

Universidad de los Andes

Facultad de Economía



**Valoración de Opciones en el Mercado Eléctrico Colombiano:
Aproximación por Simulación Incorporando las Características Únicas
de la Evolución del Precio Spot de la Electricidad**

Asesor: Juan Benavides

Presentado por: Felipe Galeano Esguerra (200220737)

Santa Fé de Bogotá, Diciembre 9 de 2008

Contenido

1. Introducción.....	3
2. Antecedentes y Justificación.....	4
3. Objetivos.....	9
3.1. Objetivo General.....	9
3.2. Objetivos Específicos.....	9
4. Revisión de Literatura.....	9
5. Metodología.....	15
6. Serie Histórica.....	16
7. Análisis de la Serie Histórica.....	17
8. Modelo de Evolución del Precio Spot.....	24
9. Resultados.....	34
10. Conclusiones.....	37
11. Bibliografía.....	39

1. Introducción.

Este trabajo caracteriza el precio spot de la energía eléctrica en Colombia con el propósito de valorar adecuadamente instrumentos de cobertura de riesgo de precio. Se propone y estima un modelo del precio spot que refleja las siguientes propiedades de su serie de tiempo: (i) estacionalidad, (ii) reversión a la media, (iii) volatilidad cambiante en el tiempo y (iv) presencia de saltos ocasionales. En segundo término, se utiliza dicho modelo para valorar opciones mediante simulación. Para caracterizar el proceso de precios se estudia el comportamiento del precio de bolsa del MEM desde Enero 1 de 2000 hasta Julio 14 de 2006.

Las características del proceso de evolución del precio spot en Colombia contradicen drásticamente los supuestos detrás de la fórmula de Black & Scholes (B&S) para valorar opciones, razón por la cual en este trabajo se comparan las diferencias entre este método y el propuesto, y describen las principales implicaciones.

Como motivación principal para realizar este trabajo se tiene que en Colombia existe un mercado eléctrico abierto a la libre competencia en las actividades de generación y comercialización. Las características intrínsecas de la electricidad en un mercado competitivo, en el cual el precio es fijado por la interacción entre la oferta y la demanda, hacen que se presente una gran variabilidad en el precio spot. Esta variabilidad es mayor aún en el caso colombiano, debido a la gran dependencia que tiene la oferta de electricidad del ciclo hidrológico y de la ocurrencia de choques climáticos como los fenómenos de El Niño y de La Niña.

La variabilidad del precio implica un riesgo para los agentes que participan en el mercado de energía mayorista, MEM, ya que cambios drásticos en el precio pueden afectar negativamente sus flujos de caja. Por esta razón, es de vital importancia contar con instrumentos derivados de cobertura del riesgo de precio, y que sea posible determinar el precio justo a pagar por la adquisición de dichos instrumentos.

El capítulo 2 presenta los antecedentes del mercado eléctrico en Colombia y las justificaciones más relevantes que llevan al autor a considerar que la investigación en esta dirección es de vital importancia para contribuir con el desarrollo de un mercado eléctrico competitivo, eficiente, líquido y completo para Colombia.

En el capítulo 3 se expone el objetivo general y los objetivos específicos de este trabajo de tal forma que el lector pueda fácilmente encontrar la relevancia del mismo.

El capítulo 4 revisa el estado del arte en estimación de procesos de precios y los trabajos más importantes que han contribuido a la construcción y el entendimiento del comportamiento del precio spot de la electricidad en Colombia y la valoración de opciones.

El capítulo 5 describe la metodología de trabajo que se desarrolla en esta investigación. El capítulo 6 muestra la serie histórica. El capítulo 7 realiza un análisis estadístico de dicha serie. El capítulo 8 describe el modelo econométrico propuesto y la estimación de los parámetros, lo cual es un aporte innovador a la literatura sobre descripción del precio spot en el mercado eléctrico Colombiano y valoración de opciones.

En el capítulo 9 se presentan los resultados y se discuten implicaciones. El capítulo 10 concluye.

Este trabajo hace explícita la importancia del manejo del riesgo de precio en un esquema de libre competencia como lo es el mercado eléctrico colombiano. Los principales aportes de esta investigación son: 1.) encontrar una forma más sofisticada y apropiada de enfrentar la descripción del comportamiento del precio spot de la electricidad, haciendo especial énfasis en la volatilidad, y 2.) utilizar simulación para valorar el precio de opciones de electricidad y comparar las diferencias frente a métodos tradicionales de valoración de opciones como B&S.

2. Antecedentes y Justificaciones

2.1. Antecedentes

El servicio de energía eléctrica en Colombia se remonta a finales del siglo XIX como resultado de iniciativas de inversión privadas, a través de las cuales se establecieron empresas verticalmente integradas dedicadas a todas las actividades del sector. Según Ayala y Millán en [AYA, 03], la condición privada de las empresas prestadoras del servicio de electricidad fue cambiando hacia mediados del siglo XX debido a presiones políticas que argumentaban la necesidad de llevar un control y una planeación de las actividades del sector a nivel gubernamental dada la estrecha relación

entre este y el desarrollo económico, y ante la incapacidad de los agentes privados de prestar el servicio en zonas no rentables. Hasta 1990 se siguió un modelo de planeación centralizada en el cual se recurría al endeudamiento para llevar a cabo la expansión del sector mediante construcción de hidroeléctricas y redes de transmisión hasta alcanzar en ese año una cobertura del 78% de la población.

Sin embargo, a pesar de los avances logrados en el esquema público en cuanto a incremento de la cobertura, hacia 1990 el sector se encontraba sumido en una grave crisis financiera y de funcionamiento debido en su mayor parte a la incapacidad del gobierno de asumir simultáneamente el rol de empresario y de regulador. Esta falta de separación en las funciones del estado generaba incentivos inapropiados para una buena administración del sector, tanto a nivel de producción como de mecanismos de control, comprometiendo seriamente la calidad en la prestación del servicio, la capacidad de endeudamiento y el manejo eficiente de la parte operativa y financiera. En este año, el sector era responsable del 30% de la deuda externa total y del 33% del déficit del sector público no financiero [AYA, 03].

Aunque la grave crisis del sector eléctrico descrita en el párrafo anterior hace parte de las causas que llevaron a adelantar su reforma, la cual consistió en la evolución del sector hacia un mercado competitivo en las actividades sin características de monopolio natural con una función del estado limitada a las actividades de control y fijación de políticas, esta no hubiera podido adelantarse de no presentarse dos hechos definitivos en el ánimo reformista del sector. El primero y más importante es el cambio de marco legal y constitucional que proporcionó la nueva Constitución de 1991, en la cual se entregaba la responsabilidad al estado de la prestación de servicios públicos, pero permitía que estos fueran prestados por agentes privados y que hubiera libre competencia y entrada en las actividades donde fuera posible (generación y comercialización) y ayudara a mejorar el funcionamiento y la eficiencia del sector [UPME, 04]. La segunda causa fue el racionamiento de electricidad que sufrió el país durante 1991 y 1992 a causa de la escasa disponibilidad hídrica para la generación como consecuencia del fenómeno de El Niño, si se tiene en cuenta que para ese entonces la generación hidráulica representaba cerca del 80% de la capacidad instalada [AYA, 03]. La reducción en la precipitación causada por los efectos climáticos del fenómeno llevó a que el nivel de los embalses fuera insuficiente para generar la cantidad de electricidad necesaria para suplir la demanda. Lo anterior puso de manifiesto la necesidad de contar

con una oferta de electricidad más grande y mejor preparada para enfrentar choques fuertes e inesperados a la disponibilidad del recurso hídrico como el fenómeno de El Niño, para lo cual era indispensable contar con un mercado con libre entrada de agentes y señales claras y transparentes de inversión [VAS, 99].

Lo anterior llevó a la aprobación en el Congreso de la República de las leyes 142 y 143 de 1994. La primera es la llamada ley de servicios públicos domiciliarios mediante la cual se estableció un marco general para la intervención y la función del Estado en la prestación de estos servicios, mientras que la segunda es la Ley Eléctrica, la cual establece las pautas para el funcionamiento del mercado en libre competencia. Mediante esta Ley se crea además la Comisión de Regulación de Energía y Gas, CREG, que se constituiría en el organismo regulador para el sector, encargándose del diseño, reglamentación e implementación del nuevo modelo del mercado competitivo.

Como es posible observar, todas estas reformas se realizaron para afrontar una grave crisis financiera y posibles situaciones futuras de oferta limitada, y sentaron las bases del nuevo mercado eléctrico en Colombia, el cual tuvo su primer día el 20 de Julio de 1995.

2.2. Justificaciones

El diseño de un mercado competitivo y eficiente para la electricidad ha sido tema de discusión en los diferentes países que han emprendido el camino hacia la desregulación de este sector o planean hacerlo. El problema radica no solamente en que se trata de un servicio público de primera necesidad para millones de usuarios, sino en las características técnicas y físicas de este bien que lo hacen único dentro de la familia de los *commodities*.

En mercados en competencia, el precio es fijado por la interacción entre las fuerzas de oferta y demanda, razón por la cual existe siempre incertidumbre sobre su movimiento futuro. Sin embargo, esta incertidumbre no es igual para todos los productos ni todos los mercados. Características propias del proceso de producción, del proceso de fijación de precios y del comportamiento de los consumidores hacen que la variabilidad del precio sea distinta para diferentes mercados. Los *commodities* son productos particularmente volátiles ya que el único elemento de preferencia por parte de los compradores es el precio. Por lo tanto, todas las situaciones de desbalances entre

oferta y demanda se corrigen vía precio. La energía eléctrica, además de presentar las mismas características de otros *commodities*, tiene ciertas cualidades intrínsecas que hacen que el precio sea más volátil. Estas características físicas de la energía eléctrica, llamadas las cuatro verdades técnicas de la electricidad en [HS, 04], se presentan a continuación:

- La primera y más importante es que se trata de un *commodity* que no es económicamente almacenable, luego no es posible suavizar cambios inesperados en la demanda con un manejo de inventarios. Aunque se han hechos avances importantes en el desarrollo de baterías, todavía no se cuenta con tecnologías que puedan aplicarse de forma económica.
- La electricidad viaja a la velocidad de la luz. Cada vez que se demanda energía eléctrica (cuando se enciende un electrodoméstico, por ejemplo) se genera electricidad en alguna empresa generadora y viaja a la velocidad de la luz hasta el lugar donde ocurre la demanda.
- El sistema de transmisión y distribución tiene una capacidad limitada. La energía eléctrica viaja desde las unidades generadoras hasta los usuarios finales a través de un complejo sistema de redes y cables, los cuales tienen una capacidad limitada, es decir, solo soportan que fluya una cantidad dada de corriente a través de ellos. Si este límite de capacidad se viola, se pueden presentar daños graves en las líneas de transmisión, pudiendo incluso dejar a algún punto sin conexión con el resto sistema.
- La electricidad toma el camino de menor resistencia. Una vez la energía eléctrica es generada, sale a la red de transmisión y viaja a través de ella tomando el camino que tenga menos resistencia, es decir, no es posible obligarla a que viaje de un punto específico a otro.

Las anteriores características físicas de la electricidad hacen que su volatilidad sea muy alta. Esta gran volatilidad constituye un gran riesgo para los agentes que participan en el mercado, luego es de gran importancia para ellos comprender el comportamiento del precio de tal forma que puedan mitigar los riesgos de pérdida.

Lo anterior es particularmente importante para el mercado colombiano, ya que el precio de la electricidad está expuesto también a los choques al ciclo hidrológico y a la

disponibilidad de recurso hídrico en el país. Hay que tener en cuenta que cerca del 70% de la generación es realizada por hidroeléctricas. Una forma de cubrirse del riesgo de precio en mercados incompletos es mediante instrumentos derivados, cuyo valor depende de la naturaleza incierta del subyacente, que en este caso sería la energía eléctrica. Este tipo de instrumentos permiten tener certidumbre sobre el precio en el presente para transacciones que ocurrirán en el futuro.

Para que un sistema de cobertura basado en instrumentos derivados sea efectivo, es indispensable contar con un método de valoración de dichos instrumentos. A su vez, para poder llegar a un valor justo de los contratos derivados, es preciso encontrar un modelo que describa apropiadamente el proceso real de evolución del precio del subyacente. Por lo tanto, es de vital importancia tener a disposición un modelo que logre capturar el proceso de evolución del precio para que sea posible contar con un mercado eficiente de derivados que les permita a los agentes cubrir mejor sus riesgos y estabilizar sus flujos de caja.

Otro elemento que justifica el presente trabajo es la importancia que puede tener en la profundización del mercado de energía en Colombia. Un requisito importante para el buen desarrollo de un mercado en competencia es la necesidad de contar con un mercado líquido, eficiente y completo, lo cual se logra mediante el diseño de acuerdos comerciales adecuados entre los agentes [HS, 04]. Un mercado es líquido cuando se cuenta con muchos compradores y muchos vendedores que tienen fácil acceso entre ellos y acceso a información sobre el precio de mercado. Si el mercado es líquido, habrá un solo precio para el mismo producto en el mismo lugar en el mismo momento. Por ejemplo, un mercado de contratos a futuro estandarizado puede ayudar a aumentar la liquidez de un mercado, ya que provee fondos de personas que no están interesadas en la entrega física del producto, sino simplemente en invertir una suma de dinero asumiendo un riesgo. Un mercado es eficiente si los participantes son incapaces de predecir fielmente la evolución futura del precio, es decir, el precio futuro no depende de la información pasada y solamente reacciona ante nueva información. Por último, un mercado es completo cuando se cuenta con un conjunto suficiente de activos financieros que permitan a los agentes cubrirse frente a todos los riesgos. Luego, contar con las herramientas necesarias (proceso de evolución del precio y métodos de valoración de instrumentos derivados) para desarrollar un mercado de derivados tiene implicaciones de suprema importancia para migrar hacia un mercado más líquido y completo.

La actual coyuntura del sector eléctrico colombiano invita a desarrollar mecanismos adecuados de valoración de instrumentos derivados que agilicen el actual proceso de evolución y profundización del mercado, que está tratando de incorporar señales claras y transparentes de inversión en el sector con medidas como el nuevo cargo por confiabilidad.

3. Objetivos

a. Objetivo General

El objetivo principal de este trabajo es desarrollar un método adecuado de valoración de opciones de electricidad en Colombia que incorpore de manera suficientemente realista las fluctuaciones, ciclos y demás peculiaridades del comportamiento del precio spot, y comparar los resultados con métodos tradicionales de valoración como B&S. Un requisito indispensable para llegar a una forma apropiada de valoración es desarrollar un modelo econométrico que permita describir satisfactoriamente el comportamiento del precio.

b. Objetivos Específicos

(i) Modelar en una forma adecuada las peculiaridades del proceso de precio (presencia de volatilidad autorregresiva) y (ii) modelar los saltos presentes en su evolución. Para este segundo objetivo, se siguen los siguientes pasos 1.) Desarrollo de un algoritmo de filtración de los saltos de la serie histórica; 2.) Cálculo del signo asociado a cada salto mediante una matriz de probabilidades de transición; 3.) Estimación de frecuencia de ocurrencia mediante una distribución de probabilidad de número de días entre cada salto; 3) y 4.) Estimación del tamaño del salto mediante el ajuste de una función de densidad de probabilidad.

4. Revisión de la Literatura:

4.1. Modelos de Evolución del Precio Spot

A continuación se presentan algunos de los modelos matemáticos de mayor aceptación en la literatura y aplicación en la práctica que han sido desarrollados para brindar herramientas que permitan entender mejor el comportamiento del precio de la

energía eléctrica bajo un esquema de competencia. La mayoría de los modelos presentados incorporan ciertas propiedades observadas en las series históricas de precios spot de commodities, especialmente para la electricidad. Estas propiedades incluyen la presencia de efectos cíclicos como respuesta a fluctuaciones en la oferta y la demanda ocasionadas por cambios climáticos, una marcada tendencia a revertir a un nivel medio de largo plazo muy cercano a los costos de producción y el nivel de demanda, y la presencia de saltos ocasionales y abruptos como consecuencia de choques fuertes e inesperados.

4.1.1. Procesos de Reversión a la Media.

Este tipo de procesos pueden verse como una variación de un proceso de caminata aleatoria en la cual cambios sucesivos en el precio no son totalmente independientes, sino que pueden estar relacionados. Aunque los precios están sujetos a fluctuaciones estocásticas, retornan a un nivel medio de largo plazo a cierta velocidad de reversión.

Matemáticamente, el proceso del cambio del precio puede expresarse de la siguiente forma:

$$S_{t+1} - S_t = \alpha (S^* - S_t) + \sigma \varepsilon_t$$

donde S es el precio en un momento determinado de tiempo, S^* es el precio de equilibrio de largo plazo o nivel de reversión, α es la tasa de reversión, σ es la volatilidad y ε es un choque aleatorio con medio media y varianza 1.

La observación de las series históricas de precios de electricidad muestra que un proceso de reversión a la media proporciona una aproximación más real a su verdadera dinámica, ya que los precios tienden a fluctuar alrededor de un nivel de largo plazo que refleja por lo general los costos de producción y el nivel de demanda. Esto último implica que la volatilidad tiene un efecto limitado sobre los precios, ya que por grande que sean los choques aleatorios, después de un tiempo los precios tienden a volver a su nivel de equilibrio.

4.1.2. Procesos de Difusión con Saltos.

Como ya se ha mencionado, los precios de la electricidad se caracterizan por presentar cambios grandes, abruptos e inesperados ocasionados generalmente por choques fuertes a la oferta, ya sea por problemas de disponibilidad del parque generador o por problemas de congestión en la red de transmisión. Pero estos cambios abruptos del precio no implican que estos se muevan hacia un nuevo nivel y que permanezcan en él, sino que regresan rápidamente a sus niveles de largo plazo, lo cual permite afirmar que no se trata de cambios estructurales sino de saltos anormales dentro de un proceso normal.

Luego, la evolución del cambio en el precio puede expresarse mediante la siguiente forma:

$$S_{t+1} - S_t = \alpha(S^* - S_t)\Delta t + S_t\sigma\varepsilon_{1t}\sqrt{\Delta t} + \eta[S_t(K + \delta\varepsilon_{2t})]$$

donde:

S = precio spot en un momento dado de tiempo.

S* = precio de largo plazo o nivel de reversión.

α = tasa de reversión.

σ = volatilidad del proceso de reversión.

Δt = intervalo de tiempo entre t y t+1

ε_{1t} = choque aleatorio del proceso de reversión.

η = toma el valor de 1 si ocurre un salto, y 0 de lo contrario. Depende de la frecuencia del salto, es decir, de la probabilidad de ocurrencia.

K = tamaño o amplitud esperada del salto.

δ = desviación estándar del salto.

ε_{2t} = choque aleatorio del proceso del salto.

En ausencia de saltos, es decir, de choques fuertes a la oferta, el proceso se comporta como uno de reversión a la media sujeto a choques aleatorios en el termino que involucra la volatilidad, ya que en este caso el valor de η es cero. La magnitud del cambio en el precio como consecuencia del salto depende de su tamaño o amplitud esperada, de su desviación estándar y de su componente aleatorio.

4.1.3. Proceso de Difusión de un Factor con Reversión a la Media, Saltos y Estacionalidad.

Cartea y Figueroa (2005) plantean un modelo que incorpora la propiedad de estacionalidad del precio de la energía eléctrica en distintos mercados del mundo, junto con las características claves de su dinámica como lo son la reversión a la media y la presencia de saltos como consecuencia de choques fuertes e inesperados a la oferta.

Se parte del siguiente supuesto:

$$\ln S_t = g(t) + Y_t$$

tal que,

$$S_t = G(t) e^{Y_t}$$

donde $G(t) = e^{g(t)}$ es una función determinística que describe el efecto estacional del comportamiento del precio, y Y_t es un proceso estocástico cuya dinámica viene dada por la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$dY_t = -\alpha Y_t dt + \sigma(t) dZ_t + \ln J dq_t$$

donde Y_t es proceso de difusión de nivel cero de reversión a la media para el precio spot S_t , α es la velocidad de reversión, $\sigma(t)$ es la volatilidad del proceso de difusión que depende del tiempo, J es el tamaño proporcional del salto (aleatorio), dZ_t es el incremento de un movimiento browniano estándar y dq_t es un proceso de Poisson tal que:

$$dq_t = \begin{cases} 1 & \text{con probabilidad } l dt \\ 0 & \text{con probabilidad } 1-l dt \end{cases}$$

donde l es la intensidad o frecuencia del salto. Además, se asume que J , dq_t y dZ_t son independientes y que J se distribuye normal con media μ_j y varianza σ_j^2 .

Con esta información es posible escribir la ecuación diferencial estocástica que describe la dinámica del precio:

$$dS_t = \alpha(\rho(t) - \ln S_t) S_t dt + \sigma(t) S_t dZ_t + S_t (J - 1) dq_t$$

donde el nivel de reversión a la media depende del tiempo y viene dado por la siguiente expresión:

$$\rho(t) = \frac{1}{\alpha} \left[\frac{dg(t)}{dt} + \frac{1}{2} \sigma^2(t) \right] + g(t)$$

4.2. Otros Modelos.

4.2.1. Régimen de Switching.

Un modelo de switching puede verse como una extensión no-lineal de un proceso ARMA que puede acomodar dinámicas complicadas como asimetría y heteroscedasticidad condicional. El modelo consta de un componente no estacionario de caminata aleatoria cuyo estado evoluciona de acuerdo a un proceso de Markov de dos estados, donde en cada estado tiene una probabilidad de ocurrencia.

Para el caso de la energía eléctrica se supone que un estado representa un proceso de difusión normal con una determinada media y varianza, mientras que el otro estado se encarga de describir el comportamiento del precio durante los choques fuertes y abruptos a la oferta, es decir, los saltos.

4.2.2. Modelos GARCH

Los modelos GARCH son la versión generalizada de los modelos ARCH, los cuales consideran que la varianza condicional del componente aleatorio de una serie de tiempo puede representarse como función de los rezagos del error al cuadrado. Es decir, la volatilidad condicional constituye a su vez una serie de tiempo. Los modelos GARCH se basan en el supuesto que la varianza condicional depende de sus propios rezagos y de los rezagos de los errores al cuadrado. Este modelo es preferido sobre el modelo ARCH debido a que es más parsimonioso, ya que involucra la estimación de una menor cantidad de parámetros. De hecho, se puede demostrar que un GARCH(1,1) es equivalente a un ARCH de orden infinito, teniendo solamente que estimar dos parámetros.

Sin embargo, tanto los modelos ARCH como GARCH asumen que la varianza condicional es simétrica ante choques de la misma magnitud pero de signo contrario. Lo anterior es *precisamente lo opuesto a lo observado en los hechos estilizados de la serie histórica de precios para los mercados eléctricos en el mundo, y en particular para el*

mercado colombiano. Dado que los mercados eléctricos no son los únicos en los cuales se observa este comportamiento asimétrico de la volatilidad, surgieron variaciones de los modelos GARCH que incorporan dicho comportamiento como los modelos GJR y EGARCH. En Nelson (1991) se plantea el modelo EGARCH, o GARCH exponencial, el cual soluciona el problema de asimetría y elimina la necesidad de imponer restricciones de no negatividad al modelo.

Para el caso particular de la energía eléctrica, León y Rubia (2001) plantean un modelo de volatilidad autorregresiva para describir el comportamiento del precio spot de la energía eléctrica en España y llegan a la conclusión que es un EGARCH (1,1) el modelo más adecuado. Esto invita a escoger este modelo como una posibilidad para modelar el comportamiento de la volatilidad del precio de la electricidad en Colombia.

4.3. Valoración de Opciones utilizando Simulación

En esta sección se presentan trabajos que han explorado aproximaciones al valor de opciones sobre flujos contingentes utilizando métodos de simulación, como lo es el conocido método de Monte Carlo. Es importante mencionar que dada la dificultad de encontrar soluciones en forma cerrada al problema de valoración de opciones cuando se incorporan características más complejas del proceso de evolución del precio, los métodos de simulación han comenzado a gozar de gran atención y utilización en los últimos años.

El método de valoración del precio de una opción mediante simulación parte del valor de la opción a la fecha de madurez o de ejercicio:

$$Call = MAX(S_{t+h} - K, 0)$$

Donde h es el tiempo de madurez y K el strike price o precio de ejercicio. El precio de la opción es el valor presente (en el tiempo t) del valor de la opción al vencimiento utilizando la tasa de descuento que incorpore los riesgos adecuados. Ahora, dado que S_{t+h} sigue un proceso estocástico, es necesario simular su valor una gran cantidad de veces para estimar el promedio del valor de la opción al vencimiento, y por ende descontar este valor utilizando la tasa adecuada para llegar finalmente al precio o prima de la opción. Para una opción put se realiza exactamente el mismo procedimiento.

Huang y Wan (2007) utilizan un método no paramétrico para la estimación de un proceso puro de saltos, y emplean simulación de Monte Carlo para valorar el precio de opciones call. En este trabajo los autores comparan el desempeño de valoración del método propuesto con lo obtenido utilizando la fórmula de Black & Scholes, y llegan a la conclusión que cuando se valoran precios de opciones cuyo subyacente contiene saltos en su proceso de evolución, la fórmula de Black & Scholes sub-valora opciones que están *in-the-money*. Adicionalmente, solamente cuando se incorporan saltos en el proceso y se valora el precio de las opciones vía simulación es posible observar el efecto de eventos extremos (o eventos de cola) sobre la prima de la opción.

Boyle, Broadie y Glasserman (1997) realiza un recuento de las distintas aproximaciones a la simulación de Monte Carlo para valoración de opciones, discutiendo las implicaciones en relación a tiempos de computación y eficiencia. Concluyen que el método de Monte Carlo es una solución útil y sencilla para valorar opciones cuyo subyacente se aleja de la distribución normal y presenta saltos y/o volatilidad estocástica. Adicionalmente proponen un método de valoración de opciones americanas mediante simulación de Monte Carlo, obteniendo resultados satisfactorios.

Finalmente, Merton (1975) sugiere la incapacidad del modelo de Black & Scholes de valorar adecuadamente opciones cuyo activo subyacente presenta discontinuidades significativas en su proceso de evolución de precios, como es el caso de la presencia de saltos. Merton afirma que la fórmula de B&S arroja siempre precios inferiores a los justos para opciones *in-the-money* y *out-of-the-money*, y para opciones de madurez corta.

5. Metodología del Trabajo

El presente trabajo valora opciones de electricidad en el Mercado de Energía Mayorista en Colombia, partiendo de un modelo matemático que captura las características fundamentales del proceso de evolución del precio spot, razón por la cual responde a una típica metodología de análisis de series de tiempo o investigación estadística de una determinada variable cuya naturaleza debe comprenderse. A continuación se presentan los pasos adelantados en este estudio:

a.) **Análisis de la serie histórica de precios:** como en todo trabajo de análisis de series de tiempo, es fundamental conocer con cierto grado de profundidad las

principales características estadísticas de la serie para poder desarrollar o adaptar el modelo econométrico más apropiado. A continuación se describen las pruebas específicas en cada caso:

- Estacionaridad: es preciso determinar si los retornos son estacionarios para saber si existe reversión a la media, para lo cual se realizan pruebas de raíz unitaria como Dickey-Füller y Phillips Perron. H_0 : existe al menos una raíz unitaria en la serie de retornos.
- Pruebas de Normalidad: asimetría, exceso de curtosis (colas anchas), prueba Jarque Bera y gráficas QQ plot.

b.) **Formulación del Modelo de Evolución del Precio:** una vez se tiene una adecuada comprensión de las características estadísticas del proceso de evolución de la variable bajo análisis, se propone un modelo que capture satisfactoriamente dicho comportamiento. Por ejemplo, si del análisis de la serie histórica se concluye que los retornos no siguen una distribución normal debido a la presencia de colas anchas por exceso de curtosis y asimetría, el modelo a usarse no puede asumir dicha normalidad.

c.) **Estimación de los Parámetros del Modelo:** una vez se define el modelo econométrico más conveniente para describir el comportamiento de la variable, es preciso determinar la forma de estimación de los parámetros que lo rigen. Esta es una etapa de vital importancia, ya que de la confiabilidad de los estimadores de los parámetros depende el éxito del modelo como herramienta de análisis de la evolución del precio.

d.) **Simulación y Validación del Modelo:** una vez se tienen estimadores confiables de los parámetros, se procede a simular la serie de precios utilizando el modelo de evolución propuesto. Los resultados de dicha simulación deben ser validados en la medida en que las propiedades estadísticas de la serie simulada deben acercarse bastante a las observadas de la serie histórica.

e.) **Valoración de Opciones y Comparación con B&S:** teniendo el modelo apropiado que describe la evolución del precio spot, se calcula el precio de la opción para un determinado *strike price* y un plazo dado como el promedio del valor de la opción al vencimiento de una gran cantidad de simulaciones del precio a futuro,

trayendo dicho promedio a valor presente utilizando la tasa de descuento apropiada. El precio obtenido es comparado con el que arroja el método de B&S.

6. Serie Histórica

La información disponible para este trabajo es la serie histórica de precios diarios promedio de la bolsa de energía colombiana, o Mercado de Energía Mayorista (MEM), desde el 1 de enero de 2000 hasta el 14 de Julio de 2006. A continuación se presenta un gráfico de la serie:

Gráfico No. 1



7. Análisis de la Serie Histórica de Precios

La teoría clásica en finanzas sobre el comportamiento del precio de activos, acciones y *commodities* afirma que estos siguen un movimiento browniano geométrico, conocido también como proceso de caminata aleatoria. Una caminata aleatoria se caracteriza por presentar fluctuaciones sin dirección determinada, para el caso en que carece de tendencia, o fluctuaciones alrededor de una tendencia de largo plazo, también sin dirección determinada.

Al graficar la serie del precio de la energía eléctrica en Colombia contra el tiempo se observa que no parece seguir un comportamiento de caminata aleatoria, ya que los precios no parecen fluctuar sin dirección determinada sino que por el contrario, lo hacen alrededor de un nivel de largo plazo, presentando en ocasiones saltos abruptos. Estos saltos no constituyen cambios estructurales, ya que cada vez que salta el precio hacia un nivel mucho más alto, retorna a su comportamiento normal después de un cierto plazo de tiempo.

Sin embargo, la simple observación de la serie de precios de una gráfica no puede tomarse como criterio de decisión para determinar el comportamiento del precio. Deben realizarse pruebas formales que muestren las características reales de la serie. Las pruebas se realizaron sobre la serie histórica de retornos logarítmicos, ya que se pretende llegar a un modelo de evolución del precio que parte de los cambios en el precio, es decir, de los retornos. El primer paso es determinar si la serie es estacionaria o si presenta un comportamiento explosivo, debido a la existencia de un proceso de raíz unitaria.

7.1. Estacionaridad

Un proceso es estacionario cuando su media, varianza y autocorrelaciones pueden ser aproximadas mediante promedios de períodos muy largos de tiempo sobre un solo conjunto de observaciones. En otras palabras, un proceso es estacionario cuando sus momentos son constantes. Por lo tanto, si se prueba que la serie histórica del precio de la electricidad en Colombia es estacionaria, o por lo menos estacionaria en media, se descartaría cualquier modelo que no supusiera algún componente de reversión a media, como es el caso del modelo propuesto en la sección 8 de este trabajo.

Para probar la existencia de una raíz unitaria se utilizan distintas pruebas estadísticas. En esta investigación se realizaron las pruebas de Dickey-Fuller Aumentada y la de Phillips-Perron, ya que son las más utilizadas. La hipótesis nula es la misma para las dos pruebas, la presencia de al menos una raíz unitaria en la serie. Los resultados obtenidos en cada una de las pruebas realizadas, utilizando en paquete estadístico eViews, proveen suficiente evidencia estadística para rechazar la hipótesis nula y aceptar la alternativa de ausencia de raíces unitarias. En los dos casos, el estadístico de prueba es mucho mayor, en valor absoluto, al valor crítico para todos los niveles de significancia examinados (1%, 5%, 10%). Por lo tanto, es posible afirmar que los retornos siguen un proceso estacionario en media, luego existe reversion a la media en su proceso de evolucion. A continuación se presentan los resultados de las pruebas Dickey-Fuller y Phillips-Perron.

Tabla No. 1 - Prueba 1. Dickey-Fuller Aumentada con la inclusión de un intercepto.

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-18.97273	0.0000
Test critical values:		
1% level	-3.432911	
5% level	-2.862557	
10% level	-2.567357	

Tabla No. 2 - Prueba 2. Phillips-Perron con inclusion de intercepto.

	Adj. t-Stat	Prob.*
Phillips-Perron test statistic	-88.23744	0.0001
Test critical values:		
1% level	-3.432897	
5% level	-2.862551	
10% level	-2.567354	

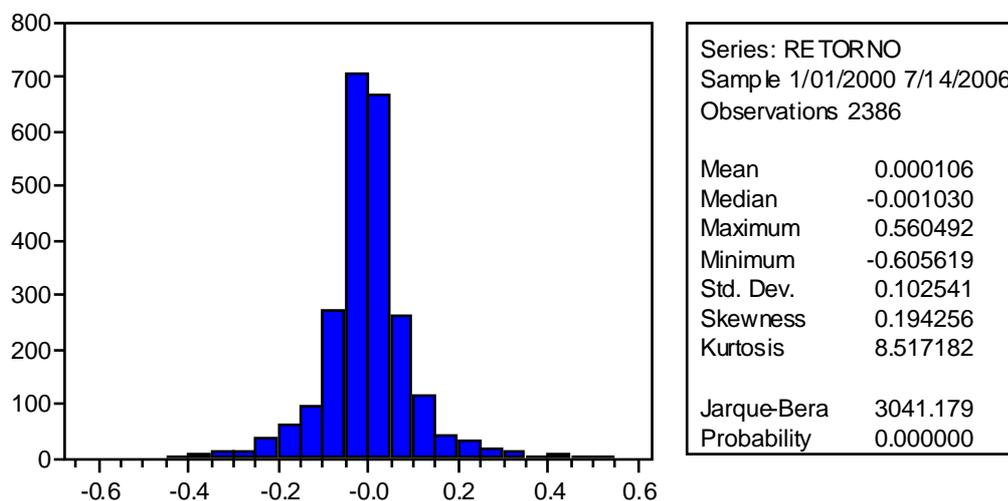
7.2. Normalidad

El otro supuesto clave de la teoría clásica financiera en el comportamiento del precio de securities o activos, y por ende en la valoración de instrumentos derivados, es que los retornos, definidos como el cociente logarítmico de precios sucesivos, se distribuyen normalmente. Esto último implica que los precios siguen una distribución log-normal, lo cual es coherente con el hecho de que no pueden existir precios negativos. El supuesto de normalidad de los retornos es clave en el modelo de Movimiento Browniano Geométrico, o caminata aleatoria, y es uno de los pilares en el método de valoración de opciones propuesto por Black y Scholes. Si los retornos no siguen una distribución normal es difícil aceptar que el precio sigue una caminata aleatoria, y todos los métodos de valoración de derivados basados en este supuesto arrojan precios sub o sobreestimados. Por lo tanto, es de vital importancia determinar si los retornos siguen una distribución normal para poder descartar definitivamente el supuesto clásico de caminata aleatoria.

Existen varias formas de probar si los retornos se distribuyen normalmente. La primera consiste en comparar los momentos centrales muestrales obtenidos de la distribución empírica dada, con los momentos centrales teóricos de una distribución

normal. De especial importancia para el análisis de normalidad son el tercero y el cuarto momento, la asimetría y la curtosis respectivamente. Estos dos momentos proporcionan información muy útil sobre la forma de la distribución de probabilidad.

Gráfico No. 2 y Tabla No. 3



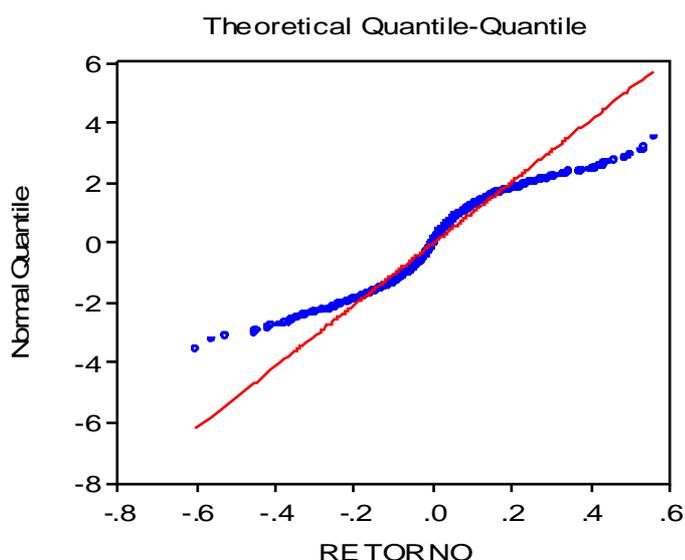
Como se observa en la tabla, ni el valor obtenido para el coeficiente de asimetría ni el obtenido para la curtosis indican que la distribución de los retornos se asemeja a una distribución normal. Para los datos de la serie de precios del MEM, se obtiene el coeficiente de asimetría es $0.1942 > 0$, lo cual indica que la distribución es asimétrica positivamente. Esto último difiere en gran medida del valor de cero que presenta una distribución normal, ya que esta última es simétrica. Además, se obtiene la curtosis es $8.51 > 3$, lo cual indica que los retornos presentan una distribución leptocúrtica, debido posiblemente a la existencia de colas gordas, es decir, a una probabilidad muy alta de ocurrencia de eventos de cola. Esto difiere claramente del valor de 3 que presenta una distribución normal.

Otra forma de probar la normalidad de un conjunto de datos, de manera más formal, es mediante la prueba de normalidad de Jarque-Bera. Esta prueba tiene como hipótesis nula que los datos se distribuyen normalmente, contra la hipótesis alternativa que los datos siguen una distribución diferente a la normal. Utilizando el paquete estadístico eViews, se obtuvo el resultado de esta prueba, así como el histograma de frecuencias, los cuales se muestran también en la tabla de arriba.

La prueba de normalidad de Jarque-Bera arroja un p-value de 0.0000, lo cual lleva a rechazar la hipótesis nula en favor de la alternativa, bajo todos los niveles de significancia (1%, 5%, 10%). Así mismo, se observa en el histograma que se trata de una distribución leptocúrtica, es decir, con una elevada curtosis que hace que el pico sea muy alto, y que es asimétrica positiva. Esto es coherente con los valores de los tercero y cuarto momentos no estandarizados presentados en la tabla junto al histograma.

La última forma de probar la normalidad de una distribución es mediante la construcción y análisis de *Probability Plots*. Si los datos para los retornos caen todos sobre la línea recta, es posible afirmar que estos se distribuyen normalmente, mientras que si se observan desviaciones considerables es posible afirmar lo contrario. La siguiente gráfica muestra el Probability Plot para los retornos del precio del MEM. Esta gráfica se obtuvo utilizando el paquete estadístico Eviews.

Gráfico No. 3



Se observa claramente que la distribución que siguen los retornos no es normal, ya que la gran mayoría de las observaciones se encuentra por fuera de la línea recta. La desviación de la serie de retornos de la normalidad puede deberse a una alta probabilidad de ocurrencia de eventos de cola, o en términos estadísticos, a la presencia de colas gordas en la distribución. Para el caso del mercado eléctrico colombiano, estos eventos de cola pueden ser los saltos abruptos e inesperados que se observan en la serie de precios ocasionados por limitaciones en la oferta. Estas limitaciones en la oferta de

electricidad son causadas por la ocurrencia de eventos inesperados y aleatorios como el fenómeno de El Niño, el fenómeno de La Niña, o voladuras de torres de transmisión.

7.3. Estacionalidad

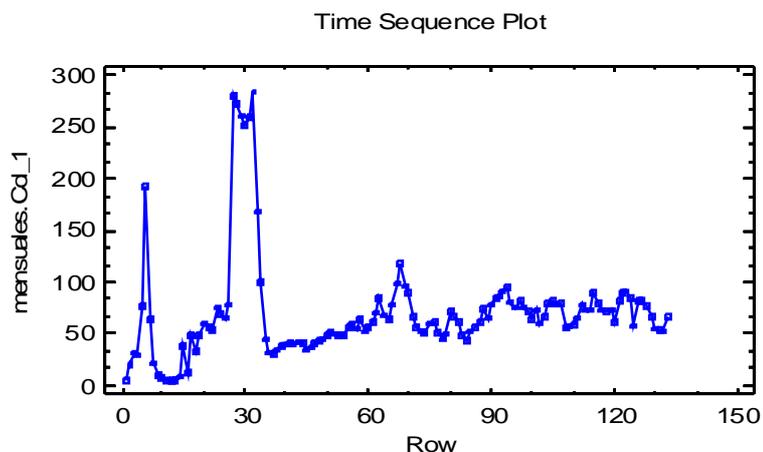
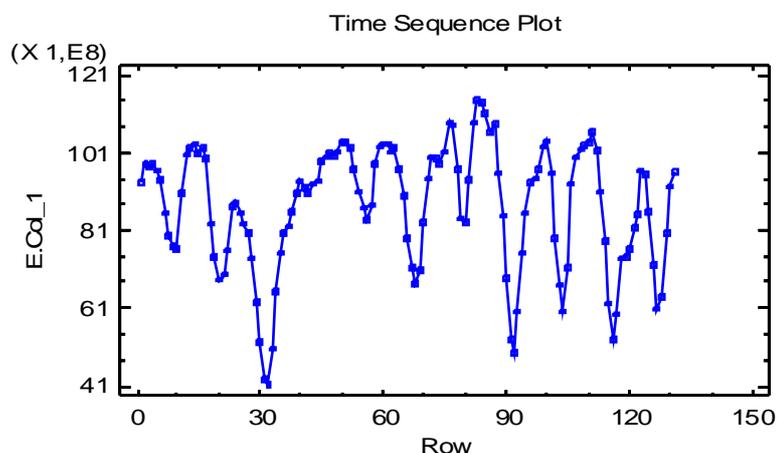
El precio de la electricidad en distintos mercados del mundo presenta componentes de estacionalidad que se repiten de manera cíclica todos los años. En mercados continentales con estaciones climáticas pronunciadas se observa que el comportamiento del precio es similar para una estación particular todos los años, pero difiere entre estaciones para un año. Por ejemplo, en regiones nórdicas el precio presenta picos en invierno, dado el gran consumo de electricidad que ocurre durante esta estación debido a la necesidad de utilizar calefacción y la reducción del número de horas con presencia de luz solar. Lo mismo ocurre en verano, cuando las altas temperaturas inducen a la utilización de aire acondicionado y demás artefactos para hacer más fresco el ambiente del hogar. Por su parte, en primavera y en otoño se reduce el consumo debido a la presencia de temperaturas moderadas haciendo que el precio de la electricidad se mantenga en niveles más bajos.

Aunque Colombia es un país tropical, y por ende no presenta diferencias marcadas en la temperatura durante el año, el gran porcentaje de generación hidráulica en el país y la existencia de un ciclo hidrológico llevan a que sea posible observar una fuerte componente estacional en el comportamiento del precio. Dado que el principal costo variable de la generación hidroeléctrica es el costo de oportunidad del agua, en períodos secos este aumenta significativamente haciendo que las ofertas de los generadores hídricos suban considerablemente, presionando el precio de bolsa al alza. Lo contrario ocurre en períodos de altas precipitaciones. Luego es de esperarse que el precio de la energía eléctrica, en ausencia de choques inesperados, tenga un comportamiento dependiente del ciclo hidrológico, y por lo tanto presenta un componente estacional importante.

La dependencia del precio de la energía eléctrica en el MEM del ciclo hidrológico puede verse al observar la serie de precios y la serie del nivel de los embalses, ya que esta última guarda una estrecha relación con el ciclo de lluvias en el país. En temporada de lluvias el nivel de los embalses sube, mientras que en períodos de baja precipitación este baja. La siguiente gráfica muestra la serie del nivel promedio mensual de los embalses para el período comprendido entre Julio de 1995 y Julio de

2006. Debajo de esta gráfica se muestra la serie de promedios mensuales del precio de la electricidad para el mismo período.

Gráfico No. 4 y No. 5



De la primera gráfica se observa un comportamiento cíclico del nivel de los embalses en la mayor parte del período temporal bajo estudio, el cual debe coincidir con el ciclo hidrológico, excepto en pocos casos en los que se presentan desviaciones importantes, ocasionadas principalmente por fenómenos climatológicos inesperados y abruptos como el fenómeno del Niño. Tal es el caso del período 30 (1997-1998), en el cual se presenta una caída significativamente en el nivel promedio mensual de los embalses, ocasionada por el fuerte fenómeno de El Niño que azotó al país durante los años de 1997 y 1998. Justo después de este período se observa una recuperación

importante del nivel de los embalses y un lapso de tiempo en el cual no se presenta mucha variación. Esto último se debe principalmente al intenso fenómeno de La Niña que le siguió al de El Niño durante el año de 1999, y que se caracterizó por fuertes e intensas lluvias. Por lo tanto, salvo en los casos cuando se presentan fenómenos climáticos inesperados, el nivel de los embalses revela un comportamiento estacional estrechamente ligado al ciclo hidrológico.

Ahora si se compara la serie del nivel promedio mensual de los embalses con la serie de los precios mensuales promedio, se observa que presentan comportamientos opuestos. Cuando el nivel de los embalses baja el precio sube, y viceversa. En el período 30, cuando el nivel promedio de los embalses presenta un salto negativo de importante magnitud, el precio experimenta un salto en dirección contraria, también de considerable amplitud. Luego, del análisis y la comparación cualitativas de las dos series es posible afirmar que el precio de la electricidad en Colombia debe contener algún componente de estacionalidad debido a su gran dependencia del nivel de los embalses, serie esta que si presenta un claro comportamiento estacional, debido a su vez, por su relación con el ciclo hidrológico.

8. Modelo de Evolución del Precio Spot

Las características de la serie histórica del precio de la electricidad hacen pensar que una forma adecuada de describir su comportamiento es mediante un modelo que incorpore reversión a la media, componentes estacionales, volatilidad cambiante en el tiempo y saltos ocasionales. La presencia de exceso de curtosis y asimetría se debe a que la volatilidad cambia en el tiempo, a que el proceso de evolución del precio contiene un proceso de saltos, o a ocurrencia de ambos fenómenos. Dado que el precio spot de la electricidad en Colombia está expuesto a choques climáticos inesperados y que en ausencia de estos se observa también una volatilidad cambiante, se ha decidido incorporar los dos fenómenos en este trabajo.

8.1. Modelo

Para términos de notación, S_t representa el log-precio promedio diario y r_t el retorno logarítmico. Este último es igual a $S_t - S_{t-1}$. Se decide trabajar con retornos

logarítmicos para asegurar la no negatividad de los precios. El proceso de evolución del precio spot adopta la siguiente forma:

$$\Delta S_t = \left\{ \begin{array}{l} \Delta \mu_t + \theta (\mu_t - S_{t-1}) + \sum_{i=1}^p \Delta S_{t-i} + \sigma_t dZ_t, dq_t = 0 \\ h_t J_t, dq_t = 1 \end{array} \right.$$

El modelo constituye una aproximación discreta a un proceso de reversión a la media, volatilidad estocástica, saltos discontinuos y tendencia estacional. Cuando dq_t es igual a 0, el retorno evoluciona conforme a un proceso con reversión a la media, tendencia estacional y volatilidad cambiante en el tiempo en ausencia de saltos, mientras que cuando dq_t es igual a 1, el retorno es igual a una realización de la función de densidad de probabilidad J_t que describe el tamaño del salto multiplicado por h_t , función que define el signo del salto. dq_t es igual a 1 si en el día t ocurre un salto, y 0 de lo contrario. Para determinar la ocurrencia de los saltos se utiliza la función de densidad de probabilidad f_t cuya variable aleatoria es el número de días entre saltos. Luego, para cada simulación del modelo, se tienen los días en que ocurren los saltos mediante realizaciones de f_t para el horizonte de simulación.

En ausencia de saltos, se tiene el proceso de reversión a la media y volatilidad cambiante en el tiempo. La función $\mu(t)$ corresponde a la tendencia estacional alrededor de la cual los precios fluctúan en ausencia de saltos. El segundo término corresponde al componente de reversión a la media, cuya tasa viene dada por θ y el nivel de largo plazo es cambiante en el tiempo e igual a la tendencia estacional. El tercer y cuarto términos introducen la presencia de autocorrelación de los retornos en media y varianza, y por ende la naturaleza cambiante de la volatilidad. El término dZ_t corresponde a un choque aleatorio normal con media 0 y varianza 1.

8.2. Estimación del Modelo

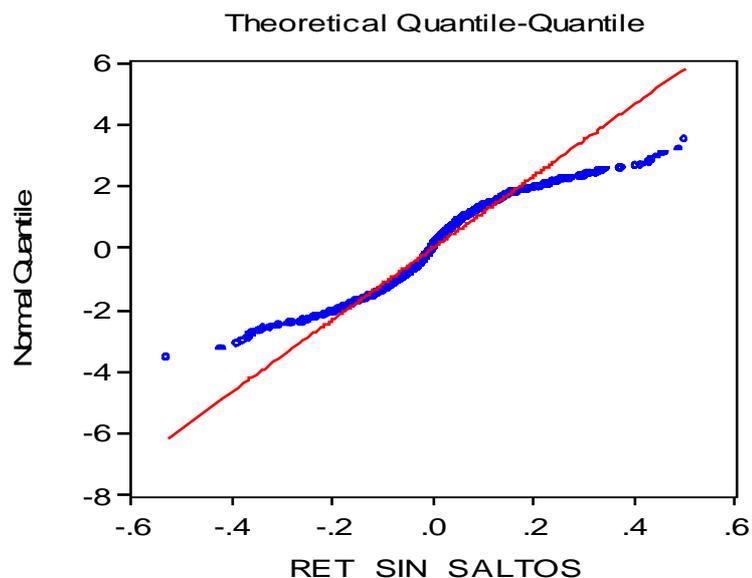
El primer paso en la estimación del modelo propuesto es definir cuáles retornos de la serie histórica son considerados saltos y cómo se lleva a cabo el proceso de filtración, ya que el modelo se comporta de forma distinta si se trata de un salto o de una realización del proceso en ausencia de saltos. Es decir, los parámetros de la ecuación

cuando dq_t es igual a cero deben ser estimados utilizando la serie histórica filtrada de retornos logarítmicos (sin saltos), mientras que las funciones de probabilidad y las probabilidades de transición que describen el comportamiento de los saltos deben ser ajustadas y calculadas utilizando los retornos históricos considerados como saltos.

8.2.1. Filtro

Un retorno se define como salto cuando su magnitud es superior a 3 veces la desviación estándar de la serie completa de retornos. El algoritmo de filtro consiste en que una vez se identifica un retorno como salto, el precio correspondiente a ese día se calcula como el promedio aritmético entre el precio del día anterior y el precio del día siguiente (o como una interpolación entre el precio del día anterior y el próximo día cuyo retorno no sea un salto para el caso en que los retornos de los días siguientes sean también saltos) de tal forma que el retorno logarítmico para ese día se encuentre dentro de 3 desviaciones estándar. Este procedimiento se repite hasta que no haya ningún retorno cuya magnitud sea superior a 3 desviaciones estándar. Es importante tener en cuenta que dado que la volatilidad no es constante a lo largo del periodo bajo análisis, para cada iteración del algoritmo de filtro se estima un modelo GARCH de tal forma que sea considerado como salto un retorno cuyo valor absoluto es mayor a 3 veces la desviación estándar que arroja el modelo GARCH para ese día en particular. A continuación se presenta el QQ plot de la serie filtrada, lo cual demuestra la validez del algoritmo:

Gráfico No. 6



Se observa un mejor ajuste en el medio que para la serie completa de retornos, pero sigue presentándose el fenómeno de colas anchas en la distribución, lo cual puede deberse a la presencia de volatilidad estocástica.

8.2.2. Tendencia Estacional

La tendencia estacional $\mu(t)$ puede determinarse ajustando una familia de funciones paramétricas adecuada a la serie filtrada del log-precio. Dado que los precios en el mercado Colombiano presentan presiones dos veces por año debido a la ocurrencia de dos períodos de lluvia y dos de sequía durante el año, se considera apropiado utilizar una combinación de una función lineal con dos funciones sinusoidales con periodicidades de 12 y 6 meses respectivamente. Siguiendo la aproximación realizada en Geman y Roncoroni (2006), la representación paramétrica de la tendencia estacional se presenta a continuación:

$$\mu(t; \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta) = \alpha + \beta t + \gamma \cos(\varepsilon + 2\pi t) + \delta \cos(\zeta + 4\pi t)$$

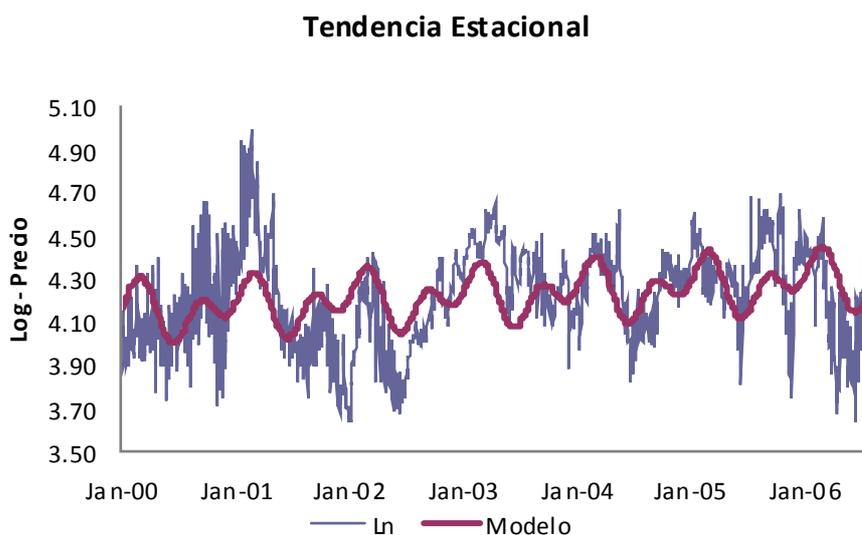
El primer término puede considerarse como un costo fijo asociado a la producción de energía. El segundo corresponde a la tendencia lineal de largo plazo del costo total de producción, y el tercer y cuarto términos incorporan el efecto estacional asociado con el ciclo hidrológico para el caso colombiano mediante un camino periódico con dos máximos y dos mínimos en el año. La estimación de los parámetros se realizó mediante la minimización de la suma de los errores al cuadrado entre la serie histórica de log-precios filtrados y los valores arrojados por el modelo de tendencia

estacional utilizando estimadores de inicialización. A continuación se presentan los estimadores obtenidos así como la tendencia estacional ajustada a la serie histórica:

Tabla No. 4

Parámetro	Estimador	Intervalo conf 95%	
α	4.1416135	4.124968	4.158259
β	0.0238324	0.0194206	0.0282443
γ	0.0851746	0.0734397	0.0969096
ε	-0.3989419	-0.5376647	-0.260219
δ	0.0947385	0.0829039	0.1065731
ζ	-2.3056118	-2.4292404	-2.1819832

Gráfico No. 7



Se observa que la función propuesta parece ajustarse de forma apropiada a la serie de log-precios en ausencia de saltos. Aunque los precios logarítmicos filtrados no siguen una distribución normal, el hecho que los intervalos de confianza sugieran significancia de todos los estimadores, sumado a la utilización de optimización en el ajuste, hace pensar que esta es una buena forma de capturar el componente estacional de la evolución del precio spot de la energía eléctrica en Colombia.

8.2.3. Reversión a la Media y Volatilidad Cambiante en el Tiempo

Para estimar los parámetros de los componentes de reversión a la media y volatilidad cambiante en el tiempo se utilizó el modelo EGARCH, incorporando en la ecuación de media la componente de reversión a la media y la auto correlación de los retornos. El modelo EGARCH parece ser una forma adecuada de estimar conjuntamente los parámetros de la ecuación de media y varianza debido a que la serie de retornos filtrados presenta auto correlación en media y varianza, y a que el precio de la electricidad en Colombia pareciera no reaccionar de igual forma a choques de signo distinto. Adicionalmente, la literatura sobre estimación de modelos de evolución del precio de la energía eléctrica utilizando modelos de volatilidad autorregresiva sugiere la utilización de EGARCH debido a que incorpora asimetría y la varianza explota con menor frecuencia que al utilizar GARCH. A continuación se presenta la prueba ARCH para determinar presencia de volatilidad autorregresiva, así como los correlogramas de los residuales estandarizados y los residuales estandarizados al cuadrado:

Tabla No. 5 - Prueba ARCH:

ARCH Test:			
F-statistic	113.6576	Probability	0.000000
Obs*R-squared	459.6851	Probability	0.000000

Tabla No. 6 - Autocorrelación Residuales Estandarizados:

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1 -0.185	-0.185	81.888	0.000
		2 -0.114	-0.154	113.10	0.000
		3 -0.078	-0.139	127.71	0.000
		4 -0.069	-0.145	139.02	0.000
		5 -0.057	-0.152	146.70	0.000
		6 -0.006	-0.117	146.79	0.000
		7 0.200	0.125	242.75	0.000
		8 0.031	0.074	245.02	0.000
		9 -0.101	-0.048	269.54	0.000
		10 -0.060	-0.057	278.07	0.000
		11 -0.031	-0.047	280.37	0.000
		12 -0.097	-0.135	302.76	0.000
		13 0.044	-0.053	307.49	0.000
		14 0.146	0.052	358.88	0.000
		15 0.030	0.023	361.03	0.000
		16 -0.043	0.005	365.52	0.000
		17 -0.070	-0.035	377.14	0.000
		18 -0.062	-0.071	386.53	0.000
		19 -0.026	-0.043	388.16	0.000
		20 0.054	-0.000	395.05	0.000
		21 0.143	0.075	443.97	0.000
		22 0.014	0.030	444.46	0.000
		23 -0.061	-0.011	453.38	0.000
		24 -0.027	0.014	455.14	0.000
		25 -0.089	-0.051	474.18	0.000
		26 -0.061	-0.081	483.04	0.000
		27 0.067	-0.022	493.80	0.000
		28 0.142	0.059	542.46	0.000
		29 -0.018	-0.019	543.25	0.000
		30 -0.049	-0.024	549.06	0.000

Tabla No. 7 - Autocorrelación Residuales Estandarizados al Cuadrado:

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1 0.345	0.345	284.69	0.000
		2 0.293	0.197	489.78	0.000
		3 0.275	0.148	670.02	0.000
		4 0.175	0.012	743.48	0.000
		5 0.263	0.157	908.49	0.000
		6 0.321	0.190	1154.6	0.000
		7 0.337	0.168	1425.8	0.000
		8 0.258	0.020	1585.0	0.000
		9 0.193	-0.026	1674.2	0.000
		10 0.231	0.074	1801.9	0.000
		11 0.172	-0.007	1872.8	0.000
		12 0.231	0.056	2000.9	0.000
		13 0.228	0.012	2125.9	0.000
		14 0.247	0.073	2272.1	0.000
		15 0.211	0.014	2378.6	0.000
		16 0.204	0.036	2478.2	0.000
		17 0.233	0.065	2608.5	0.000
		18 0.204	0.027	2708.9	0.000
		19 0.204	0.011	2808.6	0.000
		20 0.233	0.043	2939.7	0.000

Tanto la prueba ARCH como la autocorrelación de los residuales estandarizados al cuadrado muestran la presencia de volatilidad autorregresiva. La autocorrelación de los residuales estandarizados indica que los retornos parecen tener correlación cada 7 días, lo cual puede deberse a similitudes en el comportamiento del precio entre el mismo día de la semana a lo largo del tiempo (Ej: los lunes el precio se comporta de

forma similar). A continuación se presenta la formulación y estimación del EGARCH(2,1):

$$r_t = \theta(\mu_t - S_{t-1}) + \lambda_1 r_{t-1} + \lambda_2 r_{t-7} + \lambda_3 r_{t-14} + \lambda_4 r_{t-21} + \lambda_5 r_{t-28} + a_t$$

$$\ln(\sigma_t^2) = \omega + \beta \ln(\sigma_{t-1}^2) + \alpha_1 \left| \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}} \right| + \alpha_2 \left| \frac{\varepsilon_{t-2}}{\sigma_{t-2}} \right| + \delta \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}}, \longrightarrow a_t = \sigma_t \varepsilon_t$$

Tanto los estimadores de la ecuación de media tanto de la ecuación de varianza son significativos:

Tabla No. 8

Parametros	Estimador	P-Value
θ	0,047012	0.00
$\lambda(1)$	-0,09567	0.00
$\lambda(2)$	0,125549	0.00
$\lambda(3)$	0,078521	0.00
$\lambda(4)$	0,065255	0.00
$\lambda(5)$	0,067293	0.00
ω	-0,293903	0.00
β	0,984812	0.00
$\alpha(1)$	0,473855	0.00
$\alpha(2)$	-0,200993	0.00
δ	-0,039042	0.05

El componente de reversión a la media θ es estadísticamente significativo y de signo positivo, lo cual demuestra que el precio de la electricidad tiende a regresar a un nivel de largo plazo. Las especificaciones de media y varianza parecen ser las apropiadas para describir el comportamiento de los retornos de la serie sin saltos debido a que corrigen la presencia de autocorrelacion en los retornos y los retornos al cuadrado (estandarizados). A continuación se presentan los respectivos correlogramas, así como la prueba ARCH LM que muestra la inexistencia de efectos ARCH una vez se corrige con el modelo propuesto:

Tabla No. 9 - Prueba ARCH:

ARCH Test:

F-statistic	0.078661	Probability	0.779146
Obs*R-squared	0.078725	Probability	0.779033

Tabla No. 10 - Autocorrelación Residuales al Cuadrado Estandarizados:

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	-0.006	-0.006	0.0793	
		2	0.047	0.047	5.3852	
		3	-0.012	-0.012	5.7392	
		4	-0.054	-0.056	12.545	
		5	-0.014	-0.013	12.978	
		6	0.044	0.049	17.513	0.000
		7	0.034	0.035	20.241	0.000
		8	0.000	-0.007	20.241	0.000
		9	-0.006	-0.010	20.318	0.000
		10	0.003	0.009	20.336	0.001
		11	-0.032	-0.026	22.714	0.001
		12	-0.006	-0.009	22.799	0.002
		13	0.037	0.037	26.097	0.001
		14	0.048	0.049	31.519	0.000
		15	-0.009	-0.015	31.703	0.000
		16	0.005	-0.002	31.760	0.001
		17	-0.036	-0.028	34.775	0.001
		18	-0.017	-0.009	35.445	0.001
		19	0.008	0.009	35.608	0.001
		20	-0.028	-0.035	37.453	0.001

Tabla No. 11 - Autocorrelación Residuales Estandarizados:

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	-0.007	-0.007	0.1198	
		2	-0.032	-0.032	2.5339	
		3	-0.007	-0.008	2.6521	
		4	0.003	0.002	2.6717	
		5	-0.038	-0.038	6.0183	
		6	0.006	0.005	6.0946	0.014
		7	0.002	-0.000	6.1051	0.047
		8	0.040	0.040	9.9297	0.019
		9	-0.037	-0.037	13.241	0.010
		10	-0.023	-0.023	14.505	0.013
		11	-0.012	-0.014	14.845	0.021
		12	-0.014	-0.017	15.334	0.032
		13	0.015	0.017	15.868	0.044
		14	-0.010	-0.014	16.114	0.065
		15	0.030	0.029	18.194	0.052
		16	-0.010	-0.012	18.414	0.072
		17	-0.041	-0.038	22.388	0.033
		18	-0.000	0.001	22.388	0.050
		19	0.003	-0.002	22.409	0.071
		20	0.028	0.030	24.227	0.061
		21	0.015	0.011	24.766	0.074
		22	0.027	0.028	26.542	0.065
		23	-0.015	-0.016	27.102	0.077
		24	-0.009	-0.005	27.315	0.098
		25	-0.031	-0.026	29.640	0.076
		26	-0.009	-0.013	29.827	0.096
		27	0.017	0.017	30.553	0.106
		28	-0.020	-0.027	31.506	0.111
		29	0.005	0.007	31.567	0.138
		30	-0.006	-0.009	31.639	0.169

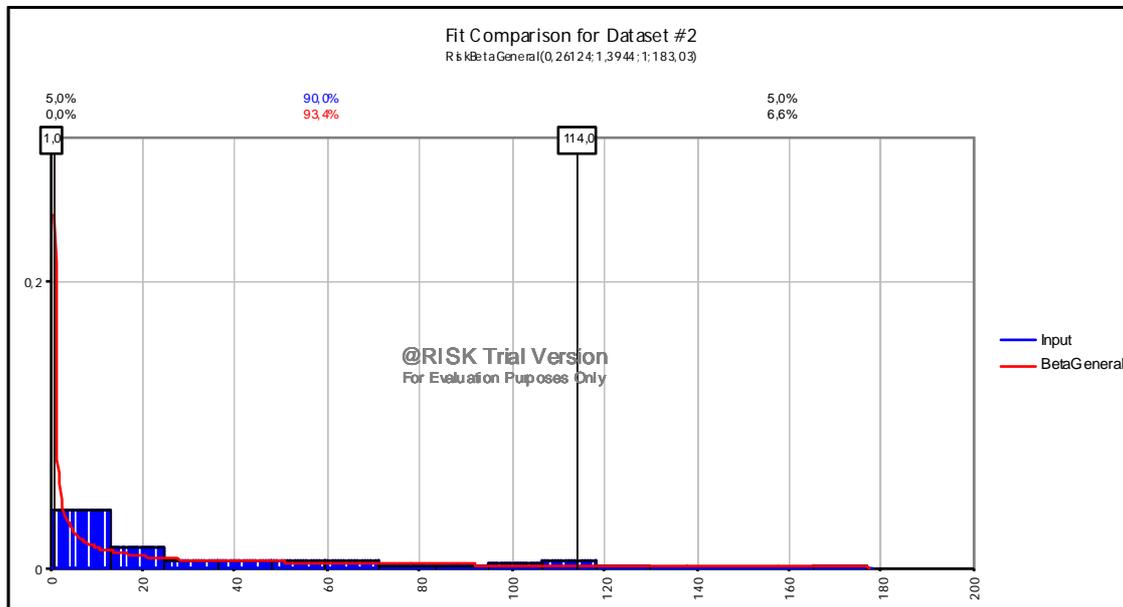
8.2.4. Saltos Ocasionales

8.2.4.1. Frecuencia

La frecuencia u ocurrencia de los saltos se modela ajustando el número de días entre saltos a una función de densidad de probabilidad. A continuación se presenta un

histograma de los días entre saltos de la serie filtrada, así como la función de probabilidad ajustada. Se utilizó el programa @Risk para realizar el ajuste.

Gráfico No. 8



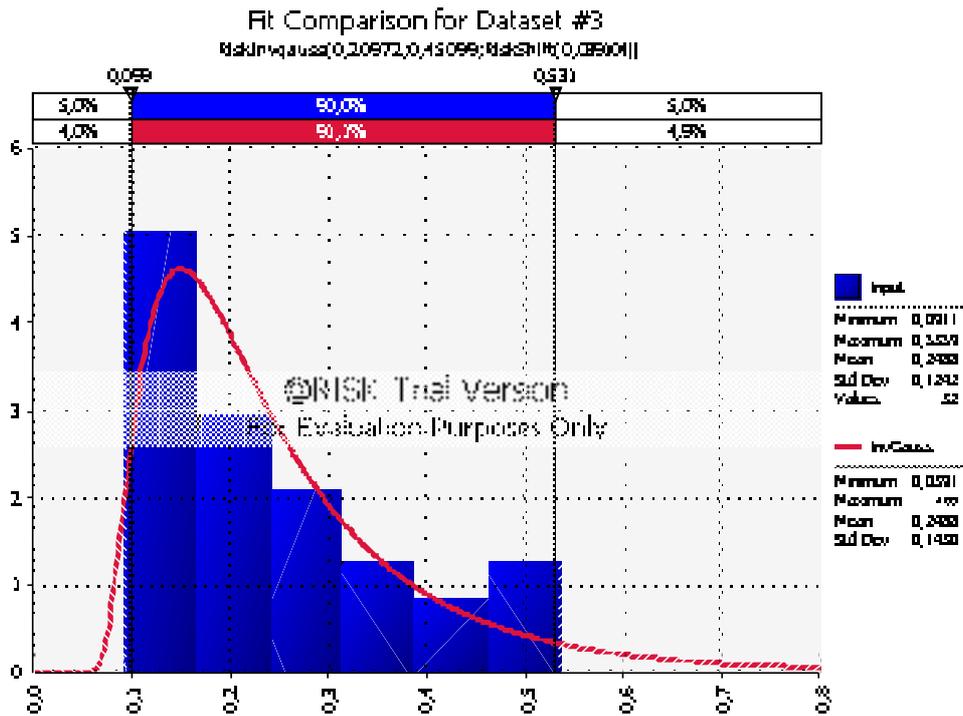
La función de densidad que mejor se ajusta a los días entre saltos es la función BETA General con parámetros (0,2612; 1,3944; 183,03). Una vez ocurre un salto, esta función arroja el número de días hasta la ocurrencia del siguiente salto.

8.2.4.2. Magnitud del Salto

Se ajustan funciones de densidad de probabilidad a los saltos filtrados de signo positivo y negativo. Los saltos negativos se multiplican por -1 para ajustar la función de densidad a valores positivos.

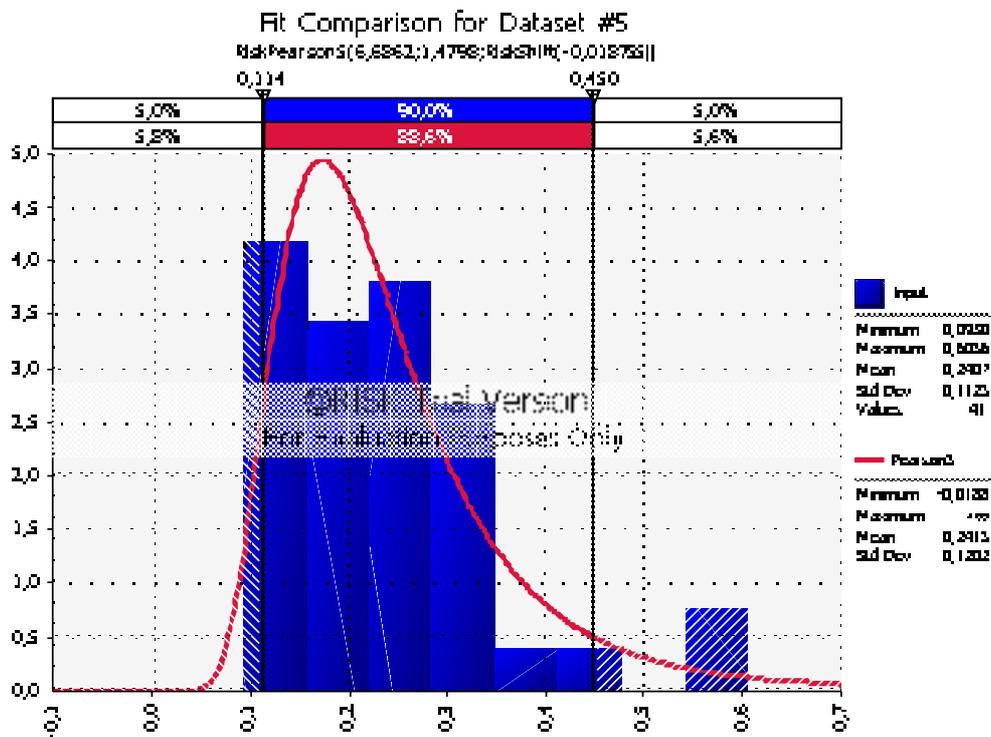
Saltos Positivos: la distribución que mejor se ajusta es una Gauss Inversa con parámetros (0,20972; 0,45099) y desplazamiento de 0,039104.

Gráfico No. 9



Saltos Negativos: la distribución que mejor se ajusta al valor positivo de los saltos negativos es una Pearson 5 con parámetros (6,6862; 1,4798) y desplazamiento de -0,018755.

Gráfico No. 10



8.2.4.3. Signo del Salto

Para determinar el signo de cada salto se calcularon las probabilidades de que el siguiente salto tenga un signo determinado dado el signo del último salto. Es decir, se calculó el número de veces que un salto fue positivo dado que el anterior también lo había sido, el número de veces que un salto fue positivo dado que el anterior fue negativo, el número de veces que un salto fue negativo dado que el anterior fue negativo y el número de veces que un salto fue negativo dado que el anterior fue positivo. Estos valores se dividieron entre el número total de saltos positivos y negativos respectivamente para determinar las probabilidades de transición. A continuación se presenta la matriz de probabilidades de transición:

Tabla No. 12

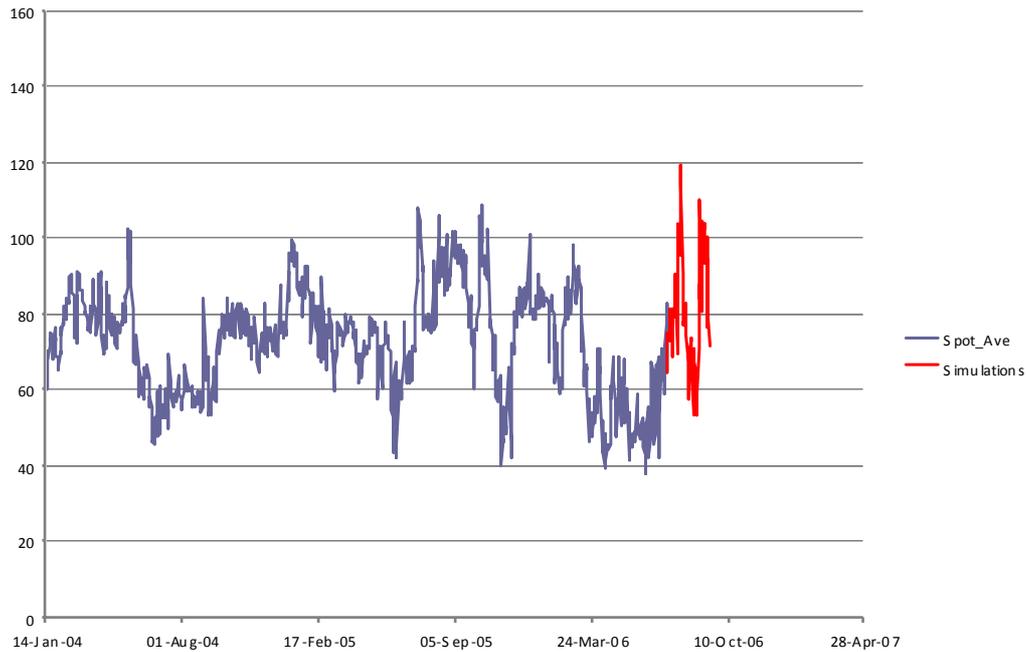
	a Positivo	a Negativo
De Positivo	0,23529412	0,76470588
De Negativo	0,61904762	0,38095238

9. Resultados

El modelo propuesto en la sección 8 parece incorporar todas las propiedades determinantes de la evolución del precio spot de la electricidad en Colombia. Se realizaron simulaciones del precio a 60 días desde la última fecha de la serie histórica para determinar el precio de una opción call mediante el método de simulación de Monte Carlo. Adicionalmente, se realizaron simulaciones a 1 año para comparar las implicaciones de este método de valoración sobre distintos vencimientos. A continuación se presentan resultados de simulación del precio para ambos casos.

Ejemplo Simulación a 60 días:

Gráfico No. 11



Ahora, para calcular el precio o prima de una opción call a 60 días y un determinado *strike price* K , y suponiendo un mercado completo, se realizan 10,000 simulaciones del precio a 60 días y se calcula el promedio del $Max(S_{60} - K, 0)$. La prima de la opción es el valor presente de este promedio. La tasa de descuento apropiada debe incorporar las primas de riesgo debido a la volatilidad estocástica y al proceso de saltos. Dado que el calculo de estas primas de riesgo supera el alcance de este trabajo, calculamos el precio de la opción utilizando la tasa libre de riesgo mas un spread con el fin de ilustrar la metodología y comparar con los precios obtenidos mediante la formula de B&S. A continuación se presentan las primas para una opción call a 60 días, precio spot en $t=0$ igual a 64.303 Kwh, *strike price* de 70 pesos Kwh y utilizando como tasa de descuento la DTF (10,02%) + 0%-3% spread.

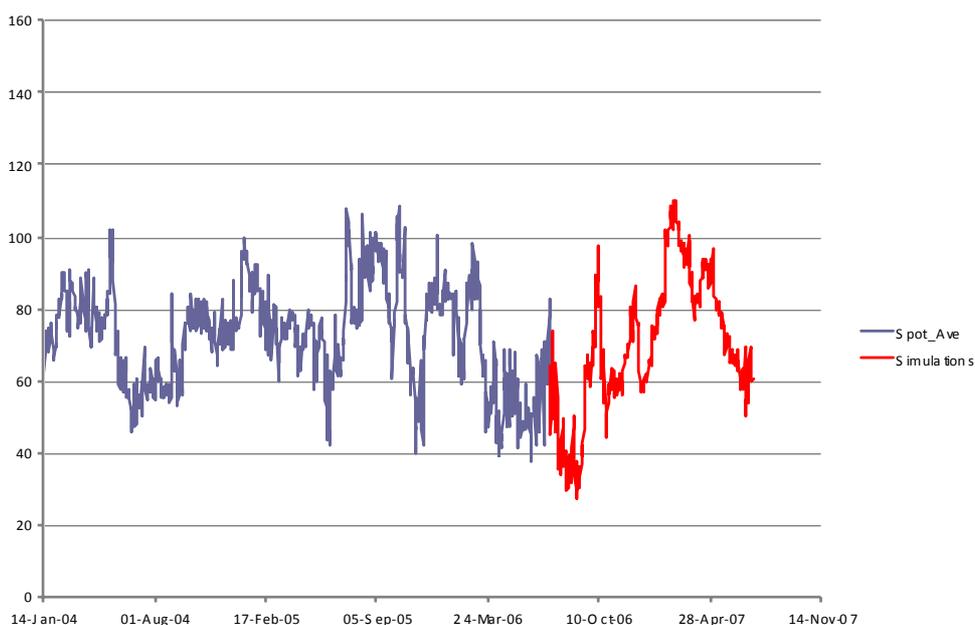
Tabla No. 13

Tasa de Descuento	Prima Call Modelo
10,0%	19,68
10,5%	19,66
11,0%	19,65
11,5%	19,63
12,0%	19,61
12,5%	19,60
13,0%	19,58

En teoría, las opciones cuyo activo subyacente presenta volatilidad estocástica y saltos deben tener primas mayores a las obtenidas mediante B&S para vencimientos cortos y/o cuando las opciones están *out of the Money* o *in the Money*, ya que tienen una mayor probabilidad de ser ejercidas si se presenta un cambio significativo en el precio en un periodo corto de tiempo. Al calcular el precio de la opción mediante B&S, utilizando como volatilidad la volatilidad anualizada de la serie histórica (201,6%) y como tasa de descuento a la DTF (10,02%), se obtiene un valor de 18,58 pesos. Como era de esperarse, el precio es menor al obtenido utilizando simulación. Esto demuestra la necesidad de utilizar aproximaciones al problema de valoración de opciones de electricidad que incorporen las características del proceso de evolución del precio spot.

Ejemplo Simulación a 1 año:

Gráfico No. 12



La reversión a la media implica que en el largo plazo el precio no debe ser muy distinto a su nivel de tendencia, razón por la cual para opciones con vencimientos largos, la prima de la opción sobre el subyacente con las características mencionadas debe ser menor que la obtenida mediante B&S. A continuación se presentan las primas para una opción call a 1 año, precio spot en $t=0$ de 64.303 Kwh, *strike price* de 70 pesos Kwh y utilizando como tasa de descuento la DTF (10,02%) + 0%-3% spread.

Tabla No. 14

Tasa de Descuento	Prima Call Modelo
10,0%	9,21
10,5%	9,17
11,0%	9,12
11,5%	9,07
12,0%	9,03
12,5%	8,98
13,0%	8,94

Ahora, al calcular el precio utilizando la fórmula de B&S para la misma opción, utilizando a la DTF (10,02%) como tasa de descuento, se obtiene un valor de 44,95 pesos. Este valor es claramente muy superior a las primas obtenidas utilizando el método de valoración por simulación, y es coherente con la teoría, ya que según B&S la varianza aumenta con el tiempo, lo cual hace que la serie tienda a aumentar.

Es posible observar que para vencimientos cortos y *strike prices* muy distintos del precio spot, el modelo de B&S tiende a subestimar el precio de la opción, ya que no considera la alta probabilidad de cambios extremos (saltos) ni la presencia de volatilidad estocástica. Por el contrario, para opciones de vencimientos largos y *strike prices* iguales al precio spot, la fórmula B&S tiende a sobreestimar la prima.

Es importante tener en cuenta que el método de valoración propuesto supone un mercado completo, en la medida en que pretende encontrar un único precio justo para las opciones. Aunque este es un supuesto fuerte, especialmente para el caso Colombiano, hace más práctico y sencillo el análisis y permite ilustrar mejor la diferencia entre los dos métodos.

10. Conclusiones

Las características intrínsecas de la electricidad, mencionadas líneas atrás, en un mercado competitivo en el cual el precio es fijado por la interacción entre la oferta y la demanda, hacen que se presente una gran variabilidad en el precio spot. Esta variabilidad es mayor aún en el caso colombiano, debido a la gran dependencia que tiene la oferta de electricidad del ciclo hidrológico y de la ocurrencia de choques climáticos abruptos e inesperados como los fenómenos de El Niño y de la Niña. La variabilidad del precio implica un riesgo para los agentes que participan en el mercado de energía mayorista, MEM, ya que cambios drásticos en el precio pueden afectar negativamente sus flujos de caja a tal punto que el negocio deje de ser rentable. Por esta

razón es de vital importancia que se cuente con instrumentos derivados mediante los cuales los agentes puedan cubrirse del riesgo que implica una alta variabilidad del precio, y que sea posible determinar el precio justo a pagar por la adquisición de dichos instrumentos. Es decir, que se pueda contar con una forma apropiada de valoración de los instrumentos derivados a utilizarse.

El precio spot de la energía eléctrica en Colombia presenta en su comportamiento la presencia de volatilidad cambiante en el tiempo y saltos ocasionales, asociados estos últimos a choques al recurso hídrico (Ej: Fenómeno de El Niño), lo cual hace que la evolución de los retornos se aleje significativamente de los supuestos del método de Black Scholes. Esto último tiene como consecuencia la obtención de primas o precios de las opciones sub o sobre estimadas. Para corregir esto, se deben incorporar las características reales del proceso de evolución del precio, que en el caso Colombiano son la estacionalidad asociada al ciclo hidrológico, la reversión a la media, volatilidad cambiante y los saltos, y realizar la valoración de las opciones utilizando simulación.

Para opciones de corta madurez y/o que está *In the Money* o *Out of the Money*, las primas calculadas utilizando el método propuesto son más altas que las que arroja la fórmula de B&S. Esto es razonable debido a que existe una mayor probabilidad de ejercer las opciones debido a la presencia de saltos abruptos ocasionales y volatilidad cambiante. Sin embargo, la reversión a la media hace que los altos precios alcanzados después de un salto retornen a su nivel de largo plazo en períodos no muy largos. Esto hace que para opciones de larga madurez, las primas obtenidas mediante el método propuesto sean menores que las que arroja B&S (menor probabilidad de ser ejercidas), debido a que este último no presenta reversión y su volatilidad aumenta con el tiempo.

Aunque este trabajo constituye un intento por desarrollar una herramienta útil para la valoración de opciones de electricidad en Colombia, es necesario complementarlo con trabajos posteriores. En especial, es de vital importancia poder calcular con mayor exactitud la tasa de descuento apropiada, que incorpore las primas de riesgo que implican la volatilidad estocástica y la presencia de saltos.

11. Bibliografía.

- [AYA, 03] Ayala, Ulpiano y Millán, Jaime. La sostenibilidad de las reformas del sector eléctrico en Colombia. Bogotá : Fedesarrollo, 2003. 116 p. (Cuadernos de Fedesarrollo; no. 9).
- [BBG, 97] Boyle, Phelim; Broadie, Mark & Glasserman, Paul. Monte Carlo Methods for Security Pricing. 1997. 55p.
- [CF, 05] Cartea, Alvaro and Figueroa, Marcelo G. Pricing in electricity markets: a mean reverting jump diffusion model with seasonality. January 2005. 28 p.
- [IHM, 02] Colombia. Instituto de Hidrología, Meteorología y Estudios Ambientales, Ministerio del Medio Ambiente. Efectos naturales y socioeconómicos del fenómeno dEl Niño en Colombia. Bogotá : s.n., 2002. 58 p.
- [EY, 03] Eydeland, Alexander & Wolyniec, Krzysztof. Energy and power risk management. Hoboken, N.J. : Wiley and Sons, 2003. 482 p.
- [EG, 99] Eydeland, Alexander and Geman, Helyette. Some fundamentals of electricity derivatives. July 1998. 18 p.
- [GR, 06] Geman, Hélyette & Roncoroni, Andrea. Understanding the Fine Structure of Electricity Prices. 2006. 38 p.
- [BBG, 07] Huang, Guanghui & Wan, Jianping. A Non Parametric Approach for European Option Valuation. Agosto 2007. 11 p.
- [LR, 01] León, Ángel & Rubia, Antonio. Comportamiento del Precio y Volatilidad en el Pool Eléctrico Español. Marzo 2001. 51 p.
- [RM, 75] Merton, Robert. Option Pricing when Underlying Stock Returns are Discontinuous. Julio 1975. 20 p.
- [MILLS, 99] Mills, Terence C. The econometric modelling of financial time series. 2 ed. Cambridge, UK : Cambridge University press, 1999. 372 p.
- [UPME, 04] Unidad de Planeación Minero Energética-UPME. Una visión del mercado eléctrico colombiano. Bogotá : UPME, 2004. 110 p.
- [VAS, 99] Vásquez Martínez, Carlos, et al. Formación de precios en generación y diseño del mercado mayorista en el sistema eléctrico colombiano. Marzo 1999. 71 p.
- [PV, s.f.] Villaplana, Pablo. Pricing power derivatives: a two-factor jump-diffusion approach. s.f. 37 p.