

# POLITOPOS MATROIDALES COMO SUMAS DE MINKOWSKI

CAROLINA BENEDETTI VELÁSQUEZ  
DIRECTOR: Federico Ardila

Diciembre 2008

# POLITOPOS MATROIDALES COMO SUMAS DE MINKOWSKI

Una Tesis  
Presentada al  
Departamento de Matemáticas  
Por  
**CAROLINA BENEDETTI VELÁSQUEZ**

COMO PARTE DE LOS REQUISITOS  
PARA EL GRADO DE  
MAGÍSTER EN MATEMÁTICAS

Universidad de los Andes  
Bogotá, Colombia  
Noviembre 24, 2008

---

## POLITOPOS MATROIDALES COMO SUMAS DE MINKOWSKI

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>4</b>
<b>2. Preliminares</b>	<b>6</b>
2.1. Definiciones básicas . . . . .	6
2.1.1. Axiomas que definen una matroide . . . . .	6
2.1.2. Menores . . . . .	9
2.1.3. Dualidad . . . . .	10
<b>3. El Politopo Matroidal</b>	<b>12</b>
3.1. Descomposición de $P_M$ . . . . .	12
3.1.1. Permutaedro generalizado . . . . .	12
3.1.2. Sumas de Minkowski . . . . .	13
3.1.3. El Polinomio de Tutte . . . . .	15
3.2. Volumen de $P_M$ . . . . .	19
3.2.1. Volúmenes mixtos y volumen de $P_M$ . . . . .	19
<b>4. El Politopo de independientes</b>	<b>23</b>
4.1. $\mathbb{Q}$ -Politopos . . . . .	23
4.2. Volumen de $I_M$ . . . . .	25
<b>5. Matroides bandera de truncación</b>	<b>28</b>
5.1. Matroides bandera . . . . .	28
5.1.1. Matroides bandera de truncación . . . . .	29
5.1.2. Descomposición y Volumen de $P_{\mathcal{F}(M)}$ . . . . .	30
<b>6. Agradecimientos</b>	<b>33</b>

# Capítulo 1

## Introducción

La teoría de matroides unifica en forma consistente diversas ramas de la matemática tales como álgebra lineal, geometría, teoría de grafos. Esta poderosa interacción ha hecho que el estudio de matroides cobre fuerza cada vez más.

En este trabajo no haremos un estudio exhaustivo sobre la teoría de matroides, sin embargo, en el Capítulo 2 estableceremos definiciones básicas concernientes a esta fascinante teoría, las cuales nos ayudarán a entender y desarrollar los resultados principales que estableceremos en los demás capítulos. Allí daremos axiomatizaciones distintas que permiten definir una matroide y suministraremos ejemplos sencillos que nos ayudarán a manejar los distintos resultados y definiciones. También daremos un vistazo a distintas nociones de la teoría de grafos tales como eliminación y contracción; a partir de allí estableceremos generalizaciones de los distintos aspectos concernientes a matroides ordinarias.

En el Capítulo 3 estableceremos resultados sobre los *permutaedros generalizados*, teoría desarrollada por Postnikov en [16] la cual usaremos para descomponer y calcular el volumen del politopo matroidal  $P_M$  asociado a una matroide  $M$ . Esta descomposición se hará usando sumas de Minkowski las cuales definiremos e ilustraremos con ejemplos sencillos. También introduciremos el concepto de volumen mixto y veremos la forma de relacionar este concepto con el volumen euclídeo usual que en el caso 2-dimensional tal vez resulta más sencillo de asimilar. De esta forma, con los ingredientes necesarios estableceremos la descomposición de cualquier politopo matroidal como suma signada de Minkowski de símlices; esta descomposición nos permitirá calcular el volumen de estos politopos de forma explícita. El cálculo de este volumen da una interesante interpretación geométrica del invariante beta asociado a una matroide, además este hecho permite hallar el grado de variedades tóricas, lo cual es una gran motivación para presentar este resultado. En esta dirección, los resultados obtenidos se deben a de Loera et. al [8], en donde se muestra un método algorítmico para el cálculo del volumen de  $P_M$ . Además, Stanley [19] y Lam y Postnikov [13] muestran la forma de calcular el volumen de politopos matroidales para clases particulares de matroides.

Luego, en el Capítulo 4 daremos paso al politopo de independientes y de esta forma estableceremos resultados análogos a los expuestos en el Capítulo 3. Allí enunciaremos un teorema debido a Bernstein el cual permite relacionar el volumen mixto de politopos con el número de soluciones de cierto sistema de

ecuaciones, de hecho, este teorema lo usamos de forma implícita en el cálculo del volumen de  $P_M$ .

Finalmente, en el Capítulo 5 introduciremos las matroides bandera para poder así hablar de matroides bandera de truncación. Allí mostraremos la descomposición y volumen de los politopos de truncación mostrando de esta forma un importante avance en la teoría de matroides de Coxeter, en especial de politopos asociados a estas matroides; teoría poco desarrollada hasta ahora y con muchos problemas abiertos interesantes. El cálculo de este volumen da luz al invariante gamma, el cual juega el papel del invariante beta en este caso. Tal vez el siguiente paso en esta dirección sea desarrollar resultados similares para otros casos particulares de matroides de Coxeter, tales como las matroides simplécticas, dando así esperanza para responder preguntas abiertas como la expuesta en [6, Problema 6.16.6] en el cual se busca un invariante que cumpla el rol que el invariante beta cumple pero ahora para matroides de Coxeter.

Los resultados expuestos en los capítulos 3, 4 y 5 son resultado del trabajo conjunto con Federico Ardila y Jeffrey Doker gracias a la SFSU-Colombia Combinatorics Initiative.

## Capítulo 2

# Preliminares

En este capítulo estableceremos nociones básicas en la teoría de matroides, las cuales usaremos a lo largo de este trabajo. En este escrito no haremos un estudio extensivo sobre matroides, para tal efecto el lector puede consultar [15] o [21], dos excelentes referencias para adentrarse en el emocionante estudio de la teoría de matroides.

### 2.1. Definiciones básicas

Al conjunto  $\{1, 2, \dots, n\}$  lo denotaremos por  $[n]$ , además abusaremos de la notación al usar  $a_1 a_2 \dots a_k$  para hacer referencia al punto  $(a_1, \dots, a_k)$ . Finalmente, para todo  $a \in [n]$  escribiremos  $a$  en lugar de  $\{a\}$  siempre y cuando no genere confusión.

#### 2.1.1. Axiomas que definen una matroide.

**Definición 2.1.1.** Una matroide  $M$  consta de una pareja  $(E, \mathcal{I})$ , donde  $E$  es un conjunto (finito) e  $\mathcal{I}$  es una familia de subconjuntos de  $E$  que satisface los siguientes axiomas de independencia:

(I1)  $\emptyset \in \mathcal{I}$ .

(I2) Si  $I \in \mathcal{I}$  y  $J \subseteq I$ , entonces  $J \in \mathcal{I}$ .

(I3) Si  $I, J \in \mathcal{I}$  con  $|I| < |J|$  entonces existe  $j \in J \setminus I$  tal que  $I \cup j \in \mathcal{I}$ .

De esta forma, decimos que  $M$  es una matroide sobre el conjunto  $E$ , al que llamaremos *conjunto base* de  $M$ . Llamaremos conjuntos independientes a los elementos de la colección  $\mathcal{I}$ ; de manera análoga llamaremos *dependientes* a los subconjuntos de  $E$  que no pertenecen a  $\mathcal{I}$ .

**Ejemplo 2.1.2.** Sea  $V$  un espacio vectorial de dimensión finita  $k$  y sea  $\mathcal{I}$  la colección de vectores linealmente independientes de  $V$ . Entonces  $M = (V, \mathcal{I})$  es una matroide. Los axiomas de independencia se verifican fácilmente gracias a los resultados conocidos del álgebra lineal.

El ejemplo anterior aunque sencillo es bastante ilustrativo, pues nos muestra que la noción de independencia usual del álgebra lineal concuerda con la noción de independencia en una matroide. Mas aún, en la misma forma que hablamos de base y rango en álgebra lineal, tenemos las siguientes definiciones en el caso de una matroide.

**Definición 2.1.3.** Una base de una matroide  $M$  es un conjunto independiente de tamaño maximal. A la colección de bases de una matroide  $M$  la denotaremos por  $\mathcal{B}$ .

A continuación presentamos los *axiomas de base* que satisfacen los elementos de  $\mathcal{B}$ :

(B1) (Propiedad de Intercambio). Dados  $A, B \in \mathcal{B}$  y  $a \in A \setminus B$  existe  $b \in B \setminus A$  tal que  $(A \setminus a) \cup b \in \mathcal{B}$ .

Estos axiomas permiten definir una matroide en términos de sus bases, de esta forma podemos dar la siguiente definición:

Una matroide es una pareja  $(E, \mathcal{B})$  donde  $E$  es un conjunto finito y  $\mathcal{B}$  es una colección de subconjuntos de  $E$  que satisfacen (B1).

A partir de la propiedad de intercambio se puede probar que todas las bases de una matroide tienen el mismo número de elementos. El cardinal de cualquiera de estas bases es lo que llamamos el *rango* de la matroide  $M$  y lo denotamos por  $r_M$  o  $r$ , en la medida que no genere confusión.

En general, dado  $A \subset E$  definiremos el rango de  $A$  como:

$$r(A) = \max\{|J| : J \text{ es independiente, } J \subset A\}.$$

El siguiente Lema (cuya demostración omitiremos) junto con (B1) conforman una propiedad de intercambio simétrico entre las bases de  $M$ .

**Lema 2.1.4.** Sean  $A, B$  bases de una matroide  $M$  y sea  $a \in A - B$ . Entonces existe  $b \in B - A$  tal que  $(B - b) \cup a$  es una base de  $M$ .

Una matroide puede definirse axiomáticamente de muchas maneras y como es de esperarse, todas estas axiomatizaciones resultan equivalentes. Aquí hemos establecido los axiomas de base e independencia, pero omitiremos las demás axiomatizaciones y sus equivalencias.

A continuación daremos otras definiciones concernientes a la teoría de matroides y las cuales nos serán de gran utilidad.

Sea  $A \subseteq E$  tal que para todo  $x \in E - A$  se cumple que  $r(A \cup x) = r(A) + 1$ ; entonces diremos que  $A$  es un *flat* de la matroide  $M$ . Ahora, diremos que  $C$  es un circuito de  $M$  si  $C$  es un conjunto dependiente de tamaño minimal. La colección de circuitos de la matroide  $M$  la denotaremos por  $\mathcal{C}$ .

**Ejemplo 2.1.5.** Sean  $k$  y  $n$  enteros positivos fijos con  $k \leq n$ . Sea  $M$  una matroide sobre  $[n]$  cuya colección de bases está dada por

$$\mathcal{B} = \{A \subseteq [n] : |A| = k\}.$$

Esta matroide se denota por  $U_{k,n}$  y se denomina *matroide uniforme* de rango  $k$  sobre  $n$ . Los conjuntos independientes de  $U_{k,n}$  son los subconjuntos de  $[n]$  de cardinal menor o igual que  $k$ . Los conjuntos dependientes corresponden a los subconjuntos de tamaño mayor que  $k$ . Por lo tanto, los circuitos de esta matroide son los subconjuntos  $A \subseteq [n]$  tales que  $|A| = k + 1$ .

Todos estos conceptos son en realidad una extensión de sus análogos en el caso de espacios vectoriales. En términos generales podríamos decir que una matroide es un objeto combinatorio que captura la noción de independencia del álgebra lineal y la extiende a otros objetos tales como grafos, los cuales introduciremos a continuación.

Un *grafo*  $G$  es una pareja  $(V, E)$  donde  $V$  es un conjunto (finito) cuyos elementos son llamados *vértices* y  $E$  es una colección de parejas de la forma  $e = (u, v)$  donde  $u, v \in V$ . Los elementos de  $E$  se denominan *aristas*.



Usualmente un grafo  $G$  se representa gráficamente poniendo un punto por cada vértice y un arco entre los vértices  $u, v$  si  $(u, v) \in E$ . Nótese que  $u$  puede ser igual a  $v$ , por lo tanto estamos admitiendo bucles (o loops) en un grafo.

Un *camino* de longitud  $k$  entre una pareja de vértices distintos  $u, v$  es una sucesión de aristas  $e_1, \dots, e_k$  tales que  $e_1 = (u_1, u_2), e_2 = (u_2, u_3), \dots, e_k = (u_k, u_{k+1})$ , donde  $u_1 = u, u_{k+1} = v$  y los  $u_i$  son disyuntos dos a dos. De esta forma, definimos un *ciclo* de longitud  $k$  como un subconjunto  $e_1, e_2, \dots, e_k$  de aristas tales que  $e_1, \dots, e_{k-1}$  forman un camino a través de los vértices  $u_1, u_2, \dots, u_k$  y  $e_k = (u_1, u_k)$ . Como caso particular, tenemos que un bucle es un ciclo de longitud 1.

Diremos que  $S$  es un *árbol generador* de  $G$  si  $S$  es un camino (o unión de caminos) que conecta todos los vértices de  $G$  y  $S$  no contiene ciclos. Es decir,  $S$  es un subgrafo maximal de  $G$  sin ciclos. El conjunto de árboles generadores del grafo  $G$  forman la colección de bases de una matroide, la cual denotamos por  $M_G$ .

Sean  $u, v$  vértices de  $G$ . Diremos que  $u \sim v$  si existe un camino entre  $u$  y  $v$ . Adoptando la convención de que  $u \sim u$ , tenemos que la relación  $\sim$  resulta ser de equivalencia. Sus clases de equivalencia las llamamos *componentes conexas* de  $G$ . En caso de que  $G$  tenga solo una componente conexa, diremos que  $G$  es un grafo conexo. En el Ejemplo 2.1.6 vemos cada uno de estos conceptos retratados.

**Ejemplo 2.1.6.** Sea  $G$  el grafo cuyo conjunto de vértices está dado por  $V = [5]$  y cuyo conjunto de aristas es  $E = \{a = (1, 2), b = (2, 3), c = (1, 3), d = (1, 3), f = (4, 5), g = (5, 5)\}$ . Los ciclos de  $G$  son los formados por las aristas  $\{a, b, c\}$ ,  $\{c, d\}$ ,  $\{a, b, d\}$  y  $\{g\}$ , tal y como se muestra en la Figura 2.1. Los árboles generadores son los formados por los subconjuntos de aristas de la forma  $\{x, y\} \cup \{f\}$  donde  $\{x, y\} \neq \{c, d\}$ . De esta forma la matroide  $M_G$  es la matroide sobre el conjunto  $\{a, b, c, d, e, f, g\}$  y cuyas bases son los árboles generadores de  $G$ .

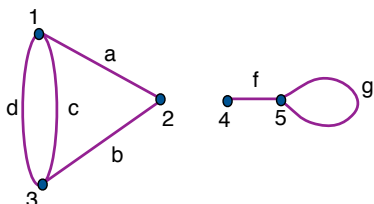


Figura 2.1: Grafo disconexo.

A continuación veremos cómo generalizar la noción de conexidad para cualquier matroide.

Definamos la siguiente relación de equivalencia en una matroide  $M = (E, \mathcal{B})$ . Sean  $x, y \in E$ , diremos que  $x \sim y$  si y sólo si  $x = y$  o existe un circuito  $C$  en  $M$  tal que  $x, y \in C$ . Ver que la relación  $\sim$  es de equivalencia no es tan sencillo, pero es producto del siguiente Teorema.

**Teorema 2.1.7.** *Sea  $M$  una matroide sobre  $E$  y sean  $x, y, z$  elementos distintos de  $E$ . Si existen  $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$  tales que  $x, y \in C_1$  y  $y, z \in C_2$  entonces existe  $C \in \mathcal{C}$  tal que  $x, z \in C$ .*

Así tenemos que la 1-conexidad en grafos (esto equivale a decir que existe un camino independiente entre cualquier par de vértices) corresponde a la conexidad en matroides.

De esta forma, dada una matroide  $M$  las clases de equivalencia dadas por la relación  $\sim$  las llamaremos *componentes* (conexas) de  $M$ . Si  $M$  tiene una única componente diremos que  $M$  es una matroide *conexa*. En caso contrario diremos que  $M$  es *disconexa*. Nótese que las componentes de una matroide son subconjuntos de  $E$  disyuntos dos a dos y su unión es  $E$ .

Por ejemplo, podemos ver que la matroide uniforme  $U_{k,n}$  es una matroide conexa, pues dados  $x, y \in [n]$  existe  $A \subset [n]$  tal que  $|A| = k + 1$  y  $x, y \in A$ .

Ahora, sean  $M_1$  y  $M_2$  dos matroides sobre los conjuntos  $E_1$  y  $E_2$ , respectivamente, con  $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ . Denotaremos por  $M = M_1 \oplus M_2$  a la matroide sobre el conjunto  $E_1 \cup E_2$  y cuyas bases son de la forma  $B_1 \cup B_2$  donde  $B_1$  es base de  $M_1$  y  $B_2$  es base de  $M_2$ . La matroide  $M$  es la *suma directa* de las matroides  $M_1$  y  $M_2$ .

Luego, si  $M$  es una matroide con  $k$  componentes conexas  $M_1, M_2, \dots, M_k$ , en vista de la definición anterior vemos que  $M = M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_k$ , pues se puede ver que cada componente de  $M$  es, en sí misma, una matroide.

En el Ejemplo 2.1.6 tenemos que  $M_G$  tiene tres componentes conexas. A saber,  $M_G = M_1 \oplus M_2 \oplus M_3$  donde  $M_1$  es la matroide inducida por el subgrafo cuyas aristas son  $\{a, b, c, d, e\}$ ,  $M_2$  es la matroide del grafo sobre  $\{f\}$  y  $M_3$  la inducida sobre  $\{g\}$ . Así,  $r_1 = 2$ ,  $r_2 = 1$  y  $r_3 = 0$ , son los rangos de  $M_1, M_2$  y  $M_3$ , respectivamente.

### 2.1.2. Menores

A continuación veremos cómo una matroide  $M$  induce otras matroides, por medio de operaciones denominadas *eliminación* y *contracción*. Matroides obtenidas a partir de  $M$  combinando estas operaciones se denominan *menores* de  $M$ . Antes de generalizar estos conceptos, veamos cómo visualizar estas operaciones en el caso de grafos. Sea  $G = (V, E)$  un grafo,  $M_G$  su matriz asociada y sea  $e = (u, v)$  una arista en  $G$ .

- **Eliminación:** El subgrafo  $E \setminus e$  se obtiene a partir de  $E$  eliminando la arista  $e$ . La matroide asociada a este subgrafo se denota por  $M_{G \setminus e}$  y es un menor de la matroide  $M_G$ .

- **Contracción:**

Si  $u = v$  entonces  $E/e$  es el subgrafo que resulta de eliminar  $e$  de  $E$ .

Si  $u \neq v$  entonces  $E/e$  se obtiene al identificar los vértices  $u$  y  $v$ . De manera análoga, la matroide obtenida de contraer la arista  $e$  se denota por  $M_{G/e}$ .

Motivados por la idea de eliminación y contracción en grafos, queremos generalizar estas operaciones para cualquier matroide  $M$ .

Con la misma notación de antes, sea  $\mathcal{I}$  la colección de conjuntos independientes de  $M$  sobre  $E$  y sea  $A \subseteq E$ . Sea

$$\mathcal{I}_{(M \setminus A)} = \{X \subseteq E \setminus A : X \in \mathcal{I}\}$$

**Teorema 2.1.8.** *La colección  $\mathcal{I}_{(M \setminus A)}$  es la colección de conjuntos independientes de una matroide sobre  $E \setminus A$ , la cual denotaremos  $M \setminus A$  y la llamamos la eliminación de  $A$  de la matroide  $M$ .*

*Demostración.* La prueba de este teorema es directa. □

El conjunto base de la matroide  $M \setminus A$  es  $E - A$  y su función rango está dada por

$$r_{M \setminus A}(X) = r(X) \text{ para todo } X \subseteq E \setminus A. \quad (2.1)$$

Ahora, definamos

$$\mathcal{I}_{M/A} = \{X \subseteq E \setminus A : Y \cup X \in \mathcal{I}\}$$

donde  $Y$  es un independiente de  $A$  de tamaño maximal.

**Teorema 2.1.9.** *La colección  $\mathcal{I}_{M/A}$  es la colección de conjuntos independientes de una matroide sobre  $E \setminus A$ , la cual llamaremos la contracción de  $M$  a  $A$  y la denotaremos por  $M/A$ .*

*Demostración.* Los axiomas (I1), (I2) se satisfacen claramente. Veamos que se satisface (I3). Sean  $I, J \in \mathcal{I}_{M/A}$  tales que  $|I| < |J|$ , entonces  $I \cup Y$  y  $J \cup Y$  pertenecen a  $\mathcal{I}$ , además  $|I \cup Y| < |J \cup Y|$ . Luego, existe  $j \in (J \cup Y) - (I \cup Y) = J - I$  tal que  $(I \cup Y) \cup j \in \mathcal{I}$ , lo cual implica que  $I \cup j \in \mathcal{I}_{M/A}$ . Quedando así probado 2.1.1.  $\square$

El conjunto base de la matroide  $M/A$  es  $E - A$  y su función rango está dada por

$$r_{M/A}(X) = r(X \cup A) - r(A) \quad (2.2)$$

donde  $X \subseteq E \setminus A$ .

**Ejemplo 2.1.10.** Sea  $M = U_{2,4}$  y sea  $e = 1$ . El menor  $M \setminus e$  tiene como bases los subconjuntos de  $[4] - \{1\}$  de tamaño maximal que son independientes de  $M$ . Estos son  $\{23, 24, 34\}$ . De manera análoga, la matroide  $M/1$  tiene como bases a los conjuntos  $2, 3, 4$  pues  $\{2, 1\}, \{3, 1\}, \{4, 1\}$  son bases de  $M$ .

En general, dada  $M = U_{k,n}$  se tiene que  $M \setminus e = U_{k,n-1}$  y  $M/e = U_{k-1,n-1}$  para todo  $e \in [n]$  y  $k > 0$ .

### 2.1.3. Dualidad

A continuación estableceremos la noción de dualidad en una matroide. De esta forma, dada una matroide  $M$ , los menores de  $M$  se comportan de forma agradable bajo dualidad, como veremos a continuación.

**Teorema 2.1.11.** *Sea  $\mathcal{B}$  la colección de bases de una matroide  $M$  sobre  $E$ . Entonces  $\mathcal{B}^* = \{E \setminus B : B \in \mathcal{B}\}$  es la colección de bases de una matroide sobre  $E$  a la que denotaremos  $M^*$ .*

*Demostración.* Sean  $A^* = E - A$  y  $B^* = E - B$  bases de  $M^*$ . Sea  $a \in A^* - B^*$ , luego  $a \in B - A$ . Por el Lema 2.1.4 existe  $b \in A - B$  tal que  $(A - b) \cup a$  es una base de  $M$ . Ahora, como  $b \in A - B$  entonces  $b \in B^* - A^*$ . Como  $(A - b) \cup a$  es una base de  $M$ , entonces

$$E - ((A - b) \cup a) = (A^* - a) \cup b$$

es una base de  $M^*$ . Así,  $\mathcal{B}^*$  es la colección de bases de una matroide.  $\square$

La matroide  $M^*$  se denomina matroide dual a  $M$ . Esta noción de dualidad corresponde a la dualidad en el caso de grafos planos; es decir, grafos que se pueden dibujar en el plano sin que sus aristas se crucen.

El concepto de dualidad se traslada de una matroide a otra, en cada uno de los términos asociados a una matroide.

Como un ejemplo, un elemento  $e$  de  $M$  es un loop (es decir  $e$  no está contenido en ninguna base de  $M$ ) si y sólo si  $e^*$  es un coloop en  $M^*$  (es decir,  $e^*$  está contenido en todas las bases de  $M^*$ ).

De manera análoga, emergen los términos cobase, cocircuito, corango, y así sucesivamente.

La relación existente entre las funciones rango  $r$  de  $M$  y  $r^*$  de  $M^*$  está dada por

$$r^*(A) = |A| - r + r(E \setminus A). \quad (2.3)$$

A partir del Teorema 2.1.11 podemos ver que hay una correspondencia biyectiva entre las bases de  $M$  y las bases de  $M^*$ .

**Proposición 2.1.12.** *Si  $M$  es una matroide sobre  $E$  y  $A \subseteq E$  entonces*

1.  $(M \setminus A)^* = M^*/A$ .
2.  $(M/A)^* = M^* \setminus A$ .

*Demostración.* Esta proposición es producto de las igualdades en (2.1), (2.2) y (2.3). Sea  $X \subseteq E \setminus A$  entonces

$$\begin{aligned}
 r_{(M/A)^*}(X) &= |X| + r_{M/A}(E - A - X) - r_{M/A}(E - A) \\
 &= |X| + r_M((E - A - X) \cup A) - r_M(A) - r_M(E) + r_M(A) \\
 &= |X| + r_M(E - X) - r_M(E) = r_{M^*}(X).
 \end{aligned}$$

Por otra parte tenemos que

$$r_{M^* \setminus A}(X) = r_{M^*}(X).$$

De esta forma al coincidir las funciones rango entre las matroides  $(M \setminus A)^*$  y  $M^*/A$ , tenemos la igualdad deseada. La segunda parte de esta proposición se prueba sustituyendo  $M$  por  $M^*$  en la igualdad que acabamos de probar.  $\square$

## Capítulo 3

# El Politopo Matroidal

### 3.1. Descomposición de $P_M$

En este capítulo estableceremos la descomposición del politopo matroidal  $P_M$  asociado a una matroide  $M$ . A partir de esta descomposición usando sumas signadas de Minkowski veremos la forma de calcular el volumen de cualquiera de estos politopos de manera explícita. Los resultados expuestos en este capítulo y los siguientes son trabajo conjunto con Federico Ardila y Jeffrey Doker.

#### 3.1.1. Permutaedro generalizado

Sea  $M = ([n], \mathcal{B})$  una matroide de rango  $k$  y sea  $M^*$  su matroide dual.

**Definición 3.1.1.** *El politopo matroidal asociado a  $M$  lo definimos como*

$$P_M = \text{conv}\{e_A : A \in \mathcal{B}\}, \quad (3.1)$$

donde  $e_A = \sum_{i \in A} e_i$  y  $\{e_1, \dots, e_n\}$  es la base canónica de  $\mathbb{R}^n$ .

Así, podemos ver que si  $M$  es una matroide sobre  $[n]$  entonces  $P_M$  es un politopo en  $\mathbb{R}^n$ .

Ahora, veamos cuál es la relación existente entre los politopos  $P_M$  y  $P_{M^*}$ .

Por definición, vemos que

$$\begin{aligned} P_{M^*} &= \text{conv}\{e_{A^*} : A^* \in \mathcal{B}^*\} \\ &= \text{conv}\{e_{[n]-A} : A \in \mathcal{B}\}. \end{aligned}$$

En términos generales, dada una matroide  $M$  los vértices de  $P_{M^*}$  se obtienen trasladando los vértices de  $P_M$  por el vector  $(1, 1, \dots, 1)$  y luego reflejando con respecto al origen.

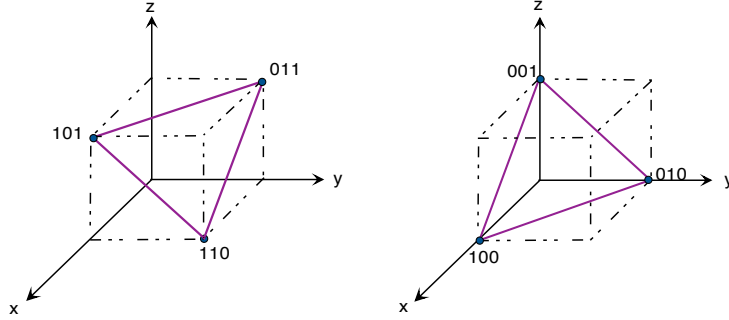
**Ejemplo 3.1.2.** Sea  $M = U_{2,3}$ , entonces  $\mathcal{B} = \{12, 13, 23\}$  y por tanto

$$P_M = \text{conv}\{110, 101, 011\}.$$

Luego,  $P_{M^*}$  está dado por

$$P_{M^*} = \text{conv}\{001, 010, 100\}$$

tal y como se muestra en la Figura 3.1.

Figura 3.1: Polítopo asociado a una matroide  $M$  y su dual  $M^*$ .**Teorema 3.1.3.**

$$P_M = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i \in [n]} x_i = r, \sum_{i \in J} x_i \leq r(J) \text{ para todo } J \subseteq [n] \right\}. \quad (3.2)$$

Las desigualdades que describen un polítopo matroidal podrían reescribirse teniendo en cuenta que la desigualdad  $\sum_{i \in J} x_i \leq r(J)$  es equivalente a

$$\sum_{i \in J} x_i = \sum_{i \in [n]} x_i - \sum_{i \in [n] - J} x_i \geq r - r([n] - J). \quad (3.3)$$

Los polítopos matroidales son polítopos muy especiales ya que pertenecen a una familia de polítopos denominados *permutaedros generalizados*.

**Definición 3.1.4.** Un *permutaedro generalizado* es un polítopo cuya descripción usando desigualdades esta dada por

$$P_n(\{z_J\}) = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i \in [n]} x_i = z_{[n]}, \sum_{i \in J} x_i \geq z_J \text{ para todo } J \subseteq [n] \right\}$$

donde los  $z_J$  son números reales fijos para cada  $J$ .

**Ejemplo 3.1.5.** En vista de (3.2) y (3.3) podemos ver que  $P_M$  es un permutaedro generalizado, a saber,  $P_M = P_n(\{r - r([n] - J)\})$ .

La familia de los permutaedros generalizados tiene características muy especiales, características que permiten descomponerlos usando *sumas y restas* de Minkowski las cuales introduciremos a continuación.

**3.1.2. Sumas de Minkowski**

Sean  $P$  y  $Q$  dos polítopos en  $\mathbb{R}^n$ . Definimos su *suma de Minkowski* como

$$P + Q := \{p + q \in \mathbb{R}^n : p \in P, q \in Q\}.$$

Analogamente, definimos la *diferencia de Minkowski* de dos polítopos  $P$  y  $Q$  en  $\mathbb{R}^n$  como

$$P - Q := \{r \in \mathbb{R}^n : r + Q \subseteq P\}.$$

La forma en que usaremos esta definición será diciendo que  $P - Q = R$  si  $R$  es un *sumando* de  $P$ ; es decir, si  $P = Q + R$ .

Una buena forma de pensar en estas operaciones entre polítopos de la misma dimensión es la siguiente. Para realizar la suma de Minkowski  $P + Q$  de dos polítopos debemos fijar un vértice  $v \in Q$ , a partir de ese vértice poner una copia de  $Q$  en cada uno de los vértices de  $P$  y deslizar  $P$  a través de  $Q$ . El polítopo resultante después de haber deslizado  $P$  por completo es el polítopo  $P + Q$ .

Por otro lado, si queremos realizar la diferencia  $P - Q$  de dos polítopos en  $\mathbb{R}^n$ , de nuevo debemos fijar un vértice  $v \in Q$ . A partir de este vértice deslizamos  $Q$  en el interior de  $P$  asegurándonos que durante el deslizamiento ningún punto de  $Q$  quede por fuera de  $P$ . Los puntos de  $P$  sobre los que  $v$  se deslizó en todo el trayecto es el polítopo  $P - Q$ .

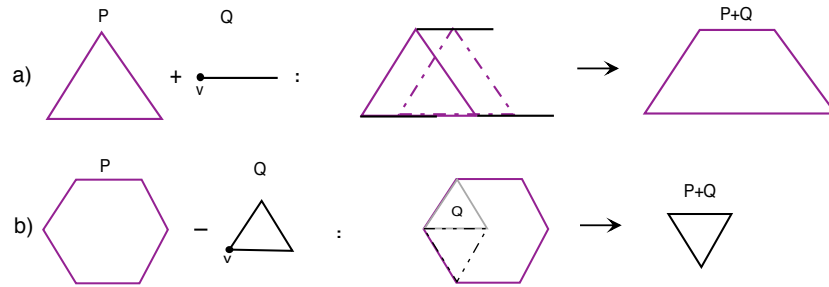


Figura 3.2: a) Suma y b) Diferencia de Minkowski de polítopos en  $\mathbb{R}^2$ .

En la Figura 3.2 a) las líneas punteadas muestran el camino que va recorriendo  $P$  al deslizarse a través de  $Q$ . Las líneas punteadas en b) son una ayuda visual para que el lector vea el polítopo resultante al hacer la diferencia  $P - Q$ .

Los resultados expuestos a continuación, concernientes a cualquier permutaedro generalizado, nos ayudarán en la búsqueda de uno de nuestros principales objetivos: la descomposición de  $P_M$  usando sumas y restas de Minkowski.

**Lema 3.1.6.**

$$P_n(\{z_J\}) + P_n(\{z'_J\}) = P_n(\{z_J + z'_J\}).$$

*Demostración.* Esto se sigue del hecho que si un funcional lineal toma valores máximos  $a, b$  en las caras  $A, B$  de los polítopos  $P$  y  $Q$ , respectivamente, entonces este funcional toma como valor máximo  $a + b$  en la cara  $A + B$  del polítopo  $P + Q$ .  $\square$

Para cada  $J \subseteq [n]$  denotamos por  $\Delta_J$  la cara del  $(n - 1)$ -simplex definida así:

$$\Delta_J = \text{conv}\{e_i : i \in J\} = P_n(\{z(J)_I\})$$

donde  $z(J)_I = 1$  si  $J \subseteq I$  y  $z(J)_I = 0$  en otro caso.

Las siguientes dos proposiciones se deben a Postnikov [16] en el caso en que  $y_J \geq 0$ .

**Proposición 3.1.7.** [16, Proposición 6.3] Para todo  $y_I \geq 0$ , la suma de Minkowski de dilataciones de las caras del estándar  $(n-1)$ -simplex es un permutaedro generalizado. Podemos escribir

$$\sum_{A \subseteq E} y_J \Delta_J = P_n(\{z_J\})$$

donde  $z_J = \sum_{I \subseteq J} y_I$  para todo  $J \subseteq [n]$ .

**Proposición 3.1.8.** [1] Todo permutaedro generalizado se puede escribir de forma única como suma signada<sup>1</sup> de Minkowski de simpleses así

$$P_n(\{z_J\}) = \sum_{J \subseteq [n]} y_J \Delta_J$$

donde  $z_I = \sum_{I \subseteq J} y_J$  para todo  $I \subseteq [n]$ .

*Demostración.* Separemos la expresión  $\sum_{J \subseteq [n]} y_J \Delta_J$  en dos: una parte con los sumandos no negativos y la otra con los sumandos negativos. Ahora, por la proposición 3.1.7 tenemos que

$$\sum_{I \subseteq [n]: y_I < 0} (-y_I) \Delta_I = P_n(\{z_I^-\}) \quad \text{y} \quad \sum_{I \subseteq [n]: y_I \geq 0} y_I \Delta_I = P_n(\{z_I^+\}),$$

donde  $z_I^- = \sum_{J \subseteq I: y_J < 0} (-y_J)$  y  $z_I^+ = \sum_{J \subseteq I: y_J \geq 0} y_J$ . Ahora  $z_I + z_I^- = z_I^+$  implica que

$$P_n(\{z_J\}) + \sum_{I \subseteq [n]: y_I < 0} (-y_I) \Delta_I = \sum_{I \subseteq [n]: y_I \geq 0} y_I \Delta_I$$

de donde se sigue la proposición. La unicidad es clara, pues los  $y_J$  están determinados de manera única.  $\square$

### 3.1.3. El Polinomio de Tutte

Sea  $M$  una matroide sobre  $E$  de rango  $r$ . El *polinomio de Tutte* de  $M$  se define como

$$T_M(x, y) = \sum_{A \subseteq E} (x-1)^{r-r(A)} (y-1)^{|A|-r(A)}.$$

Este polinomio es un ejemplo de un *invariante de Tutte-Grothendieck*. Un estudio detallado acerca de estos invariantes se encuentra en [21].

Por ser un invariante de este tipo, el polinomio de Tutte satisface las siguientes relaciones de recurrencia:

(i)  $T_M(x, y) = x T_{M/e}(x, y)$  si  $e$  es un coloop.

(ii)  $T_M(x, y) = y T_{M \setminus e}(x, y)$  si  $e$  es un loop.

(iii)  $T_M(x, y) = T_{M \setminus e}(x, y) + T_{M/e}(x, y)$  si  $e$  no es un loop ni un coloop.

<sup>1</sup>El término signada se refiere a que podría haber sumandos negativos.



**Lema 3.1.9.** *Sea  $M$  una matroide sobre  $E$  y  $M^*$  su matroide dual. Entonces*

$$T_M(x, y) = T_{M^*}(y, x).$$

*Demostración.*

$$\begin{aligned} T_M(x, y) &= \sum_{A \subseteq E} (x-1)^{r-r(A)} (y-1)^{|A|-r(A)} \\ &= \sum_{A \subseteq E} (x-1)^{|E \setminus A| - r^*(E \setminus A)} (y-1)^{|E| - r - r^*(E-A)} \\ &= \sum_{A \subseteq E} (x-1)^{|X| - r^*(X)} (y-1)^{r^* - r^*(X)} \end{aligned}$$

donde  $X = E \setminus A$ . □

A continuación listamos otras propiedades de  $T_M(x, y)$  las cuales proveen mucha información acerca de la matroide  $M$ :

1.  $T_M(2, 1)$  cuenta el número subconjuntos independientes de  $M$ , pues  $T_M(2, 1) = \sum_{A \subseteq E} 0^{|A|-r(A)}$ . Para lograr que estos términos sumen, el exponente deber ser 0, esto se tiene cuando  $|A| = r(A)$ , igualdad que satisfacen únicamente los subconjuntos independientes.
2.  $T_M(1, 2)$  nos dice el número de *conjuntos generadores*. Estos son los subconjuntos de  $E$  que contienen una base.
3.  $T_M(1, 1)$  cuenta el número de bases de la matroide.
4.  $T_M(2, 2)$  es el cardinal del conjunto de partes de  $E$ ,  $\mathcal{P}(E)$ .
5.  $T_M(0, 0) = 0$ .

Las propiedades 2 – 4 se prueban de la misma forma que probamos la propiedad 1.

Para la propiedad 5 basta usar las recurrencias que satisface  $T_M(x, y)$ . Pues en caso de que exista un loop o un coloop en la matroide, (i) y (ii) garantizan que el término independiente de  $T_M$  es 0. Si no hay loops o coloops, usando un argumento inductivo y (iii) llegamos a la misma conclusión.

Dejaremos como ejercicio para el lector la prueba del siguiente Teorema.

**Teorema 3.1.10.** *Si una matroide  $M$  tiene como componentes conexas las submatroides  $M_1, \dots, M_k$  entonces*

$$T_M(x, y) = \prod_{i=1}^k T_{M_i}(x, y)$$

A continuación introduciremos otro invariante muy importante en la teoría de matroides, el cual puede caracterizarse en términos del polinomio de Tutte.

**Definición 3.1.11.** *Sea  $M$  una matroide sobre  $[n]$  de rango  $r$ . Definimos el invariante beta de  $M$  como*

$$\beta(M) = (-1)^r \sum_{A \subseteq [n]} (-1)^{|A|} r(A).$$

**Lema 3.1.12.** Si  $T_M = \sum_{i,j} b_{i,j} x^i y^j$  es el polinomio de Tutte de la matroide  $M$  entonces  $\beta(M) = b_{1,0}$ . Mas aún,  $\beta(M) = b_{0,1}$  si  $E \geq 2$ .

*Demostración.* Para poder aislar el coeficiente de  $x$  en 3.1.3 procedemos de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} b_{1,0} &= \left[ \frac{d}{dx} T_M(x, 0) \right]_{x=0} \\ &= \sum_{A \subseteq E} (-1)^{|A|-r(A)} (-1)^{r-r(A)-1} (r-r(A)) \\ &= (-1)^r \sum_{A \subseteq E} (-1)^{|A|-1} (r-r(A)) \\ &= (-1)^r \sum_{A \subseteq E} (-1)^{|A|} r(A). \end{aligned}$$

De forma análoga se puede probar que  $b_{10} = b_{01}$  siempre y cuando  $|E| \geq 2$ . □

Otras propiedades interesantes acerca del invariante beta se listan a continuación:

**Proposición 3.1.13.** Sea  $M$  una matroide de rango  $r$  y  $M^*$  su dual. Entonces

1.  $\beta$  es invariante bajo dualidad. Esto es,  $\beta(M) = \beta(M^*)$ .
2. Si  $e$  no es un loop ni un coloop de  $M$  entonces

$$\beta(M) = \beta(M/e) + \beta(M \setminus e).$$

3.  $\beta(M) = 0$  si  $M$  es desconexa y es positivo en cualquier otro caso.

*Demostración.* 1. En virtud del Lema 3.1.9, y usando el hecho que  $\beta(M) = b_{1,0} = b_{0,1}$  se tiene el resultado.

2. Esta propiedad se tiene gracias a que el polinomio de Tutte satisface la misma recurrencia y el invariante beta se puede definir en términos de este polinomio.
3. Para probar esta propiedad basta argumentar inductivamente usando la propiedad anterior.
4. Ver que el invariante beta es no negativo no es difícil usando un argumento inductivo en la propiedad anterior. Ahora, en virtud del Teorema 3.1.10 vemos que si  $M$  tiene más de una componente entonces el coeficiente de  $x$  en  $T_M(x, y)$  es cero. Por lo tanto,  $\beta(M) = 0$  si  $M$  es desconexa. □

Definamos el invariante signado  $\tilde{\beta}$  de  $M$  para establecer nuestros próximos resultados de una manera más elegante, así:

$$\tilde{\beta}(M) = (-1)^{r+1} \beta(M).$$

Ahora estamos listos para uno de nuestros resultados principales, el cual nos permite dar una interpretación geométrica del invariante beta.

**Teorema 3.1.14.** [1] Sea  $M$  una matroide de rango  $r$  sobre  $[n]$  y sea  $P_M$  su politopo matroidal. Entonces

$$P_M = \sum_{A \subseteq [n]} \tilde{\beta}(M/A) \Delta_{[n]-A}$$

*Demostración.* En vista de la proposición 3.1.8 y el Ejemplo 3.1.5 tenemos que  $P_M = \sum_{I \subseteq [n]} y_I \Delta_I$  donde

$$\begin{aligned} y_I &= \sum_{J \subseteq I} (-1)^{|I|-|J|} (r - r(E - J)) = - \sum_{J \subseteq I} (-1)^{|I|-|J|} r(E - J) \\ &= - \sum_{E-J \supseteq E-I} (-1)^{|E-J|-|E-I|} (r(E - J) - r(E - I)) \\ &= - \sum_{X \subseteq I} (-1)^{|X|} (r(E - I \cup X) - r(E - I)) \\ &= - \sum_{X \subseteq I} (-1)^{|X|} r_{M/(E-I)}(X) = \tilde{\beta}(M/(E - I)) \end{aligned}$$

como queríamos.  $\square$

**Ejemplo 3.1.15.** Sea  $M$  una matroide sobre  $[4]$  con bases  $\mathcal{B} = \{12, 13, 14, 23, 24\}$ . Por el Teorema 3.1.14 tenemos que  $P_M$  se descompone de la forma  $P_M = \Delta_{234} + \Delta_{134} + \Delta_{12} - \Delta_{1234}$  como se ve en la Figura 3.3

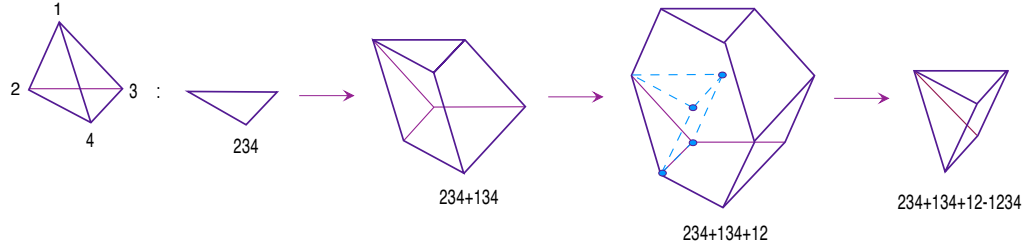


Figura 3.3: Descomposición como sumas signadas de Minkowski..

Ahora, postulemos algunas observaciones en torno al Teorema 3.1.14.

- Generalmente la mayoría de los términos en la suma del Teorema 3.1.14 son cero (ya que  $\beta(M) = 0$  si  $M$  es desconexa). Los términos diferentes de cero corresponden a los *flats coconexos*  $A$ , los que definiremos como los conjuntos  $A$  tales que  $M/A$  es conexa. A partir de la definición de conexidad es claro que estos conjuntos son de hecho flats de  $M$ , pues al contraer por ellos, obtenemos una matroide sin loops.
- A pesar de que una matroide y su dual tienen politopos matroidales congruentes, el Teorema 3.1.14 da descomposiciones diferentes para ellos. Por ejemplo, si  $M = U_{2,3}$  entonces  $P_M = \Delta_{12} + \Delta_{23} + \Delta_{13} - \Delta_{123}$  mientras que  $M^* = U_{1,3}$  y la descomposición que obtenemos en este caso es simplemente  $P_{M^*} = \Delta_{123}$ . Entonces en unos casos es más sencillo trabajar con la descomposición de la matroide dual, porque puede resultar más sencilla.

## 3.2. Volumen de $P_M$

Nuestro objetivo en esta sección es calcular de forma explícita el volumen del politopo matroidal  $P_M$ . Demos una motivación geométrica algebraica para el cálculo del volumen del politopo  $P_M$ .

Sea  $G_{k,n}$  la grassmanniana  $k$ -dimensional en  $\mathbb{C}^n$ . Dado un punto  $p \in G_{k,n}$  tenemos que  $p$  se puede representar por medio de una matriz  $k \times n$  de rango  $k$ . Las *coordenadas de Plücker* de  $p$  están dadas por los  $\binom{n}{k}$  menores maximales de  $p$ . La colección de  $k$ -menores maximales de  $p$  diferentes de cero conforman la colección de bases de una matroide. Esto genera una *estratificación* de forma que dada una matroide  $M$  sobre  $[n]$  de rango  $k$ , le asociamos la colección de  $k$ -espacios vectoriales en  $\mathbb{C}^n$  cuyas coordenadas de Plücker no nulas coinciden con las bases de la matroide  $M$ . Esta estratificación fue considerada primero por Gelfand, Goresky, MacPherson y Serganova en [11]. Ahora, consideremos la acción ejercida por el toro  $\mathbb{T} = \mathbb{C}^n$  de forma que dado  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$  y  $(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{T}$  entonces  $(t_1, \dots, t_n) \cdot (x_1, \dots, x_n) = (t_1 x_1, \dots, t_n x_n)$ . Esta acción se puede extender a una acción en  $G_{k,n}$  de forma que la órbita de  $p$  bajo esta acción  $\mathbb{T} \cdot p$  es una variedad tórica  $X_p$ . De esta forma, el politopo asociado a  $M$  coincide con el politopo asociado a la variedad  $X_p$ . Finalmente, el volumen del politopo  $P_M$  coincide con el grado de la variedad  $X_p$  vista como una subvariedad del espacio proyectivo complejo  $\mathbb{C}\mathbb{P}^{\binom{n}{k}-1}$ .

### 3.2.1. Volúmenes mixtos y volumen de $P_M$

**Proposición 3.2.1.** [14] *Sea  $n$  un entero positivo fijo. Entonces existe una única función  $\text{Vol}(P_1, \dots, P_n)$  definida sobre  $n$ -tuplas de politopos en  $\mathbb{R}^n$ , llamada volumen mixto de  $P_1, \dots, P_n$ , tal que, para toda colección de politopos  $Q_1, \dots, Q_m$  en  $\mathbb{R}^n$  y para números reales no negativos  $y_1, \dots, y_m$ , el volumen de la suma de Minkowski  $y_1 Q_1 + \dots + y_m Q_m$  es el polinomio dado por*

$$\text{Vol}(y_1 Q_1 + \dots + y_m Q_m) = \sum_{i_1, \dots, i_n} \text{Vol}(Q_{i_1}, \dots, Q_{i_n}) y_{i_1} \cdots y_{i_n}$$

sumando sobre todas las  $n$ -tuplas ordenadas  $(i_1, \dots, i_n)$  con  $1 \leq i_r \leq m$ .

**Ejemplo 3.2.2.** Sean  $T = Q_1$  y  $S = Q_2$  el triángulo y el segmento de recta de la Figura 3.2 a), respectivamente, y sean  $a, b \geq 1$ . Por un lado, usando la proposición 3.2.1 tenemos que

$$\text{Vol}(aQ_1 + bQ_2) = a^2 \text{Vol}(Q_1, Q_1) + 2ab \text{Vol}(Q_1, Q_2) + b^2 \text{Vol}(Q_2, Q_2). \quad (3.4)$$

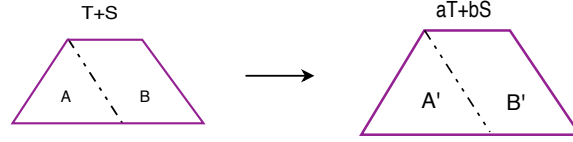
Por otra parte, si subdividimos el politopo  $aT + bS$  de una buena forma, de manera que nos sea sencillo calcular su volumen, como vemos en la Figura 3.4, tenemos que

$$\text{Vol}(aQ_1 + bQ_2) = \text{Vol}(A') + \text{Vol}(B') = a^2 \text{Vol}(A) + ab \text{Vol}(B). \quad (3.5)$$

Igualando los coeficientes de 3.4 y 3.5 tenemos que

$$\text{Vol}(Q_1, Q_1) = \text{Vol}(A), \quad 2\text{Vol}(Q_1, Q_2) = \text{Vol}(B), \quad \text{Vol}(Q_2, Q_2) = 0.$$

Esto sugiere que el volumen mixto  $\text{Vol}(Q_1, Q_1)$  es simplemente el volumen del politopo  $Q_1$  (que en este caso es el área). De la misma forma,  $\text{Vol}(Q_2, Q_2) = 0$ , pues el área de un segmento de recta es cero. Finalmente,  $2\text{Vol}(Q_1, Q_2)$  es el área del politopo que resulta de la combinación entre  $Q_1$  y  $Q_2$ .

Figura 3.4: Volumen mixto de dos politopos en  $\mathbb{R}^2$ .

El ejemplo anterior sugiere cierta relación entre el volumen mixto de dos politopos  $P, Q$  en  $\mathbb{R}^2$  y su área. A saber,

$$2\text{Vol}(P, Q) = \text{Vol}(P + Q) - \text{Vol}(P) - \text{Vol}(Q).$$

Para estudiar de forma profunda los volúmenes mixtos y su relación con variedades tóricas, [10] es una muy buena referencia.

En la proposición 3.2.1 vemos que no se consideran sumandos negativos. En la siguiente proposición veremos que podemos extender este resultado para cualquier suma signada de Minkowski.

**Proposición 3.2.3.** [1] Si  $P = y_1Q_1 + \dots + y_mQ_m$  es una suma signada de Minkowski de politopos en  $\mathbb{R}^n$ , entonces

$$\text{Vol}(y_1Q_1 + \dots + y_mQ_m) = \sum_{i_1, \dots, i_n} \text{Vol}(Q_{i_1}, \dots, Q_{i_n}) y_{i_1} \dots y_{i_n}$$

sumando sobre todas las  $n$ -tuplas ordenadas  $(i_1, \dots, i_n)$  con  $1 \leq i_r \leq m$ .

*Demostración.* Primero probaremos que

$$\text{Vol}(A - B) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \text{Vol}(A, \dots, A, B, \dots, B) \quad (3.6)$$

cuando  $B$  es un sumando de Minkowski de  $A$  en  $\mathbb{R}^n$ . Sea  $A - B = C$ . Por la proposición 3.2.1 tenemos que para  $t \geq 0$

$$\text{Vol}(C + tB) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \text{Vol}(C, \dots, C, B, \dots, B) t^k =: f(t)$$

y nuestro objetivo es calcular  $\text{Vol}(C) = f(0)$ . De nuevo, gracias a la proposición 3.2.1 tenemos que para  $t \geq 0$

$$\text{Vol}(A + tB) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \text{Vol}(A, \dots, A, B, \dots, B) t^k =: g(t). \quad (3.7)$$

Notemos que  $A + tB = C + (t+1)B$  y por lo tanto  $g(t) = f(t+1)$  siempre que  $t \geq 0$ . Entonces  $g(t) = f(t+1)$  como polinomios y  $\text{Vol} C = f(0) = g(-1)$ . Así, sustituyendo en 3.7 obtenemos el resultado deseado.

Ahora que sabemos que 3.6 se tiene, estamos listos para concluir la prueba de esta proposición.

Separaremos la suma de Minkowski dada para  $P$  en la parte positiva y la parte negativa así:  $P = Q - R$  donde  $Q = x_1Q_1 + \dots + x_rQ_r$  y  $R = y_1R_1 + \dots + y_sR_s$  con  $x_i, y_i \geq 0$ . Para  $t > 0$  podemos escribir

$Q + tR = \sum x_i Q_i + \sum t y_j R_j$ , esto nos da dos expresiones para  $\text{Vol}(Q + tR)$  de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \text{Vol}(Q + tR) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \text{Vol}(Q, \dots, Q, R, \dots, R) t^k \\ &= \sum_{\substack{1 \leq i_a \leq r \\ 1 \leq j_b \leq s}} \text{Vol}(Q_{i_1}, \dots, Q_{i_{n-k}}, R_{j_1}, \dots, R_{j_k}) x_{i_1} \cdots x_{i_{n-k}} y_{j_1} \cdots y_{j_k} t^k \end{aligned}$$

Estas dos expresiones deben ser iguales como polinomios. En principio, no podemos sustituir  $t = -1$  en esta ecuación, pero lo que podemos hacer es usar la fórmula para  $\text{Vol}(Q - R)$  de 3.6, luego podemos sustituir coeficiente por coeficiente. Esto concluye nuestra prueba.  $\square$

Ahora, presentaremos uno de nuestros principales resultados el cual nos permite calcular el volumen de cualquier politopo matroidal como una aplicación de la teoría de permutaedros generalizados dada por Postnikov.

El volumen de un politopo  $P$   $(n-1)$ -dimensional en  $\mathbb{R}^n$  lo estamos considerando como el volumen euclídeo en  $\mathbb{R}^{n-1}$  del politopo obtenido al proyectar las primeras  $(n-1)$  coordenadas de  $P$  en  $\mathbb{R}^{n-1}$ .

**Teorema 3.2.4.** *Sea  $M$  una matroide conexa sobre  $[n]$ . Entonces el volumen de su politopo matroidal,  $P_M$ , esta dado por*

$$\text{Vol } P_M = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{(J_1, \dots, J_{n-1})} \tilde{\beta}(M/J_1) \tilde{\beta}(M/J_2) \cdots \tilde{\beta}(M/J_{n-1}),$$

donde la suma es sobre las colecciones ordenadas de subconjuntos  $J_1, \dots, J_{n-1} \subseteq [n]$  tales que, para cualesquier  $i_1, \dots, i_k$  distintos se tiene que  $|J_{i_1} \cap \cdots \cap J_{i_k}| < n - k$ .

*Demostración.* En [16, Corolario 9.4] Postnikov da una fórmula para el volumen de una suma (positiva) de Minkowski de símlices. Para poder calcular el volumen de  $P_M$  necesitaríamos calcular el volumen de una suma signada de Minkowski de símlices y la proposición 3.2.3 nos permite hacerlo, logrando así este maravilloso resultado.  $\square$

Hay otra forma de caracterizar las tuplas  $(J_1, \dots, J_{n-1})$  que intervienen en el cálculo del volumen de  $P_M$ . Éstas son tuplas tales que, para todo  $k \in [n]$ , la colección  $([n] - J_1, \dots, [n] - J_{n-1})$  tiene un sistema de distintos representantes diferentes de  $k$ ; es decir, existen  $a_1 \in [n] - J_1, \dots, a_{n-1} \in [n] - J_{n-1}$  con  $a_i \neq a_j$  si  $i \neq j$  y  $a_i \neq k$  para todo  $i$ . Postnikov se refiere a esta propiedad como *DMC* por sus siglas en inglés (dragon marriage condition). Por tanto, en nuestro caso decimos que  $([n] - J_1, \dots, [n] - J_{n-1})$  satisface la DMC.

**Ejemplo 3.2.5.** Si tomamos  $M = U_{2,3}$ , tenemos que el volumen euclideo 2-dimensional de  $P_M$  es  $\frac{1}{2}$ . Por otro lado, sabemos que  $P_{M^*}$  tiene una descomposición más sencilla que  $P_M$ . Usando el Teorema 3.2.4 tenemos que

$$\text{Vol } P_{M^*} = \frac{1}{2!} \left( \tilde{\beta}(M)^2 \right) = \frac{1}{2},$$

el cual es el mismo volumen de  $P_M$ .

Nótese que dada una matroide  $M$ , su politopo matroidal  $P_M$  es una sección del cubo unitario de dimensión  $n$ ,  $C = \{0, 1\}^n$ , pues los vértices de  $P_M$  son un subconjunto propio de los vértices de  $C$ , tal y como se muestra en la Figura 3.1.

Debido a que en las hipótesis del Teorema 3.2 pedimos que  $M$  sea conexa, podemos garantizar que el volumen de  $P_M$  es  $n - 1$ . De manera más general, si tenemos  $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_k$  entonces el volumen ( $(n - k)$ -dimensional) de  $P_M$  es  $\text{Vol } P_M = \text{Vol } P_{M_1} \cdots \text{Vol } P_{M_k}$ .

## Capítulo 4

# El Politopo de independientes

### 4.1. Q-Politopos

En esta sección estableceremos resultados análogos a los hechos en las Secciones 3.1 y 3.2, pero esta vez para el *politopo de independientes* de una matroide  $M$ .

De manera análoga a la construcción de  $P_M$ , es natural pensar que el politopo de independientes de una matroide  $M$  tenga un vértice por cada conjunto independiente de la matroide.

**Definición 4.1.1.** Sea  $M$  una matroide sobre  $[n]$ . El politopo de independientes  $I_M$  de  $M$  está dado por

$$I_M = \text{conv}\{e_I : I \text{ es un independiente de } M\}.$$

Nótese que el conjunto  $\emptyset$  hace parte de los independientes de cualquier matroide. Por convención, al conjunto  $\emptyset$  le asociaremos el punto  $(0, \dots, 0)$ , esto implica que  $I_M$  tiene una dimensión más que  $P_M$ .

En el caso de  $I_M$  tenemos que su descripción usando desigualdades está dada por:

$$I_M = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0 \text{ para } i \in [n], \sum_{i \in A} x_i \leq r(A) \text{ para todo } A \subseteq E \right\}. \quad (4.1)$$

Nótese lo similares que son las desigualdades que describen tanto a  $P_M$  como a  $I_M$ . La única diferencia es que el politopo  $I_M$  no está contenido en el hiperplano  $\sum_{i \in E} x_i = r$ .

El politopo de independientes  $I_M$  no es un permutaedro generalizado pero pertenece a la familia de *Q-politopos*. Un Q-politopo es un politopo de la forma

$$Q_n(\{z_J\}) = \{(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n : t_i \geq 0 \text{ for all } i \in [n], \sum_{i \in J} t_i \leq z_J \text{ for all } J \subseteq [n]\}$$

donde  $z_J$  es un número real no negativo, para cada  $J \subseteq [n]$ .

Los Q-politopos también pueden ser expresados como suma signada de Minkowski de simplices, aunque esta vez nuestro simplices no son  $\Delta_J$ s sino  $D_J$ s. Para cada  $J \subseteq [n]$  definimos  $D_J$  como

$$\begin{aligned} D_J &= \text{conv}\{0, e_i : i \in J\} \\ &= Q_n(\{d(J)_I\}) \end{aligned}$$



donde  $d(J)_I = 0$  si  $I \cap J = \emptyset$  y  $d(J)_I = 1$  en otro caso.

Los resultados a continuación se prueban de manera análoga a lo hecho en la Sección 3.1.

**Lema 4.1.2.**  $Q_n(\{z_J\}) + Q_n(\{z'_J\}) = Q_n(\{z_J + z'_J\})$

*Demostración.* Asumamos que los  $z_I$ 's están fijos, luego  $z_I$  es el mínimo valor del funcional  $\sum_{i \in I} t_i$  en  $Q_n\{z_I\}$  y  $z'_I$  es el mínimo valor de  $\sum_{i \in I} t_i$  en  $Q_n\{z'_I\}$  para cada  $I \subseteq [n]$ . Luego  $z_I + z'_I$  es el mínimo valor de  $\sum_{i \in I} t_i$  en  $Q_n\{z_I + z'_I\}$  para cada  $I \subseteq [n]$ .  $\square$

**Proposición 4.1.3.** Para todo  $y_I \geq 0$  tenemos

$$\sum_{I \subseteq [n]} y_I D_I = Q_n(\{z_J\})$$

donde  $z_J = \sum_{I: I \cap J \neq \emptyset} y_I$ .

*Demostración.* Sea  $I'$  un subconjunto no vacío de  $[n]$  y definamos

$$y_I = \begin{cases} 1 & \text{if } I_0 = I \\ 0 & \text{if } I_0 \neq I \end{cases}$$

$$\text{luego } \sum_{I \subseteq [n]} y_I D_I = D_{I'} \text{ y } z_I = \begin{cases} 1 & \text{si } I_0 \subseteq I \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

De esta forma tenemos que

$$\begin{aligned} Q_n\{z_I\} &= \{(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n : t_i \geq 0 \text{ for all } i \in [n], \sum_{i \in I'} t_i \leq 1\} \\ &= \text{conv}\{0, e_i : i \in I'\} \\ &= D_{I'}. \end{aligned}$$

Para generalizar este resultado a sumas de Minkowski de  $D_I$ s hacemos uso del Lema 4.1.2.  $\square$

La siguiente proposición es la piedra angular para la descomposición de  $I_M$ .

**Proposición 4.1.4.** Todo Q-politopo  $Q_n(\{z_J\})$  puede escribirse de forma única<sup>1</sup> como una suma signada de Minkowski de  $D_I$ s como

$$Q_n(\{z_J\}) = \sum_{I \subseteq [n]} y_I D_I,$$

donde

$$y_J = - \sum_{I \subseteq J} (-1)^{|J|-|I|} z_{[n]-I}.$$

*Demostración.* Para probar esta proposición necesitamos invertir la relación existente entre los  $y_I$ s y los  $z_J$ s, sabiendo que  $z_J = \sum_{I: I \cap J \neq \emptyset} y_I$ . Esta igualdad la podemos reescribir como

$$z_{[n]} - z_J = \sum_{I \subseteq [n]-J} y_I$$

y aplicar inclusión-exclusión. Igual que en la Sección anterior, esto lo hacemos primero para el caso en que  $y_I \geq 0$  y luego lo extendemos a cualquier Q-politopo.  $\square$

<sup>1</sup>asumiendo  $y_\emptyset = 0$

Ahora tenemos los ingredientes necesarios para descomponer  $I_M$  como suma signada de Minkowski de  $D_I$ s.

**Teorema 4.1.5.** *Sea  $M$  una matroide de rango  $r$  sobre  $[n]$  y sea  $I_M$  su politopo de independientes. Entonces*

$$I_M = \sum_{A \subseteq E} \tilde{\beta}(M/A) D_{E-A}$$

donde  $\tilde{\beta}$  denota el invariante beta signado.

*Demostración.* Este teorema se sigue de la proposición 4.1.4 y un cálculo idéntico al hecho en el teorema 3.1.14.  $\square$

Nótese lo similares que son los teoremas 3.1.14 y 4.1.5. Esto no es casualidad, para comenzar los vértices de  $P_M$  son un subconjunto de los vértices de  $I_M$ . Más aun,  $P_M$  es la cara maximal de  $I_M$  que maximiza el funcional lineal  $\sum_{i \in [n]} x_i$  y  $\Delta_I$  es la cara maximal de  $D_I$  que maximiza el mismo funcional.

## 4.2. Volumen de $I_M$

El teorema que enunciaremos a continuación nos ayudará con el cálculo del volumen de  $I_M$ . Sea  $A$  un subconjunto finito de  $\mathbb{Z}^n$ . Denotaremos por  $f_A(t_1, \dots, t_n)$  al polinomio dado por

$$f_A(t_1, \dots, t_n) = \sum_{a \in A} \beta_a t_1^{a_1} \cdots t_n^{a_n}$$

donde  $a = (a_1, \dots, a_n)$  y los  $\beta_a$  son ciertos coeficientes complejos. De esta forma, denotaremos por  $Q_A$  al politopo dado por

$$Q_A = \text{conv}\{a : a \in A\}.$$

**Teorema 4.2.1** (Bernstein). *Sea  $n$  un entero positivo fijo y sean  $A_1, \dots, A_n$  subconjuntos finitos de  $\mathbb{Z}^n$ . Entonces el sistema*

$$\begin{cases} f_{A_1}(t_1, \dots, t_n) = 0 \\ \vdots \\ f_{A_n}(t_1, \dots, t_n) = 0 \end{cases}$$

de  $n$  ecuaciones en las variables  $t_1, \dots, t_n$  tiene exáctamente  $n! \text{Vol}(Q_{A_1}, \dots, Q_{A_n})$  soluciones aisladas en  $(\mathbb{C} \setminus \{0\})^n$  siempre que todos los coeficientes de los polinomios  $f_{A_i}$  pertenezcan a cierto conjunto abierto en la topología de Zariski en  $\mathbb{C}^{\sum |A_i|}$ .

A continuación mostraremos la forma de calcular el volumen de  $I_M$  usando la descomposición obtenida en 4.1.5 y el Teorema 4.2.1.

**Teorema 4.2.2.** *Sea  $M$  una matroide conexa sobre  $[n]$  de rango  $r$ . Entonces el volumen de su politopo de independientes,  $I_M$ , está dado por*

$$\text{Vol} I_M = \frac{1}{n!} \sum_{(J_1, \dots, J_n)} \tilde{\beta}(M/J_1) \tilde{\beta}(M/J_2) \cdots \tilde{\beta}(M/J_n)$$

donde la suma es sobre todas las  $n$ -tuplas  $(J_1, \dots, J_n)$  de subconjuntos de  $[n]$  tales que, para  $i_1, \dots, i_k$  distintos, se tiene  $|J_{i_1} \cap \cdots \cap J_{i_k}| \leq n - k$ .

*Demostración.* Gracias al teorema 4.1.5 y la proposición 3.2.1 vemos que es suficiente calcular el volumen mixto  $\text{Vol}(D_{A_1}, \dots, D_{A_n})$  para toda  $n$ -tupla  $(A_1, \dots, A_n)$  de subconjuntos de  $[n]$ . Por el Teorema 4.2.1 sabemos que  $\text{Vol}(D_{A_1}, \dots, D_{A_n})$  es el número de soluciones aisladas en  $(\mathbb{C} - \{0\})^n$  del sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} \beta_{1,0} + \beta_{1,1}t_1 + \beta_{1,2}t_2 + \dots + \beta_{1,n}t_n = 0 \\ \beta_{2,0} + \beta_{2,1}t_1 + \beta_{2,2}t_2 + \dots + \beta_{2,n}t_n = 0 \\ \vdots \\ \beta_{n,0} + \beta_{n,1}t_1 + \beta_{n,2}t_2 + \dots + \beta_{n,n}t_n = 0 \end{cases}$$

donde la condición que cumplen los  $\beta_{i,0}$  y  $\beta_{i,j}$  es que son números complejos genéricos cuando  $j \in A_i$ , y  $\beta_{i,j} = 0$  si  $j \notin A_i$ . Este sistema lineal el cual se puede reescribir como

$$\begin{cases} \beta_{1,1}t_1 + \beta_{1,2}t_2 + \dots + \beta_{1,n}t_n = -\beta_{1,0} \\ \beta_{2,1}t_1 + \beta_{2,2}t_2 + \dots + \beta_{2,n}t_n = -\beta_{2,0} \\ \vdots \\ \beta_{n,1}t_1 + \beta_{n,2}t_2 + \dots + \beta_{n,n}t_n = -\beta_{n,0} \end{cases}$$

tendrá solución única en  $(\mathbb{C} - \{0\})^n$  si es no singular y no tendrá solución en otro caso. En caso de haber solución, dado tenemos que los  $\beta_{i,0}$  son genéricos, tal solución será diferente de cero. Este sistema es no singular cuando el determinante de la matriz de coeficientes es diferente de cero, y por la genericidad de los  $\beta$ s, esto ocurre cuando existen  $a_1, \dots, a_n \in [n]$  diferentes tales que  $a_1 \in A_1, \dots, a_n \in A_n$ . Postnikov se refiere a esta condición diciendo que la colección  $(A_1, \dots, A_n)$  tiene un *sistema de distintos representantes*, o simplemente, SDR. De esta forma concluimos que  $\text{Vol}(D_{[n]-J_1}, \dots, D_{[n]-J_n})$  es 1 si  $([n]-J_1, \dots, [n]-J_n)$  posee un SDR y es 0 en otro caso. Así concluimos la demostración.  $\square$

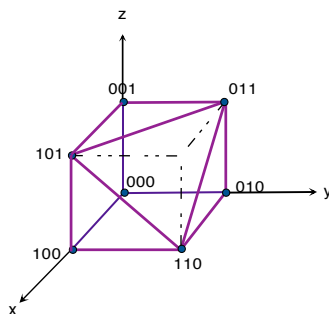
Analícemos de nuevo nuestro ejemplo favorito.

**Ejemplo 4.2.3.** Sea  $M = U_{2,3}$ . Usando el Teorema 4.1.5 tenemos que

$$I_M = D_{12} + D_{13} + D_{23} - D_{123}.$$

pues los flats coconexos de  $M$  son 1, 2, 3 y  $\emptyset$ , pues al contraer por ellos obtenemos una matroide conexa. Por el teorema 4.2.2 tenemos que para calcular el volumen de  $M$  debemos caracterizar las 3-tuplas de estos flats coconexos tales que sus complementos poseen un sistema de distintos representantes. Estas son tuplas de la forma

- $(a, b, c)$  donde  $a, b, c \in [n]$  pero  $a, b, c$  no son iguales a la vez. Estas tuplas contribuyen con un sumando de 1 y hay 24 de estas.
- $(a, b, \emptyset)$  donde  $a, b \in [n]$ . Tenemos 27 de estas triplas contando permutaciones y contribuyen a un sumando de  $-1$ .
- Hay 9 triplas de la forma  $(a, \emptyset, \emptyset)$  contando permutaciones, y estas contribuyen a un sumando de 1.
- La tripla  $(\emptyset, \emptyset, \emptyset)$  contribuye a un sumando de  $-1$ .

Figura 4.1: Politopo de independientes de  $U_{2,3}$ 

De esta forma tenemos que

$$\text{Vol } I_M = \frac{1}{3!}(24 - 27 + 9 - 1) = \frac{5}{6}$$

tal y como queríamos.

Nótese que, en general, dada una matroide  $M$  sobre  $[n]$ , su politopo de independientes  $I_M$  es tal que  $\text{Vol } I_M \leq 1$ , pues éste siempre va a estar contenido en el cubo unitario  $n$ -dimensional, tal y como se muestra en la Figura 4.1.

## Capítulo 5

# Matroides bandera de truncación

En nuestro último capítulo trataremos un caso particular de matroides de Coxeter, a saber, las matroides bandera de truncación. Estableceremos la forma de descomponer los politopos asociados a estas matroides como sumas signadas de Minkowski de símlices y finalmente veremos como calcular su volumen.

### 5.1. Matroides bandera

Sean  $M$  y  $N$  dos matroides sobre el mismo conjunto base  $E$ , de rangos  $r_M$  y  $r_N$ , respectivamente. Asumamos además que  $r_M < r_N$ .

Diremos que  $M$  y  $N$  son *concordantes* si para todo  $X \subset Y \subseteq E$  se satisface

$$r_M(Y) - r_M(X) \leq r_N(Y) - r_N(X).$$

La noción de concordancia tiene varias equivalencias. Una de ellas es que el mapeo identidad de  $N$  a  $M$  es un *mapa fuerte* [6].

Ahora introduciremos las *matroides bandera* las cuales son una subclase muy importante de las matroides de Coxeter. Estas matroides se estudian detalladamente en [6].

**Definición 5.1.1.** Sean  $M_1, \dots, M_m$  matroides concordantes dos a dos sobre  $E$  de rangos  $k_1 < \dots < k_m$ , respectivamente. Ahora, consideremos todas las banderas que se pueden obtener de la forma  $B_1 \subset \dots \subset B_m$  donde  $B_i$  es una base de  $M_i$ . Esta bandera la denotaremos por  $(B_1, \dots, B_m)$ . La colección de todas las banderas de esta forma se denomina *matroide bandera*, la cual denotaremos por  $\mathcal{F}$ . Las matroides  $M_1, \dots, M_m$  se denominan *constituyentes* de  $\mathcal{F}$ .

Como es de esperarse, al empezar a hablar de matroides bandera sentimos curiosidad acerca del politopo asociado a estas.

Sea  $\mathcal{F}$  una matroide bandera y sea  $B = (B_1, \dots, B_m)$  una bandera en  $\mathcal{F}$ . Sea  $v_B = v_{B_1} + \dots + v_{B_m}$  donde para cualquier  $A = \{a_1, \dots, a_i\} \subseteq E$ ,  $v_A = e_{a_1} + \dots + e_{a_i}$ .

**Definición 5.1.2.** El politopo matroidal bandera,  $P_{\mathcal{F}}$ , esta dado por

$$P_{\mathcal{F}} = \text{conv}\{v_B : B \in \mathcal{F}\}.$$

**Ejemplo 5.1.3.** Sea  $\mathcal{F}$  la matroide bandera sobre  $[3]$  con constituyentes  $M_1 = U_{1,3}$  y  $M_2$  con bases  $\{12, 13\}$ . Las banderas pertenecientes a  $\mathcal{F}$  son:

$$F_1 = (1, 12) \quad F_2 = (1, 13) \quad F_3 = (2, 12) \quad F_4 = (3, 13).$$

Los vértices asociados a cada una de estas banderas son, respectivamente,

$$v_{F_1} = 100 + 110 = 210, \quad v_{F_2} = 100 + 101 = 201$$

$$v_{F_3} = 010 + 110 = 120, \quad v_{F_4} = 001 + 101 = 102.$$

Por lo tanto, el politopo matroidal bandera  $P_{\mathcal{F}}$ , esta dado por

$$P_{\mathcal{F}} = \text{conv}\{210, 201, 120, 102\}$$

tal y como se muestra en la Figura 5.1.

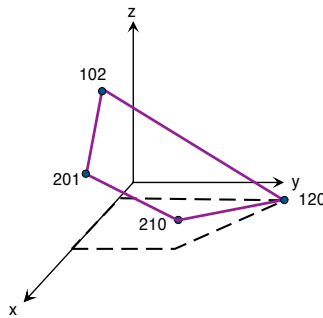


Figura 5.1: Politopo bandera de truncación.

**Teorema 5.1.4.** [6, Cor. 1.13.5] Si  $\mathcal{F}$  es una matroide bandera con constituyentes  $M_1, \dots, M_k$ , entonces  $P_{\mathcal{F}} = P_{M_1} + \dots + P_{M_k}$ .

El Teorema 5.1.4 implica que todo politopo matroidal bandera se puede descomponer como suma de Minkowski de símlices. Haremos esta descomposición con mas detalle para una clase muy especial de matroides bandera, a saber, las *matroides bandera truncadas*.

### 5.1.1. Matroides bandera de truncación

Sea  $M$  una matroide con conjunto base  $E$  y rango  $r$ . Definimos la matroide de *truncación* de rango  $r_i$  de  $M$ , como la matroide cuyas bases son los conjuntos independientes de  $M$  de rango  $i$ . Denotaremos esta matroide como  $M_i$ . La función rango de  $M_i$  está dada por  $r_i(X) = \min\{i, r(X)\}$ . Veamos que las matroides de truncación de  $M$  son concordantes.<sup>1</sup>

Para esto probemos que para todo  $X \subseteq Y \subseteq E$  se tiene que  $r_i(Y) - r_i(X) \leq r_j(Y) - r_j(X)$  para  $i < j$ . Sea  $a = r_i(Y) - r_i(X)$  y  $b = r_j(Y) - r_j(X)$ . Entonces tenemos los siguientes casos:

<sup>1</sup>Nótese que  $M_r = M$ .

Caso 1. Si  $i < j \leq r(Y)$ , tenemos tres posibilidades para  $r(X)$ :

Si  $j \leq r(X)$  entonces  $a = i - i = j - j = b$ .

Si  $i \leq r(X) \leq j$  entonces  $a = 0 \leq j - r_j(X) = b$ .

Si  $r(X) \leq i$  entonces  $a = i - r_i(X) = i - r(X) < j - r(X) = j - r_j(X) = b$ .

Caso 2. Si  $i \leq r(Y) \leq j$  entonces:

Si  $i \leq r(X)$  entonces  $a = i - i = 0$  y  $b = r(Y) - r(X)$ .

Si  $r(X) \leq i$  entonces  $a = i - r(X)$  y  $b = r(Y) - r(X)$ , por lo tanto  $a \leq b$ .

Caso 3. Si  $r(Y) \leq i$ , la desigualdad se sigue trivialmente.

Ahora que sabemos que dada una matroide  $M$  sus truncaciones son concordantes, podemos dar la siguiente definición de Borovik, Gelfand, Vince y White.

**Definición 5.1.5.** [5] *La matroide bandera  $\mathcal{F}(M)$  con constituyentes  $M_1, \dots, M_r$  es una matroide bandera, llamada la matroide bandera de truncación de  $M$ .*

### 5.1.2. Descomposición y Volumen de $P_{\mathcal{F}(M)}$

Motivados por el Teorema 5.1.4 y queriendo establecer una forma explícita para la descomposición como suma signada de Minkowski del politopo  $P_{\mathcal{F}(M)}$ , asociado a cualquier matroide bandera truncada  $\mathcal{F}(M)$ , definimos el *invariante gamma* de  $M$ , así:

$$\gamma(M) = b_{20} - b_{10} \text{ donde } T_M(x, y) = \sum_{i,j} b_{ij} x^i y^j \text{ es el polimio de Tutte de } M.$$

**Proposición 5.1.6.** *El invariante gamma de una matroide esta dado por*

$$\gamma(M) = \sum_{I \subseteq E} (-1)^{r-|I|} \binom{r-r(I)+1}{2}.$$

*Demostración.* Para poder aislar el coeficiente de  $x^2$  menos el coeficiente de  $x$  en el polinomio de Tutte, evaluaremos este polinomio en  $y = 0$ . De esta forma obtenemos solo términos en  $x$  y realizaremos la siguientes operaciones para obtener los coeficientes deseados:

$$\begin{aligned} \gamma(M) &:= \frac{1}{2} \left[ \frac{d^2}{dx^2} (1-x) T_M(x, 0) \right]_{x=0} \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{d^2}{dx^2} \sum_{I \subseteq E} (-1)^{|I|-r(I)+1} (x-1)^{r-r(I)+1} \right]_{x=0} \\ &= \sum_{I \subseteq E} (-1)^{r-|I|} \binom{r-r(I)+1}{2}, \end{aligned}$$

quedando demostrada la proposición. □

A continuación establecemos ciertos hechos acerca del invariante gamma. Sea  $M$  una matroide sobre el conjunto  $E$ :

- Si existe un loop  $e \in E$ , entonces tenemos que

$$T_M(x, y) = yT_{M|(E-e)}(x, y), \text{ por lo tanto } (1-x)T_M(x, 0) = 0, \text{ y } \gamma(M) = 0.$$

- Si existe un coloop  $e \in E$ , entonces tenemos  $T_M(x, y) = xT_{M|(E-e)}(x, y)$ .

Notemos que para obtener  $b_{20} - b_{10}$  en  $T_M(x, y)$ , en la expresión anterior, solo necesitamos saber  $b_{10} - b_{00}$  en  $T_{M/e}(x, y)$ . Pero  $b_{10} = \beta(M/e)$  siempre es no negativo (si  $M$  no es la matroide trivial). Por otra parte, sabemos que  $b_{00} = 0$  (excepto por el caso trivial). Por tanto, en este caso vemos que  $\gamma(M) \geq 0$ .

- Si  $|E| = 1$  entonces  $T_M(x, y) = y$  si  $M$  es un loop, por lo tanto  $\gamma(M) = 0$ . Si  $M$  es un coloop  $T_M(x, y) = x$  entonces  $\gamma(M) = -1$ .
- Si  $|E| = 2$  entonces  $\gamma(M) = -1$  si no hay loops o coloops en  $M$ . Si existe un loop en  $M$  entonces  $\gamma(M) = 0$ . Finalmente, si ambos elementos en  $M$  son coloops entonces  $\gamma(M) = 1$ .

Aunque el invariante beta es no negativo, el invariante gamma puede variar en signo y magnitud. En particular,  $\gamma(U_{k,n}) = -\binom{n-3}{k-2}$ , aunque  $\gamma(U_{k,n} \cup c) = \binom{n-2}{k-1}$  donde  $U_{k,n} \cup c$  representa la matroide uniforme  $U_{k,n}$  con un coloop anadido.

De la misma forma que hicimos con el invariante beta, definamos el *invariante gamma signado* de  $M$  como  $\tilde{\gamma}(M) = (-1)^r \gamma(M)$ .

**Teorema 5.1.7.** *El politopo matroidal bandera de truncación de  $M$  puede descomponerse como suma signada de Minkowski de símplexes así:*

$$P_{\mathcal{F}(M)} = \sum_{I \subseteq E} \tilde{\gamma}(M/I) \Delta_{E-I}.$$

*Demostración.* En virtud de los Teoremas 3.1.14 y 5.1.4,  $P_{\mathcal{F}(M)}$  puede expresarse como

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^r P_{M_i} &= \sum_{i=1}^r \sum_{A \subseteq E} y_A \Delta_A \\ &= \sum_{i=1}^r \sum_{I \subseteq E} \sum_{J \subseteq I} (-1)^{|I|-|J|} (i - r_i(E - J)) \Delta_I, \end{aligned}$$



donde  $r_i(A) = \min\{i, r(A)\}$  es la función rango  $M_i$ . Por lo tanto

$$\begin{aligned}
P_{\mathcal{F}(M)} &= \sum_{I \subseteq E} \sum_{J \subseteq I} \sum_{i=1}^r (-1)^{|I-J|} [i - r_i(E-J)] \Delta_I \\
&= \sum_{I \subseteq E} \left[ \sum_{J \subseteq I} (-1)^{|I|-|J|} \sum_{i=r(E-J)+1}^r (i - r(E-J)) \right] \Delta_I \\
&= \sum_{I \subseteq E} \sum_{J \subseteq I} (-1)^{|I-J|} \sum_{k=1}^{r-r(E-J)} k \Delta_I \\
&= \sum_{I \subseteq E} \left[ \sum_{J \subseteq I} (-1)^{|I|-|J|} \binom{r-r(E-J)+1}{2} \right] \Delta_I \\
&= \sum_{I \subseteq E} \left[ \sum_{X \subseteq I} (-1)^{|X|} \binom{r-r(E-I \cup X)+1}{2} \right] \Delta_I \\
&= \sum_{I \subseteq E} \left[ \sum_{X \subseteq I} (-1)^{|X|} \binom{r_{M/(E-I)} - r_{M/(E-I)}(X) + 1}{2} \right] \Delta_I \\
&= \sum_{I \subseteq E} \tilde{\gamma}(M/(E-I)) \Delta_I
\end{aligned}$$

□

**Corolario 5.1.8.** *Si una matroide conexa  $M$  tiene  $n$  elementos, entonces*

$$\text{Vol } P_{\mathcal{F}(M)} = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{(J_1, \dots, J_{n-1})} \tilde{\gamma}(M/J_1) \tilde{\gamma}(M/J_2) \cdots \tilde{\gamma}(M/J_{n-1}),$$

donde la suma es sobre las colecciones de conjuntos  $J_1, \dots, J_{n-1} \subseteq [n]$  tales que, para cualesquier  $i_1, \dots, i_k$  distintos,  $|J_{i_1} \cap \cdots \cap J_{i_k}| < n - k$ .

*Demostración.* La prueba de este corolario se sigue de los Teoremas 3.2.3 y 5.1.7. □

**Ejemplo 5.1.9.** Sea  $M$  la matroide sobre  $E = [3]$  con bases  $\{12, 13\}$ . Entonces la matroide bandera de truncación de  $M$ , es la matroide bandera del Ejemplo 5.1.3. El gráfico de su politopo bandera asociado se muestra en la Figura 5.1, las líneas punteadas muestran la proyección de este politopo sobre  $\mathbb{R}^2$ , lo que permite ver que su volumen 2-dimensional es  $\frac{3}{2}$ . Ahora, usando el Teorema 5.1.7 obtenemos que  $P_{\mathcal{F}(M)} = \Delta_{123} + \Delta_{23}$  (nótese que al contraer 2 o 3 obtenemos una matroide con loops). Como  $\tilde{\gamma}(M) = \tilde{\gamma}(M/1) = 1$ , podemos usar el Corolario 5.1.8 para ver que

$$\text{Vol } P_{\mathcal{F}(M)} = \frac{1}{2!} [\tilde{\gamma}(M/\emptyset) \tilde{\gamma}(M/\emptyset) + \tilde{\gamma}(M/\emptyset) \tilde{\gamma}(M/1) + \tilde{\gamma}(M/1) \tilde{\gamma}(M/\emptyset)] = \frac{3}{2}.$$

## Capítulo 6

# Agradecimientos

Quiero expresar mi más sincera gratitud a Federico Ardila, mi director de tesis, por iniciarme en el estudio de matroides, por darme la oportunidad de contribuir en esta fascinante rama y por resaltar el lado divertido de las matemáticas con su forma clara, sencilla y paciente de enseñar. También quiero agradecer a la Universidad de los Andes por el apoyo otorgado a través de la SFSU-Colombia Combinatorics Initiative y por permitirme culminar mi Maestría. De igual manera agradezco a Jeff Doker por su parte importante en la investigación expuesta en esta tesis. Finalmente, agradezco a mi mamá por no dejarme desfallecer, especialmente desde que comencé mis estudios en matemáticas. Dedico esta tesis a todas estas personas.

# Bibliografía

- [1] F. Ardila, C. Benedetti, and J. Doker. *Matroid polytopes and their volumes*. arXiv:math.CO/0810.3947.
- [2] F. Ardila. *Notas de clase, Teoría de Matroides*. San Francisco State University - Universidad de los Andes, 2007.
- [3] F. Ardila, A. Fink, and F. Rincon. *Valuations for matroid polytope subdivisions*. Canadian Mathematical Bulletin, to appear.
- [4] L. J. Billera, N. Jia, and V. Reiner. *A quasisymmetric function for matroids*. arXiv:math.CO/0606646. Preprint, 2007.
- [5] A. Borovik, I.M. Gelfand, A. Vince, and N. White. *The lattice of flats and its underlying flag matroid polytope*. Ann. Combin. **1** (1997) 17-26.
- [6] A. Borovik, I.M. Gelfand, and N. White. *Coxeter matroids*. Birkhäuser, Boston (2003).
- [7] H. Crapo. *A higher invariant for matroids*. J. Combin. Theory **2** (1967), 406-417.
- [8] J. A. de Loera, D. Haws, and M. Köppe. *Erhart polynomials of matroid polytopes and polymatroids*. arXiv:math.CO/0710.4346v1. Preprint, 2007.
- [9] H. Derksen. *Symmetric and quasisymmetric functions associated to polymatroids*. arXiv:math.CO/0801.4393v1 Preprint, 2008.
- [10] W. Fulton. *Introduction to toric varieties*. Ann. of Math. Stud. 131, Princeton Univ. (1993).
- [11] I.M. Gelfand, M. Goresky, R.D. MacPherson, and V.V. Serganova. *Combinatorial geometries, convex polyhedra, and Schubert cells*. Advances Math. **63** (1987), 301-316.
- [12] L. Lafforgue. *Chirurgie des grassmanniennes*. CRM Monograph Series, **19**. American Mathematical Society, Providence, RI (2003).
- [13] T. Lam and A. Postnikov. *Alcoved polytopes*. Discrete and Computational Geometry **38** (2007), 453-478.
- [14] P. McMullen. *Valuations and Euler-type relations on certain classes of convex polytopes*. Proc. London Math. Soc. **3-35** (1977), 113135.
- [15] J. G. Oxley. *Matroid theory*. Oxford University Press. New York, 1992.

- 
- [16] A. Postnikov. *Permutohedra, associahedra and beyond*. arXiv:math.CO/0507163 v1. Preprint, 2005.
- [17] D. Speyer. *Tropical linear spaces*. arXiv:math.CO/0410455. Preprint, 2004.
- [18] D. Speyer. *A matroid invariant via the K-theory of the Grassmannian*. arXiv:math.CO/0603551. Preprint, 2006.
- [19] R. Stanley. *Eulerian partition of a unit hypercube*. Higher combinatorics, M. Aigner ed. Reidel Dordrecht, Boston (1977).
- [20] B. Sturmfels. *Solving systems of polynomial equations*. CBMS Regional Conference in Mathematics, **97**. AMS (2002).
- [21] D.J.A. Welsh. *Matroid theory*. Academic Press Inc. London (1976).
- [22] N. White. *Theory of matroids*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, **26**. Cambridge University Press (1986).