de corto plazo de la cuenta corriente y las exportaciones, importaciones y el endeudamiento, esta última constituye un “amortiguador” de los choques externos que puede enfrentar la economía y cuya transmisión se produzca a través de cualquiera de las variables consideradas en  $w_t$ .

---

<sup>23</sup>Este resultado es una extensión del teorema de representación de Granger para un proceso multicointegrado. Ver Engsted y Johansen (1997)

<sup>24</sup>Trehan y Walsh (1988) señalan que la estacionariedad del desequilibrio comercial no es una condición ni necesaria ni suficiente de solvencia intertemporal. En su trabajo de 1991 se discute el problema frente a un proceso no estacionario en diferencias para este desequilibrio. Las condiciones de la proposición 1 permiten incluso que este proceso sea explosivo mientras el parámetro asociado a la quasi-diferencia esté acotado por el valor esperado de la tasa de interés

#### 4.4. Estimación

Se ha considerado  $w'_t = [x_t \ m_t \ b_{t-1}]$  como el proceso estocástico conjunto para las exportaciones, las importaciones y el stock de deuda.

En donde  $x_t$ ,  $m_t$  y  $b_{t-1}$  son procesos integrados de orden 1 y por lo tanto  $w_t \sim I(1)$ .

El propósito de la estimación es verificar si (10) es una representación válida para describir el proceso conjunto generador de datos y por lo tanto  $w_t$  está multicointegrado.

Definiendo  $W'_t \equiv \sum_{i=1}^t w'_i$ , por construcción  $I(2)$ , (10) se puede reescribir de forma equivalente como:

$$\Delta^2 W_t = \alpha\beta' W_{t-1} - \Gamma \Delta W_{t-1} + \sum_{i=1}^{k-2} \Delta^2 W_{t-i} + \mu_0 + \alpha\beta'_0 t + \varepsilon_{w_t} \quad (11)$$

con  $-\Gamma = [\alpha\psi' + \Omega\alpha_{\perp}(\alpha'_{\perp}\Omega\alpha_{\perp})^{-1}\kappa']$ .

La reparametrización de la representación (10) de Engsted y Johansen (1997) en (11) es de gran utilidad, pues permite establecer la conexión en términos prácticos entre multicointegración y el análisis del modelo  $I(2)$ . Así mismo, el término  $\alpha\beta'_0 t$  permite la presencia de combinaciones lineales estacionarias alrededor de una tendencia determinística para las relaciones multicointegrantes (Jørgensen et. al. 1996).<sup>25</sup>

Es importante anotar que la longitud de rezago  $k$ , se refiere al orden del modelo vectorial autoregresivo VAR para  $W_t$ , el cual desde luego, no es estacionario.

Para verificar si (11) es una representación válida del proceso  $I(2)$ ,  $W_t$  se debe tener en cuenta el hecho que esta parametrización se define a través de dos condiciones de rango:

- $\Pi = \alpha\beta'$  es una matriz de rango reducido  $r$  donde  $\alpha$  y  $\beta$  son dos matrices de dimensión  $(p \times r)$  y rango completo  $r < p$ .

---

<sup>25</sup>La relación entre el modelo  $I(2)$  y el VECM bajo multicointegración se discute en detalle en Johansen (1995) Cap 9. Reescribir (10) como (11) permite emplear cómodamente la extensión desarrollada por Clara Jørgensen para la estimación de procesos  $I(2)$  sobre el modulo CATS in RATS. Esta extensión se puede obtener en <http://www.estima.com/>



- $\alpha'_{\perp} \Gamma \beta_{\perp} = \xi \eta'$  es una matriz de rango reducido  $s$  donde  $\alpha_{\perp}$  y  $\beta_{\perp}$  son el complemento ortogonal de  $\alpha$  y  $\beta$  respectivamente,  $\xi$  y  $\eta$  son dos matrices de dimensión  $(p - r \times s)$  y rango completo  $s \leq p - r$ .<sup>26</sup>

En este sentido, el contraste empírico se divide en dos partes, primero se determinan conjuntamente los rangos  $r$  y  $s$  sobre la muestra empleando el procedimiento de máxima verosimilitud de Johansen. En segunda instancia y previa verificación de la significancia estadística de la componentes determinísticas del modelo, se estiman las matrices  $(\beta, \beta_1, \beta_2)$  mutuamente ortogonales las cuales conforman  $r$  combinaciones lineales estacionarias,  $s$   $I(1)$  y  $p - r - s$   $I(2)$  involucradas en la relación de multicointegración, de la siguiente forma:

$$r : (\beta' W_t + \beta'_0 t - \delta \beta'_2 \Delta W_t) \sim I(0)$$

$$s : \beta'_1 W_t \sim I(1)$$

$$p - r - s : \beta'_2 W_t \sim I(2)$$

donde  $\delta \beta'_2 = \psi'$ , con lo cual la combinación lineal estacionaria es la descrita en (9).

Conviene señalar que la estimación de las combinaciones descritas anteriormente debe realizarse bajo la restricción  $\begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}$  para las dos primeras componentes del vector de cointegración. Esta restricción debe resultar significativa sobre la muestra.

## 5. El endeudamiento externo Colombiano

### 5.1. Antecedentes

Colombia se ha comportado más como un deudor neto que como un acreedor en la historia reciente<sup>27</sup>, sin embargo su patrón actual de endeudamiento

<sup>26</sup>Nótese que la primera condición de rango es la misma requerida para que el modelo  $I(1)$  tradicional sea una representación válida para un proceso  $I(1)$  cointegrado. Respecto a la naturaleza de estas condiciones se puede encontrar un análisis detallado en Johansen (1995)

<sup>27</sup>En promedio, durante las tres últimas décadas (1970-1996) Colombia recurrió al financiamiento externo, aunque en unas épocas mas que en otras, y en ocasiones financió al resto del mundo. Herrera (1996)

genera preocupación, de hecho la percepción de los mercados internacionales frente al comportamiento de la economía ha tenido una evolución poco favorable <sup>28</sup>.

Con un enfoque derivado de los modelos de primera generación para las crisis cambiarias, Milesi-Ferretti y Razin (1996b) encuentran que las tendencias altamente deficitarias de la cuenta corriente en Colombia durante los años 70's y principios de los 80's estaban siendo revertidas por la menos deficitaria cuenta corriente de los 90's, lo cual hacía pensar que las condiciones de solvencia de la economía eran respetadas y por lo tanto la sucesión de este estado sobre un horizonte temporal indefinido significaba sostenibilidad. Sin embargo comentan que se requiere un examen más detallado que excedía el propósito del análisis comparativo considerado por los autores.

El resultado anterior en cierto modo es consistente con Herrera (1996) quien concluye que para el periodo de análisis la aproximación intertemporal es el mejor modelo descriptivo para la cuenta corriente y que el comportamiento de ésta última no difiere del que sería un nivel óptimo. Esto implica que el endeudamiento, en términos de las fluctuaciones de la cuenta corriente, no es excesivo<sup>29</sup>.

Uno de los trabajos más recientes sobre el tema, Clavijo (2001), afirma que el endeudamiento externo Colombiano, que ha aumentado 11 puntos del PIB entre 1995 y 2001 alcanzando niveles comparables con los de principios de los años noventa, puede ser percibido por el mercado como inviable y en esa medida la calificación de riesgo de Colombia a duras penas mantendrá una actitud defensiva sobre sus perspectivas de corto plazo hasta tanto no se concreten una serie de medidas conducentes a reducir los indicadores de deuda pública y externa.

Sin embargo, interpretando el grado otorgado por las firmas calificadoras de riesgo a la economía Colombiana como un indicador de viabilidad del

---

<sup>28</sup>La economía Colombiana tenía una percepción relativamente positiva por parte del mercado a mediados de los noventa, era calificada con grado de inversión y la deuda soberana pagaba un spread promedio de 300 puntos base sobre los títulos similares del gobierno de los Estados Unidos. A finales del 1998 la situación parece tomar un rumbo diferente pues la prima sobre los bonos norteamericanos alcanzó niveles cercanos a 1000 puntos básicos y se pierde, hasta la fecha, la calificación dentro de la escala de inversión.

<sup>29</sup>En este sentido, se explican los cambios en la posesión de activos externos netos a través de desviaciones de los niveles de largo plazo de variables como el producto, el gasto público o la inversión, el análisis del endeudamiento externo es indirecto pues se realiza través de la comparación entre un estado de la economía observado y un *benchmark* consistente con los niveles de equilibrio de los determinantes de la cuenta corriente de la balanza de pagos.

endeudamiento externo, señala que los ajustes recientes en el campo fiscal, la flotación de la tasa de cambio así como las ganancias en productividad, han estabilizado la razón deuda externa/producto en un nivel de 37% para el año 2001, el cual puede mantenerse dependiendo del éxito de las políticas conducentes a disminuir el déficit fiscal y del impacto favorable que pueda tener el esfuerzo exportador. Se señalan las condiciones necesarias para la estabilización de la relación deuda/producto alrededor nivel recomendado por las calificadoras (35%).<sup>30</sup>

## 5.2. Análisis empírico del endeudamiento Colombiano

En el presente apartado se adelanta la estimación discutida a lo largo de las secciones anteriores con series anuales de las exportaciones  $x_t$ , las importaciones  $m_t$  y la posesión de activos externos  $b_t$  en dólares para el período 1970-2001 (ver Anexo).

En primera instancia se considera si estadísticamente  $x_t$ ,  $m_t$  y  $b_{t-1}$  son procesos integrados de orden 1 y por lo tanto  $w_t \sim I(1)$ .

En la Tabla 1 se presentan los resultados del contraste KPSS para cada una de las series consideradas en  $w_t$ .<sup>31</sup> Se contrasta la hipótesis nula de proceso estocástico estacionario, estadístico  $\eta_\mu$ . Se utiliza  $l = 1$  como parámetro de truncamiento. Para las tres series se rechazó la hipótesis nula de estacionariedad en niveles.<sup>32</sup>

---

<sup>30</sup>Clavijo (2001) aborda el tema a través de la evaluación de una prueba de solvencia la cual en el contexto del análisis indica si la economía dado el endeudamiento externo neto actual y su esfuerzo exportador, es capaz de frenar el crecimiento de su deuda al término del periodo  $t$ . El modelo empleado indica que cuanto mayor sea la tasa de interés sobre la deuda, mayor será el esfuerzo exportador requerido.

<sup>31</sup>La especificación de la prueba permite establecer implícitamente que el orden de integración de las series es 1. Lo anterior se concluye al rechazar  $H_0$ , controlando la probabilidad de señalar la presencia de raíz unitaria en un proceso que es en realidad estacionario. Esta característica y la mayor potencia estadística que posee KPSS hacen del contraste una alternativa frente a las pruebas tradicionales tipo Dickey-Fuller. Ver: Kwiatkowski, Phillips, Schmidt y Shin (1992)

<sup>32</sup>En adelante \*, \*\* y \*\*\* denotan un nivel de significancia estadística de 10, 5 y 1% respectivamente.

Tabla 1  
*Prueba KPSS. Series Anuales 1970-2001.*

$KPSS_\alpha(\eta_\mu)$			
<i>V.C. 5%</i>	$x_t$	$m_t$	$b_{t-1}$
0.463	1.53848***	1.448970***	1.30628***

Basado en la proposición 11.6 de Lütkepohl (1993), se obtiene una estimación consistente del orden de la representación VAR no estacionaria para  $W_t$ , a través de los criterios de información HQ y SC, los cuales se calculan hasta el rezago 4 con el mismo tamaño de muestra.<sup>33</sup> Los resultados de la tabla 2 indican que el orden del rezago es  $k = 2$ .

Tabla 2  
*Estimación del orden de rezago  $k$*

Orden	AIC	HQ	SIC
1	42,1425	42,3607	42,8562
2	39,2970	39,6461 (*)	40,4389 (*)
3	40,2708	40,7508	41,8409
4	39,3961	40,0070	41,3944

(\*): Mínimo.<sup>34</sup>

Los resultados indican que para efectos de la estimación se considera un caso particular de (11) dado por:

$$\Delta^2 W_t = \alpha\beta' W_{t-1} - \Gamma\Delta W_{t-1} + \mu_t + \varepsilon_{w_t} \quad (12)$$

Donde  $\mu_t = \mu_1 k_1(t) + \mu_2 k_2(t) + \mu_3 k_3(t)$  con

$$k_1(t) = \begin{cases} 1, & 1970 \leq t \leq 1991 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}, \quad k_2(t) = \begin{cases} 1, & 1991 < t \leq 1999 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad \text{y } k_3(t) = t$$

<sup>33</sup>La proposición 11.6 incluye el caso en que el polinomio característico de la representación VAR tenga  $s$  raíces unitarias (cualquier multiplicidad). Se señala que en este caso, el criterio de información de Akaike (AIC) no es consistente, sin embargo los criterios de Hannan Quinn (HQ) y de Schwarz (SIC) si lo son. Ver Lütkepohl (1993) Cap. 11. Pg. 383

<sup>34</sup>Los criterios de información se obtienen a través de la estimación del modelo VAR  $W_t = A_1 W_{t-1} + A_2 W_{t-2} + \dots + A_p W_{t-p} + B_0 D_t + u_{W_t}$

Donde  $p$  tomó valores entre 1 y 4.  $D_t$  es un conjunto de variables que controla por los cambios de régimen cambiario a lo largo de la muestra.

La inclusión estas funciones determinísticas busca controlar por los cambios de régimen cambiario ocurridos durante el periodo muestral y hacer consistente la estimación con la presencia de tendencia.

Sobre (12) se adelanta el procedimiento para determinar conjuntamente los rangos  $r$  y  $s$ . Lo anterior se realiza mediante el contraste de los estadísticos  $Q_r$  y  $S_{r,s}$ . Es importante señalar que  $Q_r$ , hipótesis de rango menor o igual a  $r$ , incluye a los submodelos  $S_{r,i}$  con  $i = 1, 2, \dots, p$ .<sup>35</sup>

Los resultados se presentan en la tabla 3, la cual se lee partiendo de la celda superior izquierda, desplazándose a hacia la derecha hasta no rechazar la hipótesis nula. Cuando se llega a la celda  $p - s - r = 1$  se continua con la siguiente fila. El punto de partida es la hipótesis de  $r = 0$  y  $p - s - r = 3$ , que es la versión más restringida del modelo, el procedimiento secuencial supone que el desplazamiento significa un modelo menos restringido en tanto permite la existencia de combinaciones  $I(1)$  en las relaciones multicointegrantes.

Los resultados de la tabla 3 indican la hipótesis  $r = 0$  y  $p - s - r = 1$  no se rechaza con estadístico  $S_{0,1} = 45,68$  y significancia estadística levemente superior al 20 %, sin embargo este resultado debe tomarse con sumo cuidado en el contexto de  $Q_0 = 46$ , estadístico de prueba sobre la hipótesis nula rango  $r$  menor o igual a 0, significativo al 5 %. Como fue indicado,  $Q_0$  contiene a las pruebas  $S_{0,0}$ ,  $S_{0,1}$  y  $S_{0,2}$ , lo cual indica que al rechazar sobre  $Q_0$  se rechazan las hipótesis que se encuentran a su izquierda.

La primera hipótesis que no es rechazada sobre  $Q_r$  es  $r = 1$  pues 19,04 tiene un  $p$ -value superior al 20 %, de esta forma la conclusión  $r = 1$  y  $p - s - r = 1$ , se encuentra al no rechazar  $S_{1,1} = 20,67$ , pues su significancia estadística está por debajo del 50 %

---

<sup>35</sup> $Q_r$  es una versión del estadístico de la traza de Johansen y su distribución asintótica bajo la hipótesis nula de rango de cointegración igual a  $r$  con un modelo estacionario alrededor de una tendencia se deriva en Jørgensen et. al. (1996). La discusión sobre el orden jerárquico de los contrastes de rango se encuentra en Johansen (1995) Cap 9 y Haldrup (1998).

Tabla 3

*Contraste conjunto de rangos de cointegración. Series Anuales (1970-2001)*

$r$	$S_{r,s}$			$Q_r$
	136.76***	74.44 **	45.68	44.98 **
	86,66 V.C 5 %	68,23 V.C 5 %	45.81 V.C 20 %	42,66 V.C 5 %
		58.63 ***	20.67	19.04
		47,60V.C 5 %	34,36 V.C 5 %	25,43 V.C 5 %
			14.42	8.47
			19,87 V.C 5 %	12,49 V.C 5 %
$p - r - s$	3	2	1	0

Se concluye que existe evidencia estadística que indica que  $w_t$  está multicointegrado, en consecuencia el análisis de solvencia intertemporal, debe realizarse bajo la representación (12).

Determinados  $(r, s) = (1, 1)$  se procede a verificar conjuntamente la validez de la restricción dada por la definición del deficit (superávit) comercial  $d_t \equiv (x_t - m_t)$  y la presencia de tendencia determinística en la representación (12).<sup>36</sup>

La primera restricción, tabla 4 panel A, impone 1 y -1 sobre los componentes del vector de cointegración asociados a las exportaciones e importaciones y permite tendencia en el espacio de cointegración. En el panel B se formula la prueba de exclusión de la tendencia bajo la definición de la balanza comercial. Cada una de éstas restricciones conjuntas se calculan definiendo sendas de matrices  $H$  dadas por:

$$\beta_A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \varphi \text{ y } \beta_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \varphi$$

<sup>36</sup>En este caso,  $r = 1$ , imponer restricciones sobre el conjunto de vectores de cointegración es equivalente a formularlas sobre cada uno de ellos. Estas restricciones se expresan generalmente como  $\beta = H\varphi$ . Donde  $H$  se construye de acuerdo con la restricción que se quiere probar. La prueba es tipo razón de verosimilitud y la distribución asintótica bajo la hipótesis nula es  $\chi^2$  con grados de libertad determinados en función del número de restricciones impuestas. Una explicación detallada puede encontrarse en Hansen y Juselius (1995) Sec. 4.7.1

La restricción de la identidad de la balanza comercial resulta significativa, 4A y se rechaza la hipótesis que excluye la tendencia determinística del vector de cointegración con significancia del 2 %, 4B.

Tabla 4  
*Restricciones sobre el vector de cointegración de la combinación I (0).*

Variable	A	B
	$\chi^2(1) = 0,98$ $p\text{-value} = 0,32$	$\chi^2(2) = 7,54$ $p\text{-value} = 0,02$
$x_t$	1	1
$m_t$	-1	-1
$b_{t-1}$	0.106	0.11
$t$	-212.514	0

Dadas las conclusiones de la tabla 4, la estimación de los parámetros del modelo se realiza con tendencia determinística e imponiendo la restricción dada por la identidad  $d_t \equiv (x_t - m_t)$ .

Tabla 5  
*Parámetros estimados representación I (2) para  $r = 1$  y  $p - r - s = 1$ .*

Relación multicointegrante	$\hat{\beta}' = ( 1 \quad -1 \quad 0,106 ) \hat{\beta}_0 = -212,514$ $\hat{\delta} = 8,094$
Combinaciones I (2)	$\hat{\beta}'_2 = ( -0,028 \quad -0,032 \quad -0,038 )$
Combinaciones I (1)	$\hat{\beta}'_1 = ( 1 \quad 1,867 \quad 8,156 )$
Combinaciones estacionarias	$\hat{\delta}\hat{\beta}'_2 = ( -0,231 \quad -0,264 \quad -0,308 )$
Coefficientes de ajuste	$\hat{\alpha}' = ( -0,062 \quad -0,689 \quad -1,064 )$
Matriz Gamma	$\hat{\Gamma} = \begin{pmatrix} -0,186 & 0,191 & 0,020 \\ -1,548 & 1,198 & 0,623 \\ -0,139 & 0,037 & 0,825 \end{pmatrix}$

Las combinaciones lineales estacionarias, I (1) e I (2) estimadas se presentan a continuación:

$$\sum_{j=1}^t (x_j - m_j + 0,106b_{j-1}) - 212,514t + 0,231x_t + 0,264m_t + 0,308b_{t-1} \sim I(0)$$

$$\sum_{j=1}^t (x_j + 1,867m_j + 8,156b_{j-1}) \sim I(1)$$

$$\sum_{j=1}^t (-0,028x_j - 0,032m_j - 0,038b_{j-1}) \sim I(2)$$

Para la muestra 1970-2001, no existe evidencia para rechazar la hipótesis de solvencia intertemporal bajo multicointegración. Lo anterior indica que durante este período el proceso conjunto es altamente persistente sobre el equilibrio de largo plazo al tiempo que la presencia de una combinación lineal estacionaria que incluye cointegración entre los niveles y las diferencias del proceso  $W_t$ , caracteriza un sistema más robusto frente a los choques que puedan presentar las variables de la cuenta corriente de la balanza de pagos que el descrito por un sistema  $I(1)$  tradicional.

## 6. Conclusiones

En este documento se discutió el problema del endeudamiento externo para una economía pequeña y abierta que tiene acceso a un mercado de capitales perfecto. El análisis giró en torno a establecer las características del equilibrio entre los procesos estocásticos no estacionarios que están involucrados en una relación de largo plazo que determina la solvencia intertemporal.

Discutiendo una versión de la metodología  $I(1)$  documentada en la literatura internacional (Trehan y Walsh 1988, 1991), se encuentra que existen condiciones donde la especificación derivada de ésta es inadecuada, específicamente en presencia de multicointegración del proceso estocástico conjunto considerado.

En este sentido, la extensión del teorema de representación de Granger bajo multicointegración (Engsted y Johansen 1997) permite superar el problema de especificación incorporando en la aproximación tradicional, las técnicas desarrolladas recientemente para el análisis de procesos estocásticos  $I(2)$ .

En este contexto, el equilibrio caracterizado por un caso particular de cointegración polinomial significa un escenario de solvencia más robusto frente a los desequilibrios de la cuenta corriente que el descrito por un sistema  $I(1)$  cointegrado.

Para el caso del endeudamiento externo Colombiano, se encuentra que no existe evidencia que rechace la hipótesis de solvencia intertemporal para el periodo 1970-2001. Esta conclusión se obtiene al analizar un sistema  $I(2)$  conformado por las exportaciones, las importaciones y la posesión de activos externos netos en dólares.



Se concluye que en el equilibrio de largo plazo están involucradas componentes  $I(2)$  razón por la cual se establece que las variables consideradas están multicointegradas.

## Referencias

- [1] CLAVIJO, Sergio. (2001). Viabilidad de la deuda externa Colombiana. Borradores de Economía No. 179. Banco de la República. Colombia.
- [2] ENGLE, R. F. and C. W. J. GRANGER. (eds) (1991) Long-run economic relationships, Oxford University Press.
- [3] ENGSTED, T., J. GONZALO and N. HALDRUP. (1997). Testing for Multicointegration. *Economics Letters* 56, Pg 259-266.
- [4] ENGSTED, T and HALDRUP. (1999). Multicointegration in Stock-Flow Models. *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*. 61 2 Pg 237-254.
- [5] ENGSTED, T and S. JOHANSEN. (1997). Granger's representation theorem and multicointegration, *EUI Working Papers*. ECO No. 97/15, European University Institute, Florence.
- [6] GRANGER, C. W. J. and T. H. LEE. (1989). Investigation of production, Sales and Inventory relationships Using Multicointegration and Non-Symmetric Error correction Models. *Journal of Applied Econometrics*. Vol 4. Pag. 145-159. John Wiley & Sons.
- [7] GRANGER, C. W. J. and T. H. LEE. (1990). Multicointegration. in Engle, R. F. and C. W. J. GRANGER (eds) (1991) Long-run economic relationships, Oxford University Press.
- [8] HALDRUP, Niels (1998) An Econometric Analysis of I(2) Variables. *Journal of Economic Surveys*. Vol 12. No. 5. Blackwell Publishers.
- [9] HANSEN, H and K. JUSELIUS (1995). *CATS in RATS: Cointegration Analysis of Time Series*, Estima: Evanston, Illinois, USA.
- [10] HERRERA, Santiago.(1996). Determinantes de la Cuenta Corriente en Colombia. *Ensayos sobre Política Económica*. Banco de la República. Colombia.
- [11] JOHANSEN, Søren. (1995). *Likelihood-Based Inference in Cointegrated Vector Autoregressive Models*. Oxford University Press.

- [12] JØRGENSEN, C., H. KONGNSTED and A. RAHBK. (1996). Trend-Stationarity in the I(2) Cointegration Model. Institute of Economics, University of Copenhagen. WP 96-12.
- [13] KWIATKOWSKI, D. P.C.B. PHILLIPHS, P.SCHMIDT and Y. SHIN. (1992): Testing th Null Hypothesis of Stationarity against the Alternative of a Unit Root: How Sure Ares We That Economic Time Series Have a Unit Root?Journal of Econometrics 54, 159-178.
- [14] LARSSON, Frederik. (2001) Current Account Sustainability -Have Argentina, Mexico and Australia Been Living Beyond Their Means?. Bachelor thesis in economics. Lund University.
- [15] LEACHMAN, L and B. FRANCIS. (2000). Multicointegration Analysis of the Sustainability of Foreign Debt. Journal of Macroeconomics, Vol 22, No. 2, pp 207-227.
- [16] LEACHMAN, Lori. (1996). New Evidence on the Ricardian equivalence theorem: a multicointegration approach. Applied economics. 28, 695-704.
- [17] LIU, P and E. TANNER (1995). Intertemporal Solvency and Breaks in the US Deficit Process: a Maximun-Likelihood Cointegration Approach. Applied Economics Letters. Vol 2. Pag. 231-235.
- [18] LÜTKEPOHL, Helmut. (1993) Introduccion to Multiple Time Series Analysis. Second Edition. Springer-Verlag. Berlin.
- [19] MILESI-FERRETTI, G. M. and A. RAZIN (1996a) Sustainability of Persistent Current Account Deficits. NBER Working Paper no. 5467. February.
- [20] MILESI-FERRETTI, G. M. and A. RAZIN (1996b) Current Account Sustainability: Selected East Asian and Latin American Experiences. NBER Working Paper no. 5791. October.
- [21] MISAS, M y H. OLIVEROS.(1997). Cointegración, Exogeneidad y Crítica de Lucas: Funciones de Demanda de Dinero en Colombia: Un Ejercicio Más. Borradores Semanales de Economía No 75. Banco de la República. Colombia.

- [22] NIELSEN, B and S. JOHANSEN. (1993). Manual for the simulation program DisCo. Institute of Mathematical Statistics. University of Copenhagen.
- [23] OBSTFELD, M and K. ROGOFF. (1994). Intertemporal Approach to the Current Account. NBER Working Paper no. 4893. October.
- [24] OBSTFELD, M and K. ROGOFF. (1996). Foundations of International Macroeconomics. The MIT Press.
- [25] PATTERSON, Kerry. (2000). An Introduction to Applied Econometrics. A time series approach. Palgrave.
- [26] TREHAN, B. and C. E. WALSH. (1988) Common Trends, the Government's Budget Constraint and Revenue Smoothing. Journal of Economic Dynamics and Control, Vol 12 . 425-44.
- [27] TREHAN, B. and C. E. WALSH. (1991) Testing Intertemporal Budget Constraints: Theory and Applications to U.S. Federal Budget and Current Account Deficits. Journal of Money Credit and Banking, Vol 23 No. 2

## ANEXO

Datos de la estimación.

AÑO 1/	$m_t$ 2/*	$x_t$ 2/*	$b_t$ *◇
1969	.	.	1861,43
1970	1347	1030	2.161,4
1971	1483	993	2.617,4
1972	1466	1230	2.818,4
1973	1694	1582	2.874,4
1974	2392	1932	3.225,4
1975	2409	2234	3.334,4
1976	2750	2888	3.124,4
1977	3176	3520	2.683,4
1978	3935	4192	2.361,4
1979	4535	4945	1.869,4
1980	6302	6241	2.042,4
1981	7289	5325	3.938,4
1982	8349	5295	6.831,4
1983	7320	4330	9.576,4
1984	7114	4727	11.612,4
1985	6897	4850	13.247,4
1986	7017	6696	12.958,4
1987	7634	6615	13.111,4
1988	8187	7008	13.604,4
1989	8709,8	7610	13.959,4
1990	9509,8	9026,8	13.620,1
1991	8841,6	9491,1	11.487,1
1992	10553	9694,8	10.831,1
1993	13868,5	10509,6	13.349,1
1994 R	16077,9	11336,2	17.019,1
1995 R	18305,8	12970,5	21.615,1
1996 R	19222,2	13865,0	26.369,1
1997 R	21583,5	15101,8	35.471,9
1998 R	19985,8	14305,2	34.106,9
1999 Pr	15834,9	14685,4	29.506,7
2000 P	17811,3	16527,3	24.630,7
2001 P	19482,1	15696,1	26.993,3

$m_t$ : Importación de bienes y servicios  
 $x_t$ : Exportación de bienes y servicios  
 $b_t$ : Activos externos netos  
\*: Series En Millones de Dólares  
◇: Activos Externos positivos significan un pasivo de la economía local frente al resto del mundo (activo si es negativo).  
**R**: Revisado  
**Pr**: Provisional  
**P**: Preliminar  
1/ A partir de 1994 las estadísticas corresponden a la Metodología contemplada en la Quinta Edición del Manual de Balanza de Pagos del Fondo Monetario Internacional.  
2/ Hasta 1993 se incluyen los servicios financieros y no financieros. A partir de 1994 las estadísticas incluyen servicios no factoriales y renta de los factores.  
**Fuente**: Banco de la República, Estudios Económicos.