Existencia del equilibrio en el mercado financiero: el modelo de intercambio de activos de Hart con consumo en el periodo inicial

Jean Pietro Bonaldi Varón
Asesor: Dr. Álvaro Riascos

Universidad de los Andes
Facultad de Economía

25 de agosto de 2008

Resumen

Hart ha establecido condiciones necesarias y suficientes para la existencia del equilibrio, en una economía de dos periodos en la que los individuos intercambian activos cuyos retornos dependen de un cierto estado de la naturaleza. Hammond y Page han formulado otras condiciones, equivalentes a las de Hart, que se aplican a este modelo. En los tres casos, se supone que los individuos maximizan el valor esperado de su utilidad en el segundo periodo, cuando se hacen efectivos los retornos de los activos. En este artículo se modifica el modelo de Hart de tal forma que a los individuos les interesa también el consumo en el periodo inicial y se examinan las implicaciones sobre las condiciones propuestas por estos autores.

1. Introducción

Existen en la economía diversos mecanismos a través de los cuales es posible transferir recursos en el tiempo, múltiples sistemas de ahorro y de endeudamiento que le permiten a los individuos distribuir sus ingresos entre distintos periodos y diversificar el riesgo, frente a la posibilidad de que ocurran sucesos que puedan afectar sus niveles de riqueza y consumo. En el mercado financiero, por ejemplo, se intercambian activos cuyo valor futuro está sujeto a innumerables contingencias, usualmente difíciles de anticipar. Por esta razón, la incertidumbre juega un papel determinante en el comportamiento de los agentes que participan en este mercado. Si bien es cierto que los individuos no pueden prever fácilmente el valor futuro o los dividendos de los activos, también es claro que disponen de distintas fuentes de información en virtud de las cuales pueden formar expectativas, acertadas o no, sobre dichos retornos Independientemente de cual sea la verdadera distribución de probabilidad de los eventos que determinan el valor de los activos, incluidos sus dividendos, las probabilidades subjetivas que los individuos les asignan, con base en la información previamente adquirida y en posibles señales que reciben del mercado, permiten modelar su comportamiento bajo las condiciones de incertidumbre descritas y analizar así algunas características de este mercado.

En este artículo, se hace particular énfasis en el grado de divergencia que pueden presentar las expectativas de los agentes y se deja de lado la cuestión de si estas expectativas predicen correctamente los eventos futuros. Retomado una línea de investigación desarrollada originalmente por autores como Green (1973) y Hart (1974), entre otros que serán mencionados posteriormente, se pretende aquí examinar algunas condiciones relativas a las expectativas de los individuos sobre los retornos futuros de los activos, que determinan la existencia del equilibrio en el mercado financiero.

El modelo que se propone para dicho fin, aunque es muy similar al de Hart (1974), presenta una diferencia crucial. Para describir las decisiones de los individuos en el mercado financiero, Hart supone que estos sólo están interesados en maximizar el valor esperado de su utilidad futura, la cual depende de los retornos de los activos financieros, pero omite deliberadamente la utilidad que estos podrían obtener en el periodo en el que se realizan las transacciones, si destinan su ingreso a actividades distintas a la compra de activos. Hart argumenta que tal omisión le permite derivar condiciones suficientes para la existencia del equilibrio, más débiles que las de Green (1973), quien sí incorpora en su modelo el hecho de que los individuos valoran el consumo presente y no solamente el valor esperado de su utilidad futura. Es importante destacar, sin embargo, que el modelo de Green difiere del de Hart, y también del que se propone aquí, en otros aspectos, principalmente en que en éste existen mercados de bienes para el consumo presente y de contratos futuros de dichos bienes, a través de los cuales se realizan las trasferencias de recursos entre los distintos periodos de tiempo. Hammond (1983) apoya la posición de Hart (1974) y sostiene que las condiciones de Green son innecesariamente fuertes, en cambio, propone la condición de expectativas traslapadas y demuestra que es equivalente a la condición establecida por Hart (1974). Page(1987), por su parte, expresa las condiciones para la existencia del equilibrio en términos de la no existencia de precios de arbitraje, para un modelo idéntico al de Hart (1974). Carvajal y Riascos (2006), en cambio, incluyen un término en la función de utilidad de los individuos que depende del excedente de riqueza disponible, luego de haber realizado las transacciones en el mercado de activos. El modelo que se plantea en este artículo incluye también este término inicial en la función de utilidad.

En términos generales, podría decirse que el objetivo de este artículo es mostrar que la inclusión de este término adicional en la función de utilidad no es inocua. Más específicamente, en la sección 5 se demostrará, por medio de un contraejemlplo, que en una economía idéntica a la propuesta por Hart (1974) y Hammond (1983), excepto porque en esta los inividuos valoran el consumo presente, la condición de expectativas traslapadas de Hammond no es suficiente para la existencia del equilibrio.

Puntualmente, el trabajo que se desarrolla a continuación se concentra en los siguientes aspectos. Primero se plantea un modelo similar al de Hart (1973), pero se le añade un término adicional a la función de utilidad, siguiendo a Carvajal y Riascos (2006), para incorporar en el modelo la utilidad inicial que los individuos obtienen de la riqueza que no destinan a la compra de activos o, incluso, que obtienen de la venta de éstos. Luego se propone una condición necesaria para la existencia del equilibrio, que es una generalización de la condición que proponen Carvajal y Riascos (2006) para una economía conformada por dos agentes, y se demuestra que es equivalente a las respectivas condiciones de Hart (1973) y Hammond (1983).Una vez establecidas dichas equivalencias, se demuestra que la condición de expectativas traslapadas no es suficiente para la existencia del equilibrio en una economía en la que la utilidad en el primer periodo es relevante. Finalmente, se demuestra la existencia del equilibrio en la economía propuesta, imponiendo algunos supuestos adicionales. La prueba en cuestión generaliza la propuesta por Carvajal y Riascos (2006) en varios aspectos importantes, a saber, se cumple para una economía con más de dos agentes, un conjunto infinito de estados de la naturaleza y expectativas sobre los retornos que permiten asignarle una probabilidad positiva al hecho de que los retornos de algunos activos puedan ser iguales a cero.

2. El modelo

Como se mencionó en la introducción, la economía que se presenta a continuación replica el modelo de intercambio de valores *(securities exchange model)* de Hart (1974), excepto por una diferencia fundamental que consiste en que, en el caso que aquí nos concierne, los individuos están interesados también en su consumo presente y no sólo en la utilidad esperada de la riqueza, derivada de los retornos futuros de los valores que intercambian en el presente. En efecto, la economía en cuestión consta de dos periodos, en el primero se realizan transacciones de activos y en el segundo estos activos pagan ciertos retornos. El retorno de un activo se entiende aquí como el valor de una unidad del mismo en el segundo periodo más los dividendos que éste haya generado, y es contingente al estado de la naturaleza que ocurra en el segundo periodo. Aunque dichos retornos son desconocidos por los individuos en el primer periodo, es decir, cuando realizan las transacciones, éstos forman expectativas sobre los mismos con base en las cuales toman sus respectivas decisiones.

Existen en esta economía un número finito de individuos y de activos que se representan por medio de los conjuntos $\mathcal{I} = \{1, ..., I\}$ y $\mathcal{A} = \{1, ..., A\}$, respectivamente. En el segundo periodo ocurre uno de infinitos estados de la naturaleza posibles, cada uno de los cuales se identifica con un único vector de retornos para los A activos de la economía. Adicionalmente, se supone que dichos retornos son no negativos, por lo cual un estado de la naturaleza puede representarse formalmente como un elemento de $\mathbb{R}^A_+$.

Una canasta de activos se denomina *portafolio* y se representa por medio de un vector $z \in \mathbb{R}^A$. Este vector puede contener cantidades positivas o negativas porque a todos los individuos se les permite comprar o vender activos. Más específicamente, $z_a^i < 0$ significa que el individuo i demanda cantidades negativas del activo a, es decir, que está interesado en irse corto (*short sell*) en este activo.

Los individuos, por su parte, están completamente caracterizados por medio de sus funciones de utilidad, sus creencias o expectativas sobre los retornos de los activos y sus dotaciones iniciales de riqueza. Así, para cada $i \in \mathcal{I}$, $u^i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función de utilidad que cumple los siguientes supuestos:[1]

(A.1) *u^i es cóncava*

(A.2) *u^i es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$.*

Los individuos maximizan la suma de la utilidad presente del consumo de un único bien (riqueza) y el valor esperado de la utilidad por el consumo futuro de dicho bien. La riqueza en el segundo periodo depende de los retornos de los activos adquiridos en el primer periodo y, de manera correspondiente, la utilidad esperada por dicha riqueza, para un individuo cualquiera, está determinada por sus Precio rel. sobre los retornos futuros de estos activos. En principio, parece razonable considerar que los individuos pueden reformular sus expectativas con base en conocimientos previamente adquiridos y en las creencias de otros, y que los precios pueden constituir una señal de esta información, por lo tanto, se supone en este modelo que las expectativas sobre los retornos futuros de los activos dependen de sus precios.

Formalmente, sean $p \in \mathbb{R}_+^A$ un vector de precios para los activos, $r \in \mathbb{R}_+^A$ un vector de retornos, o un estado de la naturaleza, $\mathcal{B}\left(\mathbb{R}_+^A\right)$ la $\sigma-$álgebra boreliana en $\mathbb{R}_+^A$ y $M\left(\mathbb{R}_+^A\right)$ el conjunto de todas las medidas de probabilidad definidas en el espacio medible $\left(\mathbb{R}_+^A, \mathcal{B}\left(\mathbb{R}_+^A\right)\right)$.[2] Las creencias de cada individuo $i \in \mathcal{I}$ sobre los retornos de los activos están caracterizadas por medio de una función $\mu^i : \mathbb{R}_+^A \to M\left(\mathbb{R}_+^A\right)$, tal que $\mu^i(p, X)$ denota la probabilidad que le asigna i al hecho de que el vector de retornos de los activos r esté contenido en el conjunto X, dados los precios p en el primer periodo. Se supone inicialmente que ésta función cumple un par de supuestos de regularidad, a saber:

(A.3)* *Para todo $p \in \mathbb{R}_+^A$, existe un conjunto acotado $C \subseteq \mathbb{R}_+^A$ tal que $\mu^i(p, C) = 1$.*

(A.4) *Para todo $i \in I$, la función $\mu^i : \mathbb{R}_+^A \to M\left(\mathbb{R}_+^A\right)$ es continua en la topología de convergencia débil de medidas de probabilidad.*[3]

Aunque la economía en cuestión consta de dos periodos, Hart (1974) supone que la utilidad de los individuos depende únicamente de su riqueza en el segundo periodo. Aquí, en cambio, se añade a la utilidad esperada un término que representa la utilidad derivada de la riqueza restante en el primer periodo, después de haber realizado las transacciones de activos. Adicionalmente, se supone en este modelo que cada individuo i recibe dotaciones iniciales de riqueza positivas, w_1^i y w_2^i, en el primer y el segundo periodo respectivamente.[4] Así, dado un vec-

[1] Se utiliza aquí la misma numeración para los supuestos de Hart (1974) y Hammond (1983)

[2] Para una definición rigurosa de el espacio medible $\left(\mathbb{R}_+^A, \mathcal{B}\left(\mathbb{R}_+^A\right)\right)$ véase Cohn (1980)

[3] La condición (A.3) de Hart (1974) ha sido remplazada aquí, temporalmente, por una más débil, a saber, (A.3)*. Posteriormente en este artículo, se hará referencia explícita al supuesto (A.3) destacando su importancia para la existencia del equilibrio en el mercado financiero.

[4] Podría suponerse, de manera más general, que la dotación inicial de riqueza en el segundo

tor de precios $p \in \mathbb{R}^A$ en el primer periodo, el individuo i escoge un portafolio de activos $z = (z_1, ..., z_m) \in \mathbb{R}^A$ con el fin de maximizar la siguiente función, que representa sus preferencias sobre el conjunto de portafolios disponibles a los precios p:[5]

$$V^i (z,p) = u^i \left(w_1^i - pz\right) + \int u^i \left(w_2^i + rz\right) d\mu^i (p) \tag{1}$$

Nótese que, por el supuesto (A.3)*, $\int u^i \left(w_2^i + rz\right) d\mu^i (p) = \int_C u^i \left(w_2^i + rz\right) d\mu^i (p)$, por lo tanto la función $f(r) = u^i \left(w_2^i + rz\right)$ es $\mu-$integrable para todo $p \in \mathbb{R}_+^A$ y todo $z \in \mathbb{R}^A$, luego V^i está bien definida, además, como u es cóncava y el producto punto es lineal, V^i es cóncava y, por lo tanto, continua en z, para un p fijo.

Como es natural, las elecciones de los agentes están sujetas a ciertas restricciones. En particular, a los precios p, la restricción presupuestal del individuo i está determinada por el conjunto:

$$B^i (p) = \left\{z \in \mathbb{R}^A : w_1^i - pz \geq 0\right\} \tag{2}$$

Además, se impone aquí una restricción adicional sobre los agentes concerniente a la imposibilidad de planear quedar en bancarrota en el segundo periodo. Intuitivamente, si los individuos derivan utilidad de su riqueza, es razonable suponer que éstos no consideran factible realizar transacciones que puedan implicar niveles negativos de riqueza en el futuro. Es decir, si un individuo le asigna cierta probabilidad positiva a un estado de la naturaleza, entonces este no va a adquirir un portafolio que le representaría un ingreso negativo en caso de que ocurriera dicho estado. De manera correspondiente, se define el conjunto de portafolios factibles para el individuo i, a los precios p, como:

$$X^i (p) = \left\{z \in \mathbb{R}^A : \forall r \in S^i (p) : rz + w_2^i \geq 0\right\} \tag{3}$$

donde $S^i (p)$ es el soporte de la medida de probabilidad $\mu^i (p)$.[6] En este aspecto puntualmente, el modelo que se analiza aquí es menos general que el propuesto por Hart(1974), quien tan sólo enuncia ciertos supuestos que deben satisfacer los conjuntos de portafolios factibles, pero no les da una forma explícita. En efecto, los conjuntos $X^i (p)$ que se proponen aquí satisfacen los supuestos (A.5) - (A.7) y (A.9) de Hart (1974) y basta con asumir adicionalmente que $S^i (p) \neq \{0\}$, para

periodo es contingente al respectivo estado de la naturaleza, como lo hacen Carvajal y Riascos (2006). Sin embargo, esta generalización hace más compleja la demostración de la existencia del equilibrio que se propone en la sección 6 y, en cambio, no modifca sustancialmente el modelo.

[5] En la definición de la función $V^i (p, z)$, pz y rz denotan el producto punto de los respectivos vectores y $\int f d\mu^i (p)$ es la integral, en el sentido de Lebesgue, de la función f con respecto a la medida $\mu^i (p)$. Además, si $f(r) = u^i \left(w_2^i + rz\right)$, como la función u^i es continua por (A.2) f también lo es (en r) y, por lo tanto, es Borel-medible.

[6] Sea μ una medida en $(X, \mathcal{B}(X))$, entonces, el soporte de μ, se denota suppμ, y se define como supp$\mu = \{x \in X : \mu(U) > 0$, para todo abierto U tal que $x \in U\}$

Nótese además que el supuesto (A.3)* se cumple si y solo si $S^i (p)$, el soporte de $\mu^i (p)$, es acotado.

todo $i \in \mathcal{I}$ y todo $p \in \mathbb{R}_{+}^{A}$, para que se cumpla también la condición (A.8). Como se verá posteriormente, el hecho de que los soportes de las medidas contengan elementos distintos del vector cero es una consecuencia inmediata del supuesto de expectativas traslapadas. Es conveniente añadir que Green (1973) exige una restricción sobre el conjunto de acciones factibles, equivalente a la anteriormente propuesta para los portafolios. Hammond (1983), por su parte, considera esta restricción bastante plausible y afirma que ésta satisface sus supuestos (A.10) y (A.11); hecho que cobrará importancia más adelante en este artículo.

En resumen, el problema de cualquier agente i de esta economía consiste en escoger un z en $B^{i}(p) \cap X^{i}(p)$ que maximice el valor de la función $V^{i}(\cdot, p)$, tomando los precios p como dados. Por lo tanto, puede definirse la correspondencia de demanda individual, $Z^{i} : \mathbb{R}^{A} \rightrightarrows \mathbb{R}^{A}$, de la siguiente forma:

$$Z^{i}(p) = \underset{z \in B^{i}(p) \cap X^{i}(p)}{\arg\max} \; V^{i}(z, p)$$

Por brevedad, en lo que resta de este artículo, la economía descrita en esta sección se denominará economía $\mathcal{E}$.

3. Demandas individuales

En principio, la correspondencia de demanda individual podría tomar valores vacíos, es decir, el problema de maximización de la utilidad, como ha sido planteado previamente, podría no tener solución para algunos precios y en tal caso es evidente que tampoco existiría el equilibrio. Por lo anterior, es importante determinar condiciones necesarias y suficientes para la existencia de dicha solución. Carvajal y Riascos (2006), por ejemplo, demuestran (lema 1) que $Z^{i}(p) \neq \varnothing$ si y solo si se cumplen las siguientes condiciones:

1. No existe un $z \in \mathbb{R}^{A}$ tal que $pz < 0$ y $\mu^{i}(p, \{r : rz < 0\}) = 0$, y
2. No existe un $z \in \mathbb{R}^{A}$ tal que $pz = 0$, $\mu^{i}(p, \{r : rz < 0\}) = 0$ y $\mu^{i}(p, \{r : rz > 0\}) > 0$

Intuitivamente, es claro que si existiera un portafolio con las características descritas en las condiciones 1 o 2, el individuo i tendría incentivos para demandar cantidades ilimitadas del mismo ya que, en cualquiera de los dos casos, podría obtener mayor utilidad al aumentar su posesión de este portafolio sin incurrir en riesgo alguno, según sus creencias sobre los retornos futuros de los activos. Este argumento intuitivo se puede formalizar fácilmente para así demostrar que si alguna de estas condiciones no se cumple, la demanda por activos del individuo i está indeterminada. La prueba de este resultado, es decir, de la implicación correspondiente del lema 1 de Carvajal y Riascos (2006), para la economía que aquí nos concierne es muy similar a la que ellos proponen. Sin embargo, su demostración de la otra dirección de este resultado aplica sólo para una economía semejante a la anteriormente descrita pero en la que el número de estados de la naturaleza posibles en el segundo periodo es finito, por lo cual no contempla nuestro caso de interés.

Por su parte Green (1973) enuncia también condiciones necesarias y suficientes para la existencia de una solución al problema de maximización de los individuos, descritas únicamente en términos de sus expectativas sobre los precios futuros de los *commodities*. Como se demostrará a continuación, bajo un supuesto adicional sobre las creencias de los individuos, las condiciones del lema 1 de Carvajal y Riascos (2006) y una adaptación natural de la condición de Green, para el mercado de activos, son equivalentes entre sí y, además, necesarias y suficientes para que las correspondencias de demanda de los individuos sean no vacías.

En lo que sigue se hará uso de algunos conceptos y resultados del análisis convexo, por lo cual se ha añadido un apéndice que incluye las respectivas definiciones y referencias. En su gran mayoría, este material está basado en, o fue tomado directamente de Rockafellar (1970). En lo que respecta a la notación correspondiente, se utiliza aquí la misma que en Hammond (1983). De esta forma, $K^i(p)$ denota el cono convexo generado por $S^i(p)$, el soporte de la medida de probabilidad $\mu^i(p)$, y para un cono cualquiera C, $C^+ = \{z : \forall r \in C, rz \geq 0\}$ es el cono polar de C.

Siguiendo a Hammond (1983), se introduce ahora un supuesto adicional sobre las creencias de los individuos, a saber,

(A.12) *Para todo $i \in I$ y todo $p \in \mathbb{R}^A_+$, $intK^i(p) \neq \varnothing$, donde $intC$ denota el interior de C (en la topología usual en $\mathbb{R}^A$).*

Como se verá posteriormente, este supuesto es necesario para la existencia del equilibrio en la economía propuesta, por lo tanto, aunque asumirlo impone ciertas restricciones sobre las funciones $\mu^i : \mathbb{R}^A_+ \to M\left(\mathbb{R}^A_+\right)$ que describen las creencias de los individuos de la economía, no le resta generalidad a la prueba de la existencia. Además, como se mencionó anteriormente, bajo este supuesto es posible establecer condiciones necesarias y suficientes para la existencia de una solución al problema de maximización de los individuos, en términos de sus creencias o expectativas sobre los retornos de los activos, como en efecto se muestra en el teorema 1.

Antes de probar el teorema 1, es conveniente enunciar una proposición que será utilizada en la demostración.

Proposición 1 *Sea $K \subseteq \mathbb{R}^A$ un cono convexo cerrado y $k \in K^+$, entonces existe un $z \in K$ tal que $z \neq 0$ y $kz = 0$ si y solo si $k \in \partial K^+$, donde $\partial K^+ = clK^+ \backslash intK^+$ es la frontera de K^+ y clK^+ denota la clausura de K^+.*

Demostración Ver el apéndice. ■

Teorema 1 *Sea $p \in \mathbb{R}^A_+$ un vector de precios de los activos, si (A.12) se cumple entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *$Z^i(p) \neq \varnothing$.*

2. *Las condiciones 1 y 2 del lema 1 de Carvajal y Riascos se cumplen a los precios p*

3. $p \in intK^i(p)$

Demostración Como se mencionó anteriormente, Carvajal y Riscos (2006) demuestran que 1 implica 2. Ahora supóngase que 2 se cumple y sea $z \in K^i(p)^+$, que es un cono convexo cerrado (ver Rockafellar, 1970. Sección 14). Si $pz < 0$, la condición 1 del lema 1 implica que $\mu^i(p, \{r : rz < 0\}) > 0$, es decir, existe un $r \in S^i$ tal que $rz < 0$, luego $z \notin K^i(p)^+$, por lo tanto $pz \geq 0$ y entonces $p \in K^i(p)^{++} = \text{cl}K^i(p)$ (ver Rockafellar, 1970. Sección 14). Si, en cambio, $pz = 0$ y $z \in K^i(p)^+$, por la condición 2 del lema 1, $\mu^i(p, \{r : rz > 0\}) = 0$ es decir, para todo $r \in S^i$, $rz \leq 0$, y así, para todo $k \in K^i(p)$, $kz = 0$. Sin embargo, por el supuesto (A.12)**,** $\text{int}K^i(p)$ es no vacío, además es fácil verificar que $\text{int}K^i(p) = \text{int}\left(K^i(p)^{++}\right)$ (ver Rockafellar, 1970. Secciones 6 y 14), por lo tanto existe un $\widehat{k} \in \text{int}\left(K^i(p)^{++}\right)$ y la proposición **1** implica que para todo $z \in K^i(p)^+$, si $z \neq 0$ entonces $kz > 0$, lo cual contradice una afirmación anterior. Se concluye entonces que $z = 0$ o $pz > 0$, o más precisamente que no existe un $z \in K^i(p)^+$ tal que $z \neq 0$ y $pz = 0$, entonces, de nuevo por la proposición **1,** $p \notin \partial K^i(p)^{++}$ o, en forma equivalente, $p \notin \partial K^i(p)$ y dado que $p \in \text{cl}K^i(p)$ se sigue que $p \in \text{int}K^i(p)$, como se quería demostrar.

Para completar la prueba, supóngase ahora que $p \in \text{int}K^i(p)$, se mostrará que en tal caso el conjunto $X^i(p) \cap B^i(p)$ es compacto. Es claro que $X^i(p)$ y $B^i(p)$ son cerrados y convexos, en efecto, el primero es la intersección de los semiespacios superiores cerrados determinados por los hiperplanos de la forma $rz = -w$, para $r \in S^i(p)$, y el segundo es el semiespacio inferior cerrado determinado por el hiperplano $zp = -w_o$, por lo tanto $X^i(p) \cap B^i(p)$ también es cerrado y convexo. Ahora bien, es evidente que $0 \in X^i(p) \cap B^i(p)$, y como este conjunto es cerrado y convexo, entonces es acotado si y solo si su única dirección de recesión es 0 (Rockafellar, 1970. Teorema 8.4). Con el fin de obtener una contradicción, supóngase que $e \neq 0$ es una dirección de recesión de $X^i(p) \cap B^i(p)$, entonces, es obvio que e es una dirección de recesión de $X^i(p)$ y de $B^i(p)$, por lo tanto $zp + \lambda ep \leq -w_o$ para todo $z \in B^i(p)$ y todo $\lambda > 0$, luego $ep \leq 0$. Además, como e es una dirección de recesión de $X^i(p)$ es fácil verificar que e también es una dirección de recesión de $K^i(p)^+$, es decir, si $zk \geq 0$ para todo $k \in K^i(p)$ entonces $(z + \lambda e)k \geq 0$ para todo $\lambda > 0$, por lo cual, $ek \geq 0$ para todo $k \in K^i(p)$ y entonces $e \in K^i(p)^+$, en particular, $ep \geq 0$, porque $p \in \text{int}K^i(p)$. Luego $ep = 0$ y como $\text{int}K^i(p) = \text{int}\left(K^i(p)^{++}\right)$ la proposición **1** implica que $p \in \partial K^i(p)^{++}$ lo cual es imposible. En conclusión, $X^i(p) \cap B^i(p)$ no tiene direcciones de recesión distintas de cero, por lo tanto es acotado.

Ahora bien, como la función de utilidad V^i es continua en el conjunto compacto $X^i(p) \cap B^i(p)$, alcanza un máximo en dicho conjunto, es decir, a los precios p existe una solución al problema de maximización del agente i, luego $Z^i(p) \neq \varnothing$. ■

4. Condiciones necesarias para el equilibrio

Definición 1 $\langle z, p\rangle \in \mathbb{R}^{AI} \times \mathbb{R}_{+}^{A}$ *es un equilibrio para la economía descrita si:*

1. $z^{i} \in Z^{i}(p)$ *para todo* $i \in \mathcal{I}$

2. $\sum_{i=1}^{I} z^{i} = 0.$

Como puede observarse, estas son las propiedades estándar que definen un equilibrio. La primera requiere que, a los precios p, exista un vector de demandas, una para cada individuo de la economía, tal que todos maximizan su utilidad, y la segunda exige que tal asignación de recursos sea factible, más aún, que la demanda agregada de activos iguale la oferta agregada, la cual se asume constante e igual a cero.

Para una economía menos general que la anteriormente descrita, conformada por dos agentes cuyas creencias no dependen de los precios de los activos, con un número finito de estados de la naturaleza y mercados financieros incompletos, Carvajal y Riascos (2006) proponen una condición necesaria y suficiente para la existencia del equilibrio que denominan *compatibilidad restringida*. Su objetivo es mostrar que con mercados incompletos la equivalencia de las creencias, que es necesaria para que haya equilibrio en una economía con infinitos periodos y mercados financieros completos, como lo demuestran Araujo y Sandroni (1999), es demasiado fuerte, tanto que puede dejar de ser necesaria, es decir, puede existir el equilibrio sin que esta se cumpla. Adicionalmente, Carvajal y Riascos (2006) demuestran también que, si el mercado es suficientemente incompleto, la condición de compatibilidad restringida se cumple genéricamente en el espacio de activos financieros, aunque las creencias de los individuos no sean equivalentes.

Aunque en este trabajo no se abordará la cuestión de la completitud del mercado financiero, es conveniente señalar que el modelo propuesto contempla los dos casos relevantes. Nótese que cada punto en $\mathbb{R}_{+}^{A}$ representa una muestra distinta de los posibles retornos para cada uno de los A activos de la economía, por lo tanto, en principio podría haber tantos retornos posibles para cada activo como números reales. En tal caso, el activo i puede ser descrito como una función $\alpha_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{+}$, donde $\alpha_i(s)$ denota el retorno de este activo si ocurre el estado de la naturaleza $s \in \mathbb{R}$. Recuérdese que se supuso anteriormente que hay un continuo de estados de la naturaleza posibles, tantos como puntos en $\mathbb{R}_{+}^{A}$. Esta representación de los activos implica que el mercado financiero es incompleto porque no es posible escribir toda función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}_{+}$ como una combinación lineal de un conjunto finito dado de funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}_{+}$, en particular, $Sp(\alpha_1, ..., \alpha_A)$[7] es un subconjunto propio de $\mathbb{R}_{+}^{\mathbb{R}}$. Sin embargo, nada en el modelo impide que se restringa la atención al caso en el que los estados de la naturaleza son un subconjunto finito de $\mathbb{R}_{+}^{A}$, como lo hacen Carvajal y Riascos (2006), por lo tanto, la representación general de Hart (1974) de la estructura

[7] $Sp(\alpha_1, ..., \alpha_A) = \{k_1\alpha_1 + ... + k_A\alpha_A : k_1, ..., k_A \in \mathbb{R}\}$ es la expansión lineal de los A activos financieros.

financiera y de las expectativas de los agentes contiene, como casos particulares, mercados completos e incompletos. Hecha esta aclaración, se examinará ahora la condición de compatibilidad de la creencias propuesta por Carvajal y Riascos.

Definición 2 *Las creencias de j son compatibles de forma restringida con las de i si no existe un $z \in \mathbb{R}$ tal que $\mu^i(\{r : rz < 0\}) = 0$, $\mu^i(\{r : rz > 0\}) > 0$ y $\mu^j(\{r : r(-z) < 0\}) = 0$.*

Es claro que si existiera tal $z \in \mathbb{R}$, los individuos i y j podrían realizar una transacción consistente en comprar y vender el portafolio z, respectivamente, de la cual ninguno esperaría obtener retornos negativos. Más aún, en tal caso el agente i le asignaría una probabilidad positiva a la posibilidad de derivar una ganancia de dicha transacción, por lo cual podría estar interesado en adquirir cantidades ilimitadas del portafolio z que el individuo j le vendería, en tanto que éste sería, cuando menos, indiferente entre realizar la transacción o dejar de hacerla.

Para una economía con más de dos agentes, la compatibilidad restringida de las creencias entre pares de agentes es también necesaria para la existencia del equilibrio, pero ya no la garantiza. Es posible que un individuo no encuentre una oportunidad de arbitraje como la anteriormente descrita, si se restringe a realizar únicamente transacciones bilaterales con cualquier otro agente, pero que pueda sacar provecho ilimitado de todo el mercado, si satisface su demanda por activos con las ofertas de varios individuos simultáneamente. Por esta razón, es necesario generalizar la noción de compatibilidad de las creencias para una economía con un numero finito, pero arbitrariamente grande, de agentes.[8]

Definición 3 *A los precios $p \in \mathbb{R}^A_+$, las creencias de los agentes son compatibles de forma restringida si no existe un $z \in \mathbb{R}^{AI}$ tal que:*

1. $\sum_{j \in \mathcal{I}} z^j = 0$
2. $\mu^j\left(p, \left\{r : rz^j < 0\right\}\right) = 0$, *Para todo $j \in \mathcal{I}$.*
3. $\mu^i\left(p, \left\{r : rz^i > 0\right\}\right) > 0$, *para algún $i \in \mathcal{I}$.*

Es fácil verificar que esta condición sobre las creencias es necesaria para la existencia del equilibrio en la economía $\mathcal{E}$, como se establece a continuación.

Proposición 2 *Si $\langle z, p\rangle \in \mathbb{R}^{AI} \times \mathbb{R}^A_+$ es un equilibrio para esta economía (definición 1), entonces las creencias de los individuos son compatibles de forma restringida a los precios p.*

Demostración Este resultado es una consecuencia inmediata del lema 1 de Carvajal y Riascos (2006) y la demostración, para la economía $\mathcal{E}$, es muy semejante a la que ellos proponen. ■

[8] La condicion de compatibilidad restringida de la definición 3 me fue sugerida por Álvaro Riascos en una conversación.

La condición de compatibilidad restringida de las creencias (definición 3) es equivalente, y semejante en su formulación, a otras propuestas anteriormente en la literatura. Hart (1974), por ejemplo, establece condiciones necesarias para la existencia del equilibrio muy similares a las de la definición 3, Hammond (1983), expresa estas condiciones en términos de los soportes de las medidas de probabilidad que definen las creencias de los agentes, Page (1987) y Werner (1987), por su parte, enuncian condiciones necesarias y suficientes basadas principalmente en la no existencia de precios que permitan el arbitraje y muestran que, bajo ciertos supuestos, estas son equivalentes a las de Hart y Hammond. Estas dos últimas serán examinadas en detalle a continuación, para establecer con precisión si se aplican también para el caso de una economía en la que los individuos están interesados en el consumo en el primer periodo.

Definición 4 *A los precios $p \in \mathbb{R}_+^A$,*[9] *se cumple la condición necesaria de Hart (1974) si no existe un $z \in \mathbb{R}^{AI}$ tal que:*

(H.1) $\sum\limits_{j \in \mathcal{I}} z^j = 0$

(H.2) z^j es una dirección de recesión de $X^j(p)$ y $\widehat{S}_j^+ E_z^{+j}(p) + \widehat{S}_j^- E_z^{-j}(p) \geq 0$, para todo j.

(H.3) $\mu^i\left(p, \left\{r : rz^j = 0\right\}\right) < 1$ para algún i.

Donde $\widehat{S}_j^+ = \lim\limits_{w \to \infty} \frac{du^j}{dw}$, $\widehat{S}_j^- = \lim\limits_{w \to -\infty} \frac{du^j}{dw}$, $E_z^{+j}(p) = \int_{\{r : rz \geqslant 0\}} rz \; d\mu^j(p)$ y $E_z^{-j}(p) = \int_{\{r : rz < 0\}} rz \; d\mu^j(p)$[10]

Observación 1 *Nótese que, bajo nuestra definición de los conjuntos de portafolios factibles (3), las segunda parte de la condición (H.2) es redundante.*

En efecto, si z^j es una dirección de recesión de $X^j(p)$ entonces $z^j \in K^j(p)^+$, es decir, $rz^j \geq 0$ para todo r en el soporte de $\mu^j(p)$, por lo cual $\mu^j(p, \{r : rz < 0\}) = 0$ y, en consecuencia, $E_z^{-j}(p) = 0$. Como $\widehat{S}_j^+ \geq 0$, por que u^j es creciente, y claramente $E_z^{+j}(p) \geq 0$ entonces $\widehat{S}_j^+ E_z^{+j}(p) + \widehat{S}_j^- E_z^{-j}(p) \geq 0$.

Proposición 3 *Dado un p fijo, $z \in \mathbb{R}^{AI}$ satisface (H.1) - (H.3) si y solo si cumple las condiciones 1, 2 y 3 de la definición 3. Es decir, la condición necesaria de Hart y la condición de compatibilidad restringida son equivalentes.*

Demostración Supongamos que existe un $z \in \mathbb{R}^{AI}$ que cumple (H.1) - (H.3), como z^j es una dirección de recesión de X^j entonces $z^j \in K^{j+}$, por lo tanto,

---

[9] Hart sólo considera precios contenidos en el simplex $\Delta = \left\{ p \in \mathbb{R}_+^A : \sum\limits_{a \in \mathcal{A}} p_a = 1 \right\}$. Esta normalización es válida y conveniente, dado que los idividuos sólo se interesan por el valor esperado de su utilidad. Para el caso presente, existe implícitamente un bien de consumo, a saber, la riqueza, que tiene un precio numerario en función del cual se expresan los precios de los activos. En otras palabras, en la economía $\mathcal{E}$ los precios ya han sido normalizados implícitamente, por lo cual es importante considerar vectores de precios para los activos en todo el conjunto $\mathbb{R}_+^A$.

[10] En principio, es posible que $\widehat{S}_j^- = \infty$, y se asume que $0 \times \infty = 0$.

para todo $r \in S^j$, $rz \geq 0$, lo cual implica que $\mu^j\left(\left\{r : re^j < 0\right\}\right) = 0$. Ahora bien, por (H.3) existe un i tal que $\mu^i\left(\left\{r : re^i = 0\right\}\right) < 1$ o, en forma equivalente, existe un $r \in S^i$ tal que $rz^i \neq 0$, como $z^i \in K^{j+}$, entonces $rz^i > 0$ y se sigue que $\mu^i\left(\left\{r : rz^i > 0\right\}\right) > 0$.

Ahora supóngase que $z \in \mathbb{R}^{AI}$ cumple 1 - 3 (de la definición 3). Por la condición 2, sabemos que $\mu^j\left(p, \left\{r : rz^j < 0\right\}\right) = 0$, para todo $j \in \mathcal{I}$, por lo tanto, para todo $r \in S^j$, $re^j \geq 0$, es decir, $e^j \in K_j^+$. Entonces, si $x \in X_j$, $r \in S_j$ y $\lambda \geq 0$, es claro que $r\left(x + \lambda e^j\right) + w_2^j \geq 0$, luego e^j es una dirección de recesión para X^j. Finalmente, por la condición 3, existe un $i \in \mathcal{I}$ para el cual $\mu^i\left(\left\{r : rz^i > 0\right\}\right) > 0$, en particular, $\mu_i\left(\left\{r : rz^i = 0\right\}\right) < 1$. ∎

Hammond (1982) introduce otra condición sobre los soportes de las expectativas, que luego Werner(1987) interpreta como una condición de no arbitraje en un modelo más general que incluye activos y bienes. Además, Hammond demuestra que, bajo el supuesto (A.12), ésta es equivalente a la condición necesaria de Hart (definición 4).

Definición 5 *Se dice que los agentes de la economía tienen expectativas traslapadas (overlapping expectations) en p si $\bigcap_{j \in \mathcal{I}} intK^j(p) \neq \varnothing$.*

Proposición 4 *Bajo el supuesto (A.12), los agentes tienen expectativas traslapadas en p si y solo si la economía satisface la condición necesaria de Hart.*

Demostración Esta proposición es sencillamente el teorema 1 de Hammond(1982) ∎

Proposición 5 *Bajo el supuesto (A.12), los agentes tienen expectativas traslapadas en p si y solo si éstas son compatibles en forma restringida.*

Demostración Esta equivalencia es una consecuencia inmediata de las proposiciones 3 y 4. ∎

Proposición 6 *La condición de expectativas traslapadas es necesaria para la existencia del equilibrio en la economía $\mathcal{E}$.*

Demostración Lo anterior se sigue directamente de las proposiciones 5 y 2. ∎

Ahora bien, como lo señala Hammond(1983), siguiendo a Green (1973), una condición necesaria más fuerte es que $p \in \bigcap_{j \in \mathcal{I}} \text{int}K^j(p)$. La afirmación de Hammond se aplica, sin embargo, a una economía en la que los agentes no derivan utilidad de su riqueza en el primer periodo, pues éste es precisamente el caso de su interés. A pesar de ello, como se mencionó anteriormente, el teorema 1 implica que esta condición también es necesaria para la existencia del equilibrio en la economía $\mathcal{E}$.

Corolario 1 *Dado el supuesto (A.12), si $p \in \mathbb{R}_+^A$ es un vector de precios de equilibrio para la economía $\mathcal{E}$, entonces $p \in \bigcap_{j \in \mathcal{I}} intK^j(p)$.*

Demostración Basta con observar que si $p \in \mathbb{R}_+^A$ es un vector de precios de equilibrio para la economía $\mathcal{E}$ entonces, por la definición de equilibrio, $Z^j(p) \neq \varnothing$ para todo $j \in \mathcal{I}$ y de esta manera el teorema 1 implica que $p \in \bigcap_{j \in \mathcal{I}} \text{int} K^j(p)$. ■

Hammond demuestra también que la condición de expectativas traslapadas es suficiente para la existencia del equilibrio en la economía de intercambio de valores propuesta por Hart(1973). En efecto, el teorema 2 de Hammond (1984) establece que bajo los supuestos (A.1), (A.2), (A.4) y (A.6) de Hart y sus propios (A.10) y (A.11), si $\bigcap_{j \in \mathcal{I}} \text{int} K^j(p) \neq \varnothing$ para todo p, entonces existe el equilibrio. En la siguiente sección se mostrará por medio de un ejemplo que en una economía idéntica a la de Hart, pero en la que los individuos valoran también el consumo en el primer periodo, las hipótesis del teorema 2 de Hammond (1984), en particular la condición de expectativas traslapadas, no garantizan que exista un equilibrio. Es importante anotar que Page (1987) también propone un ejemplo en el que muestra que la condición de expectativas traslapadas no es suficiente para que se de el equilibrio (¡En el modelo de Hart (1974)!), sin embargo, en su ejemplo no se cumple el supuesto (A.10) que es parte de la hipótesis del teorema.

5. Ejemplo

Supóngase una economía conformada por dos agentes, $\mathcal{I} = \{1, 2\}$, y un mercado de dos activos. En el primer periodo los dos individuos reciben una dotación inicial de riqueza positiva e igual a w_1 y se abren mercados para dos activos financieros cuyos retornos se pagan en el segundo periodo. El activo 1 es libre de riesgo y ofrece, con certeza, un retorno igual a 1, el activo 2, en cambio, ofrece un retorno riesgoso (contingente al estado de la naturaleza futuro) y los agentes se forman distintas expectativas sobre el mismo con base en el precio al que éste se transa en el mercado. Más específicamente, si p_2 es el precio del activo 2, el individuo 1 le asigna una probabilidad de $\frac{1}{2}$ al hecho de que éste ofrezca un retorno de $\frac{1}{2}p_2 + \varepsilon$, para $\varepsilon > 0$, y considera igualmente probable que dicho retorno sea de $\frac{1}{2}p_2 + 0{,}5\varepsilon$. Por su parte, el individuo 2 cree que el retorno de este activo puede ser $\frac{1}{2}p_2 + 0{,}6\varepsilon$ o $\frac{1}{2}p_2$, y le asigna la misma probabilidad subjetiva a estos dos eventos. Como puede observarse, la anterior descripción define exhaustivamente dos funciones μ^1 y μ^2 de $\mathbb{R}_+^2$ en $M\left(\mathbb{R}_+^2\right)$. Más aún, las creencias que estas funciones representan satisfacen el supuesto de expectativas traslapadas para todo $p \in \mathbb{R}_+^2$, como se ve claramente en la figura 1.[11]

Los conjuntos de presupuesto tienen la forma habitual, a saber, $B^1(p) = B^2(p) = \left\{z \in \mathbb{R}^2 : w_1 - pz \geq 0\right\}$ y los conjuntos de portafolios factibles son tales que se impide a los individuos planear caer en bancarrota en los estados de la naturaleza a los que les asignan una probabilidad positiva, formalmente, $X^i(p) = \left\{z \in \mathbb{R}^2 : \forall r \in S^i(p), w_2 + rz \geq 0\right\}$, para todo $i \in \mathcal{I}$, y se supone además que $w_1 > w_2 > 0$.

La función de utilidad por riqueza de cada individuo es lineal, más aún,

[11] Tanto en la figura 1 como en el resto del ejemplo $C^i(p) = \text{int} K^i(p)$.

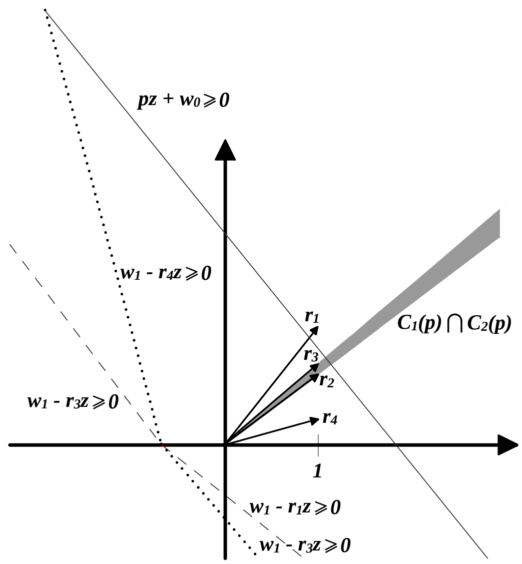

Figura 1: Figura 1

$u^1(w) = u^2(w) = w$ y la utilidad de los individuos es la suma de su utilidad por riqueza en el primer periodo y el valor esperado de su utilidad en el segundo periodo. De esta manera,

$$V^1(p,z) = w_0 - p_1 z_1 - p_2 z_2 + \frac{1}{2}\left(z_1 + \left(\frac{1}{2}p_2 + \varepsilon\right) z_2\right) + \frac{1}{2}\left(z_1 + \left(\frac{1}{2}p_2 + 0{,}5\varepsilon\right) z_2\right) \text{ y}$$

$$V^2(p,z) = w_0 - p_1 z_1 - p_2 z_2 + \frac{1}{2}\left(z_1 + \left(\frac{1}{2}p_2 + 0{,}6\varepsilon\right) z_2\right) + \frac{1}{2}\left(z_1 + \frac{1}{2}p_2 z_2\right)$$

o, rescritas de otra forma,

$$V^1(p,z) = w_0 + (1 - p_1) z_1 + \left(0{,}75\varepsilon - \frac{1}{2}p_2\right) z_2 \text{ y}$$

$$V^2(p,z) = w_0 + (1 - p_1) z_1 + \left(0{,}3\varepsilon - \frac{1}{2}p_2\right) z_2$$

Nótese que esta economía es un caso particular de la economía $\mathcal{E}$ y también que satisface todas las hipótesis del teorema 2 de Hammond(1984). En efecto, dado que las funciones de utilidad son lineales satisfacen los supuestos (A.1) y (A.2). Intuitivamente, es claro que las funciones μ^1 y μ^2 satisfacen el supuesto (A.4), ya que las medidas de probabilidad $\mu^1(p)$ y $\mu^2(p)$ cambian continuamente ante cambios en p.[12] Dado que los conjuntos de portafolios factibles tienen la forma general de la expresión (3) entonces, como lo señala Hammond, éstos cumplen los supuestos (A.6) de Hart (1974) y (A.10) y (A.11) de Hammond (1983). Por último, es claro que los dos agentes de esta economía tienen expectativas traslapadas, como se muestra en la figura 1. En resumen, la única diferencia relevante entre esta economía y la que se considera Hammond (1983) es que en ésta el consumo en el primer periodo genera utilidad.

Ahora se demostrará por contradicción que no existe un equilibrio para esta economía. Supóngase entonces que $p \in \mathbb{R}^2_+$ es un vector de precios de equilibrio, por el corolario 1, esto implica que $p \in C_1(p) \cap C_2(p)$ y, para la economía que aquí nos concierne, esta condición es equivalente a:

$$\frac{p_2}{2} + 0{,}5\varepsilon < \frac{p_2}{p_1} < \frac{p_2}{2} + 0{,}6\varepsilon \tag{4}$$

Ahora se considerarán por separado dos casos. Primero, si $0 < p_1 < 1$, entonces es claro que V^1 y V^2 son estrictamente crecientes en z_1 y, por lo tanto, la asignación de equilibrio correspondiente debe satisfacer la restricción de presupuesto $w_1 - pz \geq 0$, con igualdad, para los dos agentes. En efecto, como los elementos de los soportes de las medidas de probabilidad $\mu^1(p)$ y $\mu^2(p)$ son positivos, $(1,0)$ es una dirección de recesión de $X^i(p)$, por lo tanto, si $z \in X^i(p)$, pero $w_1 - pz > 0$, existe un $\lambda > 0$ tal que $\widehat{z} = z + (1,0)\lambda \in X_i(p)$ y $w_1 - p\widehat{z} = w_1 - pz - \lambda p_1 = 0$. Claramente $V^1(p, \widehat{z}) > V^1(p, z)$, luego z no puede ser una asignación de equilibrio. Resumiendo, si z^1 y z^2 fueran las asignaciones de equilibrio con $p_1 < 1$, entonces $w_1 - pz^1 = w_1 - pz^2 = 0$, y como $w_1 > 0$, se deduce que $z^1 + z^2 \neq 0$, es decir, z^1 y z^2 no pueden ser asignaciones de equilibrio, por lo tanto $p_1 \geq 1$.

Ahora bien, si $p_1 \geq 1$, se mostrará inicialmente que las demandas por activos que maximizan la utilidad de los individuos de esta economía se encuentran en la frontera de sus conjuntos de portafolios factibles. En el caso que aquí nos concierne, cada uno de estos conjuntos está determinado por dos desigualdades lineales, como se observa en la figura 1, a saber,

$$X_1(p) = \left\{ z \in \mathbb{R}^2 : z_1 + \left(\frac{p_2}{2} + 0{,}5\varepsilon\right) z_2 \geq -w_2 \text{ y } z_1 + \left(\frac{p_2}{2} + \varepsilon\right) z_2 \geq -w_2 \right\} \text{ y}$$

$$X_2(p) = \left\{ z \in \mathbb{R}^2 : z_1 + \frac{p_2}{2} z_2 \geq -w_2 \text{ y } z_1 + \left(\frac{p_2}{2} + 0{,}6\varepsilon\right) z_2 \geq -w_2 \right\}.$$

[12] Formalmente, sea (p^n) una sucesión en $\mathbb{R}^2_+$ tal que $p^n \to p$ y $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2_+)$, entonces $\mu^1(p^n, B) = \frac{1}{2}\left(\chi_B\left(1, \frac{1}{2}p^n + \varepsilon\right) + \chi_B\left(1, \frac{1}{2}p^n + 0{,}5\varepsilon\right)\right)$, donde $\chi_B : \mathbb{R}^2_+ \to \{0,1\}$ es la función característica de $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m_+)$. Ahora bien, si B es tal que $\mu^1(p, \partial B) = 0$ entonces $\left(1, \frac{1}{2}p + \varepsilon\right) \in \operatorname{int} B$ o $\left(1, \frac{1}{2}p + \varepsilon\right) \notin \operatorname{cl} B$ y lo mismo se cumple para $\left(1, \frac{1}{2}p + 0{,}5\varepsilon\right)$, en cualquiera de los cuatro casos estos dos puntos pertenecen a conjuntos abiertos contenidos en B o en B^c, por lo tanto $\mu^1(p^n, B) \to \mu^1(p, B)$ y, por el teorema de Pormateau (Ver, por ejemplo, Aliprantis y Border, 1994. Teorema 12.3) $\mu^1(p^n)$ converge débilmente a $\mu^1(p)$. Con un argumento muy similar se puede mostrar también que μ^2 es continua en la topología de convergencia débil de medidas de probabilidad.

Si $p_1 \geq 1$, entonces para cada individuo una de estas desigualdades se satisface con igualdad, más específicamente, si $z^1 \in Z^1(p)$ y $z^2 \in Z^2(p)$ entonces, como se demostrará en seguida:

$$z_1^1 + \left(\frac{p_2}{2} + 0{,}5\varepsilon\right) z_2^1 = -w_2 \text{ y} \tag{5a}$$

$$z_1^2 + \left(\frac{p_2}{2} + 0{,}6\varepsilon\right) z_2^2 = -w_2 \tag{5b}$$

Supóngase entonces que $z^1 \in X^1(p) \cap B^1(p)$ pero que $z_1^1 + \left(\frac{p_2}{2} + 0{,}5\varepsilon\right) z_2^1 > -w_2$. Claramente, existe un $\delta > 0$ tal que $z_1^1 - \left(\frac{1}{2}p_2 + \varepsilon\right)\delta + \left(\frac{p_2}{2} + 0{,}5\varepsilon\right)\left(z_2^1 + \delta\right) = z_1^1 + \left(\frac{p_2}{2} + 0{,}5\varepsilon\right) z_2^1 - 0{,}5\varepsilon\delta = -w_2$. Sea $\left(\widehat{z}_1^1, \widehat{z}_2^1\right) = \left(z_1^1 - \left(\frac{1}{2}p_2 + \varepsilon\right)\delta, z_2^1 + \delta\right)$, entonces:

$$V^1\left(p, \widehat{z}^1\right) = w_0 + (1 - p_1)\left(z_1^1 - \left(\frac{1}{2}p_2 + \varepsilon\right)\delta\right) + \left(0{,}75\varepsilon - \frac{1}{2}p_2\right)\left(z_2^1 + \delta\right)$$

$$= V^1\left(p, z^1\right) + \left(p_1p_2 + \left(2p_1 - \frac{1}{2}\right)\varepsilon - 2p_2\right)\frac{1}{2}\delta$$

Por (4), en equilibrio se cumple que $2p_2 < p_1p_2 + 1{,}2p_1\varepsilon$, y como $p_1 \geq 1$, se sigue que $p_1p_2 + \left(2p_1 - \frac{1}{2}\right)\varepsilon \geq p_1p_2 + \left(2p_1 - \frac{1}{2}p_1\right)\varepsilon = p_1p_2 + 1{,}5p_1\varepsilon > 2p_2$. Así, $p_1p_2 + \left(2p_1 - \frac{1}{2}\right)\varepsilon - 2p_2 > 0$ y, por lo tanto, $V^1\left(p, \widehat{z}^1\right) > V^1\left(p, z^1\right)$. Además, se puede verificar fácilmente que $\widehat{z}_1^1 + \left(\frac{p_2}{2} + \varepsilon\right)\widehat{z}_2^1 \geq -w_2$ y $w_1 - p\widehat{z}^1 \geq 0$ por lo cual, $\widehat{z}^1 \in X^1(p) \cap B^1(p)$, a partir de lo cual se concluye que $z^1 \notin Z^1(p)$.

Utilizando un argumento muy similar, puede mostrarse que si $z^2 \in X^2(p) \cap B^2(p)$ pero $z_1^2 + \left(\frac{p_2}{2} + 0{,}6\varepsilon\right) z_2^2 > -w_2$, entonces existe un $\delta > 0$ tal que $\widehat{z}^2 = \left(z_1^2 + \delta\frac{p_2}{2}, z_2^2 - \delta\right) \in X^2(p) \cap B^2(p)$ y $V^2\left(p, \widehat{z}^2\right) > V^2\left(p, z^2\right)$, por lo tanto, $z^2 \notin Z^2(p)$.

En resumen, si p es un precio de equilibrio con $p_1 \geq 1$ y z^1, z^2 son las demandas por activos correspondientes, entonces éstas satisfacen las ecuaciones (5a) y (5b), respectivamente. Sin embargo, como se mostrará a continuación, si z^1, z^2 son portafolios de activos arbitrarios en $\mathbb{R}^2$ que satisfacen dichas ecuaciones, $z^1 + z^2 \neq 0$, es decir, éstas no pueden ser asignaciones de equilibrio.

Como se puede ver claramente en la figura 1, el mayor valor que puede tomar z_2^1 corresponde a la intersección entre la restricción de presupuesto y (5a). De manera similar, el mínimo para z_2^2 dentro del conjunto de portafolios factibles se da en la intersección entre la recta $p_1z_1 + p_2z_2 = w_1$ y (5b). Es decir, si $z^1 \in X^1(p)$ y $z^2 \in X^2(p)$, entonces $z_2^1 \leq \frac{w_1 + p_1w_2}{p_2 - \frac{p_1p_2}{2} - 0{,}5p_1\varepsilon}$ y $z_2^2 \geq \frac{w_1 + p_1w_2}{p_2 - \frac{p_1p_2}{2} - 0{,}6p_1\varepsilon}$. Adicionalmente, si $z^1 + z^2 = 0$ entonces $z_2^2 = -z_2^1$, por lo cual $-\frac{w_1 + p_1w_2}{p_2 - \frac{p_1p_2}{2} - 0{,}6p_1\varepsilon} \leq z_2^1 \leq \frac{w_1 + p_1w_2}{p_2 - \frac{p_1p_2}{2} - 0{,}5p_1\varepsilon}$, y además se cumplen (5a) y (5b). Así, $z_1^1 + \left(\frac{p_2}{2} + 0{,}5\varepsilon\right) z_2^1 = -w_2$ y $-z_1^1 + \left(\frac{p_2}{2} + 0{,}6\varepsilon\right)\left(-z_2^1\right) = -w_2$, lo cual implica que $z_2^1 = \frac{2w_2}{0{,}1\varepsilon}$. De lo anterior, se deduce que una condición necesaria para que exista un equilibrio en esta economía es que para algún vector de precios $p \in \mathbb{R}_+^2$, dado $p_1 \geq 1$ fijo, se cumpla la siguiente desigualdad:

$$-\frac{w_1+p_1w_2}{p_2-\frac{p_1p_2}{2}-0{,}6p_1\varepsilon}\leq\frac{2w_1}{0{,}1\varepsilon}\leq\frac{w_1+p_1w_2}{p_2-\frac{p_1p_2}{2}-0{,}5p_1\varepsilon}$$

o, en forma equivalente,

$$-\frac{1}{p_2-\frac{p_1p_2}{2}-0{,}6p_1\varepsilon}\leq\frac{2w_1}{0{,}1\varepsilon\,(w_1+p_1w_2)}\leq\frac{1}{p_2-\frac{p_1p_2}{2}-0{,}5p_1\varepsilon}\qquad(6)$$

La figura 2 ilustra la situación previamente descrita para el caso en que $p_1=1{,}5$, $w_1=2$, $w_2=1$ y $\varepsilon=1$. Las curvas sólida y a trozos representan los distintos valores que toman los términos del lado izquierdo y derecho de la desigualdad (6), respectivamente, para distintos valores de p_2, y la recta horizontal el valor del término del centro. Las rectas verticales determinan el rango de valores para los cuales p_2 satisface la condición (4), dado el valor de p_1. Es claro entonces que con estos valores para p_1, ε y las dotaciones iniciales, no existe un p_2 de equilibrio para el que se cumpla la desigualdad (6). Ahora se demostrará que el resultado obtenido no depende de la elección de un valor particular para p_1.

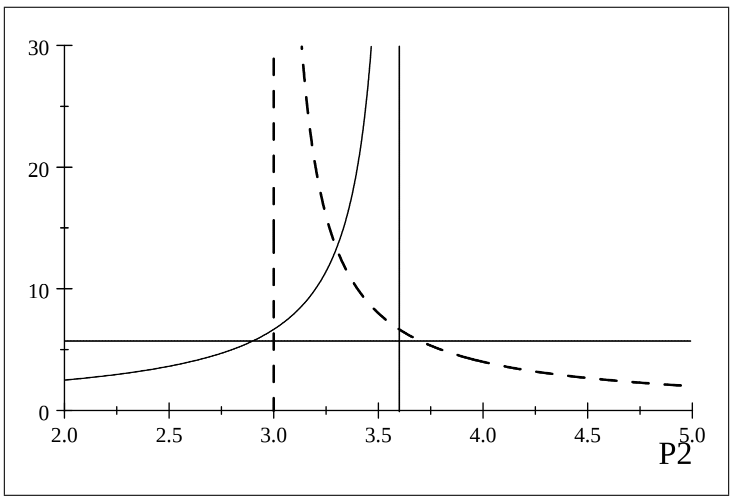

Figura 2

Considérese un valor fijo para $p_1\geq1$, se puede verificar fácilmente, como lo ilustra la figura 2, que los términos $-\frac{1}{p_2-\frac{p_1p_2}{2}-0{,}6p_1\varepsilon}$ y $\frac{1}{p_2-\frac{p_1p_2}{2}-0{,}5p_1\varepsilon}$ son creciente y decreciente en p_2, respectivamente, en el intervalo $\frac{p_2p_1}{2}+0{,}5p_1\varepsilon<p_2<\frac{p_1p_2}{2}+0{,}6p_1\varepsilon$.[13] Más aún, existe un valor de p_2 en este intervalo para el cuál los dos términos toman el mismo valor, a saber $p_2^*=\frac{1{,}1p_1\varepsilon}{2-p_1}$, por lo tanto, la desigualdad (6) sólo puede cumplirse en este intervalo si $\frac{p_2p_1}{2}+0{,}5p_1\varepsilon<p_2\leq p_2^*$, es decir, si $\frac{2p_1}{2-p_1}0{,}5\varepsilon<p_2\leq\frac{1{,}1p_1\varepsilon}{2-p_1}$. Ahora bien, si $p_2=\frac{2p_1}{2-p_1}0{,}5\varepsilon$ entonces $-\frac{1}{\frac{p_2}{p_1}-\frac{p_2}{2}-0{,}6\varepsilon}=\frac{1}{0{,}1\varepsilon}$, sin embargo, si $w_0>w_1$, como se supuso desde

[13] Por la condición (4), por fuera de este intervalo no existe el equilibrio.

un comienzo, es claro que $\frac{2w_1}{(0{,}1\varepsilon)(w_0+p_1w_1)} < \frac{1}{0{,}1\varepsilon}$ y para cualquier otro valor de p_2 en $\frac{2p_1}{2-p_1}0{,}5\varepsilon < p_2 \leq \frac{1{,}1p_1\varepsilon}{2-p_1}$, se tiene que $\frac{2w_1}{(0{,}1\varepsilon)(w_0+p_1w_1)} < \frac{1}{0{,}1\varepsilon} < -\frac{1}{\frac{p_2}{p_1}-\frac{p_2}{2}-0{,}6\varepsilon}$, con lo cual se concluye que no existe un p_2 de equilibrio para el que (6) se cumpla.

Tras haber considerado los dos casos $0 < p_1 < 1$ y $p_1 \geq 1$ se concluye que no existe un vector de precios de equilibrio para esta economía[14], a pesar de que, para todo $p \in \mathbb{R}^2_+$, se cumple la condición de expectativas traslapadas.

Es importante anotar que Hart (1974) considera un supuesto que no ha sido tenido en cuenta hasta ahora en este artículo, de hecho, fue remplazado por uno mucho más débil. El supuesto (A.3) de Hart establece que existe un conjunto acotado C en $\mathbb{R}^A_+$ tal que $\mu^i(p, C) = 1$ para todo $p \in \mathbb{R}^A_+$ y todo $i \in \mathcal{I}$. Es claro que éste no se cumple en el ejemplo propuesto, en efecto, los conjuntos $\bigcup\limits_{p \in \mathbb{R}^A_+} S^i(p)$ no son acotados. Aunque Hammond (1983) no exige que se cumpla el supuesto (A.3) en su demostración de la existencia del equilibrio (teorema 2) es interesante preguntarse qué ocurre en la economía $\mathcal{E}$ si se impone esta condición. En la sección 6 se demostrará que bajo un supuesto aún más fuerte, a saber, que las creencias de los agentes no dependen de los activos, caso en el cuál se cumple trivialmente la condición (A.3), existe el equilibrio en el mercado financiero.

6. Condiciones suficientes para la existencia del equilibrio

Como lo señala Hart (1974), para el caso en que las creencias de los individuos sobre los retornos futuros no dependen de los precios de los activos, las condiciones necesarias enunciadas en la definición 4 son también suficientes para que exista el equilibrio. Esta afirmación es igualmente válida para la economía $\mathcal{E}$, aunque ésta difiera de la propuesta por Hart en que aquí se considera que los agentes derivan utilidad del consumo en el primer periodo. Sin embargo, la demostración de la existencia del equilibrio que propone Hart (1974) usando el supuesto (A.3), que es más débil que el de expectativas constantes en los precios, no es aplicable a la economía $\mathcal{E}$. La razón es que en esta demostración, Hart (1974) utiliza un resultado, a saber, el lema 1, que no se cumple cuando los agentes valoran el consumo en el primer periodo.

El mencionado lema 1 de Hart establece que, bajo los supuestos (A.1) - (A.3), si $p \in \mathbb{R}^A_+$ y $z, e \in \mathbb{R}^A$, entonces $\widehat{V}^k(p, z + \lambda e) \geq \widehat{V}^k(p, z)$, para todo $\lambda \geq 0$, si y solo si

$$\widehat{S}^+_k E^{+k}_e(p) + \widehat{S}^-_k E^{-k}_e(p) \geq 0. \text{(Véase la definición 4)} \tag{7}$$

. La función de utilidad $\widehat{V}^k$ difiere de la que se propone aquí precisamente en que no incluye el término $u^k(w - pz)$ que representa la utilidad derivada

[14] Para el caso en que $p_1 = 0$, la no existencia del equilibrio se deduce trivialmente. En efecto, $Z_1(0, p_2) = Z_2(0, p_2) = \varnothing$.

del consumo en el primer periodo. Si se incluye este término y los conjuntos de portafolios factibles tienen la forma de la expresión (3), puede ocurrir fácilmente que (7) se satisfaga y aún así exista un $\lambda > 0$ tal que $V^k(p, x + \lambda e) < V^k(p, x)$.

En efecto, como se mencionó anteriormente, en la economía $\mathcal{E}$ la desigualdad 7 se cumple trivialmente si e es una dirección de recesión de $X^k(p)$ o, en forma equivalente, si $e \in K^k(p)^+$, y en tal caso ésta es independiente del valor que tomen los límites $\lim\limits_{w \to -\infty} \frac{du^k}{dw}$ y $\lim\limits_{w \to \infty} \frac{du^k}{dw}$ que, a su vez, son una medida de la concavidad de la función u^k y, por lo tanto, del grado de aversión al riesgo del agente k. En términos generales, lo que se pretende señalar aquí es que la concavidad de la función u^k puede ser irrelevante para determinar si se cumple o no (7).

Supóngase, por ejemplo, que

$$V^k(p, z) = -\exp(-(w - pz)) - \exp(-(w + 0{,}25 z_1 + 0{,}25 z_2))$$

y sea $e = (1, 1)$. Es obvio que e es una dirección de recesión de X^k, sin embargo, $V^k(p, 0) = -2\exp(-w)$ y $V^k(p, 0 + \lambda e) = -\exp(-(w - p_1\lambda - p_2\lambda)) - \exp(-(w + 0{,}5\lambda))$. Claramente, existe algún $\widehat{\lambda} > 0$ y un vector de precios p tal que $V^k(p, 0 + \lambda e) < V^k(p, 0)$.

Este ejemplo justifica entonces la necesidad de proponer una demostración de la existencia del equilibrio en la economía $\mathcal{E}$, como la que aparece en la siguiente sección, incluso a pesar de que los supuestos bajo los cuales se establece aquí dicho resultado sean más fuertes que las condiciones exigidas por Hart (1974).

Por último, se puede anotar también que la equivalencia que plantea Page (1986) entre la condición de no arbitraje que el mismo propone, la condición necesaria de Hart (1974) y la de expectativas traslapadas de Hammond (1982) se cumple para la economía descrita en el modelo de Hart (1974), pero no necesariamente para la economía $\mathcal{E}$. De hecho, las demostraciones de Page de dichas equivalencias están basadas en el lema 1 de Hart.

7. Demostración de la existencia del equilibrio

Definición 6 *Se dice que las creencias del agente i excluyen el cero si $0 \notin S^i(p)$, para todo $p \in \mathbb{R}^A_+$*

Observación 2 *Dado que el conjunto $S^i(p)$ es cerrado, se deduce inmediatamente de la definición anterior que las creencias del agente i excluyen el cero si y solo si no existe una sucesión en $S^i(p)$ que converja a cero para todo $p \in \mathbb{R}^A_+$.*

Lema 1 *Sean $S \subseteq \mathbb{R}^A_+$, $w \in \mathbb{R}_{++}$ y $X = \{x \in \mathbb{R}^A : \forall r \in S, rx + w \geq 0\}$. Si no hay una sucesión en S que converja a cero entonces existe un $v \in \mathbb{R}^A_+$ tal que $X + v \subseteq K^+$, donde K^+ es el polar del cono convexo generado por S.*

Demostración Como se mencionó anteriormente, $K^+ = \{x \in \mathbb{R}^A : \forall r \in S, rx \geq 0\}$. Con el fin de obtener una contradicción, supóngase que no existe un $v \in \mathbb{R}^A_+$ tal que $X + v \subseteq K^+$, es decir, que para todo $v \in \mathbb{R}^A_+$ existen $x^v \in X$ y $r^v \in S$ tales que $r^v(x^v+v)<0$, por lo cual, $x^v+v\notin K^+$. En particular, para todo $n\in\mathbb{N}$ positivo, existen x^n y r^n tales que $r^n(x^n+\mathbf{1}n)<0$ o, en forma equivalente, $r^n x^n < -n\sum\limits_{i=1}^{A} r_i^n$, donde $\mathbf{1}$ es un vector en $\mathbb{R}^A$ con todas sus cordenadas iguales a 1, y como $x_n\in X$ y $r_n\in S$ entonces $r_n x_n\geq -w$, por lo tanto $n\sum\limits_{i=1}^{A} r_i^n < w$. Dado que la anterior desigualdad se cumple para todo $n\in\mathbb{N}$ positivo se concluye que $\sum\limits_{i=1}^{A} r_i^n \to 0$ a medida que $n\to\infty$, y como $r^n\in\mathbb{R}_+^A$ entonces $r^n\to 0$, lo cual contradice la hipótesis de que no hay sucesiones en S que converjan a cero. ■

La demostración del teorema 2, que aparece a continuación, es una reelaboración de la prueba correspondiente de Carvajal y Riascos (2006). Sin embargo, la que se propone aquí es más general en varios aspectos, a saber, la economía $\mathcal{E}$ está conformada por más de dos agentes, el número de estados de la naturaleza es infinito y los agentes pueden asignar probabilidades positivas a estados en los que algunos activos tiene retornos iguales a cero. La estrategia de la demostración es estándar, primero se construye una sucesión de economías acotadas para las cuales existe el equilibrio. Luego, para demostrar la existencia de estos equilibrios, se define convenientemente una correspondencia a la que pueda aplicarse un teorema de punto fijo, en este caso el de Kakutani. Finalmente, se argumenta que a partir de cierto punto en la sucesión de economías acotadas el equilibrio reside en el interior de la mismas y entonces es también un equilibrio de la economía no acotada. Hart (1974) y Page (1987), entre muchos otros, usan estrategias de demostración muy similares.

Teorema 2 *Supóngase que las creencias de todos los agentes no dependen de los precios de los activos, excluyen el cero y son compatibles en forma restringida, entonces existe el equilibrio competitivo.*[15]

Demostración Sean $\mathbf{P}=\left\{\mathbf{p}=(p_0,p)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+^A:\sum_{a=0}^{A}p_a=1\right\}$ y $n\in\mathbb{N}$ fijo.

Para cada $k\in\mathcal{I}$, se define la correspondencia de presupuesto truncada $\mathbf{B}_n^k:\mathbf{P}\rightrightarrows\mathbb{R}^{A+1}$, así:

$$\mathbf{B}_n^k(\mathbf{p})=\left\{\mathbf{z}=(z_0,z)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^A:\begin{array}{c}p_0\left(w_0^k-z_0\right)-pz\geq 0\\ \forall r\in S^k, w^k+rz\geq 0\\ 0\leq z_0\leq(n+1)\,w_0^k\\ \forall a\in\mathcal{A}, -n\leq z_a\leq n\end{array}\right\}$$

Es fácil verificar que esta correspondencia es de valores no vacíos, compactos y convexos, y hemicontinua superior. Tómense $n\in\mathbb{N}$, $k\in\mathcal{I}$ y $\mathbf{p}\in\mathbf{P}$ fijos, es claro que, $\mathbf{z}=(0,\mathbf{0})\in\mathbf{B}_n^k(\mathbf{p})$, luego $\mathbf{B}_n^k(\mathbf{p})\neq\varnothing$. Ahora, sean $\mathbf{B}_1=\left\{(z_0,z)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^A:p_0\left(w_0^k-z_0\right)-pz\geq 0\right\}$, $\mathbf{B}_r=\left\{(z_0,z)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^A:w^k+rz\geq 0\right\}$ y $\mathbf{B}_2=\left\{(z_0,z)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^A:0\leq z_0\leq(n+1)\,w_0^k\ \wedge\ \forall a\in\mathcal{A},-n\leq z_a\leq n\right\}$. $\mathbf{B}_1$

[15] s

es cerrado porque es la preimagen de un intervalo cerrado en $\mathbb{R}$ bajo la función continua $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^A \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(z_0, z) = p_0 z_0 + pz$. Cada $\mathbf{B}_r$ es cerrado porque es el producto de un cerrado en $\mathbb{R}^A$ (la preimagen de un cerrado bajo una función continua) con todo $\mathbb{R}$. Además es evidente que $\mathbf{B}_2$ es compacto, porque es el producto de compactos. Como $\mathbf{B}_n^k(\mathbf{p}) = \mathbf{B}_1 \cap \bigcap_{r\in\mathcal{S}^k} \mathbf{B}_r \cap \mathbf{B}_2$ es la intersección de cerrados y un compacto, se concluye que éste también es compacto. Nótese adicionalmente que, $\mathbf{B}_1$ es el semiespacio inferior cerrado determinado por un hiperplano en $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^A$, cada $\mathbf{B}_r$ es el producto de un semiespacio inferior cerrado en $\mathbb{R}^A$ y todo $\mathbb{R}$ y $\mathbf{B}_2$ es una caja en $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^A$, es decir, el producto de $A+1$ intervalos cerrados en $\mathbb{R}$. Cada uno de estos conjuntos es convexo y por lo tanto su intersección, $\mathbf{B}_n^k(\mathbf{p})$, también lo es.

Para probar la hemicontinuidad superior, se toman n y k fijos y se definen las correspondencias $\widetilde{\mathbf{B}} : \mathbf{P} \rightrightarrows \mathbb{R}^{A+1}$ y $\overline{\mathbf{B}} : \mathbf{P} \rightrightarrows \mathbb{R}^{A+1}$como:

$$\widetilde{\mathbf{B}}_n^k(\mathbf{p}) = \left\{(z_0, z) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^A : p_0\left(w_0^k - z_0\right) - pz \geq 0\right\} \text{ y}$$

$$\overline{\mathbf{B}}_n^k(\mathbf{p}) = \left\{\mathbf{z} = (z_0, z) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^A : \begin{array}{c} \forall r \in S^k, w^k + rz \geq 0 \\ 0 \leq z_0 \leq (n+1)\, w_0^k \\ \forall a \in \mathcal{A}, -n \leq z_a \leq n \end{array}\right\}$$

La *gráfica* de $\widetilde{\mathbf{B}}$ es el conjunto $\left\{(\mathbf{p},\mathbf{z}) = (p_0, p, z_0, z) \in \mathbf{P}\times\mathbb{R}^{A+1} \mid p_0\left(w_0^k - z_0\right) - pz \geq 0\right\}$. Dado que la función $g : \mathbf{P}\times\mathbb{R}^{A+1} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por medio de $g(\mathbf{p},\mathbf{z}) = p_0\left(w_0^k - z_0\right) - pz$ es continua, se sigue que la gráfica de $\widetilde{\mathbf{B}}$, que es la preimagen del cerrado $\mathbb{R}_+$ bajo la función g, es cerrada. En otras palabras, la correspondencia $\widetilde{\mathbf{B}}$ es cerrada.

Nótese que la correspondencia $\overline{\mathbf{B}}$ es constante en $\mathbf{P}$, en efecto, para todo $\mathbf{p}\in\mathbf{P}$, $\overline{B}(\mathbf{p}) = \bigcap_{r\in\mathcal{S}^k} \mathbf{B}_r \cap \mathbf{B}_2$. Adicionalmente, la *preimagen inferior* de un conjunto $A \subset \mathbb{R}^{A+1}$ bajo la correspondencia $\overline{\mathbf{B}}$ es, por definición,el conjunto $\overline{B}^l(A) = \left\{\mathbf{p}\in\mathbf{P} \mid \overline{\mathbf{B}}(\mathbf{p}) \cap A \neq \varnothing\right\}$, por lo tanto, $\overline{B}^l(A) = \left\{\mathbf{p}\in\mathbf{P} \mid \bigcap_{r\in\mathcal{S}^k} \mathbf{B}_r \cap \mathbf{B}_2 \cap A \neq \varnothing\right\}$.
Sea F un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^{A+1}$, entonces se sigue de lo anterior que $\overline{B}^l(F) = \mathbf{P}$ o $\overline{B}^l(F) = \varnothing$, en cualquier caso $\overline{B}^l(F)$ es cerrado en $\mathbf{P}$. Por el lema 14.4 de Aliprantis y Border (1994) se concluye que la correspondencia $\overline{\mathbf{B}}$ es hemicontinua superior y es claro que ésta es de valores compactos. Finalmente, por el teorema 14.24 de Aliprantis y Border (1994) se concluye que $\mathbf{B}_n^k = \overline{\mathbf{B}} \cap \widetilde{\mathbf{B}}$ es hemicontinua superior.

$\mathbf{B}_n^k$ también es hemicontinua inferior, la demostración es idéntica a la que aparece en Carvajal y Riascos (2006), haciendo algunos cambios menores, por lo cual no considero relevante reproducirla aquí.

Aplicando el teorema del máximo a la correspondencia $\mathbf{B}_n^k$ y a la función continua $v^k(z_0, z) = u^k(z_0) + \int u^k(w_1 + rz)\, d\mu^k(p)$, se deduce que la correspondencia de demanda individual acotada, $\mathbf{Z}_n^k : \mathbf{P} \rightrightarrows \mathbb{R}^{A+1}$, definida como:

$$\mathbf{Z}_n^k(\mathbf{p}) = \arg \max_{\mathbf{z}\in\mathbf{B}_n^k(\mathbf{p})} u^k(z_0) + \int u^k\left(w^k + rz\right) d\mu^k(p),$$

es hemicontinua superior y de valores no vacíos y compactos. Además, esta correspondencia tiene valores convexos, como se demuestra en seguida. En efecto, la función u^k es monótona y cóncava, a su vez, $h_r(z) = w_1^k + rz$ es lineal en z, luego la función compuesta $u^k \circ h_r$ es cóncava, y como $v^k(z_0, z) = u^k(z_0) + \int u^k(w_1 + rz)\, d\mu^k(p)$ es la suma de funciones cóncavas, entonces ésta también lo es y, por lo tanto, es cuasicóncava.

Sean $\mathbf{z}^1 \in \mathbf{Z}_n^k(\mathbf{p})$ y $\mathbf{z}^2 \in \mathbf{Z}_n^k(\mathbf{p})$, de lo anterior se sigue que para $\lambda \in [0,1]$:

$$\begin{aligned}
&u^k\left(\lambda z_0^1 + (1-\lambda) z_0^2\right) + \int u^k\left(w^k + r\left(\lambda z^1 + (1-\lambda) z^2\right)\right) d\mu^k(p) \\
&\geq u^k\left(z_0^1\right) + \int u^k\left(w^k + rz^1\right) d\mu^k(p) \\
&= u^k\left(z_0^1\right) + \int u^k\left(w^k + rz^2\right) d\mu^k(p)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\lambda\mathbf{z}^1 + (1-\lambda)\mathbf{z}^2 \in \mathbf{Z}_n^k(\mathbf{p})$.

Sea $\mathbf{N}_n = \left[0, (n+1)\sum_{k=1}^{I} w_0^k\right] \times [-In, In]^A$. Se define ahora, $\mathbf{\Phi} : \mathbf{P} \times \mathbf{N}_n \rightrightarrows \mathbf{P} \times \mathbf{N}_n$ por medio de:

$$\mathbf{\Phi}(\mathbf{p}, \mathbf{z}) = \left(\arg\max_{\mathbf{p}\in\mathbf{P}} p_0\left(z_0 - \sum_{k=1}^{I} w_0^k\right) + pz\right) \times \left(\sum_{k=1}^{I} \mathbf{Z}_n^k(\mathbf{p})\right)$$

La correspondencia $\mathbf{\Phi}$ se puede representar como el producto $\mathbf{\Phi}_z \times \mathbf{\Phi}_p$, donde $\mathbf{\Phi}_z : \mathbf{N}_n \rightrightarrows \mathbf{P}$ y $\mathbf{\Phi}_p$: $\mathbf{P} \rightrightarrows \mathbf{N}_n$ se definen como:

$$\mathbf{\Phi}_z(\mathbf{z}) = \arg\max_{\mathbf{p}\in\mathbf{P}} p_0\left(z_0 - \sum_{k=1}^{I} w_0^k\right) + pz \text{ y } \mathbf{\Phi}_p(\mathbf{p}) = \sum_{k=1}^{I} \mathbf{Z}_n^k(\mathbf{p})$$

Dado que $\mathbf{P}$ es compacto y la función $\widehat{g}(\mathbf{p}, \mathbf{z}) = p_0\left(z_0 - \sum_{k=1}^{I} w_0^k\right) - pz$ es continua, el teorema del máximo implica que $\mathbf{\Phi}_z$ es hemicontinua superior y de valores no vacíos y compactos. Por su parte $\mathbf{\Phi}_p$ es la suma finita de correspondencias hemicontinuas superiores de valores compactos y entonces, por el teorema 14.31 de Aliprantis y Border (1994), es hemicontinua superior y de valores compactos. Como el producto de correspondencias hemicontinuas de valores compactos es igualmente hemicontinua superior y de valores compactos, según el teorema 14.27 de Aliprantis y Border (1994), se sigue que $\mathbf{\Phi}$ es hemicontinua superior y de valores no vacíos y compactos.

Además, para todo $(\mathbf{p},\mathbf{z}) \in \mathbf{P} \times \mathbf{N}_n$, $\mathbf{\Phi}(\mathbf{p},\mathbf{z})$ es convexo. En efecto, para $\mathbf{z} \in \mathbf{N}_n$ fijo, la función $\widehat{g}_{\mathbf{z}}(\mathbf{p}) = p_0 \left(z_0 - \sum_{k=1}^{I} w_0^k \right) - pz$ es cóncava en $\mathbf{p}$, de lo cual se sigue que el conjunto $\mathbf{\Phi}_z(\mathbf{z})$ es convexo, por un argumento similar al que se utilizó para demostrar la convexidad del conjunto $\mathbf{Z}_n^k(\mathbf{p})$. Como la suma y el producto de convexos son convexos se concluye $\mathbf{\Phi}(\mathbf{p},\mathbf{z})$ es convexo.

Dado que $\mathbf{\Phi}$ satisface la hipótesis del teorema de punto fijo de Kakutani, entonces existe $(\mathbf{p}_n,\mathbf{z}_n) \in \mathbf{\Phi}(\mathbf{p}_n,\mathbf{z}_n)$.

Nótese que, como $\mathbf{z}_n \in \sum_{k=1}^{I} \mathbf{Z}_n^k(\mathbf{p}_n)$, $\mathbf{z}_n = \sum_{k=1}^{I} \mathbf{z}_n^k$, para $\mathbf{z}_n^k = \left(z_{n,0}^k, z_n^k\right) \in \mathbf{B}_n^k(\mathbf{p}_n)$, entonces, por la monotonicidad de las preferencias, $p_{n,0} \left(z_{n,0} - \sum_{k=1}^{I} w_0^k \right) + p_n z_n = 0$.

Ahora bien, como $\mathbf{p}_n \in \arg\max_{\mathbf{p}\in\mathbf{P}} p_0 \left(z_{n,0} - \sum_{k=1}^{I} w_0^k \right) + p z_n$, se sigue que $z_{n,0} - \sum_{k=1}^{I} w_0^k \leq 0$ y $z_n \leq 0$. Además, como $p_n > 0$, si $z_{n,a} < 0$ para algún $a \in \mathcal{A}$, entonces $p_{n,a} = 0$, de lo contrario $p_{n,0} \left(z_{n,0} - \sum_{k=1}^{I} w_0^k \right) + p_n z_n < 0$. Sea $e^a \in \mathbb{R}^A$ definido así: $e_i^a = 0$, si $i \neq a$ y $e_i^a = 1$, si $i = a$, entonces $v^k(z_0, z) < v^k(z_0, z + \lambda e^a)$ para todo $\lambda > 0$ porque, por hipótesis, $\mathrm{int} K_k$ es no vacío, luego existe al menos un $r \in S^k$ tal que $r_a > 0$. Ahora supóngase que $z_{n,a}^k < n$, entonces existe un $\lambda > 0$ suficientemente pequeño tal que $\left(z_{n,0}^k, z_n^k + \lambda e^a\right) \in \mathbf{B}_n^k(\mathbf{p}_n)$ pero esto no es posible porque $\left(z_{n,0}^k, z_n^k\right) \in \mathbf{Z}_n^k(\mathbf{p}_n)$, luego $z_{n,a}^k = n$, para todo $k \in \mathcal{I}$ y entonces $z_{n,a} = In > 0$ lo cual implica, por contradicción, que $z_n = 0$.

De manera similar, si $p_{n,0} = 0$, para todo $\mathbf{z}_n^k \in \mathbf{Z}_n^k(\mathbf{p})$, $z_0^k = (n+1) w_0^k$, entonces $z_{n,0} - \sum_{k=1}^{I} w_0^k = n \sum_{k=1}^{I} w_0^k > 0$, porque se asume que $w_0^k > 0$, lo cual contradice un resultado anterior. Esto implica que $p_{n,0} > 0$ y, por lo tanto, que $z_{n,0} - \sum_{k=1}^{I} w_0^k = 0$, dado que $p_{n,0} \left(z_{n,0} - \sum_{k=1}^{I} w_0^k \right) + p_n z_n = 0$ y $z_n = 0$.

De lo anterior se sigue que $\frac{1}{p_{n,0}} p_n z_n^k = \frac{1}{p_{n,0}} p_n \left(-\sum_{j\neq k} z_n^j \right)$ es acotado en n, porque $\frac{1}{p_{n,0}} p_n z_n^k = w_0^k - z_{n,0}^k$ y $z_{n,0}^k \geq 0$, por lo cual $-\sum_{j\neq k} w_0^j \leq \frac{1}{p_{n,0}} p_n z_n^k \leq w_0^k$, entonces $z_{n,0}^k = w_0^k - \frac{1}{p_{n,0}} p_n z_n^k$ y, en consecuencia, la sucesión es $\left(z_{n,0}^k\right)$ es acotada.

Ahora se debe mostrar que z_n^k también es acotado. Supóngase entonces que existe un $j \in \mathcal{I}$ tal que la sucesión $\left(z_n^j\right)$ es no acotada. Es claro que $z_n^j \in X^j =$

$\left\{z \in \mathbb{R}^A : \forall r \in S^j, rz + w \geq 0\right\}$ para todo n y además, por el Lema **1** existe un $v^j \in \mathbb{R}^A_+$ tal que $X_j + v^j \subseteq K^{j+}$, por lo tanto, la sucesión formada por todos los $\widehat{z}^j_n = z^j_n + v^j$ está contenida en K^{j+} y es no acotada. De manera similar, existe un $v^k \in \mathbb{R}^m_+$ para todo $k \in \mathcal{I}$ tal que $\widehat{z}^k_n = z^k_n + v^k \in K^{k+}$, para todo n.

Por hipótesis, $\bigcap\limits_{k\in\mathcal{I}} \text{int}K^k$ es no vacío y, por la observación **3** (apéndice), es claro que $K^{k+} \subseteq \left(\bigcap\limits_{k\in\mathcal{I}} \text{int}K^k\right)^+$, para todo $k \in \mathcal{I}$, además, por el teorema 6.5 de Rockafellar (1970), $\bigcap\limits_{k\in\mathcal{I}} \text{int}K^k = \text{int} \bigcap\limits_{k\in\mathcal{I}} K^k$. Así, la proposición **1** implica que, para todo $p \in \text{int}\left(\bigcap\limits_{k\in\mathcal{I}} K^k\right)^{++} = \bigcap\limits_{k\in\mathcal{I}} \text{int}K^k$ y para todo $z \in \left(\bigcap\limits_{k\in\mathcal{I}} \text{int}K^k\right)^+$ distinto de cero, $pz > 0$. Ahora bien, sea $\widehat{p} \in \bigcap\limits_{k\in\mathcal{I}} \text{int}K^k$ entonces, como $\widehat{z}^k_n \in \left(\bigcap\limits_{k\in\mathcal{I}} \text{int}K^k\right)^+$ para todo n y todo $k \in \mathcal{I}$, en particular $\widehat{z}^j_n \in \left(\bigcap\limits_{k\in\mathcal{I}} \text{int}K^k\right)^+$, entonces $\widehat{p}\widehat{z}^j_n \to \infty$ y $\widehat{p} \sum\limits_{k\in\mathcal{I}} \widehat{z}^k_n \to \infty$. Se sigue que $\widehat{p} \sum\limits_{k\in\mathcal{I}} \widehat{z}^k_n = \widehat{p} \sum\limits_{k\in\mathcal{I}} z^k_n + \widehat{p} \sum\limits_{k\in\mathcal{I}} v^k \to \infty$, por lo tanto $\widehat{p} \sum\limits_{k\in\mathcal{I}} z^k_n \to \infty$, lo cual es imposible porque, como se demostró anteriormente, $\sum\limits_{k\in\mathcal{I}} z^k_n = z_n = 0$. En conclusión, la sucesión $\left(z^k_n\right)$ es acotada para todo $k \in \mathcal{I}$.

Lo anterior implica que existe un M acotado tal que $\mathbf{z}^k_n = \left(z^k_{n,0}, z^k_n\right) \in M$ para todo n y todo $k \in \mathcal{I}$, y como la sucesión de conjuntos $(\text{int}\mathbf{N}_n)$ es creciente y no acotada, es claro que existe un $L \in \mathbb{N}$ tal que $M \subseteq \text{int}\mathbf{N}_l$ para todo $l \geq L$, por lo tanto, para todo $l \geq L$ la sucesión $\left(\mathbf{z}^k_n\right)$ está contenida en $\text{int}\mathbf{N}_l$. Ahora se demostrará, aplicando la proposición 1 de Hart (1974), que $\left\langle z_L, \frac{p_L}{p_{L,0}} \right\rangle$ es un equilibrio para la economía no acotada. Primero, recuérdese que $p_{L,0} > 0$, $z^k_{L,0} = w^k_0 - \frac{p_L}{p_{L,0}} z^k_L$ y $\sum\limits_{k\in\mathcal{I}} z^k_L = 0$, además si $\widehat{p}_L = \frac{p_L}{p_{L,0}}$, entonces $\mathbf{Z}^k_L(\mathbf{p}) = \arg \max\limits_{\mathbf{z}\in\mathbf{B}^k_L(\mathbf{p})} u^k(z_0) + \int u^k\left(w^k_1 + rz\right) d\mu^k(p) = \arg \max\limits_{\mathbf{z}\in\mathbf{B}^k_L(\mathbf{p})} V^k(\widehat{p}_L, z)$. Ahora supóngase que $z^j_L \notin Z^j(\widehat{p}_L)$ para algún $j \in \mathcal{I}$, entonces existe un $z^* \in Z^j(\widehat{p}_L)$ tal que $V^j(\widehat{p}_L, z^*) > V^j\left(\widehat{p}_L, z^j_L\right)$, como V^j es una función cóncava en su segundo argumento y $\mathbf{z}^k_L \in \text{int}N_L$, entonces existe un $\lambda \in (0,1)$ suficientemente cercano a 1 tal que, para $z^\lambda = \lambda z^j_L + (1-\lambda) z^*$ y $z^\lambda_{L,0} = w^k_0 - \widehat{p}_L z^\lambda$ se cumple que $V^j\left(\widehat{p}_L, z^\lambda\right) > V^j\left(\widehat{p}_L, z^j_L\right)$ y $\left(z^\lambda_{L,0}, z^\lambda\right) \in \mathbf{B}^j_n(\mathbf{p})$, lo cual es imposible porque $\mathbf{z}^j_n \in \mathbf{Z}^j_n(\mathbf{p})$. En conclusión, $z^k_L \in Z^k(\widehat{p}_L)$ para todo $k \in \mathcal{I}$, luego $\langle z_L, \widehat{p}_L \rangle$ es un equilibrio para la economía no acotada. ■

8. Conclusiones

Los principales resultados de este artículo pretenden enfatizar la importancia de un aspecto del modelo de intercambio de activos que no ha sido considerado con suficiente detalle en la literatura. Considerar explícitamente el valor que los individuos otorgan al consumo en el primer periodo, introduce diferencias cruciales en el modelo que modifican las condiciones bajo las cuales existe el equilibrio en la economía. Incluso en los casos en que estas condiciones coinciden, dado un conjunto de supustos adicionales, la aplicación para el caso que aquí nos concierne no es trivial y exige modificar las pruebas sustancialmente,como se destacó en las secciones 6 y 7. Más aún, el ejemplo propuesto en la sección 5, debilita la contundencia de resultados previos altamente difundidos en la literatura sobre mercados financieros, en particular, de la condición de expectativas traslapadas y sus equivalentes, al señalar detalladamente las implicaciones para el modelo de incluir la modificación propuesta para incorporar la utilidad inicial. Cuando menos, este ejemplo cumple la función de hacer explícitos otros supuestos sin los cuales no existe el equilibrio en el mercado de activos.

En lo que respecta a la demostración de la existencia del equilibrio, aunque parte de condiciones más debiles que la de Carvajal y Riascos (2006), es presumible que algunas de éstas se pueden relajar aún más. En particular, el supuesto de que las expectativas de los agentes no dependen de los precios de los activos es demasiado fuerte y, a decir verdad, poco realista. Esta es, sin duda alguna, una vía de investigación en la que aún se puede seguir desarrollando el presente trabajo. En los modelos de Hart (1974) y Green (1973) se proponen condiciones más debiles que podrían resultar adecuadas para la economía anteriormente propuesta. Intuitivamente, la existencia del equilibrio no depende únicamente de qué tan similares sean entre sí las expectativas de los agentes, como lo muestra el ejemplo expuesto en la sección 5, sino también de que éstas no se modifiquen drásticamente cuando los individuos observan cambios en los precios. Los dos modelos señalados sugieren que la existencia de vectores de retornos a los que todos los agentes les asignan probabilidades positivas, sin importar cuáles sean los precios de los activos, facilita o incluso garantiza que se dé el equilibrio. Es bastate plausible que una condición semejante, más débil que la que se asume en la demostración del teorema 2, se aplique a esta economía.

9. Apéndice

En este apéndice se incluyen las definiciones de algunos conceptos fundamentales del análisis convexo que fueron utilizados en el artículo. También se enuncian sin demostración ciertas propiedades elementales de dichos conceptos que se deducen directamente de las definiciones o que fueron tomadas directamente de Rockafellar(1970). Finalmente, se formula la prueba de la proposición 1, que se usó para demostrar los principales resultados del artículo.

Un subconjunto de $\mathbb{R}^A$ es un *cono convexo* si es cerrado bajo la suma y bajo la multiplicación por un escalar positivo.

Si es S un subconjunto arbitrario de $\mathbb{R}^A$, el *cono convexo generado por* S se denota co$S$ y es el conjunto de todas las posibles combinaciones lineales no negativas de los elementos de S. Nótese que co$S$ es la unión del menor (bajo la contenencia) cono convexo que contiene a S y el conjunto $\{0\} \subseteq \mathbb{R}^A$. En general, un cono convexo no necesariamente incluye al origen.

Definición 7 *Sea K un cono convexo no vacío en $\mathbb{R}^A$, el polar de K es el conjunto $K^+ = \left\{x \in \mathbb{R}^A : \forall k \in K, kx \geq 0\right\}$, donde kx denota el producto punto de estos dos vectores.*[16]

Se sigue inmediatamente de la definición que K^+ es un cono convexo cerrado. Además se puede verificar fácilmente que K^{++}, el polar de K^+, es igual a cl$K$, la clausura de K.

Observación 3 *Sea K_1 y K_2 dos conos convexos, K_1^+ y K_2^+ sus respectivos conos polares. Si $K_1 \subseteq K_2$ entonces $K_2^+ \subseteq K_1^+$.*

Observación 4 *Si $K = coS$ entonces $K^+ = \left\{x \in \mathbb{R}^A : \forall s \in S, sx \geq 0\right\}$*

Otra noción importante del análisis convexo es la de dirección de recesión. Si C es un conjunto convexo no vacío en $\mathbb{R}^A$ y $e \in \mathbb{R}^A$, entonces e es una *dirección de recesión* de C si y solo si $x + \lambda e \in C$, para todo $\lambda > 0$ y todo $x \in C$. El conjunto de todas las direcciones de recesión de un conjunto convexo no vacío C, se denomina *cono de recesión* de C y se denota 0^+C.

Proposición 7 *Sea C un conjunto no vacío cerrado y convexo en $\mathbb{R}^A$ y $e \in \mathbb{R}^A$. Si existe un $x \in C$ tal que $x + \lambda e \in C$, para todo $\lambda > 0$ entonces $z + \lambda e \in C$, para todo $\lambda > 0$ y todo $z \in C$, es decir, $e \in 0^+C$.*

Demostración Ver el teorema 8.3 de Rockafellar (1970). ■

Proposición 8 *Sea C el conjunto de las soluciones de un sistema arbitrario (no necesariamente finito o enumerable) de desigualdades lineales débiles, es decir,*

[16] La definición del polar de un cono convexo que se propone aquí difiere de la de Rockafellar. En términos de su definición, el conjunto K^+ es el negativo del polar de K, es decir, el polar de K multiplicado por el escalar -1. Sin embargo, se siguen cumpliendo para K^+ todas las propiedades atribuidas por Rockafellar al polar, haciendo los cambios respectivos en los signos y en el sentido de las desigualdades.

$C = \left\{ x \in \mathbb{R}^A : \forall j \in J, r_j x \geq \alpha_j \right\}$, donde J es un conjunto arbitrario de índices, $r_j \in \mathbb{R}^A$ y $\alpha_j \in \mathbb{R}$, para todo $j \in J$. El cono de recesión de C está determinado por el correspondiente sistema de desigualdades homogéneas, a saber, $0^+C = \left\{ x \in \mathbb{R}^A : \forall j \in J, r_j x \geq 0 \right\}$.

Demostración Ver Rockafellar, sección 8, p.62. ■

Proposición 1 *Sea $K \subseteq \mathbb{R}^A$ un cono convexo cerrado y $k \in K^+$, entonces existe un $z \in K$ tal que $z \neq 0$ y $kz = 0$ si y solo si $k \in \partial K^+$, donde $\partial K^+ = clK^+ \backslash intK^+$.*

Demostración Supóngase que existe un $z \in K$ tal que $z \neq 0$ y $kz = 0$, entonces existe un n tal que $z_n \neq 0$. Sea $\widehat{k}^\delta$ definido así, $\widehat{k}_i^\delta = k_i - \delta$, si $i = n$ y $z_i > 0$, $\widehat{k}_i^\delta = k_i + \delta$, si $i = n$ y $z_i < 0$ y $\widehat{k}_i^\delta = k_i$, si $i \neq n$. Claramente, $\widehat{k}^\delta z = kz \pm \delta z_i < 0$, por lo cual $\widehat{k}^\delta \notin K^+$, para todo $\delta > 0$. Lo anterior implica que $k \notin \text{int}K^+$, es decir, $k \in \partial K^+$.

Para probar la otra dirección, supóngase ahora que $k \in \partial K^+$ y que para todo $z \in K$, si $z \neq 0$ entonces $zk > 0$. Entonces, como $k \notin \text{int}K^+$, para todo $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 1$, existe un $\widehat{k}^n \in B_{\frac{1}{n}}(k) = \left\{ x \in \mathbb{R}^A : \|x - k\| < \frac{1}{n} \right\}$, tal que $\widehat{k}^n \notin K^+$, donde $\|\cdot\|$ denota la norma euclidiana en $\mathbb{R}^A$. Como $\widehat{k}^n \notin K^+$, existe un $z^n \in K$ tal que $\widehat{k}^n z^n < 0$, más aún, para todo $\lambda > 0$, $\widehat{k}^n (\lambda z^n) < 0$, por lo tanto z^n puede escogerse de tal forma que $\varepsilon \leq \|z^n\| \leq \varepsilon + 1$, donde ε es un número positivo arbitrario. Es claro que $\widehat{k}^n \to k$ y, por construcción, la sucesión (z^n) está contenida en un compacto (cerrado y acotado), por lo cual tiene una subsucesión convergente (z^{n_i}), tal que $z^{n_i} \to z$ para algún $z \in K$, dado que K es cerrado. De lo anterior se sigue que $\widehat{k}^{n_i} z^{n_i} \to kz$, lo cual es imposible porque $zk > 0$ y $\widehat{k}^{n_i} z^{n_i} < 0$ para todo i. En conclusión, si $k \in \partial K^+$, existe un $z \neq 0$ en K tal que $kz = 0$. ■

Referencias

[1] Aliprantis, C. D. and K. C. Border (1994) Infinite Dimensional Analysis: A Hitchhiker's Guide, Springer-Verlag, Berlin.

[2] Araujo, A. and A. Sandroni (1999), On the convergence to homogeneous beliefs when

markets are complete, *Econometrica*, 67: 663-672.

[3] Carvajal, A. and A. Riascos (2006), Belief Non-equivalence and Financial Trade: A Comment on a Result by Araujo and Sandroni. Documento CEDE No. 2006-27. Facultad de Economía, Universidad de los Andes.

[4] Cohn, D. L. (1980), Measure Theory, Birkhäuser, Boston.

[5] Green, J.R. (1973) Temporary general equilibrium in a sequential trading model with spot and futures transactions, *Econometrica* 41: 1103-24.

[6] Hammond, P. J.(1983) Overlapping expectations and Hart's condition for equilibrium in a securities model, *Journal of Economic Theory* 31: 170–175.

[7] Hart, O. (1974). On the Existence of Equilibrium in a Securities Model, *Journal of Economic Theory*, 9: 293-311.

[8] Page, F. H. (1987) On Equilibrium in Hart's Securities Exchange Model, *Journal of Economic Theory*, 9: 293–311.

[9] Rockafellar, T.(1970) Convex Analysis. Princeton University Press.

[10] Werner, J.(1987) Arbitrage and the existence of competitive equilibrium, *Econometrica*, 55: 1403–1418.