

LAS DENSIDADES DE PROBABILIDAD EN LOS MODELOS ESTOCÁSTICOS DE VALORACIÓN

POR

JUAN GUILLERMO VÉLEZ CARMONA

UNA TESIS

PRESENTADA AL DEPARTAMENTO

DE MATEMÁTICAS

COMO PARTE DE LOS REQUISITOS

PARA EL GRADO DE

MAGÍSTER EN MATEMÁTICAS

DIRECTOR: ANDRÉS RODRÍGUEZ ARIAS

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES

BOGOTÁ, COLOMBIA

JULIO, 2009

Índice general

1. <i>Las Densidades de Probabilidad en el Tiempo para los MVE</i>	3
1.1. La ecuación FK y la Geometría Diferencial	4
1.2. Acoplamiento del Modelo de Black	7
2. <i>El Modelo SABR</i>	9
2.1. Las densidades del SABR	9
2.1.1. Casos especiales: $\beta=0$ y $\beta=1$	11
3. <i>Implementación del método-Densidades para SABR con $\beta \neq 0,1$</i>	16
3.1. Swap de tasas de interés	16
3.2. Swaption	18
3.3. El ejemplo	18
3.3.1. Ecuación para la función de densidad correspondiente y solución	20
Bibliografía	28

Introducción

El Modelo de Black (también conocido como el modelo Black-76) para el precio forward ha sido ampliamente usado, desde su creación, en los mercados financieros, principalmente para la valoración de *opciones sobre bonos*, de *caps* y *floors* de tasas de interés y de *swaptions* (opciones swap de tasas de interés). Este modelo al igual que su análogo para precios spot de un subyacente, el Modelo de Black-Scholes, ha sido criticado desde la década de los 80, debido a que parte de la hipótesis (lejana a la realidad) de que el precio sigue un Movimiento Browniano Geométrico con volatilidad constante. A finales de los 80, surgen dos corrientes de modelos de valoración que tienen como finalidad, relajar la hipótesis errada de los modelos de Black. Una corriente es la de los Modelos de Volatilidad Local, inspirados en el trabajo de Bruno Dupire [7], que asumen la volatilidad $\sigma_L(f, t)$ como una función (determinística) dependiente únicamente del subyacente y el tiempo. La otra corriente es la de los Modelos de Volatilidad Estocástica (MVE), que nacieron con el Modelo de Hull-White y modelan la volatilidad instantánea del precio, siguiendo un propio proceso de difusión estocástico.

En el año 2002 Hagan et al. publican un artículo titulado *Managing Smile Risk* [5], el cual contiene dos ideas fundamentales: la primera idea es el descubrimiento de que los Modelos de Volatilidad Local, describen (predicen) dinámicas incorrectas de la curva smile; cuando el precio del subyacente baja, los modelos de volatilidad local predicen un movimiento de la curva smile (skew) hacia arriba y cuando el precio del subyacente sube, se predicen valores menores de volatilidad implícita en la smile ¹. Este descubrimiento, significa que el uso de Modelos de Volatilidad Local, produce un manejo erróneo del riesgo y aún posiblemente malas valoraciones.

Como segunda idea, Hagan et al. proponen un MVE para el precio forward, que

¹Al cambio de la smile de volatilidad implícita con respecto al cambio en el precio, se le llama dinámicas de la volatilidad.

bautizan **SABR** (Stochastic Alpha Beta Rho). Desde su aparición, este modelo ha tomado fuerza debido a que es relativamente fácil de implementar y a que predice dinámicas correctas de la smile (skew).

En 2005 Henry-Labordère publica *A General Asymptotic Implied Volatility for Stochastic Volatility Models* [8], trabajo en el cual se explican de manera sencilla unos métodos, vinculados a la geometría que subyace a los MVE, para calcular las densidades de probabilidad y la volatilidad implícita asociadas a un modelo determinado. Allí se muestran los cálculos explícitos de las densidades, para dos casos específicos del Modelo SABR.

El presente trabajo pretende, en primera instancia, generar una impresión de las ideas y conexiones entre temas que expone Henry-Labordère en su trabajo [8], en relación a la manera de calcular las probabilidades condicionales que modelan un subyacente financiero junto con su volatilidad instantánea asociada. En segunda instancia, en el trabajo se busca poner en práctica esta teoría, mostrando cálculos explícitos sobre el modelo SABR correspondiente a un instrumento específico que cuente con condiciones diferentes a las de los cálculos mostrados por Henry-Labordère. Con lo anterior se desea medir la dificultad de implementar esta metodología para tener una idea de lo útil que puede llegar a ser en el contexto de las finanzas cuantitativas.

Capítulo 1

Las Densidades de Probabilidad en el Tiempo para los MVE

Descripción del método

Un Modelo de Volatilidad Estocástica (MVE), consta de dos ecuaciones diferenciales estocásticas: una para describir el proceso de difusión del precio x del activo y otra para describir el proceso de la volatilidad y de tal precio. Se define el MVE por el proceso:

$$dx = b_1(x, y, t)dt + \sigma_1(x, y, t)dW_1, \quad (1.0.1)$$

$$dy = b_2(x, y, t)dt + \sigma_2(x, y, t)dW_2, \quad (1.0.2)$$

$$dW_1dW_2 = \rho dt, \quad (1.0.3)$$

donde W_1 y W_2 son movimientos Brownianos con correlación ρ y las condiciones para el tiempo inicial son $(x_0, y_0) = (\alpha_1, \alpha_2)$.

La ecuación diferencial parcial Forward Kolmogorov (FK), también llamada ecuación de Fokker-Planck, se usa para calcular densidades de probabilidad asociadas a sistemas de ecuaciones diferenciales estocásticas. La Forward Kolmogorov asociada a un MVE como el descrito en (1.0.1)-(1.0.3) es:

$$\frac{\partial p(x, y, t)}{\partial t} = b^i \partial_i p(x, y, t) + g^{ij} \partial_{ij} p(x, y, t), \quad ^1 \quad (1.0.4)$$

con $i, j \in 1, 2$ y con condición inicial,

¹A lo largo de este texto se usa la notación de Einstein de índices repetidos. Ej: $x_i y^i = x_1 y^1 + x_2 y^2 + \dots + x_n y^n$, si $i = 1, 2, \dots, n$.

$$\lim_{t \rightarrow 0} p(x, y, t) = \delta((x, y) - (\alpha_1, \alpha_2)), \quad (1.0.5)$$

siendo δ , la función Delta de Dirac y α_1, α_2 el precio inicial y la volatilidad inicial respectivamente. Los coeficientes $g^{ij} = \frac{1}{2}\sigma_i\sigma_j\rho_{ij}$ son un medio de la covarianza instantanea entre x y y .

1.1 La ecuación FK y la Geometría Diferencial

Podemos interpretar las ecuaciones (1.0.4)-(1.0.5) con un sentido geométrico: El MVE de (1.0.1)-(1.0.3) me representa el movimiento de un punto sobre una superficie (variedad 2 dimensional) \mathcal{M} . Las coordenadas de este punto en un tiempo dado están dadas por (x, y) y las coordenadas en el tiempo 0 son (α_1, α_2) .

La ecuación FK, en este caso, describe las funciones de densidad $p(x, y, t|_{(x_0, y_0)=(\alpha_1, \alpha_2)})$ para los diferentes tiempos, que sirven para calcular la probabilidad de que el punto (x, y) este en cierta vecindad, en un tiempo determinado t y partiendo desde unas coordenadas (α_1, α_2) . Los coeficientes $g_{ij} = \frac{2\rho^{ij}}{\sigma_i\sigma_j}$, correspondientes a la matriz inversa de (g^{ij}) , proporcionan una métrica Riemanniana para \mathcal{M} .

Las matrices de correlaciones y de métrica, y sus correspondientes inversas son entonces así:

$$\begin{aligned} (\rho_{ij}) &= \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}, & (\rho^{ij}) &= \frac{1}{1-\rho^2} \begin{pmatrix} 1 & -\rho \\ -\rho & 1 \end{pmatrix}, \\ (g_{ij}) &= \begin{pmatrix} \frac{2}{\sigma_1^2(1-\rho^2)} & \frac{-2\rho}{\sigma_1\sigma_2(1-\rho^2)} \\ \frac{-2\rho}{\sigma_1\sigma_2(1-\rho^2)} & \frac{2}{\sigma_2^2(1-\rho^2)} \end{pmatrix}, & (g^{ij}) &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1\sigma_2\rho \\ \sigma_1\sigma_2\rho & \sigma_2^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Podemos expresar la ecuación (1.0.4) de FK como:

$$\frac{\partial p(x, y, t)}{\partial t} = D p(x, y, t), \quad (1.1.1)$$

donde $D = b^i\partial_i + g^{ij}\partial_{ij}$ es un operador elíptico de segundo orden de tipo Laplace.

Se puede demostrar que existe una única conexión ∇ sobre un haz lineal \mathcal{L} sobre

\mathcal{M} , y una única sección suave $Q(x, y)$ del haz \mathcal{L} tal que

$$D = g^{ij} \nabla_i \nabla_j + Q(x, y) \quad (1.1.2)$$

$$= g^{-1/2} (\partial_i + \mathcal{A}_i) g^{ij} g^{1/2} (\partial_j + \mathcal{A}_j) + Q(x, y), \quad (1.1.3)$$

donde $g = \det(g_{ij})$ y los A_i son los componentes de una conexión abeliana sobre el haz lineal \mathcal{L} . Estos también definen lo que se conoce como la 1-forma local de conexión: $\mathcal{A} = \mathcal{A}_i dx^i$. Por medio de la métrica y su inversa podemos subir o bajar los índices de acuerdo a las necesidades y al gusto; por ejemplo, $g^{ij} \mathcal{A}_i = \mathcal{A}^j$.

Cuando se escribe D en la forma (1.1.3), a $\partial_t p = Dp$ se le llama ecuación de Núcleo de Calor. Cuando $A_i = 0$ para $i=1,2$ y $Q = 0$, el operador D es el Laplaciano estándar $\Delta = g^{-1/2} \partial_i (g^{1/2} g^{ij} \partial_j)$ y la ecuación FK se convierte en la ecuación de Núcleo de Calor Laplaciano.

Si comparamos la ecuación (1.1.3) con la forma original del operador D podemos obtener fórmulas explícitas para \mathcal{A}^i y para Q :

$$\begin{aligned} b^i \partial_i + g^{ij} \partial_{ij} &= g^{-1/2} [(\partial_i + \mathcal{A}_i)(g^{1/2} g^{ij} (\partial_j + \mathcal{A}_j))] + Q \\ &= g^{-1/2} [\partial_i (g^{1/2} g^{ij}) \partial_j + \partial_i (g^{1/2} g^{ij} \mathcal{A}_j) + g^{1/2} g^{ij} \mathcal{A}_i \partial_j + g^{1/2} g^{ij} \mathcal{A}_i \mathcal{A}_j] + Q \\ &= g^{-1/2} \partial_i (g^{1/2} g^{ij}) \partial_j + g^{ij} \partial_{ij} + g^{-1/2} \mathcal{A}_j \partial_i (g^{1/2} g^{ij}) \\ &\quad + g^{ij} \partial_i \mathcal{A}_j + g^{ij} \mathcal{A}_i \partial_j + g^{ij} \mathcal{A}_i \mathcal{A}_j + Q, \end{aligned}$$

entonces,

$$\begin{aligned} b_i \partial_i &= g^{-1/2} \partial_i (g^{1/2} g^{ij}) \partial_j + g^{-1/2} \mathcal{A}_j \partial_i (g^{1/2} g^{ij}) + g^{ij} \mathcal{A}_j \partial_i \\ &\quad + g^{ij} \partial_i \mathcal{A}_j + g^{ij} \mathcal{A}_i \partial_j + g^{ij} \mathcal{A}_i \mathcal{A}_j \\ &= [g^{-1/2} \partial_j (g^{1/2} g^{ij}) + 2\mathcal{A}^i] \partial_i + g^{-1/2} \mathcal{A}_j \partial_i (g^{1/2} g^{ij}) \\ &\quad + g^{ij} \partial_i \mathcal{A}_j + g^{ij} \mathcal{A}_i \mathcal{A}_j + Q. \end{aligned}$$

Luego,

$$\mathcal{A}_j = g_{ij} \mathcal{A}^i = g_{ij} \frac{1}{2} [b^i - g^{-1/2} \partial_j (g^{1/2} g^{ij})], \quad (1.1.4)$$

$$\begin{aligned} Q &= -g^{-1/2} \mathcal{A}_j \partial_i (g^{1/2} g^{ij}) - g^{ij} \mathcal{A}_i \mathcal{A}_j - g^{ij} \partial_i \mathcal{A}_j \\ &= -g^{ij} b_j \mathcal{A}_i + 2g^{ij} \mathcal{A}_i \mathcal{A}_j - g^{ij} \mathcal{A}_i \mathcal{A}_j - g^{ij} \partial_i \mathcal{A}_j \\ &= g^{ij} [\mathcal{A}_i \mathcal{A}_j - b_j \mathcal{A}_i - \partial_j \mathcal{A}_i]. \end{aligned} \quad (1.1.5)$$

Después de llevar la ecuación FK a la forma de Núcleo de Calor, se pueden utilizar dos herramientas para simplificarla; la primera es aplicar un difeomorfismo de cambio de variables, lo cual nos transforma la métrica y la conexión abeliana. La segunda es usar una *transformación de gauge*, aprovechando la geometría de secciones suaves de haz lineal de las soluciones de la ecuación FK.

Transformación de gauge

La conexión abeliana de la que se ha hablado es una función sobre las secciones suaves del haz lineal \mathcal{L} en las 1 formas de \mathcal{M} , $T^*\mathcal{M}$; $d_{\mathcal{A}} : \sigma \mapsto (\partial_i \sigma + \mathcal{A}_i \sigma) dx^i$.

Una *transformación de gauge*, g , es un automorfismo del haz lineal $\mathcal{L} = \mathcal{M} \times \mathbb{R}$, que manda elementos de una fibra L en otros elementos de la misma fibra, dejando quietos a los de la base \mathcal{M} , cambiando así las coordenadas del haz lineal y esto induce una transformación de la conexión abeliana.

Observese que para un tiempo fijo t , $p(x, y, t|_{(x_0, y_0)}) \in \Gamma(\mathcal{L})$, es decir que las soluciones a la ecuación de Núcleo de calor (1.1.1), son secciones suaves de \mathcal{L} . Veamos entonces el caso específico de transformación de gauge que usaremos más adelante.

Definimos una transformación sobre las soluciones de la ecuación de Núcleo de Calor, dada la condición inicial:

$$p'(x, y, t|_{(x_0, y_0) = (\alpha_1, \alpha_2)}) = e^{\chi(x, y, t) - \chi(\alpha_1, \alpha_2, 0)} p(x, y, t|_{(x_0, y_0)}), \quad (1.1.6)$$

con χ una función real suave sobre $\mathcal{M} \times \mathbb{R}_+$. Esta es una *transformación de gauge*, se cambian las coordenadas y p' satisface entonces la ecuación

$$\begin{aligned} \frac{\partial p'(x, y, t)}{\partial t} &= g^{-1/2} [(\partial_i + \mathcal{A}_i') g^{1/2} g^{ij} (\partial_j + \mathcal{A}_j') + Q'(x, y)] p', \\ \lim_{t \rightarrow 0} p'(x, y, t) &= \delta((x, y) - (\alpha_1, \alpha_2)), \end{aligned} \quad (1.1.7)$$

con $\mathcal{A}_i' = \mathcal{A}_i - \partial_i \chi$ y $Q' = Q + \partial_t \chi$.

Un hecho especial de gran utilidad es que si la 1-forma de conexión \mathcal{A} es exacta con $\mathcal{A} = d\chi$, entonces $\mathcal{A}' = 0$.

1.2 Acoplamiento del Modelo de Black

Los “practicantes”² suelen usar el modelo de Black para la valoración de opciones sobre *bonos*, *swaptions*, *caps*, *floors* y algunos otros instrumentos. Este modelo asume que el precio forward f del activo en el tiempo de expiración se comporta log-normal. Es decir $df = \sigma_0 f dW$ ³, siendo σ_0 la volatilidad del precio. Mostremos cómo el método introducido acopla perfectamente al proceso log-normal:

Ya que este es un proceso de un solo factor (f), la métrica correspondiente, de acuerdo a la fórmula es

$$g_{ff} = \frac{2}{\sigma_0^2 f^2}. \quad (1.2.1)$$

Con ella podemos calcular \mathcal{A}_f y Q utilizando las fórmulas (1.1.4) y (??):

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_f &= g_{ff} \mathcal{A}^f = g_{ff} \left[\frac{1}{2} (-g^{-1/2} \partial_f (g^{1/2} g^{ff})) \right] \\ &= \frac{2}{\sigma_0^2 f^2} - \frac{\sigma_0^2 f}{4} = -\frac{1}{2f}, \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

$$Q = \frac{\sigma_0^2 f^2}{2} \left(\frac{1}{2f^2} - \partial_f \mathcal{A}_f \right) = -\frac{\sigma_0^2}{8}. \quad (1.2.3)$$

La forma $\mathcal{A} = \mathcal{A}_f df$ es exácta. Es decir $\mathcal{A} = d\Lambda$, con $\Lambda = -\frac{1}{2} \ln(f) + C$, siendo C una función que no dependa de f . Así conseguimos que el coeficiente $\mathcal{A}_f' = 0$. Ahora, si tomamos $C = \frac{\sigma_0^2 t}{8}$, entonces $Q = -\partial_t \Lambda$ y así $Q' = 0$.

Utilicemos ahora la herramienta de cambio de coordenadas, aplicando el difeomorfismo dado por $s(f) = \sqrt{2} \frac{\ln(f)}{\sigma_0}$:

$$g_{ss} = g_{ff} \frac{df}{ds} \frac{df}{ds}. \quad (1.2.4)$$

Derivando en $s(f)$ con respecto a s obtenemos:

$$1 = \frac{\sqrt{2}}{\sigma_0} \frac{1}{f} \frac{df}{ds}. \quad (1.2.5)$$

²El termino que se usa en ingles es *practitioners*.

³El Movimiento Browniano Geométrico (GBM) sin *drift* (tendencia).

Luego, $\frac{df}{ds} = \frac{\sigma_0 f}{\sqrt{2}}$. Entonces $g_{ss} = 1$; la métrica euclidea.

Reemplazando en la ecuación (1.1.7) obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 p'}{ds^2} &= \frac{dp'}{dt}, \\ \lim_{t \rightarrow 0} p(s, t) &= \delta(s - s_0). \end{aligned} \quad (1.2.6)$$

La solución a esta ecuación es el Núcleo de Calor (de la ecuación de Núcleo de calor Laplaciano) del espacio Euclideo de dimensión 1:

$$p'(s, t|s_0) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{|s-s_0|^2}{4t}} \quad (1.2.7)$$

$$= \sqrt{g} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{(\ln(\frac{f}{f_0}))^2}{2\sigma_0^2 t}} \quad (1.2.8)$$

$$= p'(f, t|f_0). \quad (1.2.9)$$

Finalmente podemos obtener la solución para las densidades de probabilidad del proceso log-normal, devolviendo la transformación de gauge:

$$p(f, t|f_0) = p'(f, t|f_0) e^{-\Lambda + \Lambda(f=f_0, t=0)} \quad (1.2.10)$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\sigma_0^2 f^2}} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{(\ln(\frac{f}{f_0}))^2}{2\sigma_0^2 t}} e^{\frac{1}{2}\ln(\frac{f}{f_0}) - \frac{\sigma_0^2 t}{8}} \quad (1.2.11)$$

$$= \frac{1}{f\sqrt{2\pi\sigma_0^2 t}} e^{-\frac{(2\ln(\frac{f}{f_0}) - \sigma_0^2 t)^2}{8\sigma_0^2 t}} \quad (1.2.12)$$

$$= \frac{1}{f\sqrt{2\pi\sigma_0^2 t}} e^{-\frac{(\ln(\frac{f}{f_0}) - \frac{\sigma_0^2 t}{2})^2}{2\sigma_0^2 t}}. \quad (1.2.13)$$

Se obtiene así la fórmula para las densidades de probabilidad en los diferentes tiempos para el Movimiento Browniano Geométrico y como caso particular se comprueba la adaptación del Modelo de Black.

Capítulo 2

El Modelo SABR

El modelo SABR (Stochastic- $\alpha\beta\rho$), introducido en [5], es un modelo de volatilidad estocástica, en el que el precio del activo está correlacionado con su volatilidad. Este modelo al igual que el de Black, busca describir el comportamiento de un precio forward f para los diferentes *Strikes*. El SABR se ha convertido en un medio apreciado para manejar el riesgo de la *smile* de volatilidad en mercados donde los activos tienen un solo tiempo de expiración, ya que se ajusta muy bien a la curva de volatilidad implícita, y además predice dinámicas correctas.

La ecuación diferencial estocástica que describe el precio f , está inspirada en el modelo CEV (*Constant Elasticity of Variance*), de un solo factor. La ecuación que describe la volatilidad α es la del proceso log-normal:

$$df_t = \alpha_t C(f_t) dW_1, \quad (2.0.1)$$

$$d\alpha_t = \nu \alpha_t dW_2, \quad (2.0.2)$$

$$dW_1 dW_2 = \rho dt, \quad (2.0.3)$$

donde $C(f) = f^\beta$ con $0 \leq \beta \leq 1$, las condiciones para el tiempo inicial son f_0 y α_0 , y W_1 y W_2 son procesos brownianos con correlación ρ . El parámetro ν es la volatilidad instantánea de α_t .

A continuación, desarrollamos para este modelo el método descrito en el capítulo 1.

2.1 Las densidades del SABR

Comencemos por calcular la métrica $g_{ij} = \frac{2\rho^{ij}}{\sigma_i\sigma_j}$. Recordemos que la matriz inversa a la de correlaciones es $(\rho^{ij}) = \frac{1}{1-\rho^2} \begin{pmatrix} 1 & -\rho \\ -\rho & 1 \end{pmatrix}$. Entonces la matriz de la métrica es:

$$(g_{ij}) = \frac{1}{1 - \rho^2} \begin{pmatrix} \frac{2}{\alpha^2 C^2} & \frac{-2\rho}{\alpha^2 C\nu} \\ \frac{-2\rho}{\alpha^2 C\nu} & \frac{2}{\alpha^2 \nu^2} \end{pmatrix}.$$

Podemos transformar esta métrica a una con curvatura constante para \mathcal{M} , en vista del Teorema de Uniformización:

Teorema 1. *A cualquier superficie simplemente conexa M , se le puede asignar una métrica Riemanniana, de tal forma que M quede con curvatura constante K . Tal métrica es conformemente equivalente a solo una de las tres siguientes métricas:*

1. *Geometría Hiperbólica, $K = -1$: $g_H = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$.*
2. *Geometría Euclídea, $K = 0$: $g_E = dx^2 + dy^2$.*
3. *Geometría Esférica, $K = 1$: $g_S = d\theta^2 + \text{sen}^2(\theta)d\phi^2$ (inducida de la métrica euclídea en \mathbb{R} por medio de las coordenadas esféricas).*

Sin importar cual sea el parámetro β , esta métrica del modelo SABR es conformemente equivalente a la métrica hiperbólica. Una isometría que la transforma apropiadamente es así:

$$\begin{aligned} T : \mathcal{M} &\longrightarrow \mathcal{M} \\ (f, \alpha) &\longmapsto (x = \nu q(f) - \rho\alpha, y = (1 - \rho^2)^2 \alpha), \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

donde $q(f) = \int_{f_0}^f \frac{df'}{C(f')}$.

El cambio de métrica está dado por:

$$g_{i'j'} = g_{ij} \frac{dz^i dz^j}{dw^{i'} dw^{j'}}, \quad (2.1.2)$$

siendo $z_1 = f$, $z_2 = \alpha$, $w_1 = x$ y $w_2 = y$.

Derivando $y = (1 - \rho^2)^2 \alpha$ con respecto a x y con respecto a y , encontramos:

$$\begin{aligned}
0 &= (1 - \rho^2)^{1/2} \frac{d\alpha}{dx} \\
\Rightarrow \frac{d\alpha}{dx} &= 0,
\end{aligned} \tag{2.1.3}$$

$$\begin{aligned}
1 &= (1 - \rho^2)^{1/2} \frac{d\alpha}{dy} \\
\Rightarrow \frac{d\alpha}{dy} &= \frac{1}{(1 - \rho^2)^{1/2}}.
\end{aligned} \tag{2.1.4}$$

Y derivando $x = \nu q(f) - \rho\alpha$ con respecto a x y con respecto a y , encontramos:

$$\begin{aligned}
1 &= \frac{1}{C(f)} \nu \frac{df}{dx} \\
\Rightarrow \frac{df}{dx} &= \frac{C(f)}{\nu},
\end{aligned} \tag{2.1.5}$$

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\nu}{C(f)} \frac{df}{dy} - \rho \frac{d\alpha}{dy} \\
\Rightarrow \frac{df}{dy} &= \frac{\rho \frac{d\alpha}{dy} C(f)}{\nu} \\
&= \frac{\rho C(f)}{\nu(1 - \rho^2)^{1/2}}.
\end{aligned} \tag{2.1.6}$$

Luego, reemplazando debidamente en (2.1.2), descubrimos la métrica:

$$(g_{ij}) = \frac{2}{\nu^2} \frac{1}{y^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.1.7}$$

Las fórmulas que se obtienen para la 1-forma local de conexión \mathcal{A} y para la función Q en este caso son:

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2(1 - \rho^2)} \left(-\partial_f(\ln(C(f))) df + \frac{\rho}{\nu} \partial_f C(f) d\alpha \right), \tag{2.1.8}$$

$$Q = \frac{\alpha^2}{4} \left(C(f) \frac{\partial^2 C(f)}{\partial f^2} - \frac{(\partial_f(C(f)))^2}{2(1 - \rho^2)} \right). \tag{2.1.9}$$

2.1.1 Casos especiales: $\beta=0$ y $\beta=1$

Los casos $\beta=0$ y $\beta=1$ corresponden respectivamente, a modelar el precio como un proceso normal y como un proceso log-normal, dado α fijo.

$\beta = 0$

Si reemplazamos en las fórmulas de arriba nos damos cuenta que $\mathcal{A} = 0$ y $Q = 0$. Ahora, si realizamos un escalamiento del tiempo $t' = \frac{\nu^2}{2}t$ y reemplazamos en nuestra ecuación FK (1.1.3), utilizando el cambio de métrica correspondiente, vemos que el operador D es el Laplaciano de \mathbb{H}^2 y que la ecuación es exactamente la de Núcleo de Calor para el espacio hiperbólico \mathbb{H}^2 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial p(x, y, t')}{\partial t'} &= [y^2(\partial_x^2 + \partial_y^2)] (p(x, y, t')) \\ &= \Delta_{\mathbb{H}^2} p(x, y, t'). \end{aligned} \quad (2.1.10)$$

Cuando decimos que la métrica $g = \frac{1}{y^2}(dx^2 + dy^2)$ corresponde a la Geometría Hiperbólica, estamos pensando en lo que se conoce como el *Modelo del Semiplano Superior* del espacio Hiperbólico 2-dimensional; que no es más que el conjunto de las parejas con segunda coordenada positiva, $\mathbb{H}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y > 0\}$ dotado de esta métrica Riemanniana. Las líneas geodésicas que se obtienen en este modelo son las semirrectas verticales y los semicírculos ortogonales al eje horizontal $y = 0$, como lo ilustran las líneas reteñidas en la siguiente figura.

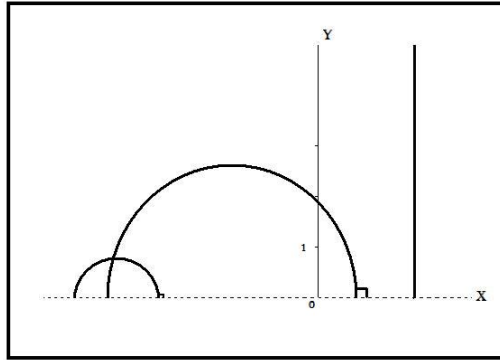


Figura 2.1: Geodésicas en el Modelo del Semiplano Superior \mathbb{H}^2 .

En [9], el autor señala la solución analítica de la ecuación (2.1.10), con la condición inicial de la función delta de Dirac con la que también cuenta nuestro problema.

Solución

Sea $l = d_{\mathbb{H}}((x, y), (x_0, y_0))$, la distancia hiperbólica entre el punto (x, y) y (x_0, y_0) .

La solución de la ecuación (2.1.10), con condición inicial

$$\lim_{t \rightarrow 0} p(x, y, t) = \delta((x, y) - (x_0, y_0)),$$

es:

$$p(x, y, t | (x_0, y_0)) = (4\pi t')^{-3/2} e^{-t'/4} \sqrt{2} \int_l^\infty \frac{z e^{-\frac{z^2}{4t'}} dz}{\sqrt{\cosh(z) - \cosh(l)}}. \quad (2.1.11)$$

Finalmente la densidad de probabilidad para $\beta = 0$ en las coordenadas $[f, \alpha]$ es:

$$p(f, \alpha, t' | (f_0, \alpha_0)) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{1 - \rho^2 \alpha^2 \nu}} (4\pi t')^{-3/2} e^{-\frac{t'}{4}} \int_{l'}^\infty \frac{z e^{-\frac{z^2}{4t'}} dz}{\sqrt{\cosh(z) - \cosh(l')}}}, \quad (2.1.12)$$

con $l' = d_{\mathbb{H}}(-\alpha_0 \rho, (f - f_0)\nu - \alpha \rho)$.

$\beta = 1$

El modelo en este caso está descrito por las ecuaciones:

$$df = \alpha f dW_1, \quad (2.1.13)$$

$$d\alpha = \nu \alpha dW_2. \quad (2.1.14)$$

La métrica que hallamos en la fórmula (2.1.7), al cambiar a coordenadas $[x, y]$, es independiente del β . Reemplazando en la ecuación (2.1.8) y (2.1.9) para buscar \mathcal{A} y Q , encontramos que para este β :

$$\mathcal{A} = \left(-\frac{1}{2f(1 - \rho^2)} \right) df + \frac{\rho}{2(1 - \rho^2)\nu} d\alpha, \quad (2.1.15)$$

$$Q = -\frac{\alpha^2}{8(1 - \rho^2)}. \quad (2.1.16)$$

Ahora, usamos la transformación de gauge, ya que \mathcal{A} es exacta. En efecto, si $\Lambda(f, \alpha) = \frac{1}{2(1 - \rho^2)} (-\ln(f) + \frac{\rho}{\nu} \alpha)$ entonces $d\Lambda = \mathcal{A}$. De esta manera $\mathcal{A}' = 0$.

Reemplazamos entonces en la fórmula (1.1.3), haciendo de nuevo el escalamiento $t' = \frac{\nu^2}{2} t$, utilizando la función Q' , que en coordenadas xy es $Q' = Q = -\frac{y^2}{8(1 - \rho^2)^2}$, y $\mathcal{A}' = 0$:

$$\frac{\partial p'(x, y, t')}{\partial t'} = \left[y^2 (\partial_x^2 + \partial_y^2 - \frac{1}{4\nu^2(1 - \rho^2)^2}) \right] (p'(x, y, t')). \quad (2.1.17)$$

Labordere, en [8], muestra la solución de esta ecuación. Estudiémosla:

Comenzamos por la definición del modelo del subespacio superior para el espacio hiperbólico 3-dimensional, que es análoga a la que se dio para 2 dimensiones:

$\mathbb{H}^3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z > 0\}$ dotado de la métrica Riemanniana $g = \frac{1}{z^2}(dx^2 + dy^2 + dz^2)$. La distancia hiperbólica entre dos puntos $X_1 = (x_1, y_1, z_1)$ y $X_2 = (x_2, y_2, z_2)$ es $d_{\mathbb{H}^3}(X_1, X_2) = \cosh^{-1} \left(1 + \frac{\|X_1 - X_2\|^2}{2z_1 z_2} \right)$.

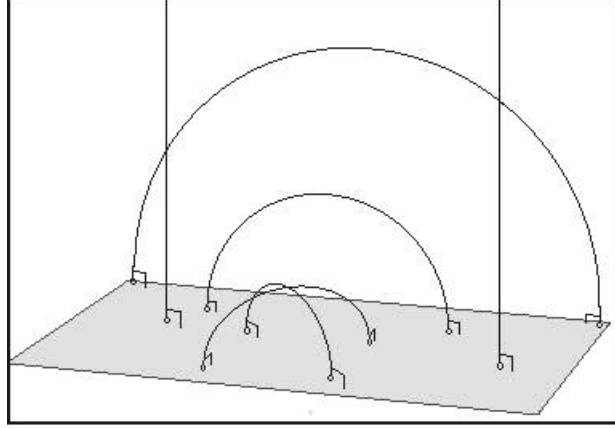


Figura 2.2: Geodésicas en el Modelo del Semiespacio Superior \mathbb{H}^3

El Laplaciano para \mathbb{H}^3 es $\Delta_{\mathbb{H}^3} = z^2(\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2)$ y la ecuación de Núcleo de Calor (Laplaciana) es:

$$\frac{\partial p(x, y, z, t')}{\partial t'} = \Delta_{\mathbb{H}^3} p(x, y, z, t'). \quad (2.1.18)$$

En [10] se expresan las fórmulas de la solución a la ecuación de Núcleo de Calor para cualquier \mathbb{H}^n , las cuales se deducen inductivamente a partir de la solución para $n = 2$ y $n = 3$. En particular la solución para nuestra ecuación con $n = 3$ es:

$$p(X, t'|_{X_0}) = (4\pi t')^{-3/2} \frac{l}{\sinh(l)} e^{-t' - \frac{l^2}{4t'}}, \quad (2.1.19)$$

siendo $X = (x, y, z)$, $X_0 = (x_0, y_0, z_0)$ el punto de condición inicial y $l = d_{\mathbb{H}^3}(X, X_0)$.

Si aplicamos la transformada de Fourier a p a lo largo de la coordenada x obtenemos:

$$\hat{p}(\xi, y, z, t'|_{(x_0, y_0, z_0)}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} p(X, t|_{X_0}) e^{ix\xi} dx. \quad (2.1.20)$$

Entonces \hat{p} satisface la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial \hat{p}}{\partial t'} = z^2(-\xi^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2)\hat{p}. \quad (2.1.21)$$

Esta última ecuación (2.1.21) es igual a la ecuación (2.1.17), si sustituimos en (2.1.21) a p por p' , a y por x , a z por y , y a ξ por $\frac{1}{4\nu^2(1-\rho^2)}$. Entonces la solución de la ecuación (2.1.17) es:

$$p'(x, y, t'|_{(x_0, y_0)}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{iw}{2\nu(1-\rho^2)}} \frac{d_{\mathbb{H}^3}((w, x, y), (0, x_0, y_0))}{(4\pi t')^{3/2} \operatorname{senh}(d_{\mathbb{H}^3}((w, x, y), (0, x_0, y_0)))} dw. \quad (2.1.22)$$

Finalmente para obtener la solución a las funciones de densidad de probabilidad correspondientes al modelo SABR con $\beta = 1$ de las ecuaciones (2.1.13) y (2.1.14), devolvemos la transformación de gauge, haciendo $p = e^{-\Lambda(f, \alpha) + \Lambda(f_0, \alpha_0)} p'$, y devolvemos el cambio de coordenadas, obteniendo:

$$p(f, \alpha, t') = e^{\frac{1}{2(1-\rho^2)}(\ln(\frac{f}{f_0}) + \frac{\rho(\alpha_0 - \alpha)}{\nu})} p'(x, y, t'|_{(x_0, y_0)}), \quad (2.1.23)$$

siendo $x = \nu \ln(\frac{f}{f_0}) - \rho\alpha$, $y = \sqrt{1 - \rho^2}\alpha$, $x_0 = -\rho\alpha_0$ y $y_0 = \sqrt{1 - \rho^2}\alpha_0$.

Capítulo 3

Implementación del método-Densidades para SABR con $\beta \neq 0, 1$

En este capítulo daremos una idea de cómo, todo el método que se ha venido ilustrando se aplica a un derivado de tasas de interés: el *Swaption*. Eso será un pretexto para establecer las densidades de probabilidad del SABR para un β diferente a 0 y 1. Se darán definiciones básicas, antes del ejemplo explícito. Esta parte del trabajo también proporciona una verificación de la aplicabilidad y calculabilidad de lo dicho.

3.1 Swap de tasas de interés

Un *Swap* es un contrato en el que dos partes acuerdan un intercambio monetario futuro. En el caso de los *Swaps de tasas de interés* (que son los más populares), tal intercambio monetario corresponde a un interés sobre un valor notional principal. Los *Swap* más típicos (llamados también “Vainilla”), consisten en que la parte A se compromete a pagar a la parte B cierta tasa fija anualizada de interés y la parte B se compromete a pagar cierta tasa flotante a la parte A. Eso, una vez cada cierto periodo de tiempo y por un determinado número de veces (por ejemplo, intercambio de flujos cada 3 meses durante 4 años, para un total de 16 intercambios). Expongo aquí un ejemplo:

Las partes A y B entran en un contrato a 5 años (lo que se conoce como el *Tenor* de 5 años) el 1ero de enero de 2010, con pagos de intereses cada 3 meses. La parte A pagará a la parte B una tasa fija del 4,7% de un notional de US\$1 Billón de

dolares. La parte B pagará a la parte A la tasa (flotante) *Libor*¹ de 3-meses sobre el mismo notional.

El primer intercambio se llevará a cabo el 1ero de Abril de 2010; la parte A pagará $0,047 \times 1/4 \times \$1000'000.000 = \$11'750.000$ a la parte B. La parte B pagará el valor porcentual en que cotizó la *Libor* 3-meses, el 1ero de enero por $\$1000'000.000$.

El segundo intercambio sucederá el 1ero de julio de 2010. La parte A pagará los mismos $\$11'750.000$, mientras que la parte B deberá pagar la tasa a la que se cotizó la *Libor* 3-meses, el 1ero de abril. Y así sucesivamente hasta el 1ero de enero de 2015, que será el último intercambio del contrato Swap. Aquí acaba el ejemplo.

Ahora bien, la pata fija del contrato debe ser escogida de tal forma que el contrato Swap no valga nada para ninguna de las partes; pues, si se escogiera una pata fija evidentemente alta, la parte que recibe tasa fija estaría dispuesta a pagar alguna cantidad de dinero por el contrato Swap y en el caso contrario estaría más bien esperando cierta paga. Luego, lo que se quiere es la tasa fija que hace que el contrato no tenga valor. Estas tasas fijas que hacen justo al contrato las da el mismo mercado, ya que es bastante liquido, y se pueden buscar las cotizaciones en lo que se conoce como la *Swap Curve*.

A continuación se expone vagamente, la formalización de la teoría. A partir de esta notación, en la siguiente sección se mostrará una manera en que, muchas veces, los *traders* valoran los Swaption. Esto, con la finalidad de ver el porqué de la importancia de calcular funciones de densidad.

Comencemos diciendo que el momento en el que se hace efectivo el Swap y los momentos de intercambio de flujos de dinero, son enumerados en un conjunto $\{T_i\}$ con $i = \alpha, \alpha + 1, \dots, \beta$, donde $T_\alpha = t$ y $T_\beta = T$, y digamos que $\tau_i = T_i - T_{i-1}$. Entonces la pata fija será $\tau_i K$ y la pata flotante será $\tau_i L(T_i, T_{i-1})$, donde $L(T_i, T_{i-1})$ es la Tasa *libor* que se cotizaba en el momento T_{i-1} , pagada en el momento T_i . La función de pagos descontada al tiempo t para la parte que paga la tasa fija es:

$$\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} e^{-\int_t^T r_s ds} \tau_i (L(T_i, T_{i-1}) - K), \quad (3.1.1)$$

donde r_s es la tasa instantánea a la que se incrementa el valor del dinero (la tasa libre de riesgo) y $e^{-\int_t^T r_s ds}$ es el habitual factor de descuento.

¹London Interbank Offer Rate.

3.2 Swaption

El *Swaption* es análogo a las *opciones europeas vainilla*. Es un contrato que da el derecho, más no la obligación, de entrar en un Swap de tasas de interés, con una tasa fija Strike K , en una fecha futura acordada. El spot es precisamente la tasa *forward* que se está cotizando en la *Swap Curve* al momento de entrar en el Swaption, y se supone que es la tasa que hará que el contrato Swap valga cero en el tiempo de expiración del swaption; llamémosle $s_{\alpha\beta T_{ex}}$. Un Swaption con tasa Strike *at the money* sería entonces un contrato con $K=s_{\alpha\beta T}$.

El tiempo de maduración del Swaption T_{ex} suele ser el mismo tiempo en el que comienza el Swap T_α . Luego el valor del Swaption en el tiempo de expiración T_α es:

$$\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i \mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[e^{-\int_{T_\alpha}^{T_i} r_s ds} \mid \mathcal{F}_t \right] (L(T_i, T_{i-1}) - K). \quad (3.2.1)$$

Entonces el valor del Swaption en el tiempo t_0 inicial es:

$$V = \mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[e^{-\int_t^{T_\alpha} r_s ds} \max \left(\sum_{\beta}^{i=\alpha+1} \tau_i \mathbb{E}^{\mathbb{P}} [e^{-\int_{T_\alpha}^{T_i} r_s ds} \mid \mathcal{F}_t] (L(T_i, T_{i-1}, T_i) - K); 0 \right)^+ \right], \quad (3.2.2)$$

con \mathbb{P} , la medida de probabilidad neutral al riesgo.

3.3 El ejemplo

Recurrimos a la información que proporciona el programa de computador *Bloomberg* para tratar un ejemplo real. En el monitor de swaps (SWPM), accedemos a la ventana de Swaptions, donde colocamos las condiciones que se quieren del contrato y el programa nos da una valoración (Ver figura 3.1).

El 28 de mayo de 2009, escogemos un swaption con fecha de expiración el 1ero de diciembre de 2009 (6 meses). La tasa Swap para la Libor 3-meses para el 1ero de diciembre está en 3,386 % (el strike ATM o par coupon). La tasa Strike del contrato es 4,733 % sobre un notional de US\$1000 millones de dolares. El Swap correspondiente tendrá pagos semi-anales, es decir cada seis meses.



Figura 3.1: Monitor de Swaption. Están encerrados en un cuadrado la tasa Strike: 4,733% y la tasa spot: 3,386%. Fuente: Bloomberg L.P.

Los Parámetros

Por medio de la función VCUB, Bloomberg también nos muestra cuales son los parámetros β y ν del modelo SABR que mejor se acoplan (fitean) al contrato a 6 meses. Para ese día β aparacía como 0,52, ν como 0,42 y en principio tomar ρ como 0. Aproximamos β a $\frac{1}{2}$. El parámetro de volatilidad inicial α se calculó a partir de la teoría misma de [5], usando la fórmula:

$$\ln(\sigma_B(f_0, f_0)) = \ln(\alpha) - (1 - \beta)\ln(f) + \ln \left[1 + \left(\frac{(1 - \beta)^2 \alpha^2}{24 f_0^{2-2\beta}} + \frac{\rho \beta \nu}{4 f_0^{1-\beta}} + \frac{(2 - 3\rho^2) \nu^2}{24 \nu^2} \right) T_{ex} \right],$$

de lo que resulta la cúbica:

$$0,154\alpha^3 + 0\alpha^2 + 1,169\alpha - 0,286 = 0.$$

Entonces estimamos α como 0,27, que es la solución real a la ecuación cúbica.

3.3.1 Ecuación para la función de densidad correspondiente y solución

Necesitamos entonces la ecuación de Núcleo de Calor correspondiente a $\beta = \frac{1}{2}$. Calculamos \mathcal{A} y Q de acuerdo a las ecuaciones (2.1.8) y (2.1.9) y obtenemos:

$$\mathcal{A} = -\frac{1}{4f(1-\rho^2)}df + \frac{\rho}{4\sqrt{f}(1-\rho^2)\nu}d\alpha, \quad (3.3.1)$$

$$Q = \frac{\alpha^2(3-2\rho^2)}{32f(\rho^2-1)}. \quad (3.3.2)$$

Quisiéramos que \mathcal{A} fuese una forma exacta, así que busquemos Λ tal que $d\Lambda = \mathcal{A}$. Pero para ello $\Lambda(f, \alpha)$ debería satisfacer las siguientes dos ecuaciones:

$$1) \frac{d\Lambda}{df} = -\frac{1}{4(1-\rho^2)}\frac{1}{f}, \quad (3.3.3)$$

$$2) \frac{d\Lambda}{d\alpha} = \frac{\rho}{4(1-\rho^2)\nu}\frac{1}{\sqrt{f}}, \quad (3.3.4)$$

lo cual no se puede conseguir, luego \mathcal{A} no es exacta.

Así que recurrimos a otro resultado importante que expone Henry-Labordère, atribuido al físico Bryce DeWitt, que dice cómo obtener la solución en serie para el Núcleo de Calor sobre una variedad Riemanniana de dimensión n [4].

Teorema 2. *Sea \mathcal{M} una variedad Riemanniana de dimensión n y $p(m, t|_{m'})$ el Núcleo de Calor de la ecuación de Núcleo de Calor $\partial_t p = Dp$, con el D de la ecuación (1.1.3). Entonces, existen funciones suaves $a_k(m, m') : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ tales que*

$$p(m, t|_{m'}) = \frac{\sqrt{g(m')}}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \sqrt{\Delta(m, m')} \mathcal{P}(m', m) e^{\frac{\sigma(m, m')}{2t}} \sum_{k=0}^{\infty} a_k(m, m') t^k, \quad t \rightarrow 0. \quad (3.3.5)$$

Y cuando la sumatoria que aparece en la fórmula es truncada en el orden N , al lado izquierdo de la igualdad se le llama solución asintótica de orden N .

- $\sigma(m, m') = \frac{1}{2}d^2(m, m')$, es la función de Synge mundial, que es un medio del cuadrado de la distancia geodésica entre m y m' .
- $\Delta(m, m') = g(m)^{-1/2} \det\left(-\frac{\partial^2 \sigma(m, m')}{\partial m \partial m'}\right) g(m')^{-1/2}$ es el determinante de Van Vleck-Morette.

- $\mathcal{P}(m', m) = e^{-\int_{c(m', m)} A_i dx^i}$ es el transporte paralelo de la forma de conexión abeliana a lo largo de un camino geodésico $c: [\theta_0, \theta_1] \rightarrow \mathcal{M}$, de m' a m que minimice la distancia.

Los $a_k(m, m')$ son conocidos como los coeficientes de Núcleo de Calor. Calcularlos es complejo en general, sin embargo $a_0 = 1, \forall(m, m') \in \mathcal{M} \times \mathcal{M}$ y los demás coeficientes $a_k(m, m')$ pueden ser aproximados, siempre que la distancia geodesica entre m y m' sea pequeña, por los evaluados en una pareja de puntos sobre la diagonal $a_k(m, m)$, así por ejemplo $a_1(m, m') \approx a_1(m, m) = \frac{1}{6}R + Q(m)$. El cálculo de estos coeficientes evaluados sobre la diagonal, se hace más complejo a medida que crece el subíndice; parece que hasta el día de hoy no se ha realizado explícitamente para orden mayor a 10.

Ya que las soluciones que se están buscando corresponden a un swaption con tiempo de expiración corto, se puede calcular paso a paso la solución asintótica para los diferentes tiempos t intermedios de las densidades de probabilidad asociadas al problema de nuestro ejemplo con $\beta = 1/2$.

Solución Asintótica de orden 1

Podemos realizar de nuevo un cambio de variable que nos lleva a la métrica hiperbólica dado por: $x = 2(\sqrt{f} - \sqrt{f_0})\nu - \alpha\rho, y = \sqrt{1 - \rho^2}\alpha$. En nuestro caso m' es $(x_0, y_0) = (0, 104; 0, 238)$, que provienen de $f_0 = 0, 0338$ y $\alpha_0 = 0, 27$.

1. $\sqrt{g(x_0, y_0)} = \frac{1}{y_0^2} = 17, 61$.

2. La distancia geodésica para el Semiplano Superior con la métrica hiperbólica es

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{H}}((x, y), (x_0, y_0)) &= \cosh^{-1} \left(1 + \frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{2yy_0} \right) \\ &= \cosh^{-1} \left(1 + \frac{2, 098 ((x - 0, 104)^2 + (y - 0, 238)^2)}{y} \right) \end{aligned}$$

3. $\sigma((x, y), (x_0, y_0)) = \frac{1}{2}d_{\mathbb{H}}^2 = \frac{1}{2}[\cosh^{-1} \left(\frac{2, 098((x-0,104)^2+(y-0,238)^2)}{y} + 1 \right)]^2$, que en coordenadas $[f, \alpha]$ es:

$$\frac{1}{2} \cosh^{-1} \left(\frac{1, 923((\alpha-0,26)^2+(0,84(\sqrt{f}-0,194)+2,6 \times 10^{-15})^2)}{\alpha} + 1 \right)^2.$$

4. Después de manipulaciones algebraicas se consigue el $\Delta((x, y), (x_0, y_0))$ para el modelo SABR que figura en [8]:

$$\begin{aligned} \Delta((x, y), (x_0, y_0)) &= \frac{d_{\mathbb{H}}((x, y), (x_0, y_0))}{\sinh(d_{\mathbb{H}}((x, y), (x_0, y_0)))} \\ &= \frac{0,690 \cosh^{-1} \left(\frac{2,098((x-0,104)^2+(y-0,238)^2)}{y} + 1 \right)}{\left(\frac{2,098((x-0,104)^2+(y-0,238)^2)}{y} + 2 \right) \sqrt{\frac{(x-0,104)^2+(y-0,238)^2}{y \left(\frac{2,098((x-0,104)^2+(y-0,238)^2)}{y} + 2 \right)}}}, \end{aligned}$$

que en coordenadas $[f, \alpha]$ es:

$$\frac{0,721\alpha \sqrt{\frac{(\alpha-0,52)\alpha+0,705f-0,275\sqrt{f}+0,094}{\alpha(1,923\alpha+1.)+1,356f-0,529\sqrt{f}+0,181}} \cosh^{-1} \left(\frac{1,923\alpha^2+1,356f-0,529\sqrt{f}+0,181}{\alpha} \right)}{(\alpha-0,52)\alpha+0,705f-0,275\sqrt{f}+0,094}}.$$

5. Recordemos de (2.1.8) que la fórmula para la conexión del modelo SABR es $\mathcal{A} = \frac{1}{2(1-\rho^2)} (-\partial_f(\ln(C(f))) df + \frac{\rho}{\nu} \partial_f C(f) d\alpha)$. Luego, el transporte paralelo de la conexión, en las coordenadas $[f, \alpha]$, es obtenido de la siguiente forma:

$$\mathcal{P} = e^{\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left(\int_c -\partial_f(\ln(C(f))) df + \int_c \frac{\rho}{\nu} \partial_f C d\alpha \right)}.$$

La componente f de la conexión, $\mathcal{A}_f df$, es exacta, por tanto su integración no depende del camino c , sino sólo de los extremos. Luego:

$$\begin{aligned} \int_c -\partial_f(\ln(C(f))) df &= -\ln\left(\frac{C(f)}{C(f_0)}\right) \\ &= -2,786 - \frac{1}{2} \ln(f). \end{aligned}$$

Mientras que la componente α , \mathcal{A}_α , no es exacta. Así que debemos realizar la integral de línea respectiva. Primero que todo, cambiemos la 1-forma $\mathcal{A}_\alpha d\alpha$ a las coordenadas $[xy]$, ya que se conocen las geodésicas del espacio hiperbólico:

Para $\beta < 1$ se tienen las relaciones $f^{1-\beta} = \frac{x+\rho\alpha}{\nu} + f_0^{1-\beta}$ y $\alpha = \frac{y}{\sqrt{1-\rho^2}}$, a partir de (2.1.1). Así que

$$\partial_f(f^\beta) = \beta f^{\beta-1} = \frac{\beta\nu}{x + \rho\alpha + \nu f_0^{1-\beta}}.$$

Además tenemos $d\alpha = \frac{d\alpha}{dy} dy + \frac{d\alpha}{dx} dx = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} dy$. Entonces,

$$\mathcal{A}_\alpha d\alpha = \frac{\rho\beta}{2\sqrt{1-\rho^2}(1-\beta)} \frac{dy}{\sqrt{x + \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}y + \frac{\nu f_0^{1-\beta}}{1-\beta}}} = \mathcal{A}_y dy.$$

Ahora bien, sabemos que la curva c es un pedazo del semicírculo ortogonal al eje horizontal X y que pasa por los puntos (x_0, y_0) y (x, y) ,

$$c \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \mid (x - x_c)^2 + y^2 = R^2\},$$

con centro $(x_c, 0)$ y radio R .

Sea $i : c \rightarrow \mathcal{M}$ la función inclusión, que encaja a c en el semiplano superior con la métrica hiperbólica. Para realizar la segunda integral en la fórmula de transporte paralelo, es necesario integrar la precomposición (o pullback) de la forma $\mathcal{A}_y dy$, es decir:

$$\begin{aligned} \int_c \frac{\rho}{\nu} \partial_f C d\alpha &= \int_c i^*(\mathcal{A}_y dy) \\ &= -\frac{\beta\rho}{2\sqrt{1-\rho^2}(1-\beta)} \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{\cos(\theta) d\theta}{\left(\cos(\theta) + \frac{\hat{x}_c}{R} + \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} \sin(\theta)\right)}, \end{aligned}$$

donde θ_0 y θ_1 son los ángulos entre los rayos que van desde el centro del círculo hasta los puntos (x_0, y_0) y (x, y) respectivamente, y el eje horizontal. $\hat{x}_c = x_c + \frac{\nu f_0^{1-\beta}}{1-\beta}$

En síntesis, el transporte paralelo con la integral resuelta queda:

$$\begin{aligned} \ln(\mathcal{P}) &= \frac{1}{2(1-\rho^2)} \ln\left(\frac{C(f)}{C(f_0)}\right) - \frac{\beta\rho}{1\sqrt{1-\rho^2}(1-\beta)} \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{\cos(\theta) d\theta}{\left(\cos(\theta) + \frac{\hat{x}_c}{R} + \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} \sin(\theta)\right)} \\ &= -\frac{\beta\rho}{1\sqrt{1-\rho^2}(1-\beta)} [F_0(\theta_2, A, B)\theta'_2 - F_0(\theta_1, A, B)\theta'_1 \\ &\quad - A'(F_1(\theta_2, A, B) - F_1(\theta_1, A, B))]. \end{aligned} \tag{3.3.6}$$

Con:

$$\begin{aligned} F_0(x, a, b) &= \frac{\cos(x)}{a + \cos(x) + b \sin(x)}, \\ F_1(x, a, b) &= \int \frac{\cos(x)}{(a + \cos(x) + b \sin(x))^2} dx \\ &= \frac{a \sin(x) + b}{(a^2 - b^2 - 1)(a + b \sin(x) + \cos(x))} - \frac{2 \tan^{-1} \left(\frac{(a-1) \tan(\frac{x}{2}) + b}{\sqrt{a^2 - b^2 - 1}} \right)}{(a^2 - b^2 - 1)^{3/2}}, \\ \theta_0 &= \tan^{-1} \left(-\frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\rho} \right), \\ \theta_1 &= \tan^{-1} \frac{\alpha_0 \sqrt{1-\rho^2}}{\alpha_0 \rho + \nu q}, \\ \theta'_1 = \theta'_2 &= \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\nu q + \rho(\alpha_0 - a_{min})}, \end{aligned}$$

$$A = \frac{f^{1-\beta}\nu}{(1-\beta)a_{min}},$$

$$B = \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}},$$

$$a_{min} = \sqrt{\alpha_0^2 + 2\alpha_0\nu\rho q + \nu^2 q^2},$$

$$q = \frac{f^{1-\beta} - f_0^{1-\beta}}{1-\beta}.$$

Sustituyendo lo anterior en la fórmula (3.3.6) y exponenciando, se obtiene el transporte paralelo \mathcal{P} en las coordenadas $[f, \alpha]$.

Resultados

Finalmente, utilizando los cálculos de los numerales 3 hasta 5, junto con los coeficientes $a_0 = 1$ y $a_1 = -\frac{1}{6} - \frac{3\alpha^2}{32f}$, en el Núcleo de Calor (3.3.5), se obtiene la solución asintótica de orden 1 para $p(f, \alpha, t|_{(f_0, \alpha_0)})$. La fórmula resultante es bastante grande. Sin embargo, a continuación se muestran gráficas obtenidas a partir de ella, que permiten visualizar la función de densidad de probabilidad conjunta obtenida para las variables f y α .²

Las siguientes figuras muestran las densidades conjuntas para 2 tiempos distintos: el primero más cercano al tiempo inicial y el segundo más alejado.

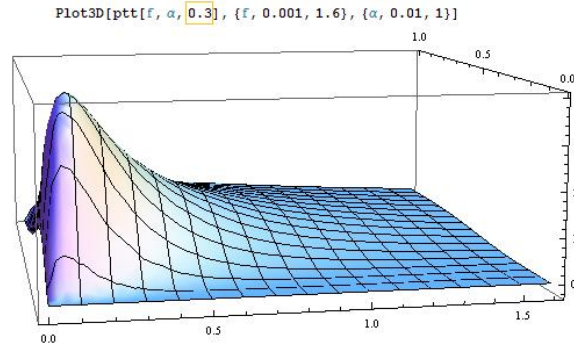


Figura 3.2: Función de densidad de probabilidad con respecto a las variables f, α para el tiempo $t = 0,3$, es decir un cuarto de año.

²Realizadas en el programa *Wolfram Mathematica*, al igual que la mayoría de los cálculos de fórmulas, a lo largo del texto.

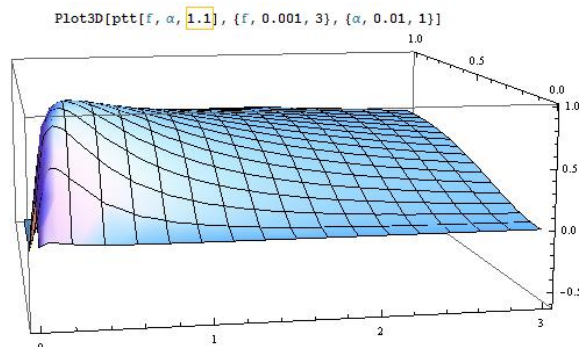


Figura 3.3: Función de densidad de probabilidad con respecto a las variables f , α para el tiempo $t = 1,1$.

Si se quiere hacer una comparación de este resultado con las densidades del Movimiento Browniano Geométrico sin *drift* deducidas en (1.2.13), en donde se usa volatilidad constante, es necesario usar la fórmula de densidad condicionada en un nivel fijo de volatilidad:

$$p(f, t|_{f_0} y \alpha = cte) = \frac{p(f, \alpha = cte, t|_{f_0})}{p_\alpha(\alpha = cte, t)},$$

donde el denominador de la parte derecha de la igualdad es la densidad marginal para la variable α , valuada en el valor constante $\alpha = cte$. En la siguiente figura se grafica el numerador de la igualdad derecha con $\alpha = 0,3$ para varios tiempos. Eso nos ilustra el comportamiento de la densidad condicionada a $\alpha = 0,3$, sin tener en cuenta el factor de escalamiento que proporciona el denominador mencionado.

El objetivo de estas gráficas es contrastar con el modelo de Black mostrando que, siendo un Modelo de Volatilidad Estocástica, se consiguen colas más gruesas en las densidades de los retornos.

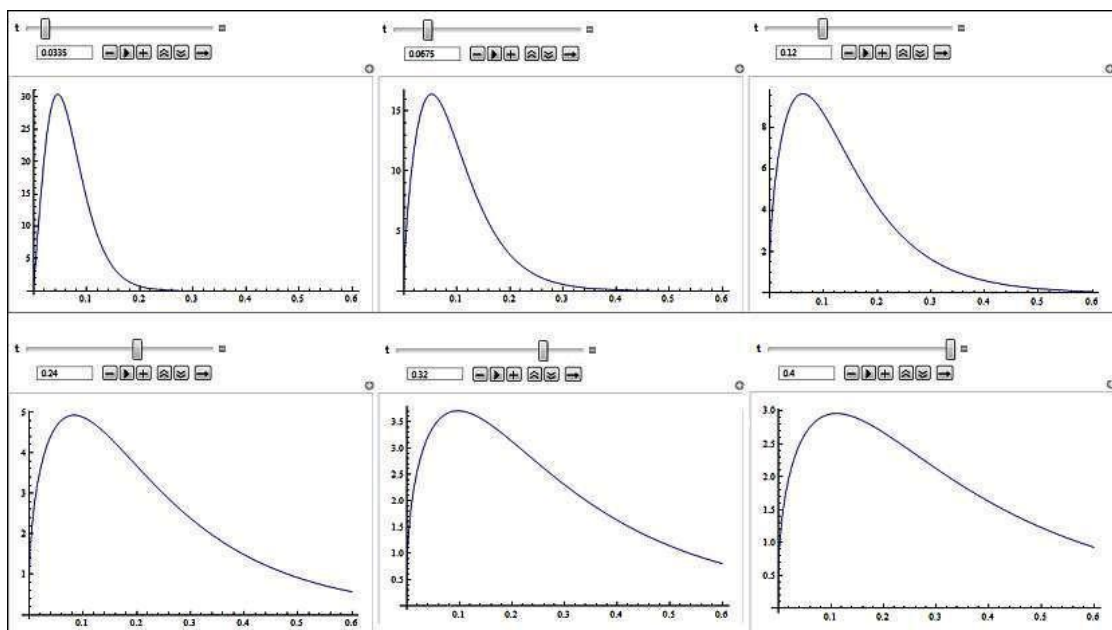


Figura 3.4: Cortes de la densidad conjunta para varios tiempos, fijando $\alpha = 30\%$.

Conclusiones

- El modelo SABR, al igual que varios MVE, tiene estructura hiperbólica. Gracias a eso es posible el cálculo analítico explícito, y en ocasiones exacto, de las densidades de probabilidad en los diferentes tiempos. Conocer las geodésicas del modelo y resultados tan generales, de la geometría, como la solución de Núcleo de Calor Laplaciano es lo que hace posible esos cálculos y otros tantos que se realizan en el área de las finanzas cuantitativas.
- Siempre que sea posible transpolar el método usado para $\beta = 0$ o $\beta = 1$, al trabajar sobre otros modelos, será lo más recomendable, pues se obtienen soluciones analíticas, cerradas, exactas.
- Es posible, y medianamente fácil, calcular las soluciones asintóticas de las densidades para el modelo SABR con β 's diferentes a 0 y 1 para un periodo de tiempo corto, mediante la expansión que determina el Teorema de DeWitt. Tales soluciones no son exactas, puesto que solo se logran hasta ordenes pequeños, así que se abre la duda de, qué tan grande puede ser el tiempo t para que este tipo de solución sea mejor que soluciones numéricas de la ecuación diferencial parcial.

Bibliografía

- [1] J. Gatheral. *The Volatility surface*. Wiley, 2006.
- [2] P. Wilmott. *Introduces Quantitative Finance*. Second Edition. Wiley, 2007.
- [3] M. Nakahara. *Geometry, Topology and Physics*. Second Edition. Taylor&Francis, 2003.
- [4] B. DeWitt. *Dynamical theory of groups and fields*. Gordon and Breach, New York, 2003.
- [5] P. S. Hagan, A. Lesniewski, D.Kumar and D. E. Woodward. *Managing Smile Risk*, Willmott Magazine, Septiembre, 84-108. 2002.
- [6] P. S. Hagan, A. Lesniewski and D. E. Woodward. *Probability Distribution in the SABR Model of Stochastic Volatility*. 2002.
- [7] B. Dupire. *Pricing and Hedging with Smiles* . Paribas capital Markets. 1993.
- [8] P. Henry-Labordère. *A General Asymptotic Implied Volatility for Stochastic Volatility Models*, <http://ssrn.com/abstract=698601>. Abril 2005.
- [9] H. P. McKean *An upper bound to the spectrum of Δ on a manifold of negative curvature*. J. Diff. Geom, 4, 359-366. 1970.
- [10] A. Grigor'yan and M. Noguchi *The Heat kernel on Hyperbolic Space*. Bulletin of London Math. Soc., 30, 643-650. 1998.