Álgebras de Azumaya y el locus de Azumaya de una álgebra de Weyl cuantizada

por

Natalia Camila Pinzón Cortés

Trabajo de grado
presentado al
Departamento de Matemáticas
para acceder al título de
Magíster en Matemáticas

Director
Erik Backelin

Universidad de los Andes
Bogotá, Colombia
Agosto, 2009

A mis padres
en agradecimiento por
su amor, educación y apoyo.
A Dios y a la Virgen
por mi vida y mi familia.
A todos aquellos que me han
acompañado y apoyado.
A todos, gracias

ÍNDICE GENERAL

CAPÍTULO 0

INTRODUCCIÓN

Este trabajo estudia las álgebras de Azumaya, esto es, álgebras centrales separables sobre un anillo conmutativo con identidad. Se exponen algunas definiciones equivalentes, varias de sus propiedades y un poco del grupo de Brauer. También se habla de la equivalencia y del teorema de Morita, y se pondrán las álgebras de Azumaya en este contexto.

Más específicamnete, este documento inicia definiendo los módulos proyectivos y generadores, para así dar el concepto de un módulo progenerador el cual es un módulo proyectivo, generador y finitamente generado. También se enuncian algunas de sus propiedades. Enseguida, se demuestra el Teorema de Morita, inicialmente de forma puntual, planteando la equivalencia Morita entre un anillo con identidad R y el anillo de endomorfismos de un R-módulo progenerador M, esto es, se muestra que las categorías de R-módulos y $\mathrm{End}_R(M)$-módulos son equivalentes. Luego, se expone el Teorema de Morita de forma más general definiendo la equivalencia Morita para dos anillos cualesquiera, enunciando, a continuación, algunos ejemplos y obsevaciones.

Después, se consideran algunos resultados de localización, seguidos de la definición y propiedades de una R-álgebra separable, la cual es un módulo proyectivo sobre su álgebra envolvente $A^e = A \otimes_R A^{op}$. Finalmente, se habla de las álgebras de Azumaya, sus conceptos equivalentes y algunos resultados entre los que se destacan: si A es una R-álgebra finitamente generada como un R-módulo, entonces A es una R-álgebra de Azumaya si y solo si $A_{\mathfrak{m}} \cong A \otimes_R R_{\mathfrak{m}}$ es una $R_{\mathfrak{m}}$-álgebra de Azumaya para cada $\mathfrak{m} \in \text{máx}(R)$. Y, si R es un anillo noetheriano y A una R-álgebra finitamente generada como un R-módulo tal que el morfismo $r \longmapsto r1_A$ identifica a R como un subanillo de $Z(A)$, entonces, A es una R-álgebra de Azumaya si y sólo si $A/\mathfrak{m}A$ es una $R/\mathfrak{m}$-álgebra de Azumaya para cada $\mathfrak{m} \in \text{máx}(R)$. También, se estudia un poco la representación de las álgebras de Azumaya como un producto tensorial de sus subálgebras usando conmutadores. Respecto a los isomorfismos entre álgebras de Azumayas, el centro juega un papel importante y sobresale el hecho que todo endomorfismo de una álgebra de Azumaya es un automorfismo. Por último, se expone el concepto del grupo de Brauer de un anillo conmutativo con identidad R, el cual refleja la complejidad y variedad de las R-álgebras de Azumaya y es un importante invariante del anillo.

Como la equivalencia de Azumaya (grupo de Brauer) es una equivalencia de Morita local, sólo se estudia en detalle esta última y se hace una breve introducción al grupo de Brauer.

El principal resultado de este trabajo es el cálculo del locus de Azumaya de la álgebra de Weyl cuantizada $\mathbf{A_q} = \mathbb{C}\langle X, \partial \rangle / \langle \partial X - qX\partial - 1 \rangle$ definida sobre $\mathbb{C}$, donde $q \in \mathbb{C}$ es una raíz n-ésima primitiva de la unidad y $n > 1$. El locus de Azumaya $\mathcal{AL}$ de una R-álgebra A es un subconjunto abierto denso contenido en el conjunto de ideales maximales del centro de A $\big(\mathcal{AL} \subseteq \text{máx}(Z(A))\big)$, tal que la fibra $A/\langle m \rangle_A$ es un anillo de matrices con entradas en $Z(A)/m$, para cada $m \in \mathcal{AL}$. Además, una R-álgebra libre sobre su centro, de rango finito y que tiene locus de Azumaya no vacío se llama álgebra casi-Azumaya. Así, se demostrará que la álgebra de Weyl cuantizada $\mathbf{A_q}$ es una $\mathbb{C}$-álgebra casi-Azumaya.

También, en el capítulo de los Cálculos y Resultados, se mencionan dos aplicaciones de las álgebras $\mathbf{A_q}$. La primera, dice que dichas álgebras juegan un papel importante en la (interpretación geométrica de) la teoría de representaciones del grupo cuántico de Lusztig (ver [BK]). Y en la segunda, se espera que estas álgebras puedan ser útiles en la conjetura de Kontsevich - Belov Kanel (ver [KBK]) sobre la existencia de un isomorfismo entre el grupo de automorfismos de una álgebra de Weyl n-ésima $A_n(\mathbb{C})$ y el grupo de automorfismos de una álgebra de Poisson $\mathbb{C}[\mathbb{C}^{2n}]$. Ellos abordaron su conjetura aplicando la misma idea de la demostración, que redescubrieron, de la equivalencia entre la conjetura de Dixmier y la conjetura de Jacobi usando álgebras de Weyl en characteristica p (ver [ACvE2] y sus propias referencias); Estas dos aplicaciones sólo son esbozadas y para su profundización se remite al lector a los textos referenciados.

Finalmente, en los anexos se enuncian algunos conceptos y resultados básicos de la Teoría de Categorías útiles en el desarrollo de este documento.

Para terminar, el lector debe tener encuenta que durante todo el documento todos los anillos tienen identidad, los módulos son unitarios y módulo significa módulo a izquierda a no ser que se especifique que es a derecha.

CAPÍTULO 1

Módulos Progeneradores

Recordemos que cuando R es un anillo conmutativo se puede mostrar que si un R-módulo libre M (esto es, M tiene una base sobre R o es isomorfo a R^I, para algún I conjunto de índices) tiene una base finita de n elementos, entonces cualquier otra base tiene n elementos. Este entero n es llamado ***rango de M*** y lo denotamos $\mathbf{Rank}_R(M)$.

1.1. Módulos Proyectivos

Los módulos proyectivos hacen parte de la definición de módulos progeneradores y serán muy importantes en nuestro trabajo.

Definición 1.1. Un objeto P en una categoría abeliana $\mathcal{A}$ es ***proyectivo*** si satisface la siguiente propiedad universal: dados una sobreyección $\alpha : B \to C$ y un morfismo $\gamma : P \to C$, existe al menos un morfismo $\beta : P \to B$ tal que $\gamma = \alpha \circ \beta$

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dotted, "\exists\beta"'] \arrow[d, "\gamma"] & \\ B \arrow[r, "\alpha"'] & C \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Proposición 1.2. *En la categoría abeliana $\mathcal{M}od$-R todo R-módulo libre M es proyectivo*

Demostración. Sea

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[d, "\gamma"] & \\ B \arrow[r, "\alpha"'] & C \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

un diagrama de homomorfismos de R-módulos con filas exactas. Como M es libre y α es sobreyectivo, para cada elemento m de la base de M, existe $b_m \in B$ tal que $\alpha(b_m) =$

$\gamma(m)$. Definimos $\beta : M \to B$ por $\beta(m) = b_m$. Claramente β es un homomorfismo de R-módulos ya que está definido a partir de una base. Además, $\gamma(m) = \alpha(b_m) = \alpha(\beta(m)) = \alpha\beta(m)$ para cada elemento de la base de M. Así M es un R-módulo proyectivo. $\square$

Proposición 1.3. *Sea M un R-módulo. Son equivalentes:*
i) *M es proyectivo.*
ii) *Toda sucesión de R-módulos de la forma $0 \to A \to B \to M \to 0$ escinde.*
iii) *M es isomorfo a un R-módulo que es un sumando directo de algún R-módulo libre.*
iv) *El funtor $\mathrm{Hom}(M, -)$ es exacto.*

Demostración. ***i)*** $\Rightarrow$ ***ii)*** Sean M un R-módulo proyectivo y $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \xrightarrow{\alpha} M \longrightarrow 0$ una sucesión exacta de R-módulos. Como M es proyectivo, dado el siguiente diagrama de homomorfismos entre R-módulos, con filas exactas

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, dotted, "\exists\beta"'] \arrow[d, "id_M"] & \\ B \arrow[r, "\alpha"'] & M \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

existe $\beta : M \to B$ tal que $\alpha\beta = id_M$. Luego, la sucesión exacta dada inicialmente escinde.

ii) $\Rightarrow$ ***iii)*** Sea M un R-módulo, entonces existe un conjunto de índices I tal que $\alpha : R^I \to M$ es un homomorfismo de R-módulos sobreyectivo. Luego, la sucesión de R-módulos $0 \longrightarrow \ker(\alpha) \longrightarrow R^I \xrightarrow{\alpha} M \longrightarrow 0$ es exacta, y como M es proyectivo, la sucesión escinde. Por lo tanto, $R^I \cong M \oplus \ker(\alpha)$.

iii) $\Rightarrow$ ***i)*** Sea

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[d, "\gamma"] & \\ B \arrow[r, "\alpha"'] & C \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

un diagrama de homomorfismo de R-módulos con filas exactas. Por hipótesis, existen L y N R-módulos, tales que $L \cong M \oplus N$, con L libre sobre R. Entonces, por la proposición 1.2, L es proyectivo. Luego, si π e ι son la proyección e inclusión canónicas, tenemos que

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[ddl, dotted, "\exists\beta_1"'] \arrow[d, shift left, "\pi"] & \\ & M \arrow[u, shift left, "\iota"] \arrow[dl, dotted, "\beta_1\,\iota"] \arrow[d, "\gamma"] & \\ B \arrow[r, "\alpha"'] & C \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

existe β_1 tal que $\gamma\pi = \alpha\beta_1$. Luego, si $\beta = \beta_1\iota$, entonces $\alpha\beta = \alpha(\beta_1\iota) = (\gamma\pi)\iota = \gamma id_M = \gamma$. Por lo tanto, M es proyectivo.

i) $\Leftrightarrow$ ***iv)*** Sabemos que el funtor $\mathrm{Hom}(M, -)$ siempre es exacto a izquierda (proposición 8.27 en los anexos). Veamos ahora que $\mathrm{Hom}(M, -)$ es también funtor exacto a derecha si y sólo si M es un R-módulo proyectivo. Sea $B \xrightarrow{\alpha} C \longrightarrow 0$ una sucesión exacta, entonces, $\mathrm{Hom}(M, B) \xrightarrow{\alpha_\star} \mathrm{Hom}(M, C) \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta si y sólo si M es proyectivo. Para esto, basta mostrar que $\alpha_\star$ es sobreyectivo si y sólo si M es proyectivo: Sea $\gamma \in \mathrm{Hom}(M, C)$, entonces M es un R-módulo proyectivo si y sólo si existe $\beta \in \mathrm{Hom}(M, B)$ tal que $\gamma = \alpha\beta = \alpha_\star(\beta)$. Concluyendo así la demostración. $\square$

Otra condición equivalente a proyectividad se da en el siguiente lema

Lema 1.4. ***Lema de la Base Dual.*** *Sea M un R-módulo. Entonces, M es proyectivo si y sólo si existen $(m_i)_{i\in I} \subseteq M$ y $(f_i)_{i\in I} \subseteq M^* = \mathrm{Hom}_R(M, R)$, con I algún conjunto de índices, tales que*
a) *Para cada $m \in M, f_i(m) = 0$ para todo i excepto un subconjunto finito de I.*
b) *Para cada $m \in M, \sum_{i\in I} f_i(m)m_i = m$.*
Más aún, I es un conjunto finito si y sólo si M es finitamente generado. La colección (m_i, f_i) se llama ***base dual para M****.*

Demostración. Supongamos M es proyectivo, entonces existen I y los morfismos de R-módulos $\varphi : M \to R^I$ y $\phi : R^I \to M$ tales que $\phi\varphi = id_M$. Si pensamos en R^I como un conjunto de funciones de I a R, sea $\phi_i : R^I \to R$ dada por $\phi_i(f) = f(i)$ (proyección i-ésima). Entonces, si $b_i(j) = \delta_{ij}$ con $b_i \in R^I$, para cada $f \in R^I$ tenemos que

$$\sum_{i\in I} \phi_i(f)b_i = f \quad \text{pues} \quad \Big(\sum_{i\in I} \phi_i(f)b_i\Big)(j) = \phi_j(f) = f(j).$$

Por lo tanto, (b_i, ϕ_i) forma una base dual para R^I. Ahora, sea $m_i = \phi(b_i)$ y $f_i = \phi_i\varphi$. Claramente $f_i(m) = 0$ para casi todos los $i \in I$ y para cada $m \in M$

$$\sum_{i\in I} f_i(m)m_i = \sum_{i\in I} \phi_i(\varphi(m))\phi(b_i) = \phi\big(\sum_{i\in I} \phi_i(\varphi(m))b_i\big) = \phi(\varphi(m)) = m,$$

ya que ϕ es R-lineal. Por lo tanto, (f_i, m_i) forma una base dual para M. Recíprocamente, si (f_i, m_i) forma una base dual para M, definimos

$$\varphi : M \to R^I \text{ por } \varphi(m)(i) = f_i(m) \quad \text{y} \quad \phi : R^I \to M \text{ por } \phi(f) = \sum_{i\in I} f(i)m_i.$$

Es sencillo ver que ϕ y φ son homomorfismos de R-módulos y que

$$\phi(\varphi(m)) = \sum_{i\in I} f_i(m)m_i = m, \quad \text{para cada} \quad m \in M.$$

Así, $\phi\varphi = id_M$, luego, M es isomorfo a un sumando directo de R^I y por lo tanto es proyectivo. $\square$

Supongamos que R y S son anillos (posiblemente no conmutativos) y que $\theta : R \to S$ es un homomorfismo de anillos. Entonces, S es un R-módulo bajo la operación $rs = \theta(r)s$. Esto naturalmente induce una estructura de R-módulo en cualquier S-módulo. Además, lo anterior es típico cuando R es conmutativo y S es una R-álgebra o cuando R es un subanillo de S y θ la identidad.

Como una aplicación del Lema de la Base dual 1.4, se demuestra que:

Proposición 1.5. ***Transitividad de módulos proyectivos y de módulos finitamente generados***. *Sean R y S anillos y $\theta : R \to S$ un homomorfismo de anillos tal que S es un R-módulo proyectivo (resp. finitamente generado). Entonces, cualquier S-módulo proyectivo (resp. finitamente generado) es un R-módulo proyectivo (resp. finitamente generado).*

Proposición 1.6. *Si un funtor aditivo $L : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ es adjunto a izquierda para un funtor exacto $R : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ y P es un objeto proyectivo de $\mathcal{A}$, entonces $L(P)$ es un objeto proyectivo de $\mathcal{B}$. Además, decimos que **L preserva proyectivos**.*

Demostración. Veamos que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(L(P), -)$ es exacto. Dada una sobreyección $g : B \to B'$ en $\mathcal{B}$, el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(L(P), B) \arrow[r, "g_\star"] \arrow[d, "\tau_{PB}"', "\cong"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(L(P), B') \arrow[d, "\cong"', "\tau_{PB'}"] \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P, R(B)) \arrow[r, "(Rg)_\star"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P, R(B')) \end{tikzcd}$$

conmuta por la naturaleza de τ, el isomorfismo natural que da la adjunción (ver los anexos). Como R es exacto y P es proyectivo, el morfismo inferior $(R(f))_\star$ es sobreyectivo. Luego, el morfismo superior $f_\star$ también lo es y por lo tanto $L(P)$ es un objeto proyectivo en $\mathcal{B}$. □

Corolario 1.7. *Si P es un grupo abeliano proyectivo, entonces $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}b}(P, R)$ es un R-módulo proyectivo.*

1.2. Módulos Progeneradores

Ahora sí conoceremos los módulos progeneradores y algunas de sus propiedades, básicos en el estudio del teorema de Morita y de las álgebras de Azumaya.

Definición 1.8. Sea $\mathcal{A}$ una categoría abeliana con sumas infinitas. Un objeto M de $\mathcal{A}$ es ***pequeño*** si el funtor $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, -)$ preserva sumas. M es un ***generador*** de la categoría $\mathcal{A}$ si todo objeto de $\mathcal{A}$ es una imagen sobreyectiva de una suma de copias de M. Finalmente, M es un ***progenerador*** si es un objeto generador, pequeño y proyectivo.

En la categoría de R-módulos, todo R-módulo finitamente generado es peque-ño, y todo R-módulo pequeño y proyectivo es finitamente generado. Por esto, de aquí en adelante cuando hablamos de un ***módulo progenerador*** nos referimos a un módulo que es proyectivo, generador y finitamente generado.

Como un ejemplo, todo módulo libre de rango uno es un progenerador. Y, un R-módulo M es un generador para $\mathcal{M}od\text{-}R$ si y sólo si el R-módulo de rango uno es una imagen sobreyectiva de una suma de copias de M. Así, en dicha categoría, M es un R-módulo generador si y sólo si existen $f_1, \ldots, f_n \in M^* = \operatorname{Hom}_R(M, R)$ y $m_1, \ldots, m_n \in M$ tales que $\sum f_i(m_i) = 1_R$ y esto es equivalente a que $\Im_R(M) = R$, donde

$$\Im_R(M) = \Big\{ \sum_1^n f_i(m_i) \in R : m_i \in M, f_i \in M^* = \operatorname{Hom}_R(M, R) \Big\}$$

y se llama la ***traza de M*** la cual es un ideal bilátero de R.

Además,

Proposición 1.9. *Si un funtor T es una equivalencia entre las categorías de R-módulos y S-módulos, entonces T es un funtor exacto y la imagen de cada R-módulo progenerador es un S-módulo progenerador.*

Demostración. Como T es una equivalencia de categorías, entonces T y T^{-1} son funtores adjuntos, luego por la proposición 8.35 en los anexos, T es un funtor exacto. De igual manera T^{-1} es exacto y por lo tanto, por la proposición 1.6, T preserva proyectivos.

Además, por ser T una equivalencia de categorías, conmuta con colímites, en particular, conmuta con sumas directas. Así, si M es un progenerador de $\mathcal{M}od\text{-}R$, tenemos que $T(M)$ es un S-módulo generador y pequeño. En efecto, sea B un S-módulo, entonces al ser $T^{-1}(B)$ un R-módulo y M un R-módulo generador, existe un conjunto de índices I tal que $M^I \longrightarrow T^{-1}(B) \longrightarrow 0$ es exacta, luego

$$T(M)^I \cong T(M^I) \longrightarrow TT^{-1}(B) \cong B \longrightarrow 0$$

es exacta y por lo tanto, $T(M)$ es un generador de $\mathcal{M}od\text{-}S$. Ahora,

$$\begin{aligned}
\operatorname{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}S}(T(M), \oplus_I B_i) &\cong \operatorname{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}R}(M, T^{-1}(\oplus_I B_i)) \\
&\cong \operatorname{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}R}(M, \oplus_I T^{-1}(B_i)) \\
&\cong \oplus_I \operatorname{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}R}(M, T^{-1}(B_i)) \\
&\cong \oplus_I \operatorname{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}S}(T(M), B_i),
\end{aligned}$$

pues M es un R-módulo pequeño, luego $T(M)$ es un S-módulo pequeño y por lo tanto un S-progenerador. □

Es sencillo demostrar que

Proposición 1.10. ***Transitividad de módulos generadores y de módulos progeneradores.*** *Sean R y S anillos y $\theta : R \to S$ un homomorfismo de anillos tal que S es un R-módulo generador (resp. progenerador). Entonces, cualquier S-módulo generador (resp. progenerador) es un R-módulo generador (resp. progenerador).*

Ahora es el momento oportuno de demostrar una de las herramientas comunes de la teoría de anillos, una forma del Lema de Nakayama. Para esto, dados $\mathfrak{a}$ un ideal del anillo R y M un R-módulo, sea

$$\mathfrak{a}M = \Big\{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i m_i : \alpha_i \in \mathfrak{a}, m_i \in M\Big\}.$$

También, definimos el ***anulador de M en R*** por

$$\mathrm{Ann}_R(M) = \{r \in R : rm = 0, \forall m \in M\}$$

el cual es un ideal a izquierda de R.

Lema 1.11. ***Lema de Nakayama generalizado***. *Sean R un anillo conmutativo, M un R-módulo finitamente generado y $\mathfrak{a}$ un ideal de R. Entonces,*

$$\mathfrak{a}M = M \Longleftrightarrow \mathfrak{a} + \mathrm{Ann}_R(M) = R.$$

Demostración. Si $\mathfrak{a} + \mathrm{Ann}_R(M) = R$, podemos escribir $1_R = \alpha + \beta$, para algunos $\alpha \in \mathfrak{a}$, $\beta \in \mathrm{Ann}_R(M)$, luego, para cada $m \in M$, $m = 1m = \alpha m + \beta m = \alpha m$ y así $\mathfrak{a}M = M$.

Recíprocamente, como M es finitamente generado sobre R, supongamos que $M = Rm_1 + \cdots + Rm_n$ y procedemos por inducción. Sean

$$M_i = Rm_i + \cdots + Rm_n,\ i = 1, \ldots, n \quad \text{y} \quad M_{n+1} = 0.$$

Mostremos que para cada $i = 1, \ldots, n+1$, existe $\alpha_i \in \mathfrak{a}$ tal que $(1_R - \alpha_i)M \subset M_i$. Claramente podemos elegir $\alpha_1 = 0$. Ahora, supongamos que conocemos α_i tal que $(1 - \alpha_i)M \subset M_i$, entonces

$$(1 - \alpha_i)M = (1 - \alpha_i)\mathfrak{a}M = \mathfrak{a}(1 - \alpha_i)M \subset \mathfrak{a}M_i,$$

luego $(1 - \alpha_i)m_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} m_j$ o $(1 - \alpha_i - \alpha_{ii})m_i$ está en M_{i+1}, donde $\alpha_{ij} \in \mathfrak{a}$. Por lo tanto,

$$(1 - \alpha_i)(1 - \alpha_i - \alpha_{ii})M \subset (1 - \alpha_i - \alpha_{ii})M_i \subset M_{i+1},$$

y así $\big(1-(2\alpha_i+\alpha_{ii}-\alpha_i^2-\alpha_i\alpha_{ii})\big)M \subset M_{i+1}$. Para completar el paso inductivo, tomemos

$$\alpha_{i+1} = 2\alpha_i + \alpha_{ii} - \alpha_i^2 - \alpha_i\alpha_{ii}.$$

Luego, $1 - \alpha_{n+1} \in \mathrm{Ann}_R(M)$ finalizando la demostración. □

Corolario 1.12. *Sean R un anillo conmutativo y M un R-módulo finitamente generado. Si $\mathfrak{m}M = M$ para todo $\mathfrak{m} \in \text{máx}(R)$, entonces $M = 0$.*

Demostración. $M = 0$ si y sólo si $\mathrm{Ann}_R(M) = R$, pero si $\mathrm{Ann}_R(M) \subsetneq R$, existe un ideal maximal $\mathfrak{m}$ tal que $\mathrm{Ann}_R(M) \subset \mathfrak{m}$, luego $\mathrm{Ann}_R(M) + \mathfrak{m} \subsetneq R$ lo cual es una contradicción por el lema de Nakayama 1.11. □

Corolario 1.13. *Sean R un anillo conmutativo y, M y N R-módulos finitamente generados tales que N es un submódulo de M y $N/\mathfrak{m}N \cong M/\mathfrak{m}M$ para cada $\mathfrak{m} \in$ $\max(R)$. Entonces, $N = M$.*

Demostración. Sean $X = M/N$ y $\mathfrak{m} \in \max(R)$. Si $\phi_{\mathfrak{m}}$ es el isomorfismo de $N/\mathfrak{m}N$ a $M/\mathfrak{m}M$ tenemos que

$$(N + \mathfrak{m}M)/\mathfrak{m}M = \mathrm{im}(\phi_{\mathfrak{m}}) = M/\mathfrak{m}M,$$

luego $M = N + \mathfrak{m}M$ y por lo tanto $X/\mathfrak{m}X = M/(N + \mathfrak{m}M) = 0$. Así, como lo anterior es válido para cada $\mathfrak{m} \in \max(R)$, por corolario 1.12, $X = 0$ y entonces, $M = N$. $\square$

Proposición 1.14. *Sean R un anillo conmutativo y M un R-módulo proyectivo finitamente generado. Entonces, $\Im_R(M) \oplus \mathrm{Ann}_R(M) = R$.*

Demostración. Como M es finitamente generado y proyectivo, por el lema de la Base Dual 1.4, existe $(f_i, m_i)_{i=1}^n$ una base dual para M. Entonces, para cada $m \in M$, $m = \sum_1^n f_i(m)m_i$ y $f_i(m) \in \Im_R(M)$, luego

$$\Im_R(M)M = M.$$

Así, por el lema de Nakayama 1.11, $\Im_R(M) + \mathrm{Ann}_R(M) = R$.

Pero, $\Im_R(M) \cdot \mathrm{Ann}_R(M) = 0$ pues dados $\beta \in \mathrm{Ann}_R(M), f \in M^*$ y $m \in M$ tenemos que $\beta f(m) = f(\beta m) = 0$. Se sigue que, para cada $x \in \Im_R(M) \cap \mathrm{Ann}_R(M)$,

$$x = 1_R x = \alpha x + \beta x = 0 \quad \text{donde} \quad \alpha + \beta = 1_R, \alpha \in \Im_R(M), \beta \in \mathrm{Ann}_R(M).$$

Por lo tanto, $\Im_R(M) \cap \mathrm{Ann}_R(M) = (0)$ y así $\Im_R(M) \oplus \mathrm{Ann}_R(M) = R$. $\square$

Dos consecuencias directas de la anterior proposición son:

Corolario 1.15. *Sean R un anillo conmutativo y M un R-módulo. Entonces, M es un R-progenerador si y sólo si M es un R-módulo finitamente generado, proyectivo y fiel.*

Corolario 1.16. *Sea R un anillo conmutativo. Si R no tiene elementos idempotentes diferentes de 0 y 1_R, entonces cada R-módulo no nulo proyectivo y finitamente generado es fiel y por lo tanto es un progenerador.*

Proposición 1.17. *Sean R un anillo conmutativo, A y B R-álgebras y M un A-módulo a derecha. Si M es A-módulo proyectivo (resp. generador), entonces $M \otimes_R B$ es un $A \otimes_R B$-módulo proyectivo (resp. generador).*

Demostración. Si M es A-módulo proyectivo, es sencillo verificar que $(f_i \otimes id_B, m_i \otimes 1_B)_{i \in I}$ es una base dual para $M \otimes_R B$ sobre $A \otimes_R B$, con $(f_i, m_i)_{i \in I}$ una base dual para M sobre A. Similarmente, si M es un A-generador, existen $f_i \in \mathrm{Hom}_A(M, A)$ y $m_i \in M$ tales que $\sum f_i(m_i) = 1_A$, luego $\sum (f_i \otimes id_B)(m_i \otimes 1_B) = 1_A \otimes 1_B$ y así $M \otimes_R B$ es un $A \otimes_R B$-generador. $\square$

Corolario 1.18. *Si M es un R-módulo proyectivo (resp. generador) y B una R-álgebra, entonces $M \otimes_R B$ es un B-módulo proyectivo (resp. generador).*

También, de forma similar, es sencillo demostrar que

Proposición 1.19. *Sean R un anillo, M y N R-módulos. Entonces, $M \otimes_R N$ es un R-módulo finitamente generado, proyectivo, generador o progenerador si respectivamente ambos lo son.*

Para finalizar este capítulo, es bueno tener en cuenta que algunas categorías de R-módulos no tienen objetos progeneradores, como por ejemplo, la categoría de $\mathbb{Z}$-módulos con torsión, esto es, $\{M \in \mathbb{Z}\text{-}\mathcal{M}od : \exists n, nM = 0\}$. Si P es proyectivo y finitamente generado en esta categoría, entonces $P \cong \mathbb{Z}/a_1\mathbb{Z} \oplus \cdots \mathbb{Z}/a_k\mathbb{Z}$ con $a_i \in \mathbb{Z}$. Pero, P es proyectivo si y sólo si cada uno de los sumandos es proyectivo, así, cada $\mathbb{Z}/a_i$ es proyectivo, lo cual no es cierto pues

$$
\begin{tikzcd}
& \mathbb{Z}/a\mathbb{Z} \arrow[dl, dotted, "\nexists\beta"'] \arrow[d, "id_{\mathbb{Z}/a\mathbb{Z}}"] & \\
\mathbb{Z}/2a\mathbb{Z} \arrow[r, "\alpha"'] & \mathbb{Z}/a\mathbb{Z} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

no existe β tal que $\alpha\beta = id_{\mathbb{Z}/a\mathbb{Z}}$ ya que α no es biyección.

CAPÍTULO 2

El Teorema y la Equivalencia de Morita

Ahora discutiremos la equivalencia de Morita ya que es una noción de la equivalencia de Azumaya (grupo de Brauer) global. Como ya dijimos, primero la expondremos de forma puntual y luego la generalizaremos. Para esto seguimos a [DeMI] y a [S].

Para cada anillo R y cada R-módulo M sean

$$M^* = \mathrm{Hom}_R(M, R) \quad \text{y} \quad S = \mathrm{End}_R(M).$$

Como R es un R-bimódulo, M^* es un R-módulo a derecha dado por $(fr)(m) = f(m)r$. Además, M es un S-módulo a izquierda con $sm = s(m)$. Luego, M es un R-S-bimódulo ambos a izquierda, y por lo tanto, M^* es un S-módulo a derecha bajo la operación $(fs)(m) = f(s(m))$. También, es sencillo ver que M^* es un R-S-bimódulo ambos a derecha. Se sigue que podemos formar $M^* \otimes_R M$ y $M^* \otimes_S M$ los cuales son S-bimódulo y R-bimódulo respectivamente. Sean

$$\theta_R : M^* \otimes_R M \longrightarrow \mathrm{End}_R(M) = S \quad \text{y} \quad \theta_S : M^* \otimes_S M \longrightarrow R$$

definidos por

$$\Big(\theta_R\Big(\sum_{i=1}^{n} f_i \otimes m_i\Big)\Big)(m) = \sum_{i=1}^{n} f_i(m)m_i \quad \text{y} \quad \theta_S\Big(\sum_{i=1}^{n} f_i \otimes m_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} f_i(m_i).$$

Así, θ_R es un homomorfismo de S-bimódulos y θ_S de R-bimódulos. Además, la imagen de θ_S es $\Im_R(M)$, el ideal traza de M.

Lema 2.1. .
a) *θ_R es un epimorfismo si y sólo si M es un R-módulo finitamente generado y proyectivo. Si θ_R es un epimorfismo, entonces es un monomorfismo.*
b) *θ_S es un epimorfismo si y sólo si M es un R-módulo generador. Si θ_S es un epimorfismo, entonces es un monomorfismo.*

Demostración. ***a)*** Supongamos que θ_R es sobreyectivo. Entonces, existe

$$\sum_{i=1}^{n} f_i \otimes m_i \in M^* \otimes_R M \quad \text{tal que} \quad \theta_R\Big(\sum_{i=1}^{n} f_i \otimes m_i\Big) = id_M,$$

luego $(f_i, m_i)_1^n$ forma una base dual para M. Así, por el lema de la Base Dual 1.4, M es finitamente generado y proyectivo.

Recíprocamente, supongamos que $(f_i, m_i)_1^n$ es una base dual para M, luego

$$\theta_R\Big(\sum_{i=1}^{n} (f_i g) \otimes m_i\Big) = g, \quad \text{para cada} \quad g \in S.$$

Por lo tanto, θ_R es sobreyectivo. Ahora, si θ_R es sobreyectivo, tenemos que M posee una base dual $(f_i, m_i)_1^n$. Sea $\alpha = \sum h_j \otimes n_j \in M^* \otimes_R M$ tal que $\theta_R(\alpha) = 0$, esto es $\sum h_j(m) n_j = 0, \forall m \in M$, entonces

$$\begin{aligned} \alpha &= \sum_j h_j \otimes n_j = \sum_j h_j \otimes \Big(\sum_i f_i(n_j) m_i\Big) = \sum_{i,j} \big(h_j f_i(n_j)\big) \otimes m_i \\ &= \sum_i \Big(\sum_j h_j f_i(n_j)\Big) \otimes m_i = 0 \end{aligned}$$

pues para cada i y para cada $m \in M$

$$\Big(\sum_j h_j f_i(n_j)\Big)(m) = \sum_j h_j(m) f_i(n_j) = f_i\Big(\sum_j h_j(m) n_j\Big) = f_i(0) = 0.$$

b) Como $im(\theta_S) = \Im_R(M)$, el ideal traza traza de M, tenemos que θ_S es sobreyectivo si y sólo si $\Im_R(M) = R$, esto es, si y sólo si M es un R-generador. Ahora, supongamos que θ_S es sobreyectivo y sea $\alpha = \sum h_j \otimes n_j \in M^* \otimes_S M$ tal que $\theta_S(\alpha) = 0$, esto es $\sum h_j(n_j) = 0$. Como θ_S es sobreyectivo, existen $f_1, \ldots, f_n \in M^*$ y $m_1, \ldots, m_n \in M$ tales que $\sum f_i(m_i) = 1$. Entonces,

$$\begin{aligned} \alpha &= \sum_j h_j \otimes n_j = \sum_j h_j \otimes \Big(\sum_i f_i(m_i)\Big) n_j = \sum_{i,j} h_j \otimes_S \big(\theta_R(f_i \otimes n_j)\big)(m_i) \\ &= \sum_i \Big(\sum_j h_j \theta_R(f_i \otimes n_j)\Big) \otimes m_i = 0 \end{aligned}$$

ya que para cada i y cada $m \in M$,

$$\Big(\sum_j h_j \theta_R(f_i \otimes n_j)\Big)(m) = \sum_j h_j(f_i(m) n_j) = f_i(m) \sum_j h_j(n_j) = 0.$$

$\square$

Para lo que sigue, necesitamos algunas nociones básicas de la teoría de categorías las cuales podemos ver en los anexos. La siguiente es una proposición referente a ellas.

Proposición 2.2. *Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ categorías de módulos equivalentes bajo las equivalencias inversas $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ y $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$. Entonces, para cualquier par de objetos C y C' en $\mathcal{C}$, el morfismo*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, C') \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(C), F(C')) \quad \textit{dado por} \quad f \longmapsto F(f)$$

es una biyección (es decir, el funtor F es completamente fiel [1]).

Demostración. Sean $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, C')$ tales que

$$F(f) = F(g) \quad \text{en} \quad \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(C), F(C')).$$

Entonces, $G(F(f)) = G(F(g))$ en $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(GF(C), GF(C'))$ lo cual, por el isomorfismo natural η entre los funtores $G \circ F$ e $id_{\mathcal{C}}$, implica que

$$f \equiv g.$$

Por un argumento simétrico vemos que $G : \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FC, FC') \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(GFC, GFC')$ es inyectivo. Ahora, sea $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(C), F(C'))$, entonces

$$\begin{tikzcd} G(F(C)) \arrow[r, "G(g)"] \arrow[d, "\eta_C"', "\cong"] & G(F(C')) \arrow[d, "\cong"', "\eta_{C'}"] \\ C \arrow[r, "f"] & C' \end{tikzcd}$$

es un diagrama conmutativo donde $f = \eta_{C'} G(g) \eta_C^{-1}$. Además, tenemos que

$$\begin{tikzcd} G(F(C)) \arrow[r, "G(F(f)))"] \arrow[d, "\eta_C"', "\cong"] & G(F(C')) \arrow[d, "\cong"', "\eta_{C'}"] \\ C \arrow[r, "f"] & C' \end{tikzcd}$$

es un diagrama conmutativo, de lo que se deduce que $G(g) = G(F(f))$. Como G es un funtor fiel, se sigue que $g = F(f)$ y por lo tanto F es un funtor pleno. □

A continuación enunciaremos el teorema y la equivalencia de Morita en una forma puntual, la cual más adelante en el Teorema de Morita 2.7 vamos a generalizar.

Como vimos antes, si M es un R-módulo a izquierda, tenemos que M es R-S-bimódulo ambos a izquierda y $M^* = \mathrm{Hom}_R(M, R)$ es R-S-bimódulo ambos a derecha, con $S = \mathrm{End}_R(M)$. Así,

[1] Ver la definición 8.23 en los anexos.

Proposición 2.3. *Sean R un anillo, M un R-módulo progenerador a izquierda, $M^* = \operatorname{Hom}_R(M,R)$ y $S = \operatorname{End}_R(M)$. Entonces,*

$$- \otimes_R M : \mathcal{M}od\text{-}R \longrightarrow \operatorname{End}_R M\text{-}\mathcal{M}od$$

$$M^* \otimes_S - : \operatorname{End}_R M\text{-}\mathcal{M}od \longrightarrow \mathcal{M}od\text{-}R$$

*son equivalencias inversas y así $\mathcal{M}od$-R y $\operatorname{End}_R(M)$-$\mathcal{M}od$ son categorías equivalentes. Además, decimos que los **anillos R y $S = \operatorname{End}_R(M)$ son Morita equivalentes**.*

Demostración. Sea L en $\mathcal{M}od$-R. Por el lema 2.1.b, tenemos que

$$M^* \otimes_S (L \otimes_R M) \cong M^* \otimes_S (M \otimes_{R^{op}} L) \cong R \otimes_{R^{op}} L \cong L \otimes_R R \cong L$$

donde el isomorfismo composición es dado por $f \otimes (l \otimes m) \mapsto l\theta_S(f \otimes m) = lf(m)$. Así,

$$(M^* \otimes_S -) \circ (- \otimes_R M) \cong id_{\mathcal{M}od\text{-}R},$$

esto es, la compuesta de dichos funtores es naturalmente isomorfa al funtor identidad. Similarmente, por el lema 2.1.a, para cualquier S-módulo a izquierda N,

$$(M^* \otimes_S N) \otimes_R M \cong N \otimes_{S^{op}} S \cong N$$

bajo el morfismo $(f \otimes n) \otimes m \mapsto \theta_R(f \otimes m)n$, luego,

$$(- \otimes_R M) \circ (M^* \otimes_S -) \cong id_{S\text{-}\mathcal{M}od}.$$

Por lo tanto, $\mathcal{M}od$-R y $\operatorname{End}_R(M)$-$\mathcal{M}od$ son categorías equivalentes. □

Corolario 2.4. *Sean R un anillo, M un R-módulo progenerador a izquierda, $M^* = \operatorname{Hom}_R(M,R)$ y $S = \operatorname{End}_R(M)$. Entonces,*
a) *$R \cong \operatorname{End}_{\operatorname{End}_R M}(M)$ como anillos bajo el morfismo $r \mapsto \mu_r(m) = rm$.*
b) *$M^* \cong \operatorname{Hom}_{\operatorname{End}_R M}(M, \operatorname{End}_R M)$ como $\operatorname{End}_R M$-módulos a derecha bajo el morfismo $f \mapsto \theta_R(f \otimes (\ ))$.*
c) *$M \cong \operatorname{Hom}_R(M^*, R) = M^{**}$ como R-módulos a izquierda bajo el morfismo $m \mapsto \omega_m(f) = f(m)$.*
d) *$(\operatorname{End}_R M)^{op} \cong \operatorname{End}_R(M^*)$ como anillos bajo el morfismo $s \mapsto (f \mapsto fs)$.*
e) *M es un $\operatorname{End}_R M$-progenrador.*
f) *M^* es un R-progenrador.*
g) *M^* es un $\operatorname{End}_R M$-progenrador.*

Demostración. Bajo la equivalencia de $\mathcal{M}od$-R a S-$\mathcal{M}od$, al R-módulo a derecha R le corresponde el S-módulo a izquierda $R \otimes_R M \cong M$ y al R-módulo a derecha M^* el S-módulo a izquierda $M^* \otimes_R M \cong S$. Por lo tanto, podemos aplicar la proposición 2.2 para obtener:

a): $R \cong \operatorname{End}_R(R) \cong \operatorname{End}_S(M)$.
b): $M^* \cong \operatorname{Hom}_R(R, M^*) \cong \operatorname{Hom}_S(M, S)$.
c): $M \cong \operatorname{Hom}_S(S, M) \cong \operatorname{Hom}_R(M^*, R)$.

d): $S^{op} \cong \mathrm{End}_S(S) \cong \mathrm{End}_R(M^*)$.

e): Aplicando el funtor $- \otimes_R M$ a R que es un R-progenerador y usando enseguida la proposición 1.9.

f): Aplicando el funtor $M^* \otimes_S -$ a S que es un S-progenerador y usando enseguida la proposición 1.9.

g): Como M es un S-progenerador por (e), aplicando (f) al S-módulo M, concluimos que $\mathrm{Hom}_S(M,S)$ es un S-progenerador, pero por (b), $\mathrm{Hom}_S(M,S) \cong M^*$ como S-módulos a derecha, por lo tanto M^* es un S-progenerador. □

Corolario 2.5. *Sean R un anillo, M un R-módulo progenerador a izquierda, $M^* = \mathrm{Hom}_R(M,R)$ y $S = \mathrm{End}_R(M)$. Entonces, hay una correspondencia uno a uno entre los ideales biláteros de R y los de S dada por:*
Para cada ideal bilátero $\mathfrak{a}$ de R, $M^* \otimes_R (\mathfrak{a} \otimes_R M)$ es isomorfo al ideal bilátero de S cuyos elementos son de la forma

$$\sum \theta_R(f_i \otimes \alpha_i m_i), \quad f_i \in M^*, \alpha_i \in \mathfrak{a}, m_i \in M.$$

Y, para cada ideal bilátero $\mathfrak{b}$ de S, $M^* \otimes_S (\mathfrak{b} \otimes_S M)$ es isomorfo al ideal bilátero de R cuyos elementos son de la forma

$$\sum \theta_S(f_i \otimes \beta_i(n_i)) = \sum f_i(\beta_i(n_i)), \quad f_i \in M^*, \beta_i \in \mathfrak{b}, n_i \in M.$$

Demostración. Como M y M^* son R-proyectivos y por lo tanto son llanos, y como $0 \to \mathfrak{a} \to R$ es exacta, entonces

$$0 \longrightarrow M^* \otimes_R (\mathfrak{a} \otimes_R M) \longrightarrow M^* \otimes_R (R \otimes_R M) \cong S$$

es exacta. Así, el isomorfismo $M^* \otimes_R (R \otimes_R M) \cong S$ toma a $M^* \otimes_R (\mathfrak{a} \otimes_R M)$ y lo envía sobre el ideal de S cuyos elementos son de la forma $\sum \theta_R(f_i \otimes \alpha_i m_i)$.

Similarmente, como M y M^* son S-proyectivos, $M^* \otimes_S (\mathfrak{b} \otimes_S M)$ puede ser considerado dentro de $M^* \otimes_S (S \otimes_S M) \cong R$ bajo el morfismo el cual lleva a $M^* \otimes_S (\mathfrak{b} \otimes_S M)$ al ideal de R cuyos elementos son de la forma

$$\sum \theta_S(f_i \otimes \beta_i(n_i)) = \sum f_i(\beta_i(n_i)), \quad f_i \in M^*, \beta_i \in \mathfrak{b}, n_i \in M.$$

Para finalizar, veamos que en efecto son correspondencias inversas:

$$\mathfrak{a} \longrightarrow M^* \otimes_R (\mathfrak{a} \otimes_R M) \longrightarrow M^* \otimes_S (M^* \otimes_R \mathfrak{a} \otimes_R M) \otimes_S M$$

corresponde al ideal bilátero $\mathfrak{a}'$ de R cuyos elementos son de la forma

$$\sum f_i(m_i)\alpha_i g_i(n_i), f_i, g_i \in M^*, \alpha_i \in \mathfrak{a}, n_i, m_i \in M.$$

Claramente $\mathfrak{a}' \subseteq \mathfrak{a}$. Además, como existen $f_i \in M^*, m_i \in M$ tales que $\sum f_i(m_i) = 1$, tenemos que cada α en $\mathfrak{a}$ puede ser escrito como $\sum f_i(m_i)\alpha f_i(m_i)$ y por lo tanto está en $\mathfrak{a}'$. Luego $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}'$. Un argumento similar, usando una base dual, muestra que el ideal bilátero de S correspondiente a $M^* \otimes_R (M^* \otimes_S \mathfrak{b} \otimes_S M) \otimes_R M$ es igual a $\mathfrak{b}$. Así, las correspondencias son inversas mutuamente. □

De la proposición anterior tenemos que un anillo de matrices $n \times n$ con entradas en un campo es simple, pues R^n es un R-progenerador, $\mathrm{End}_R(R^n) \cong \mathcal{M}_n(R)$ y R no tiene ideales propios no nulos si es un campo.

Adicionalmente, a partir de las proposiciones 1.9 y 2.3 y del lema 2.1, es sencillo demostrar que

Corolario 2.6. *Sean R un anillo, M un R-módulo progenerador a izquierda, $M^* = \mathrm{Hom}_R(M,R)$ y $S = \mathrm{End}_R(M)$. Entonces, un R-módulo a derecha L es un R-progenerador si y sólo si el S-módulo a izquierda $L \otimes_R M$ es un S-progenerador.*

2.1. El Teorema de Morita

Ahora sí, veamos la equivalencia de Morita de manera más global, algunas observaciones y ejemplos.

Para la demostración del Teorema de Morita, es bueno tener presente que si N es un generador de la categoría de R-módulos, entonces cada R-módulo M es el conúcleo de un morfismo entre sumas de copias de N.

Teorema 2.7. ***TEOREMA DE MORITA*** *Sean R y S dos anillos. Son equivalentes*
i) *Las categorías $\mathcal{M}od\text{-}R$ y $\mathcal{M}od\text{-}S$ son equivalentes.*
ii) *La categoría $\mathcal{M}od\text{-}S$ tiene un progenerador P_S cuyo anillo de endomorfismos $\mathrm{End}_{\mathcal{M}od\text{-}S}(P_S)$ es isomorfo a R.*
iii) *Existe un R-S-bimódulo M tal que el funtor $-\otimes_R M : \mathcal{M}od\text{-}R \to \mathcal{M}od\text{-}S$ es una equivalencia de categorías.*

Si estas condiciones son válidas, entonces decimos que R y S son ***Morita equivalentes****.*

Demostración. ***i)*** $\Rightarrow$ ***ii)***: Sea $F : \mathcal{M}od\text{-}R \to \mathcal{M}od\text{-}S$ una equivalencia de categorías. Como el R-módulo libre de rango uno R es un progenerador de la categoría $\mathcal{M}od\text{-}R$, por la proposición 1.9, $F(R)$ es un progenerador de la categoría $\mathcal{M}od\text{-}S$. Como F es una equivalencia de categorías, por la proposición 2.2, es un funtor aditivo completamente fiel [2], luego, F se puede restringir a un isomorfismo de anillos

$$F : R \cong \ \mathrm{End}_{\mathcal{M}od\text{-}R}(R) \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_{\mathcal{M}od\text{-}S}(F(R))$$

Así R es isomorfo al anillo $\mathrm{End}_{\mathcal{M}od\text{-}S}(F(R))$ donde $F(R)$ es un progenerador de $\mathcal{M}od\text{-}S$.

ii) $\Rightarrow$ ***iii)***: Sea P_S un progenerador de $\mathcal{M}od\text{-}S$. Sea $\varphi : R \to \mathrm{End}_{\mathcal{M}od\text{-}S}(P_S)$ el isomorfismo de anillos. Así, podemos ver a P_S como un R-S-bimódulo con la acción $rp = (\varphi(r))(p)$ para $r \in R, p \in P_S$ (pues $(rp)s = \big((\varphi(r))(p)\big)s = (\varphi(r))(ps) = r(ps)$ ya que $\varphi(r)$ es S-lineal). Veamos que P_S satisface la condición (iii) mostrando que los funtores adjuntos

$$T_R = -\otimes_R P_S \,:\, \mathcal{M}od\text{-}R \longrightarrow \mathcal{M}od\text{-}S \quad \text{y}$$

$$H_S = \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}S}(P_S, -) \,:\, \mathcal{M}od\text{-}S \longrightarrow \mathcal{M}od\text{-}R$$

[2]Ver la definición 8.23 en los anexos.

son realmente equivalencias inversas.
***a*)** Sean $I_R = id_{\mathcal{M}od\text{-}R}$ y $\eta : I_R \Rightarrow H_S T_R$ definida por, para cada X en $\mathcal{M}od$-R

$$\begin{aligned} \eta_X : X = I_R(X) &\longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}S}(P_S, X \otimes_R P_S) = H_S T_R(X) \\ x &\longmapsto \quad \alpha_x : P_S \to X \otimes_R P_S \\ &\qquad\qquad p \mapsto x \otimes p \end{aligned}$$

Afirmamos que η es un isomorfismo natural. En efecto, primero mostremos que η es una tranformación natural

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "I_R(f)=f"] \arrow[d, "\eta_X"'] & Y \arrow[d, "\eta_Y"] \\ H_S T_R(X) \arrow[r, "(f\otimes id_{P_S})_\star"'] & H_S T_R(Y) \end{tikzcd}$$

es un diagrama conmutativo pues

$$\begin{aligned} \big((\eta_Y \circ I_R(f))(x)\big)(p) &= \big(\alpha_{f(x)}\big)(p) = f(x) \otimes p = \big((f \otimes id_{P_S}) \circ \alpha_x)\big)(p) \\ &= \big((H_S T_R(f) \circ \eta_X)(x)\big)(p). \end{aligned}$$

Además, para cada X en $\mathcal{M}od$-R, η_X es un homomorfismo de R-módulos a derecha ya que

$$\begin{aligned} \big(\eta_X(x_1 r + x_2)\big)(p) &= \alpha_{x_1 r + x_2}(p) = (x_1 r + x_2) \otimes p = (x_1 \otimes rp) + (x_2 \otimes p) \\ &= (\alpha_{x_1} r)(p) + \alpha_{x_2}(p) = \big(\eta_X(x_1)r + \eta_X(x_2)\big)(p). \end{aligned}$$

Así η es una tranformación natural. Ahora veamos que cada η_X es un isomorfismo: Si $X = R$ entonces por hipótesis

$$H_S T_R(R) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}S}(P_S, R \otimes_R P_S) = \operatorname{End}_{\mathcal{M}od\text{-}S}(P_S) \cong R = I_R(R)$$

Si X es un R-módulo libre, entonces $X \cong R^J = \oplus_J R$, luego como $\otimes$ conmuta con sumas directas, P_S es pequeño y por la hipótesis tenemos que

$$\begin{aligned} H_S T_R(\oplus_J R) &= \operatorname{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}S}(P_S, (\oplus_J R) \otimes_R P_S) \cong \oplus_J \operatorname{End}_{\mathcal{M}od\text{-}S}(P_S) \cong \oplus_J R \\ &= I_R(R^J). \end{aligned}$$

Además, como P_S es S-módulo proyectivo entonces H_S y T_R son funtores exactos a derecha (proposición 8.27 y observación 8.36 en los anexos), es decir, conmutan con conúcleos y como cada R-módulo es el conúcleo de un morfismo entre R-módulos libres, entonces η_X es una biyección en general. Por lo tanto, η es un isomorfismo natural.
***b*)** Sean $I_S = id_{\mathcal{M}od\text{-}S}$ y $\varepsilon : T_R H_S \Rightarrow I_S$ definida por, para cada Z en $\mathcal{M}od$-S

$$\begin{aligned} \varepsilon_Z : T_R H_S(Z) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}S}(P_S, Z) \otimes_R P_S &\longrightarrow Z = I_S(Z) \\ \beta \otimes p &\longmapsto \quad \beta(p) \end{aligned}$$

Afirmamos que ε es un isomorfismo natural. En efecto, primero mostremos que ε es una tranformación natural:

$$\begin{tikzcd} T_R H_S(Z) \arrow[r, "g_\star \otimes_R id_{P_S}"] \arrow[d, "\varepsilon_Z"'] & T_R H_S(W) \arrow[d, "\varepsilon_W"] \\ Z \arrow[r, "I_S(g)=g"'] & W \end{tikzcd}$$

es un diagrama conmutativo pues

$$\begin{aligned} \big(\varepsilon_W \circ T_R H_S(g)\big)(\beta \otimes p) &= \varepsilon_W(g\beta \otimes p) = (g \circ \beta)(p) = g\big(\varepsilon_Z(\beta \otimes p)\big) \\ &= \big(I_S(g) \circ \varepsilon_Z\big)(\beta \otimes p). \end{aligned}$$

Además, para cada Z en $\mathcal{M}od\text{-}S, \varepsilon_Z$ es un homomorfismo de S-módulos a derecha ya que está bien definido pues $\mathrm{Hom}_S(P_S, Z) \times P_S \to Z$ dada por $(\beta, p) \mapsto \beta(p)$ es R-bilineal pues $(\beta r)(p) = \beta(rp)$ gracias a la definición de $\mathrm{Hom}_S(P_S, Z)$ como R-módulo a derecha. Y, ε_Z es S-lineal a derecha pues β lo es y así

$$\varepsilon_Z\big((\beta \otimes p)s\big) = \varepsilon_Z(\beta \otimes ps) = \beta(ps) = \big(\beta(p)\big)s = \big(\varepsilon_Z(\beta \otimes p)\big)s.$$

Por lo tanto, ε es una tranformación natural. Ahora, veamos que cada ε_Z es un isomorfismo para cada Z en $\mathcal{M}od\text{-}S$: Si $Z = P_S$, entonces, por hipótesis,

$$T_R H_S(P_S) = \mathrm{End}_{\mathcal{M}od\text{-}S}(P_S) \otimes_R P_S \cong R \otimes_R P_S \cong P_S = I_S(P_S).$$

Si $Z \cong P_S^K = \oplus_K P_S$, como $\otimes$ conmuta con sumas directas, P_S es pequeño y por la hipótesis tenemos que

$$\begin{aligned} T_R H_S(\oplus_K P_S) &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}S}(P_S, \oplus_K P_S) \otimes_R P_S \cong \oplus_K \big(\mathrm{End}_{\mathcal{M}od\text{-}S}(P_S) \otimes_R P_S\big) \\ &\cong \oplus_K P_S = I_S(\oplus_K P_S). \end{aligned}$$

Ahora, como P_S es un generador de $\mathcal{M}od\text{-}S$, entonces cada S-módulo es el conúcleo de un morfismo entre S-módulos libres y como H_S y T_R son funtores exactos a derecha, entonces ε_Z es una biyección en general. Por lo tanto, ε es un isomorfismo natural.

Dea (a) y (b) tenemos que $T_R = - \otimes_R P_S : \mathcal{M}od\text{-}R \to \mathcal{M}od\text{-}S$ es una equivalencia de categorías con equivalencia inversa $H_S = \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}S}(P_S, -) : \mathcal{M}od\text{-}S \to \mathcal{M}od\text{-}R$.

iii)* $\Rightarrow$ *i) Es claro. □

2.2. Observaciones de la Equivalencia Morita

1) Las condiciones del Teorema de Morita 2.7 son simétricas en R y S. Por lo tanto, si P_S es el R-S-bimódulo que realiza la equivalencia de categorías $T_R = - \otimes_R P_S$ dada en (iii), entonces la equivalencia inversa se realiza por un S-R-bimódulo P_R. Como las equivalencias son inversas cada una de la otra tenemos que

$$P_S \otimes_S P_R \cong R \ \text{ como } R\text{-bimódulos} \quad \text{y} \quad P_R \otimes_R P_S \cong S \ \text{ como } S\text{-bimódulos},$$

pues

$$R = id_{\mathcal{M}od\text{-}R}(R) \cong T_S T_R(R) = (R \otimes_R P_S) \otimes_S P_R \cong P_S \otimes_S P_R.$$

Más aún, $P_R \cong P_S^* = \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}S}(P_S, S)$ como S-R-bimódulos ya que

$$\begin{aligned} P_R &= id_{\mathcal{M}od\text{-}R}(P_R) \cong H_S T_R(P_R) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}S}(P_S, P_R \otimes_R P_S) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}S}(P_S, S) = P_S^*. \end{aligned}$$

Además, por la proposición 1.9 y (iii) en el Teorema de Morita 2.7, $T_R = - \otimes_R P_S$ y $T_S = - \otimes_S P_R$ son funtorores exactos, así P_S es un R-módulo llano al igual que P_R como S-módulo. También, como R es un progenerador de $\mathcal{M}od$-R entonces $P_S \cong R \otimes_R P_S = T_R(R)$ es un progenerador de $\mathcal{M}od$-S, y de igual forma P_R lo es en $\mathcal{M}od$-R.

2) Si R es Morita equivalente a S, entonces el anillo opuesto R^{op} es Morita equivalente a S^{op}. Veamos, supongamos que el R-S-bimódulo P_S y el S-R-bimódulo P_R satisfacen $R \cong P_S \otimes_S P_R$ y $S \cong P_R \otimes_R P_S$ como R y S bimódulos respectivamente. Como la categoría de R^{op}-módulos a derecha es isomorfa a la categoría de R-módulos a izquierda, entonces podemos ver a P_S como un S^{op}-R^{op}-bimódulo y a P_R como un R^{op}-S^{op}-bimódulo. Así, ellos proveen la equivalencia de categorías entre $\mathcal{M}od$-R^{op} y $\mathcal{M}od$-S^{op}.

3) Si R es Morita equivalente a S y R' es Morita equivalente a S', entonces $R \otimes_{\mathbb{Z}} R'$ es Morita equivalente a $S \otimes_{\mathbb{Z}} S'$. En efecto, si P_S es un R-S-bimódulo tal que $T_R = - \otimes_R P_S : \mathcal{M}od\text{-}R \to \mathcal{M}od\text{-}S$ es una equivalencia de categorías y $P_{S'}$ es un R'-S'-bimódulo tal que $T_{R'} = - \otimes_{R'} P_{S'} : \mathcal{M}od\text{-}R' \to \mathcal{M}od\text{-}S'$ es una equivalencia de categorías, entonces $P_S \otimes_{\mathbb{Z}} P_{S'}$ es un $(R \otimes_{\mathbb{Z}} R')$-$(S \otimes_{\mathbb{Z}} S')$-bimódulo tal que

$$\begin{aligned} T_{(R \otimes_{\mathbb{Z}} R')} = T_R \otimes_{\mathbb{Z}} T_{R'} = - \otimes_{(R \otimes_{\mathbb{Z}} R')} (P_S \otimes_{\mathbb{Z}} P_{S'}) : \\ \mathcal{M}od\text{-}(R \otimes_{\mathbb{Z}} R') \longrightarrow \mathcal{M}od\text{-}(S \otimes_{\mathbb{Z}} S') \end{aligned}$$

es una equivalencia de categorías.

4) Invariantes los cuales son preservados por la equivalencia Morita incluyen todos los conceptos los cuales pueden ser definidos a partir de la categoría de módulos sin referencia al anillo, como por ejemplo el número de clases de isomorfismo de módulos proyectivos o de módulos simples, o la K-teoría algebraica del anillo. Pero, para nuestro interés, *el centro del anillo*

$$Z(R) = \{z \in R : zr = rz \forall r \in R\} \quad \textit{es Morita invariante}$$

pues

$$Z(R) \cong \mathrm{End}(id_{\mathcal{M}od\text{-}R}) \quad \text{como anillos}$$

donde $id_{\mathcal{M}od\text{-}R}$ es el funtor identidad de $\mathcal{M}od$-R, esto es, el centro de R está definido sólo en términos de la categoría y como las categorías son equivalentes dicha propiedad o concepto es invariante al pasar de una categoría a otra, es decir, $Z(R) \cong Z(S)$ como anillos si R y S son Morita equivalentes. Ahora, veamos que es verdad que el centro de R es isomorfo al anillo de endomorfismos del funtor identidad de $\mathcal{M}od$-R:

$$\begin{aligned} \tau : Z(R) &\longrightarrow \mathrm{End}(id_{\mathcal{M}od\text{-}R}) \\ z &\longmapsto \tau(z) : id_{\mathcal{M}od\text{-}R} \Rightarrow id_{\mathcal{M}od\text{-}R} \end{aligned}$$

es un isomorfismo de anillos donde $\tau(z)$ es una transformación natural definida por, para cada M en $\mathcal{M}od$-R

$$\begin{aligned} \tau(z)_M : M = id_{\mathcal{M}od\text{-}R}(M) &\longrightarrow id_{\mathcal{M}od\text{-}R}(M) = M \\ m &\longmapsto mz \end{aligned}$$

En efecto,
***a*)** τ está bien definida. Para esto, veamos que $\tau(z)$ es una tranformación natural del funtor identidad de $\mathcal{M}od$-R. Sean M, N R-módulos y $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}R}(M, N)$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "id_R(f)=f"] \arrow[d, "\tau(z)_M"'] & N \arrow[d, "\tau(z)_N"] \\ M \arrow[r, "id_R(f)"] & N \end{tikzcd}$$

es un diagrama conmutativo porque

$$\Big(\tau(z)_N \circ id_{\mathcal{M}od\text{-}R}(f)\Big)(m) = f(m)z = f(mz) = \Big(id_{\mathcal{M}od\text{-}R}(f) \circ \tau(z)_M\Big)(m)$$

pues f es R-lineal a derecha. Además, $\tau(z)_M$ es un homomorfismo de R-módulos a derecha ya que

$$\tau(z)_M(m_1 r + m_2) = (m_1 r + m_2)z = m_1 z r + m_2 z = \big(\tau(z)_M(m_1)\big)r + \tau(z)_M(m_2)$$

pues $z \in Z(R)$. Por lo tanto, $\tau(z)$ es transformación natural y así τ está bien definida.
***b*)** τ es un homorfismo de anillos: sean $z, w \in Z(R)$, M en $\mathcal{M}od$-R y $m \in M$, entonces

$$\begin{aligned} \tau(z+w)_M(m) &= m(z+w) = mz + mw = \tau(z)_M(m) + \tau(w)_M(m) \\ &= \big(\tau(z)_M + \tau(w)_M\big)(m) = \big(\tau(z) + \tau(w)\big)_M(m), \end{aligned}$$

así, $\tau(z+w) = \tau(z) + \tau(w)$. Y,

$$\tau(zw)_M(m) = mzw = mwz = \tau(z)_M(mw) = \big(\tau(z) \circ \tau(w)\big)_M(m),$$

así $\tau(zw) = \tau(z) \circ \tau(w)$. Por lo tanto, τ es un homomorfismo de anillos. Note que en el anillo $\mathrm{End}(id_{\mathcal{M}od\text{-}R})$ la compuesta y suma de transformaciones naturales está definida por, si $\zeta, \varrho \in \mathrm{End}(id_{\mathcal{M}od\text{-}R})$ entonces para cada M en $\mathcal{M}od$-R

$$(\zeta + \varrho)_M = \zeta_M + \varrho_M \quad \text{y} \quad (\zeta \circ \varrho)_M = \zeta_M \circ \varrho_M.$$

***c*)** τ es biyección: τ es inyectivo pues si $\tau(z) = \tau(w)$, entonces para todo R-módulo M, $\tau(z)_M \equiv \tau(w)_M$ en particular $\tau(z)_R \equiv \tau(w)_R$, luego para cada $r \in R$,

$$\tau(z)_R(r) = rz = rw = \tau(w)_R(r),$$

en particular si $r = 1_R$ tenemos que $z = w$ y por lo tanto τ es inyectivo. Ahora, mostremos que τ también es un epimorfismo, sea $\zeta \in \mathrm{End}(id_{\mathcal{M}od\text{-}R})$, entonces existe $\zeta_R : R \to R$ homomorfismo de R-módulos a derecha. Sea $r = \zeta_R(1_R)$, así $\tau(r) = \zeta$ pues si M es un R-módulo, $\tau(r)_M = \zeta_M$ ya que para cada $m \in M, \tau(r)_M(m) = mr = \zeta_M(m)$. Veamos esto último, sea $m \in M$, entonces existe $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}R}(R, M)$ tal que $h(1_R) = m$, y como el siguiente diagrama es conmutativo, por ser ζ transformación natural

$$\begin{tikzcd}
R = id_{\mathcal{M}od\text{-}R}(R) \arrow[r, "id_R(h)=h"] \arrow[d, "\zeta_R"'] & id_{\mathcal{M}od\text{-}R}(M) = M \arrow[d, "\zeta_M"] \\
R = id_{\mathcal{M}od\text{-}R}(R) \arrow[r, "id_R(h)"] & M = id_{\mathcal{M}od\text{-}R}(M)
\end{tikzcd}$$

tenemos que

$$\begin{aligned}
\zeta_M(m) = \zeta_M(h(1_R)) &= (\zeta_M \circ id_{\mathcal{M}od\text{-}R}(h))(1_R) = (id_{\mathcal{M}od\text{-}R}(h) \circ \zeta_R)(1_R) \\
&= h(\zeta_R(1_R)) = h(r) = h(1_R)r = mr.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, τ es sobreyectivo y así es biyección.

Dea $(a), (b)$ y (c) tenemos que τ es isomorfismo de anillos.

Finalmente, podemos concluir que dos anillos conmutativos Morita equivalentes son isomorfos.

5) Hay una variación del Teorema de Morita 2.7 relativa a un anillo conmutativo K con esencialmente la misma prueba. En esta versión R y S son K-álgebras, así, cada R-módulo y cada S-módulo es un K-espacio vectorial. La condición (i) se refiere a una equivalencia K-lineal $T : \mathcal{M}od\text{-}R \to \mathcal{M}od\text{-}S$ de categorías de módulos, esto es, para cada M, N en $\mathcal{M}od\text{-}R$ se tiene que $T : \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}R}(M, N) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}S}(T(M), T(N))$ es un isomorfismo K-lineal, es decir, fija a K. La condición (ii) requiere un isomorfismo de K-álgebras y en la parte (iii), M además de ser R-S-bimódulo debe ser un bimódulo K-simétrico, es decir, los escalares del ring K actúan en la misma forma desde la izquierda (a través de R) y desde la derecha (a través de S).

2.3. Ejemplos de la Equivalencia Morita

Ejemplo 2.8. Si R es un anillo y P un R-módulo progenerador de $\mathcal{M}od\text{-}R$ entonces R y $\mathrm{End}_{\mathcal{M}od\text{-}R}(P)$ son anillos Morita equivalente, por (ii) en el Teorema de Morita 2.7. Recordemos que esta es nuestra proposición 2.3, la cual, es una forma puntual del teorema de Morita. En particular, los anillos $\mathcal{M}_n(R)$ y R son Morita equivalentes, pues, cualquier R-módulo libre de rango finito es un progenerador en la categoría $\mathcal{M}od\text{-}R$, como por ejemplo R^n, y como $\mathrm{End}_{\mathcal{M}od\text{-}R}(R^n) \cong \mathcal{M}_n(R)$ como anillos, entonces $\mathcal{M}_n(R)$ y R son anillos Morita equivalentes.

Además, R^n, visto como vectores columna, es el $\mathcal{M}_n(R)$-R-bimódulo que induce la equivalencia entre las categorías $\mathcal{M}od\text{-}\mathcal{M}_n(R)$ y $\mathcal{M}od\text{-}R$ dada en (iii) en dicho teorema.

Y la equivalencia inversa de la categoría $\mathcal{M}od\text{-}R$ a la categoría $\mathcal{M}od\text{-}\mathcal{M}_n(R)$ se da también por el R-$\mathcal{M}_n(R)$-bimódulo R^n pero visto como vectores fila.

Ejemplo 2.9. Todo anillo S Morita equivalente a R es isomorfo a un anillo de la forma $e\mathcal{M}_n(R)e$ donde $e \in \mathcal{M}_n(R)$ es un objeto *idempotente pleno* en el anillo de matrices $n \times n$, es decir, tenemos que $e^2 = e$ y $\mathcal{M}_n(R)e\mathcal{M}_n(R) = \mathcal{M}_n(R)$. En efecto, si P_R es un progenerador de la categoría $\mathcal{M}od\text{-}R$, entonces es finitamente generado y proyectivo, esto es, P_R es un sumando directo de R^n, un módulo libre de rango finito n. Por lo tanto, P_R es isomorfo a la imagen de una matriz $n \times n$ idempotente e, pues si $e : R^n \to R^n$ es la proyección de R^n en P_R, tenemos que

$$P_R = \mathrm{im}(e) = R^n e, e^2 = e \quad \text{y} \quad e \in \mathcal{M}_n(R),$$

así

$$R^n = P_R \oplus Q \quad \text{con} \quad Q = \ker(e) = R^n(id_{R^n} - e).$$

Luego, si R y S son Morita equivaletes, entonces

$$S \cong \mathrm{End}_{\mathcal{M}od\text{-}R}(P_R) \cong \mathrm{End}_{\mathcal{M}od\text{-}R}(R^n e) \cong e\mathcal{M}_n(R)e$$

como anillos. Veamos este último isomorfismo: como

$$\begin{aligned}\mathrm{End}_{\mathcal{M}od\text{-}R}(R^n) \;=\; & \mathrm{End}_{\mathcal{M}od\text{-}R}(R^n e) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}R}(P_R, Q) \\ & \oplus \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}R}(Q, P_R) \oplus \mathrm{End}_{\mathcal{M}od\text{-}R}(Q),\end{aligned}$$

luego existe un monomorfismo

$$\varphi : \mathrm{End}_{\mathcal{M}od\text{-}R}(R^n e) \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathcal{M}od\text{-}R}(R^n) \quad \text{definido por}$$

$$\big(\varphi(f)\big)(x(I-e)) = 0 \quad \text{y} \quad \big(\varphi(f)\big)(xe) = f(xe) \quad \text{para cada } x \in R^n.$$

Tenemos que $\mathrm{im}(\varphi) = e\,\mathrm{End}_{\mathcal{M}od\text{-}R}(R^n)e$, pues $g \in \mathrm{im}(\varphi)$ si y sólo si $g(R^n(I-e)) = 0$ y $g(R^n e) \subseteq R^n e$, esto es, $g(R^n) \subseteq R^n e$. Pero esto es equivalente a decir que $ge = g$ y $eg = g$, o equivalentemente, $g = ege$. Así, $\mathrm{im}(\varphi) = e\,\mathrm{End}_{\mathcal{M}od\text{-}R}(R^n)e$ y por lo tanto,

$$\mathrm{End}_{\mathcal{M}od\text{-}R}(R^n e) \cong e\,\mathrm{End}_{\mathcal{M}od\text{-}R}(R^n)e.$$

De los ejemplos 2.8 y 2.9 tenemos que si Q es un anillo, entonces Q^2 es un progenerador de $\mathcal{M}od\text{-}Q$ y $- \otimes_Q Q^2 : \mathcal{M}od\text{-}Q \to \mathcal{M}od\text{-}\mathcal{M}_2(Q)$ es una equivalencia de categorías, pues $\mathrm{End}_{\mathcal{M}od\text{-}Q}(Q^2) \cong \mathcal{M}_2(Q)$. Pero también, Q^3 es un progenerador de $\mathcal{M}od\text{-}Q$ y $- \otimes_Q Q^3 : \mathcal{M}od\text{-}Q \to \mathcal{M}od\text{-}\mathcal{M}_3(Q)$ es una equivalencia de categorías. Así, Q es Morita equivalente a $\mathcal{M}_2(Q)$ y a $\mathcal{M}_3(Q)$, y por lo tanto, $\mathcal{M}_2(Q)$ y $\mathcal{M}_3(Q)$ son anillos Morita equivalentes. Luego, debe existir $n \in \mathbb{N}$ y $e \in \mathcal{M}_n(\mathcal{M}_2(Q))$ un objeto idempotente pleno, tal que

$$e\mathcal{M}_n(\mathcal{M}_2(Q))e \cong \mathcal{M}_3(Q).$$

Ejemplo 2.10. Este ejemplo no incluye álgebra de matrices. Sea R un anillo conmutativo y M un R-módulo invertible, es decir, existe otro R-módulo M' tal que $M \otimes_R M' \cong R$ como R-módulos. Entonces, $T_M = - \otimes_R M$ es una equivalencia de la categoría de R-módulos en sí misma, con casi-inversa $T_{M'} = - \otimes_R M'$. En efecto, si $\eta : T_{M'}T_M \longrightarrow id_{\mathcal{M}od\text{-}R}$ es definida por

$$\eta_X : T_{M'}T_M(X) = (X \otimes_R M) \otimes_R M' \cong X \otimes_R R \cong X \longrightarrow X = id_{\mathcal{M}od\text{-}R}(X)$$

para cada R-módulo X, tenemos que η es un isomorfismo natural. Pero, no se tiene que $T_M \cong id_{\mathcal{M}od\text{-}R}$, es decir, esta equivalencia de la categoría de R-módulos en sí misma no es isomorfa al funtor identidad, a menos que M sea libre de rango uno, pues así, $M \cong R$ y $T_M(X) = X \otimes_R M \cong X = id_{\mathcal{M}od\text{-}R}(X)$ para cada R-módulo X.

Como el producto tensorial con un módulo invertible M es una equivalencia de categorías, entonces, por la proposición 1.9, como $T_M(R) \cong M$ y R es un progenerador, tenemos que M es un progenerador de la categoría de R-módulos cuyo anillo de endomorfismos es isomorfo a R (por el Teorema de Morita 2.7). Más aún, por la observación 1 de la equivalencia Morita, tenemos que el módulo inverso M' es isomorfo al dual R-lineal $M^* = \mathrm{Hom}_R(M, R)$ como R-bimódulos.

Ahora consideremos la suma directa $P = R \oplus M$, la cual es otro progenerador para la categoría de R-módulos. Entonces, R es Morita equivalente al anillo $\mathrm{End}_R(P)$ por parte (ii) en el Teorema de Morita 2.7. Además,

$$\begin{aligned}\mathrm{End}_R(P) &\cong \mathrm{Hom}_R(R, R \oplus M) \oplus \mathrm{Hom}_R(M, R) \oplus \mathrm{Hom}_R(M, M)\\ &\cong R \oplus M \oplus M^* \oplus R,\end{aligned}$$

entonces, si M no es libre, $\mathrm{End}_R(P)$ no es libre sobre su centro y por lo tanto no es una álgebra de matrices.

Para un ejemplo específico consideremos el anillo conmutativo

$$R = \mathbb{Z}[u]/\langle\, u^2 - 5u\,\rangle \quad \text{y el ideal} \quad M = \langle\, 2, u\,\rangle \lhd R$$

Entonces, M no es libre como R-módulo pues $(-u)2 + (u-3)u = u^2 - 5u = 0$, pero es invertible porque el morfismo evaluación $\alpha : \mathrm{Hom}_R(M, R) \otimes_R M \to R$ dado por $\alpha(f \otimes m) = f(m)$ es un isomorfismo de R-módulos. En efecto, α está bien definida pues $\mathrm{Hom}_R(M, R) \times M \to R$ dada por $(f, m) \mapsto f(m)$ es R-bilineal $\big((fr)(m) = f(rm)\big)$. También, α es un homomorfismo de R-módulos pues $\alpha\big((f \otimes m)r\big) = \alpha(fr \otimes m) = (fr)(m) = f(rm) = f(m)r = \alpha(f \otimes m)r$ ya que f es R-lineal y R es conmutativo. Finalmente, para ver que α es biyectiva notemos que

$$R = \{a + bu : a, b \in \mathbb{Z}\} \quad \text{y} \quad M = \{2a + bu : a, b \in \mathbb{Z}\},$$

luego $R/M \cong \mathbb{Z}_2$. Entonces, si definimos $f : M \longrightarrow R$ por $f(2) = -7 + u$ y $f(u) = -15 + 2u$ tenemos que f es un homomorfismo de R-módulos y $f(2 \cdot 2 - 1 \cdot u) = 1$ y así, α es sobreyectivo. Similarmente, con algunos cálculos extensos se puede ver que α es inyectivo. En conclusión, α es un isomorfismo y M es un R-módulo invertible. Por otro lado, notemos que la inclusión $\iota : M \to R$ llega a ser un isomorfismo después de invertir a 2. Por lo tanto, si invertimos a 2, $P = R \oplus M$ es un R-módulo libre de rango 2, luego

$$\mathrm{End}_R(P)[2^{-1}] \cong \mathcal{M}_2\big(R[2^{-1}]\big) \quad \text{como anillos.}$$

Observación 2.11. Se puede demostrar algo más general en el Teorema de Morita 2.7: Sea $\mathcal{A}$ una categoría abeliana con sumas infinitas y P un progenerador. Entonces, el funtor $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P, -) : \mathcal{A} \to \mathcal{M}od\text{-}\mathrm{End}_{\mathcal{A}}(P)$ es una equivalencia de categorías; esto muestra que en el Teorema de Morita la condición (ii) implica la condición (i) tomando $\mathcal{A} = \mathcal{M}od\text{-}S$.

CAPÍTULO 3

Localización

Ahora estudiaremos el concepto de localización para módulos y algunos resultados ([HU], [AM], [Mat]). Sean R un anillo conmutativo y S un subconjunto multiplicativo de R. La construcción del anillo de fracciones o anillo cociente $S^{-1}R$ puede ser llevada a cabo con un R-módulo M en lugar del anillo R. Definimos la relación de equivalencia $\sim$ en $M \times S$ por $(m, s) \sim (m', s') \Leftrightarrow \exists s_1 \in S, s_1(ms' - m's) = 0$. La clase de equivalencia de $(m, s) \in M \times S$ será denotada por m/s. El conjunto de todas las clases de equivalencia de $(M \times S)/\sim$ será denotado por $S^{-1}M$. Es sencillo verificar que $S^{-1}M$ es un $S^{-1}R$-módulo con las operaciones adición y multiplicación $S^{-1}R$-escalar definidas por

$$\frac{m}{s} + \frac{m'}{s'} = \frac{ms' - m's}{ss'} \quad \text{y} \quad \frac{r}{s}\left(\frac{m}{s'}\right) = \frac{rm}{ss'}.$$

Si adicionalmente M es una R-álgebra, entonces $S^{-1}M$ es una $S^{-1}R$-álgebra con operación producto dada por

$$\frac{m}{s}\frac{m'}{s'} = \frac{mm'}{ss'}.$$

Al igual que para anillos, si $S = R - \mathfrak{p}$ con $\mathfrak{p}$ un ideal primo de R, $S^{-1}M$ será denotado por $M_{\mathfrak{p}}$ y así $M_{\mathfrak{p}}$ es un módulo (o álgebra) sobre el anillo local $R_{\mathfrak{p}}$.

Además,

$$S^{-1}(\ ) : R\text{-}\mathcal{M}od \longrightarrow S^{-1}R\text{-}\mathcal{M}od$$

es un funtor definiendo para cada $f \in \mathrm{Hom}_{R\text{-}\mathcal{M}od}(M, N)$, el homomorfismo $S^{-1}f \in \mathrm{Hom}_{S^{-1}R\text{-}\mathcal{M}od}(S^{-1}M, S^{-1}N)$ por $m/s \longmapsto f(m)/s$. Así,

$$S^{-1}(f \circ g) = S^{-1}f \circ S^{-1}g \quad \text{y} \quad S^{-1}id_M = id_{S^{-1}M}.$$

Proposición 3.1. *Sea R un anillo conmutativo. Entonces, el funtor $S^{-1}(\ )$ es un funtor exacto, es decir, si*

$$M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \quad \textit{es una sucesión exacta en } M$$

como R-módulos, entonces

$$S^{-1}M' \xrightarrow{S^{-1}f} S^{-1}M \xrightarrow{S^{-1}g} S^{-1}M'' \quad \textit{es una sucesión exacta en } S^{-1}M$$

como $S^{-1}R$-módulos.

Demostración. Como $gf = 0$, entonces $S^{-1}g \circ S^{-1}f = S^{-1}(0) = 0$, luego $\operatorname{im}(S^{-1}f) \subseteq \ker(S^{-1}g)$. Para mostrar la otra inclusión, sea $m/s \in \ker(S^{-1}g)$, entonces $g(m)/s = 0$ en $S^{-1}M''$, por lo tanto existe $t \in S$ tal que $tg(m) = 0$ en M'', pero como g es R-lineal, $tm \in \ker(g) = \operatorname{im}(f)$. Así, $tm = f(m')$ para algún $m' \in M'$. Luego, en $S^{-1}M$ tenemos que $m/s = f(m')/ts = (S^{-1}f)(m'/ts) \in \operatorname{im}(S^{-1}f)$. Entonces, $\ker(S^{-1}g) \subseteq \operatorname{im}(S^{-1}f)$. □

En particular, de la anterior proposición se sigue que si M' es un sumbódulo de M, entonces el morfismo $S^{-1}M' \to S^{-1}M$ es inyectivo y por lo tanto $S^{-1}M'$ puede ser visto como un submódulo de $S^{-1}M$.

Proposición 3.2. *Sean R un anillo conmutativo y M un R-módulo. Entonces*

$$S^{-1}R \otimes_R M \cong S^{-1}M \ \textit{ como } S^{-1}R\textit{-módulos}$$

En particular, si $\mathfrak{p}$ es un ideal primo de R

$$R_{\mathfrak{p}} \otimes_R M \cong M_{\mathfrak{p}} \ \textit{ como } R_{\mathfrak{p}}\textit{-módulos}$$

Demostración. Sea

$$\gamma : S^{-1}R \otimes_R M \to S^{-1}M \quad \text{definida por} \quad \gamma\big((r/s) \otimes m\big) = rm/s.$$

γ está bien definida pues $S^{-1}R \times M \to S^{-1}M$ dado por $(r/s, m) \mapsto rm/s$ es R-bilineal. γ es sobreyectivo pues $m/s = \gamma\big((1_R/s) \otimes m\big)$. Ahora, cualquier elemento de $S^{-1}R \otimes_R M$ es de la forma $\sum_1^n (r_i/s_i) \otimes m_i$. Si $s = \prod_1^n s_i \in S, t_i = \prod_{j \neq i} s_j$, tenemos que

$$\sum_{i=1}^{n} (r_i/s_i) \otimes m_i = \sum_{i=1}^{n} (r_i t_i/s) \otimes m_i = \sum_{i=1}^{n} (1_R/s) \otimes r_i t_i m_i = (1_R/s) \otimes \sum_{i=1}^{n} r_i t_i m_i,$$

luego cada elemento de $S^{-1}R \otimes_R M$ es de la forma $(1_R/s) \otimes m$. Supongamos que $\gamma((1_R/s) \otimes m) = 0$, entonces $m/s = 0$, luego $tm = 0$ para algún $t \in S$ y $(1_R/s) \otimes m = (1_R/ts) \otimes tm = 0$. Así, γ es inyectivo y por lo tanto un isomorfismo. □

Corolario 3.3. *Sean R un anillo conmutativo y M un R-módulo. Entonces, $S^{-1}R$ es un R-módulo llano. En particular, para cada $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$ $R_{\mathfrak{p}}$ es un R-módulo llano.*

Demostración. Es directa a partir de las proposiciones 3.1 y 3.2. □

Proposición 3.4. *Sean R un anillo conmutativo y M, N R-módulos. Entonces,*

$$S^{-1}M \otimes_{S^{-1}R} S^{-1}N \cong S^{-1}(M \otimes_R N) \text{ como } S^{-1}R\text{-módulos}$$

En particular, si $\mathfrak{p}$ es un ideal primo de R

$$M_{\mathfrak{p}} \otimes_{R_{\mathfrak{p}}} N_{\mathfrak{p}} \cong (M \otimes_R N)_{\mathfrak{p}} \text{ como } R_{\mathfrak{p}}\text{-módulos}$$

Demostración. Por la proposición 3.2, $S^{-1}M \otimes_{S^{-1}R} S^{-1}N \cong (S^{-1}R \otimes_R M) \otimes_{S^{-1}R} (S^{-1}R \otimes_R N) \cong M \otimes_R S^{-1}R \otimes_R N \cong S^{-1}(M \otimes_R N)$ bajo el morfismo $(m/s) \otimes (n/t) \mapsto (m \otimes n)st$. $\square$

Lema 3.5. *Sean R un anillo conmutativo, S y S' subconjuntos multiplicativos de R con $S \subset S'$. Entonces, $S'^{-1}R$ tiene estructura de $S^{-1}R$-álgebra inducida por el homomorfismo de anillos de $S^{-1}R$ a $S'^{-1}R$ dado por $r/s \mapsto r/s$. Además,*

$$S'^{-1}R \cong (S'S^{-1}R)^{-1}(S^{-1}R) \quad \text{donde} \quad S'S^{-1}R = \{s'/s \in S^{-1}R : s' \in S'\}$$

es un subconjunto multiplicativo de $S^{-1}R$.

Demostración. Como $S \subset S'$, el morfismo $r/s \mapsto r/s$ está bien definido. Para mostrar que $S'^{-1}R \cong (S'S^{-1}R)^{-1}(S^{-1}R)$ definimos $r/s' \mapsto (r/1)/(s'/1)$. $\square$

La siguiente proposición es primordial para nosotros.

Proposición 3.6. *Sean R un anillo local con ideal maximal $\mathfrak{m}$ y M un R-módulo proyectivo finitamente generado. Entonces M es un R-módulo libre.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{B}_{\mathfrak{m}} = \{m_1 + \mathfrak{m}M, \ldots, m_n + \mathfrak{m}M\}$ es una base para el $R/\mathfrak{m}$-espacio vectorial $M/\mathfrak{m}M$. Veamos que $\{m_1, \ldots, m_n\}$ es una base para M sobre R. Sea

$$\varphi : R^n \to M \quad \text{definida por} \quad \varphi((r_1, \ldots, r_n)) = \sum_{i=1}^{n} r_i m_i.$$

Como $\mathcal{B}_{\mathfrak{m}}$ genera a $M/\mathfrak{m}M$, tenemos que $Rm_1 + \cdots + Rm_n + \mathfrak{m}M = M$. Por lo tanto, por el corolario 1.12 aplicado al módulo $M/(Rm_1 + \cdots + Rm_n)$, $Rm_1 + \cdots + Rm_n = M$ y así φ es sobreyectivo.

Ahora, sea $\varphi((r_1, \ldots, r_n)) = \sum_1^n r_i m_i = 0$, entonces $\sum_1^n r_i(m_i + \mathfrak{m}M) = 0$ en $M/\mathfrak{m}M$. Pero como $\mathcal{B}_{\mathfrak{m}}$ es una base para $M/\mathfrak{m}M$ sobre $R/\mathfrak{m}$, cada $r_i \in \mathfrak{m}$, luego $\ker(\varphi) \subset \mathfrak{m}R^n$. Como M es proyectivo, la sucesión exacta $0 \to \ker(\varphi) \to R^n \xrightarrow{\varphi} M \to 0$ escinde. Por lo tanto, existe un submódulo L de R^n tal que $\ker(\varphi) \oplus L \cong R^n$. Consecuentemente,

$$\ker(\varphi) = \mathfrak{m}R^n \cap \ker(\varphi) = (\mathfrak{m}\ker(\varphi) \oplus \mathfrak{m}L) \cap \ker(\varphi) = \mathfrak{m}\ker(\varphi).$$

Pero $\ker(\varphi)$, siendo un sumando directo de R^n, es finitamente generado y por lo tanto igual a cero por el corolario 1.12.

Así, φ es un isomorfismo y $\{m_1, \ldots, m_n\}$ es una base para M sobre R. $\square$

Observación 3.7. Si R un anillo conmutativo y M un R-módulo proyectivo finitamente generado, por la proposición 3.2, para cada $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$ podemos formar el $R_{\mathfrak{p}}$-módulo $M \otimes_R R_{\mathfrak{p}} \cong M_{\mathfrak{p}}$, y por el corolario 1.18 y la proposición 3.6, $M_{\mathfrak{p}}$ es $R_{\mathfrak{p}}$-mólulo libre.

El siguiente resultado será útil para la demostración del teorema 4.27, el cual es muy importante para nosotros.

Si R es un anillo con identidad, el ***radical de Jacobson de R*** es el ideal formado por la intersección de todos los ideales maximales a izquierda de R. Otra definición equivalente dada en [HU, p. 423] es: $JacRad(R)$ es la intersección de todos los anuladores a izquierda de los R-módulos simples a izquierda.

Lema 3.8. *Sea A una R-álgebra finitamente generada como un R-módulo, entonces $JacRad(R) \cdot A \subseteq JacRad(A)$.*

Demostración. Sean $\mathfrak{J} = JacRad(R)$ y M un A-módulo simple. Como A es un R-módulo finitamente generado y $M \cong A/\mathfrak{A}$ para algún ideal maximal a izquierda $\mathfrak{A}$ de A, entonces M es un R-módulo no nulo finitamente generado. Luego, por el lema de Nakayama, $\mathfrak{J}M \subsetneq M$. Además, como A conmuta con R, $\mathfrak{J}M$ es un A-submódulo de M, y por ser este último simple, $\mathfrak{J}M = 0$. □

3.1. Propiedades Locales

Una propiedad X de un anillo R (o de un R-módulo M) se dice que es una ***propiedad local*** si, R (o M) cumple X si y sólo si $R_{\mathfrak{p}}$ (o $M_{\mathfrak{p}}$) cumple X para todo ideal primo $\mathfrak{p}$ de R. Las siguientes son algunas propiedades locales.

Proposición 3.9. *Sean R un anillo conmutativo y M un R-módulo. Son equivalentes*
i) $M = 0$
ii) $M_{\mathfrak{p}} = 0$ *para cada ideal primo* $\mathfrak{p}$ *de* R
iii) $M_{\mathfrak{m}} = 0$ *para cada ideal maximal* $\mathfrak{m}$ *de* R

Demostración. ***i)*** $\Rightarrow$ ***ii)*** $\Rightarrow$ ***iii)***: Es clara.

iii) $\Rightarrow$ ***i)***: Supongamos que (*iii*) es verdad y $M \neq 0$. Sea $0 \neq m \in M$, entonces el ideal $\operatorname{Ann}(m) \subsetneqq \langle 1 \rangle$, luego, está contenido en un ideal maximal $\mathfrak{m}$. Consideremos $m/1 \in M_{\mathfrak{m}}$, como $M_{\mathfrak{m}} = 0$, tenemos que $m/1 = 0$, así, m es anulado por algún elemento de $R - \mathfrak{m}$, pero esto es imposible ya que $\operatorname{Ann}(m) \subseteq \mathfrak{m}$. □

Proposición 3.10. *Sean R un anillo conmutativo, M, N R-módulos y $f \in \operatorname{Hom}_R(M, N)$. Son equivalentes*
i) *f es inyectivo (resp. sobreyectivo)*
ii) $f_{\mathfrak{p}} : M_{\mathfrak{p}} \to N_{\mathfrak{p}}$ *es inyectivo (resp. sobreyectivo) para cada* $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$
iii) $f_{\mathfrak{m}} : M_{\mathfrak{m}} \to N_{\mathfrak{m}}$ *es inyectivo (resp. sobreyectivo) para cada* $\mathfrak{m} \in \operatorname{máx}(R)$

Demostración. ***i)*** $\Rightarrow$ ***ii)***: Por la proposición 3.1.

ii) $\Rightarrow$ ***iii)***: Es clara.

iii) $\Rightarrow$ ***i)***: Sea $M' = \ker(f)$, entonces la sucesión $0 \to M' \to M \to N$ es exacta. Luego, por la proposición 3.1, $0 \to M'_{\mathfrak{m}} \to M_{\mathfrak{m}} \to N_{\mathfrak{m}}$ es exacta y por lo tanto $M'_{\mathfrak{m}} \cong$

$\ker(f_{\mathfrak{m}}) = 0$ para cada $\mathfrak{m} \in \text{máx}(R)$, pues $f_{\mathfrak{m}}$ es inyectivo. Entonces, por la proposición 3.9, $M' = 0$, y así, f es inyectivo. Para la demostración de sobreyectividad sólo reverse todas las flechas. □

Proposición 3.11. *Sean R un anillo conmutativo y M un R-módulo. Son equivalentes*
i) *M es un R-módulo llano*
ii) *$M_{\mathfrak{p}}$ es un $R_{\mathfrak{p}}$-módulo llano para cada ideal primo $\mathfrak{p}$ de R*
iii) *$M_{\mathfrak{m}}$ es un $R_{\mathfrak{m}}$-módulo llano para cada ideal maximal $\mathfrak{m}$ de R*

Demostración. ***i)*** $\Rightarrow$ ***ii)***: Es sencillo ver que si $R \to A$ es un homomorfismo de anillos conmutativos y M es un R-módulo llano, entonces $M_A = A \otimes_R M$ es un A-módulo llano. Así, usando la proposición 3.2, tenemos (ii).

ii) $\Rightarrow$ ***iii)***: Es clara.

iii) $\Rightarrow$ ***i)***: Si $N \to P$ es un homomorfismo de R-módulos y $\mathfrak{m} \in \text{máx}(R)$, entonces $N \to P$ inyectivo $\Longrightarrow N_{\mathfrak{m}} \to P_{\mathfrak{m}}$ inyectivo, por 3.10 $\Longrightarrow N_{\mathfrak{m}} \otimes_{R_{\mathfrak{m}}} M_{\mathfrak{m}} \to P_{\mathfrak{m}} \otimes_{R_{\mathfrak{m}}} M_{\mathfrak{m}}$ inyectivo, por hipótesis $\Longrightarrow (N \otimes_R M)_{\mathfrak{m}} \to (P \otimes_R M)_{\mathfrak{m}}$ inyectivo, por la proposición 3.4 $\Longrightarrow N \otimes_R M \to P \otimes_R M$ inyectivo, por la proposición 3.10, por lo tanto M es R-llano. □

3.2. Módulos de Presentación Finita

Esta sección está dedicada a demostrar que todo módulo de presentación finita tiene la propiedad que es proyectivo si y sólo si es llano. Esta afirmación es útil para la demostración de un importante teorema de separabilidad, el teorema 4.27, que trataremos más adelante.

Proposición 3.12. *Sean R un anillo conmutativo, M un R-módulo y $m \in M$. Si $m = 0$ en $M_{\mathfrak{m}}$ para todo $\mathfrak{m} \in \text{máx}(R)$, entonces $m = 0$ en M.*

Demostración. $m = 0$ en $M_{\mathfrak{m}}$ si y sólo si $sm = 0$ para algún $s \in R - \mathfrak{m}$ si y sólo si $\text{Ann}_R(m) \not\subset \mathfrak{m}$. No obstante, si $1_R \notin \text{Ann}_R(m)$ entonces, existe un ideal maximal que contiene $\text{Ann}_R(m)$. Luego, $1_R \in \text{Ann}_R(m)$, esto es $m = 0$ en M. □

Proposición 3.13. *Sean R un anillo conmutativo y M un R-módulo llano. Si $r_{ij} \in R$ y $m_j \in M$, para $i = 1, \ldots, s$ y $j = 1, \ldots, n$, satisfacen que $\sum_j r_{ij} m_j = 0$, para cada i, entonces existen $l \in \mathbb{Z}$, $r'_{jk} \in R$, $m'_k \in M$, con $k = 1, \ldots, l$, y $j = 1, \ldots, n$, tales que*

$$\sum_{j=1}^{n} r_{ij} r'_{jk} = 0 \text{ para todo } i, k \quad \text{y} \quad m_j = \sum_{k=1}^{l} r'_{jk} m'_k \text{ para todo } j.$$

Es decir, las soluciones en un módulo llano M de un sistema de ecuaciones lineales simultáneas con coeficientes en R pueden ser expresadas como combinaciones lineales de las soluciones en R.

Demostración. Sea $\gamma : R^n \to R^s$ el morfismo lineal definido por la matriz (r_{ij}). De la sucesión exacta $0 \longrightarrow \ker(\gamma) \longrightarrow R^n \xrightarrow{\gamma} R^s \longrightarrow 0$, como M es R-llano,

$$0 \longrightarrow \ker(\gamma) \otimes_R M \longrightarrow M^n \xrightarrow{\gamma_M} M^s \longrightarrow 0 \quad \text{es exacta,}$$

donde $\gamma_M = \gamma \otimes_R id_M$. Por hipótesis, $\gamma_M(m_1, \ldots, m_n) = \vec{0}$, luego existen $\overrightarrow{(r'_k)} = (r'_{1k}, \ldots, r'_{nk}) \in \ker(\gamma) \subset R^n$ y $m'_k \in M$ tales que

$$\sum_{k=1}^{l} \overrightarrow{(r'_k)} \otimes m'_k \longmapsto (m_1, \ldots, m_n).$$

Así se tiene la proposición. $\square$

Proposición 3.14. *Sean $(R, \mathfrak{m})$ un anillo local y M un R-módulo llano. Si $m_1, \ldots, m_n \in M$ son tales que sus imágenes $\bar{m}_1, \ldots, \bar{m}_n \in M/\mathfrak{m}M$ son linealmente independientes sobre el campo $R/\mathfrak{m}$, entonces $m_1, \ldots, m_n \in M$ son linealmente independientes sobre R.*

Demostración. Por inducción en n. Si $n = 1$, y $r \in R$ es tal que $rm_1 = 0$, entonces por la proposición 3.13, existen $r'_1, \ldots, r'_l \in R$ tales que $rr'_k = 0$ y $m_1 \in \sum r'_k M$. Por hipótesis, $m_1 \notin \mathfrak{m}M$, luego, entre los r'_k, debe haber al menos uno que no pertenece a $\mathfrak{m}$, así es unidad en R y por lo tanto $r = 0$.

Para $n > 1$, sea $\sum_{j=1}^{n} r_j m_j = 0$, por la proposición 3.13, existen $r'_{jk} \in R, m'_k \in M$ con $k = 1, \ldots, l$ tales que

$$\sum_j r_j r'_{jk} = 0 \text{ para cada } k \quad \text{y} \quad m_j = \sum_k r'_{jk} m'_k \text{ para todo } j.$$

Ahora, como $m_n \notin \mathfrak{m}M$, entre los r'_{nk} debe haber al menos uno que no pertenece a $\mathfrak{m}$ y por lo tanto es unidad en R, luego r_n es una combinación lineal de $r_1, \ldots, r_{n-1}$, esto es,

$$r_n = \sum_{i=1}^{n-1} r_i s_i \quad \text{para algunos} \quad s_i \in R.$$

Entonces,

$$\sum_{i=1}^{n-1} r_i(m_i + s_i m_n) = 0.$$

Pero, los $n - 1$ elementos $\bar{m}_1 + \bar{s}_1 \bar{m}_n, \ldots, \bar{m}_{n-1} + \bar{s}_{n-1} \bar{m}_n$ de $M/\mathfrak{m}M$ son linealmente independientes sobre $R/\mathfrak{m}$, luego, por hipótesis de inducción, $r_1 = \cdots = r_{n-1} = 0$ y por lo tanto $r_n = 0$. $\square$

Sea R un anillo no necesariamente conmutativo. Un R-módulo M se dice ***módulo de presentación finita*** si hay una sucesión exacta $0 \to K \to F \to M \to 0$ de R-módulos con F libre y K y F finitamente generados. Claramente, cualquier módulo de presentación finita es finitamente generado y si R es noetheriano los dos conceptos coinciden.

Proposición 3.15. *Sean R un anillo conmutativo y M un R-módulo de presentación finita. Entonces, M es un R-módulo proyectivo si y sólo si $M_{\mathfrak{m}}$ es un $R_{\mathfrak{m}}$-módulo libre para cada $\mathfrak{m} \in \text{máx}(R)$.*

Demostración. Si M es un R-módulo proyectivo, como es de presentación finita por hipótesis, entonces es un sumando directo de un R-módulo libre de rango finito, luego $M_{\mathfrak{m}}$ es un sumando directo de un $R_{\mathfrak{m}}$-módulo libre (por la proposición 3.10), así, $M_{\mathfrak{m}}$ es un $R_{\mathfrak{m}}$-módulo proyectivo. Además, por la observación 3.7, es libre.

Recíprocamente, sean $N \to N' \to 0$ una sucesión exacta de R-módulos y

$$C = \operatorname{coker}\big(\operatorname{Hom}_R(M, N) \to \operatorname{Hom}_R(M, N')\big).$$

Entonces, como $M_{\mathfrak{m}}$ es módulo libre y por lo tanto proyectivo, para cada $\mathfrak{m} \in \text{máx}(R)$, tenemos que

$$C_{\mathfrak{m}} = \operatorname{coker}\big(\operatorname{Hom}_{R_{\mathfrak{m}}}(M_{\mathfrak{m}}, N_{\mathfrak{m}}) \to \operatorname{Hom}_{R_{\mathfrak{m}}}(M_{\mathfrak{m}}, N'_{\mathfrak{m}})\big) = 0.$$

Así, por la proposición 3.9 o 3.12, $C = 0$, luego M es proyectivo por la proposición 1.3. $\square$

Proposición 3.16. *Sean R un anillo conmutativo y M un R-módulo de presentación finita. Entonces M es proyectivo si y sólo si es llano.*

Demostración. Sea M un R-módulo proyectivo. Si $M \cong R^I$ para algún conjunto de índices I, entonces $R^I \otimes_R - \cong (R \otimes_R -)^I$ es un funtor exacto pues $R \otimes_R - \cong id_{R\text{-}\mathcal{M}od}$ lo es. Para el caso general, si M es un R-módulo proyectivo, por la proposición 1.3, M es un R-sumando directo de un R-módulo libre, supongamos R^I. Entonces, $M \otimes_R -$ es un sumando directo de $R^I \otimes_R -$ el cual es un funtor exacto, así $M \otimes_R -$ es un funtor exacto y por lo tanto M es R-llano.

Recíprocamente, si M es un R-módulo llano, entonces, por proposicón 3.11, $M_{\mathfrak{m}}$ es $R_{\mathfrak{m}}$-módulo llano para cada $\mathfrak{m} \in \text{máx}(R)$. Luego, por la proposición 3.14, $M_{\mathfrak{m}}$ es $R_{\mathfrak{m}}$-módulo libre para todo $\mathfrak{m} \in \text{máx}(R)$ y así, por la proposición 3.15, M es un R-módulo proyectivo. $\square$

3.3. Rango Definido o Constante Para Módulos Proyectivos

Ahora generalizaremos el concepto de rango de un módulo libre a módulos proyectivos y finitamente generados. Sea M un R-módulo proyectivo finitamente generado con R un anillo conmutativo. Por la observación 3.7, $M_{\mathfrak{p}}$ es $R_{\mathfrak{p}}$-módulo libre, luego existe un único entero no-negativo $n_{\mathfrak{p}}$ tal que

$$M_{\mathfrak{p}} \cong M \otimes_R R_{\mathfrak{p}} \cong R_{\mathfrak{p}}^{n_{\mathfrak{p}}}.$$

Llamaremos a $n_{\mathfrak{p}}$ el **$\mathfrak{p}$-rango de** M y lo denotaremos $\mathbf{rank}_{\mathfrak{p}}(M)$. También, diremos que M ***tiene rango constante o definido*** y escribiremos $\operatorname{rank}_R(M) = n$ si y sólo si $\operatorname{rank}_{\mathfrak{p}}(M) = n$, para cada $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$.

Proposición 3.17. *Sean R un anillo conmutativo, M un R-módulo proyectivo finitamente generado tal que* $\operatorname{rank}_R(M)$ *está definido y S una R-álgebra conmutativa. Entonces,* $\operatorname{rank}_S(M \otimes_R S)$ *está definido y es igual a* $\operatorname{rank}_R(M)$.

Demostración. Sea $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(S)$. Es claro que $\mathfrak{p} = \{r \in R : r1_S \in \mathfrak{q}\}$ es un ideal primo de R. Además, es sencillo ver que $S_\mathfrak{q}$ es una $R_\mathfrak{p}$-álgebra pues $(R-\mathfrak{p})1_S \subset S-\mathfrak{q}$ (ver el lema 3.5). Por lo tanto,

$$(M \otimes_R S) \otimes_S S_\mathfrak{q} \cong M \otimes_R S_\mathfrak{q} \cong M \otimes_R (R_\mathfrak{p} \otimes_{R_\mathfrak{p}} S_\mathfrak{q}) \cong {R_\mathfrak{p}}^n \otimes_{R_\mathfrak{p}} S_\mathfrak{q} \cong {S_\mathfrak{q}}^n$$

donde $n = \operatorname{rank}_R(M)$. □

Observación 3.18. Se puede demostrar que cuando R es un anillo conmutativo y no contiene elementos idempotentes diferentes a 0 y 1, entonces el rango de cualquier R-módulo proyectivo finitamente generado está definido (ver [DeMI] para detalles).

Lema 3.19. *Sean R un anillo conmutativo y P un R-módulo progenerador. Son equivalentes*
i) $\operatorname{rank}_R(P) = 1$
ii) $\operatorname{rank}_R\big(\operatorname{Hom}_R(P,R)\big) = 1$
iii) $\operatorname{End}_R(P) \cong R$ *como anillos*
iv) $\operatorname{Hom}_R(P,R) \otimes_R P \cong R$ *como R-módulos*

Demostración. ***i)*** $\Leftrightarrow$ ***ii)***: Por la proposición 3.2 y el corolario 4.3 (ver más adelante), para cada $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$,

$$R_\mathfrak{p} \otimes_R \operatorname{Hom}_R(P,R) \cong \operatorname{Hom}_{R_\mathfrak{p}}(R_\mathfrak{p} \otimes_R P, R_\mathfrak{p} \otimes_R R) \cong \operatorname{Hom}_{R\mathfrak{p}}(P_\mathfrak{p}, R_\mathfrak{p}).$$

Además, por la observación 3.7, $P_\mathfrak{p}$ es $R_\mathfrak{p}$-mólulo libre, luego $P_\mathfrak{p} \cong (R_\mathfrak{p})^n$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Así,

$$\operatorname{Hom}_{R\mathfrak{p}}(P_\mathfrak{p}, R_\mathfrak{p}) \cong (R_\mathfrak{p})^n.$$

Por lo tanto, $\operatorname{rank}_R(P) = 1$ si y sólo si $\operatorname{rank}_R\big(\operatorname{Hom}_R(P,R)\big) = 1$.

i) $\Rightarrow$ ***iii)***: Sea $\phi : R \to \operatorname{End}_R(P)$ dado por $\big(\phi(r)\big)(p) = rp$. Es sencillo ver que para cada $r \in R, \phi(r) \in \operatorname{End}_R(P)$ y que ϕ es un homomorfismo de anillos. Además, como P es fiel (corolario 1.15), ϕ es un monomorfismo. Ahora, para cada $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$, como $\operatorname{rank}_R(P)$ $=\operatorname{Rank}_{R_\mathfrak{p}}(P_\mathfrak{p}) = 1$

$$\begin{array}{ccc} R_\mathfrak{p} \otimes_R R & \xrightarrow{id_{R_\mathfrak{p}} \otimes_R \phi} & R_\mathfrak{p} \otimes_R \operatorname{End}_R(P) \\ \downarrow & & \downarrow \\ R_\mathfrak{p} & \xrightarrow{\phi_\mathfrak{p}} & \operatorname{End}_{R_\mathfrak{p}}(P_\mathfrak{p}) \cong \operatorname{End}_{R_\mathfrak{p}}(R_\mathfrak{p}) \end{array}$$

es un diagrama conmutativo donde los morfismos verticales y $\phi_\mathfrak{p}$ son isomorfismos, luego $id_{R_\mathfrak{p}} \otimes_R \phi$ es un isomorfismo. Así, $R_\mathfrak{p} \otimes_R \operatorname{im}(\phi) = R_\mathfrak{p} \otimes_R \operatorname{End}_R(P)$ para cada $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$, por lo tanto, por la proposición 3.10, $\operatorname{im}(\phi) = \operatorname{End}_R(P)$ y ϕ es un isomorfismo.

iii) $\Rightarrow$ ***iv)***: Por el lema 2.1.a.
iv) $\Rightarrow$ ***i)***: Como $\mathrm{Hom}_R(P,R)\otimes_R P \cong R$, entonces para cada $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$

$$\begin{aligned} R_{\mathfrak{p}} &\cong R_{\mathfrak{p}} \otimes_R \big(\mathrm{Hom}_R(P,R)\otimes_R P\big) \cong R_{\mathfrak{p}} \otimes_R \mathrm{Hom}_R(P,R) \otimes_{R_{\mathfrak{p}}} (R_{\mathfrak{p}} \otimes_R P) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{R_{\mathfrak{p}}}(P_{\mathfrak{p}}, R_{\mathfrak{p}}) \otimes_{R_{\mathfrak{p}}} P_{\mathfrak{p}}. \end{aligned}$$

Luego, para cada ideal primo $\mathfrak{p}$ de R, $\mathrm{Rank}_{R_{\mathfrak{p}}}(P_{\mathfrak{p}}) = 1$ y así $\mathrm{rank}_R(P) = 1$. $\square$

CAPÍTULO 4

Álgebras Separables

Sea R un anillo conmutativo. Una ***R-álgebra*** A es un anillo A junto con un homomorfismo de anillos $\theta : R \to Z(A)$. Este morfismo induce una estrutura natural de R-módulo en A definiendo para cada $r \in R$ y cada $a \in A$, $ra = \theta(r)a$. Entonces,

$$(\diamond) \quad r(ab) = (ra)b = a(rb) \quad \forall r \in R, \forall a, b \in A.$$

Recíprocamente, si A es un anillo el cual es un R-módulo que satisface $(\diamond)$, entonces $r \mapsto r1_A$ es un homomorfismo de anillos de R en $Z(A)$ y por lo tanto A es una R-álgebra.

Una ***R-álgebra A es fiel*** si lo es como un R-módulo, esto es, el ideal anulador de R es cero, $\mathrm{Ann}_R(A) = 0$, o equivalentemente $r \mapsto r1_A$ es mónico, es decir, el morfismo $r \mapsto r1_A$ identifica a R como un subanillo de $Z(A)$.

A continuación, primero daremos algunas relaciones entre los funtores Hom y $\otimes$ que nos serán útiles y enseguida trataremos las álgebras separables.

Proposición 4.1. *Sean R un anillo conmutativo, A y B R-álgebras y, M y N módulos proyectivos finitamente generados sobre A y B respectivamente. Entonces, para cada A-módulo M' y cada B-módulo N',*

$$\mathrm{Hom}_A(M, M') \otimes_R \mathrm{Hom}_B(N, N') \cong \mathrm{Hom}_{A \otimes_R B}(M \otimes_R N, M' \otimes_R N')$$

como R-módulos bajo el morfismo inducido por $\big(\psi(f \otimes g)\big)(m \otimes n) = f(m) \otimes g(n)$. Si además, $M = M'$ y $N = N'$, entonces ψ también es un homomorfismo de R-álgebras.

Demostración. Es sencillo ver que ψ es un homomorfismo de R-módulos bien definido el cual preserva multiplicación cuando $M = M'$ y $N = N'$. Mostremos entonces que ψ es una biyección: Si $M = A$ y $N = B$ es claro. Si $M = A^m$ y $N = B^n$, es decir, M y N libres de rango finito, entonces por distributividad de Hom y $\otimes$ sobre sumas directas finitas, ψ es la compuesta de todos esos isomorfismos.

En el caso general, supongamos que M y N son módulos proyectivos finitamente generados, por la proposición 1.3, existen naturales m y n, un A-módulo L y un B-módulo K tales que $M \oplus L \cong A^m$ y $N \oplus K \cong B^n$. Se sigue que existen un R-submódulo

H de $\mathrm{Hom}_A(A^m, M') \otimes_R \mathrm{Hom}_B(B^n, N')$ y un R-submódulo H' de $\mathrm{Hom}_{A\otimes_R B}(A^m \otimes_R B^n, M' \otimes_R N')$ tales que

$$\big(\mathrm{Hom}_A(M, M') \otimes_R \mathrm{Hom}_B(N, N')\big) \oplus H \cong \mathrm{Hom}_A(A^m, M') \otimes_R \mathrm{Hom}_B(B^n, N') \text{ y}$$

$$\mathrm{Hom}_{A\otimes_R B}(M \otimes_R N, M' \otimes_R N') \oplus H' \cong \mathrm{Hom}_{A\otimes_R B}(A^m \otimes_R B^n, M' \otimes_R N')$$

de tal forma que el isomorfismo establecido en el caso anterior (entre módulos libres) envía a H en H' e iguala ψ en $\mathrm{Hom}_A(M, M')\otimes_R\mathrm{Hom}_B(N, N')$. Y así, ψ es una biyección. $\square$

Corolario 4.2. *Sean R un anillo conmutativo, A una R-álgebra y N un R-módulo proyectivo finitamente generado. Entonces, si N' es un R-módulo,*

$$A \otimes_R \mathrm{Hom}_R(N, N') \cong \mathrm{Hom}_A(A \otimes_R N, A \otimes_R N') \text{ como } R\text{-módulos}$$

Demostración. Tomemos $M = M' = A$ y $B = R$ en la proposición 4.1. $\square$

Corolario 4.3. *Sean R un anillo conmutativo, N un R-módulo proyectivo finitamente generado y $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$. Entonces, si N' es un R-módulo,*

$$\mathrm{Hom}_R(N, N')_{\mathfrak{p}} = R_{\mathfrak{p}} \otimes_R \mathrm{Hom}_R(N, N') \cong \mathrm{Hom}_{R_{\mathfrak{p}}}(N_{\mathfrak{p}}, N'_{\mathfrak{p}}) \text{ como } R\text{-módulos}$$

Demostración. Es directo a partir del corolario 4.2. $\square$

Corolario 4.4. *Sean R un anillo conmutativo y, M y N R-módulos proyectivos finitamente generados. Entonces,*

$$\mathrm{End}_R(M) \otimes_R \mathrm{End}_R(N) \cong \mathrm{End}_R(M \otimes_R N) \text{ como } R\text{-álgebras}$$

Demostración. Sean $A = B = R$, $M = M'$ y $N = N'$ en la proposición 4.1. $\square$

Proposición 4.5. *Sean A y B anillos, L un A-módulo proyectivo finitamente generado, $M \in A$-$\mathcal{M}od$-B y $N \in B$-$\mathcal{M}od$. Entonces,*

$$\mathrm{Hom}_A(L, M) \otimes_B N \cong \mathrm{Hom}_A(L, M \otimes_B N) \text{ como grupos}$$

bajo el morfismo inducido por $\big(\psi(f \otimes n)\big)(l) = f(l) \otimes n$.

Demostración. La demostración es análoga a la de la proposición 4.1. Esto es, la relación claramente es cierta para $L = A$, puede ser fácilmente extendida a $L = A^n$ por distributividad de Hom y $\otimes$ sobre sumas directas finitas, y finalmente, es verificada para el caso general considerando a L como un A-sumando directo de A^n. $\square$

Por otro lado, para cualquier R-álgebra A, podemos formar ***la álgebra envolvente de*** $A : A^e = A\otimes_R A^{op}$. Naturalmente, la álgebra A tiene una estructura de A^e-módulo a izquierda inducida por $(a\otimes a')b = aba'$. También, existe un homomorfismo sobreyectivo de A^e-módulos a izquierda

$$\mu : A^e = A \otimes_R A^{op} \to A \quad \text{definido por} \quad \mu\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes a'_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} a_i a'_i \tag{4.1}$$

y si A es conmutativo, μ es un homomorfismo de anillos. Además, $\ker(\mu)$ es un ideal a izquierda de A^e generado por todos los elementos de la forma $a \otimes 1_A - 1_A \otimes a$.

Proposición 4.6. *Sea A una R-álgebra. Son equivalentes*
i) *A es un A^e-módulo a izquierda proyectivo.*
ii) *La sucesión exacta de A^e-módulos a izquierda $0 \to \ker(\mu) \to A^e \xrightarrow{\mu} A \to 0$ escinde.*
iii) *Existe un elemento $e \in A^e$ tal que $\mu(e) = 1_A$ y $\ker(\mu)e = 0$.*

*Además, si A satisface estas condiciones, se le llama **R-álgebra separable**.*

Demostración. ***i)*** $\Leftrightarrow$ ***ii)***: Es clara.

ii) $\Leftrightarrow$ ***iii)***: Supogamos (ii) es cierta, entonces existe ψ un A^e-homomorfismo (a izquierda) de A en A^e tal que $\mu\psi = id_A$. Si tomamos $e = \psi(1_A)$, tenemos que $\mu(e) = 1_A$ y $\ker(\mu)e = 0$. Recíprocamente, si (iii) es cierta, el morfismo $\psi : A \to A^e$ definido por $\psi(a) = (1 \otimes a)e = (a \otimes 1)e$ es un A^e-homomorfismo pues

$$\begin{aligned}\psi((a \otimes b)c) = \psi(acb) = (acb \otimes 1)e &= (ac \otimes 1)(b \otimes 1)e = (ac \otimes 1)(1 \otimes b)e \\ &= (ac \otimes b)e = (a \otimes b)(c \otimes 1)e = (a \otimes b)\psi(c).\end{aligned}$$

Además, $\mu\psi = id_A$, y así, (ii) es verdad. □

Notemos que el elemento e descrito en la proposición anterior es necesariamente idempotente, pues $e^2 - e = (e - 1 \otimes 1)e \in \ker(\mu)e = 0$. Nos referiremos a $e \in A^e$ como un ***idempotente separable para*** A.

Ejemplo 4.7. Sea R un anillo conmutativo. El anillo de matrices $\mathcal{M}_n(R)$ es una R-álgebra separable pues para cualquier j fijo entre 1 y n

$$e = \sum_{i=1}^{n} E_{ij} \otimes E_{ji}, \quad \text{es tal que} \quad \mu(e) = \sum_{i=1}^{n} E_{ij}E_{ji} = \sum_{i=1}^{n} E_{ii} = I$$

y para cada k, l,

$$(E_{kl} \otimes I - I \otimes E_{kl})e = \sum_{i=1}^{n}(E_{kl}E_{ij} \otimes E_{ji} - E_{ij} \otimes E_{ji}E_{kl}) = E_{kj} \otimes E_{jl} - E_{kj} \otimes E_{jl} = 0.$$

Como $\{E_{kl}\}_{k,l=1}^{n}$ genera a $\mathcal{M}_n(R)$ como un R-módulo, tenemos que $\ker(\mu)e = 0$ y por lo tanto, e es el idempotente separable para $\mathcal{M}_n(R)$.

Ahora daremos unas condiciones útiles de la teoría de módulos equivalentes a separabilidad. Si A es una R-álgebra, entonces cada A-módulo a izquierda (resp. a derecha) M tiene una estructura inherente de R-módulo a izquierda (resp. a derecha) dada por $rm = (r1_A)m$ (resp. $mr = m(r1_A)$). Por un ***A/R-módulo bilátero*** M entenderemos un A-módulo conmutando sus estructuras a izquierda y derecha, esto es, $(am)a' = a(ma')$, y cuyas estructuras de R-módulo coinciden, es decir, $(r1_A)m = m(r1_A)$, para todo $a \in A, m \in M$ y $r \in R$.

Sea M un A^e-módulo a izquierda, entonces M puede ser visto como un A/R-módulo bilátero definiendo $am = (a \otimes 1_A)m$ y $ma = (1_A \otimes a)m$. Recíprocamente, cualquier A/R-módulo bilátero puede ser considerado un A^e-módulo a izquierda. Por lo tanto, los conceptos de A/R-módulo bilátero y A^e-módulo a izquierda son equivalentes y serán usados intercambiadamente.

Definición 4.8. Para cualquier A^e-módulo a izquierda M, sea

$$M^A = \{m \in M : am = ma, \, \forall a \in A\}$$

M^A es un R-submódulo de M y $(\ )^A$ es un funtor covariante de la categoría de A/R-módulos biláteros a la categoría de R-módulos.

Lema 4.9. *Sea A una R-álgebra. Los funtores exactos a izquierda* $\operatorname{Hom}_{A^e}(A, -)$ *y* $(\ )^A$ *son naturalmente isomorfos. Esto es, dado M un A/R-módulo bilátero,*

$$\operatorname{Hom}_{A^e}(A, M) \cong M^A \quad \textit{como } R\textit{-módulos}$$

(bajo el morfismo $f \mapsto f(1_A)$), y para cualquier otro A/R-módulo bilátero N y $g \in$ $\operatorname{Hom}_{A^e}(M, N)$ *el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Hom}_{A^e}(A, M) \arrow[r, "g_\star"] \arrow[d, "\cong"'] & \operatorname{Hom}_{A^e}(A, N) \arrow[d, "\cong"] \\
M^A \arrow[r, "g|_{M^A}"] & N^A
\end{tikzcd}$$

Demostración. Si $f \in \operatorname{Hom}_{A^e}(A, M)$, $af(1) = (a \otimes 1)f(1) = f\big((a \otimes 1)1\big) = f(a) = f\big((1 \otimes a)1\big) = (1 \otimes a)f(1) = (f(1))a$, luego $f(1) \in M^A$. Recíprocamente, para cada $m \in M^A$, la función $f_m : A \to M$ definida por $f_m(a) = am$ es un elemento de $\operatorname{Hom}_{A^e}(A, M)$. Por lo tanto, el morfismo $f \mapsto f(1)$ es biyectivo. El resto es sencillo de ver. □

Corolario 4.10. *Sea A una R-álgebra. Entonces, bajo el morfismo $f \longmapsto f(1_A)$*

$$\operatorname{End}_{A^e}(A) \cong Z(A) \quad \textit{como } R\textit{-módulos}$$

Demostración. Notemos que $A^A = Z(A)$ y apliquemos el lema 4.9 para $M = A$. □

Corolario 4.11. *Sea A una R-álgebra.* $\operatorname{Hom}_{A^e}(A, A^e) \cong \operatorname{Ann}_{A^e}(\ker(\mu))$ *como R-módulos y si A es R-separable, entonces*

$$\mu\big(\operatorname{Ann}_{A^e}(\ker(\mu))\big) = Z(A).$$

Demostración. Notemos que

$$(A^e)^A = \{x \in A^e : (a \otimes 1 - 1 \otimes a)x = 0, \forall a \in A\} = \operatorname{Ann}_{A^e}(\ker(\mu))$$

y apliquemos el lema 4.9. Además, si A es A^e-proyectivo, tenemos que $A^e \xrightarrow{\mu} A \longrightarrow 0$ exacta implica que $\operatorname{Hom}_{A^e}(A, A^e) \xrightarrow{\mu_\star} \operatorname{End}_{A^e}(A) \cong Z(A) \longrightarrow 0$ es exacta. Así, se tiene lo deseado. □

Corolario 4.12. *Una R-álgebra A es separable si y sólo si $(\ )^A$ es un funtor exacto a derecha.*

Demostración. Una R-álgebra A es separable si y sólo si A es un A^e-módulo proyectivo y esto sucede si y sólo si $\mathrm{Hom}_{A^e}(A, -)$ es exacto a derecha, pero por el lema 4.9, esto último se tiene si y sólo si $(\ )^A$ es exacto a derecha. □

Proposición 4.13. *Sean S_1, S_2 R-álgebras conmutativas, A_1 una S_1-álgebra separable y A_2 una S_2-álgebra separable. Entonces, $A_1 \otimes_R A_2$ es una $S_1 \otimes_R S_2$-álgebra separable (si $A_1 \otimes_R A_2 \neq 0$ y $S_1 \otimes_R S_2 \neq 0$).*

Demostración. Sea $M \xrightarrow{f} N \to 0$ una sucesión exacta de $A_1 \otimes_R A_2 / S_1 \otimes_R S_2$-módulos biláteros; el morfismo natural $A_1 \to A_1 \otimes_R A_2$ dado por $a_1 \mapsto a_1 \otimes 1_{A_2}$ dota a M y a N de una estructura de A_1/S_1-módulos biláteros. Por lo tanto, por el corolario 4.12, como A_1 es S_1-separable,

$$M^{A_1} \xrightarrow{f|_{M^{A_1}}} N^{A_1} \longrightarrow 0 \quad \text{es exacta.}$$

Además, como la imagen natural de A_2 en $A_1 \otimes_R A_2$ conmuta con la imagen de A_1, entonces M^{A_1} y N^{A_1} son A_2/S_2-módulos biláteros bajo la operación inducida de $1_{A_1} \otimes A_2$, luego, usando de nuevo el corolario 4.12, tenemos que por la S_2-separalibidad de A_2

$$(M^{A_1})^{A_2} \longrightarrow (N^{A_1})^{A_2} \longrightarrow 0 \quad \text{es exacta.}$$

Pero, es claro que $(M^{A_1})^{A_2} \cong M^{A_1 \otimes_R A_2}$ y $(N^{A_1})^{A_2} \cong N^{A_1 \otimes_R A_2}$, por lo tanto,

$$M^{A_1 \otimes_R A_2} \longrightarrow N^{A_1 \otimes_R A_2} \longrightarrow 0 \quad \text{es exacta}$$

y así $A_1 \otimes_R A_2$ es una $S_1 \otimes_R S_2$-álgebra separable. □

Corolario 4.14. *Sean A una R-álgebra separable y S una R-álgebra conmutativa. Entonces, $A \otimes_R S$ es una S-álgebra separable (si $A \otimes_R S \neq 0$).*

Demostración. Sean $A = A_1, R = S_1, S = S_2 = A_2$ en la proposición 4.13. □

También podemos demostrar el recíproco de la proposición 4.13:

Proposición 4.15. *Sean S_1, S_2 R-álgebras conmutativas, A_1 una S_1-álgebra y A_2 una S_2-álgebra tales que $A_1 \otimes_R A_2$ es $S_1 \otimes_R S_2$-álgebra separable. Si A_2 es fiel como un R-módulo y contiene a R como un R-sumando directo, entonces A_1 es separable sobre S_1.*

Demostración. Si M es un A_1/S_1-módulo bilátero, entonces $M \otimes_R A_2$ es un $A_1 \otimes_R A_2/S_1 \otimes_R S_2$-módulo bilátero. Como R es un R-sumando directo de A_2, $M \otimes_R A_2 \cong (M \otimes_R L) \oplus (M \otimes_R R)$ (como A_1/S_1-módulos biláteros) para algún R-submódulo L de A_2, tenemos que M puede ser identificado con un sumando directo de $M \otimes_R A_2$.

Además, como la proyección de $M \otimes_R A_2$ sobre M es un homomorfismo de A_1/S_1-módulos biláteros, es fácil ver que bajo este morfismo, $(M \otimes_R A_2)^{A_1 \otimes_R A_2}$ es proyectado sobre M^{A_1}. Ahora consideremos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} M \otimes_R A_2 \arrow[r, "f\otimes id_{A_2}"] \arrow[d] & N \otimes_R A_2 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ M \arrow[r, "f"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

donde los morfismos verticales son las proyecciones y las filas son exactas. A partir de este diagrama tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} (M \otimes_R A_2)^{A_1 \otimes_R A_2} \arrow[r, "f\otimes id_{A_2}"] \arrow[d] & (N \otimes_R A_2)^{A_1 \otimes_R A_2} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ M^{A_1} \arrow[r, "f"] & N^{A_1} & \end{tikzcd}$$

donde los morfismos verticales son aún las proyecciones y la fila superior es exacta ya que $A_1 \otimes_R A_2$ es $S_1 \otimes_R S_2$-separable (por el corolario 4.12). Ahora, es obvio que $M^{A_1} \to N^{A_1} \to 0$ es exacta y por lo tanto A_1 es S_1-separable. □

Corolario 4.16. *Sean A_1 y A_2 R-álgebras tales que $A_1 \otimes_R A_2$ es una R-álgebra separable y A_2 contiene a R como un R-sumando directo. Entonces, A_1 es una R-álgebra separable.*

Demostración. Tomemos $S_1 = S_2 = R$ en la proposición 4.15. □

Corolario 4.17. *Sean A una R-álgebra y S una R-álgebra conmutativa que contiene a R como un R-sumando directo. Si $A \otimes_R S$ es S-separable entonces A es R-separable. Además, si $1_A \otimes S \in Z(A \otimes_R S)$ entonces $R1_A = Z(A)$.*

Demostración. Para la primera afirmación tomemos $A_1 = A, S_1 = R$ y $A_2 = S_2 = S$ en la proposición 4.15. Para ver la segunda, por la demostración de dicha proposición, tenemos que $1_A \otimes_R S = Z(A \otimes_R S) = (A \otimes_R S)^{A \otimes_R S}$ es proyectado sobre $A^A = Z(A)$. Pero, $1_A \otimes_R S$ es proyectado sobre $1_A \otimes_R R \cong R \cdot 1_A$. □

Ahora, recordemos que si A es una R-álgebra y $\mathfrak{a}$ es un ideal de R tal que $\mathfrak{a}1_A = 0$, entonces A es naturalmente una $R/\mathfrak{a}$-álgebra. Además, es sencillo ver que $A^e = A \otimes_R A^{op} = A \otimes_{R/\mathfrak{a}} A^{op}$, luego A es una R-álgebra separable si y sólo si A es una $R/\mathfrak{a}$-álgebra separable.

Proposición 4.18. *Sean A una R-álgebra separable y $\mathfrak{A}$ un ideal bilátero de A. Entonces, $A/\mathfrak{A}$ es una R-álgebra separable (y por lo tanto, por el comentario anterior, $A/\mathfrak{A}$ es una $(R1_A)/(R1_A \cap \mathfrak{A})$-álgebra separable). Además,*

$$Z(A/\mathfrak{A}) = \frac{Z(A) + \mathfrak{A}}{\mathfrak{A}}.$$

Demostración. Cada $(A/\mathfrak{A})/R$-módulo bilátero M es naturalmente un A/R-módulo bilátero bajo la operación $am = (a + \mathfrak{A})m$ y $ma = m(a + \mathfrak{A})$. Así, $M^A = M^{A/\mathfrak{A}}$, luego $A/\mathfrak{A}$ es R-separable por el corolario 4.12. Ahora, como $A \to A/\mathfrak{A} \to 0$ es una sucesión exacta de A/R-módulos biláteros, por la R-separablidad de A tenemos que

$$A^A \to (A/\mathfrak{A})^A \to 0 \quad \text{es exacta,}$$

pero como $A^A = Z(A)$ y $(A/\mathfrak{A})^A = Z(A/\mathfrak{A})$, entonces $Z(A/\mathfrak{A})$ es la imagen de $Z(A)$ bajo el morfismo natural, esto es, $Z(A/\mathfrak{A}) = \frac{Z(A)+\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}}$. □

Proposición 4.19. ***Transitividad de la Separabilidad****. Si A es una S-álgebra separable y S es una R-álgebra conmutativa separable, entonces A es una R-álgebra separable; Si A es una R-álgebra separable y S es una R-subalgebra de $Z(A)$, entonces A es separable sobre S.*

Demostración. Claramente la composición del homomorfismo estructura de R en $Z(S)$ $= S$ con el homomorfismo estructura de S en $Z(A)$ dota a A de una estructura de R-álgebra. Además, cualquier A/R-módulo bilátero M es un S/R-módulo bilátero. También, si $x \in M^S, a \in A, s \in S$, entonces $s(ax) = a(sx) = a(xs) = (ax)s$, luego, $ax \in M^S$, así M^S es un A/S-módulo bilátero con $(M^S)^A = M^A$. Por lo tanto, de la separabilidad de A sobre S y la separabilidad de S sobre R, por el corolario 4.12, tenemos que la sucesión exacta $M \longrightarrow N \longrightarrow 0$ implica que

$$(M^S)^A = M^A \longrightarrow (N^S)^A = N^A \longrightarrow 0 \quad \text{es exacta,}$$

para M y N A/R-módulos biláteros y así, A es R-separable. □

Proposición 4.20. *$A_1 \oplus A_2$ es una $R_1 \oplus R_2$-álgebra separable si y sólo si A_1 y A_2 son, respectivamente, R_1 y R_2 álgebras separables.*

Demostración. Use el corolario 4.12 y la proposición 4.18. □

La siguiente es una proposición muy importante para nosotros.

Proposición 4.21. *Sea A una R-álgebra separable la cual es proyectiva como un R-módulo. Entonces, A es finitamente generada como un R-módulo.*

Demostración. Como A^{op} es un R-módulo proyectivo, porque A lo es, por el lema de la Base Dual 1.4, sea $(f_i, a_i)_{i\in I}$ una base dual para A^{op} sobre R. Entonces, para cada $a \in A^{op}$, $a = \sum f_i(a)a_i$, donde para a fijo, $f(a) = 0$ para casi todos los $i's$ excepto un número finito.

Si identificamos $A \otimes_R R$ con A, $1_A \otimes f_i$ puede ser considerado un elemento de $\mathrm{Hom}_A(A^e, A)$ y el conjunto $(1_A \otimes f_i, 1_A \otimes a_i)_{i\in I}$ forma una base dual para A^e como un A-módulo a izquierda proyectivo, esto es, $u = \sum(1_A \otimes f_i)(u) \cdot (1 \otimes a_i)$ para cada $u \in A^e$. Aplicando el morfismo multiplicativo μ (ver la ecuación (4.1)) y tomando $u = (1 \otimes a)e$ donde e es el idempotente separable para A sobre R, obtenemos

$$(\diamondsuit) \quad a = (1 \otimes a)\mu(e) = \mu\big((1 \otimes a)e\big) = \sum \Big(\big(1_A \otimes f_i\big)((1 \otimes a)e)\Big)a_i.$$

Como $\big(1_A \otimes f_i\big)((1 \otimes a)e) = \big(1_A \otimes f_i\big)((a \otimes 1)e) = (a \otimes 1)\big((1_A \otimes f_i)(e)\big)$, el conjunto de subíndices i para los cuales $\big(1_A \otimes f_i\big)((1 \otimes a)e) \neq 0$ está contenido en el conjunto finito de subíndices para los cuales $(1_A \otimes f_i)(e) \neq 0$ y este conjunto más tarde será independiente de a. Luego, la sumatoria $(\diamondsuit)$ puede ser tomada sobre un conjunto finito fijo. Si $e = \sum_{j=1}^{m} x_j \otimes y_j$, de $(\diamondsuit)$ tenemos que

$$a = \sum_{(i,j)=(1,1)}^{(n,m)} x_j f_i(y_j a) a_i = \sum_{(i,j)=(1,1)}^{(n,m)} f_i(y_j a) x_j a_i$$

y entonces el conjunto finito $\{x_j a_i\}_{i,j}^{n,m}$ genera a A^{op} y por lo tanto a A, sobre R. □

Corolario 4.22. *Sean R un campo y A una R-álgebra separable. Entonces la dimensión de A como un R-espacio vectorial es finita.*

Demostración. Es directo a partir de la proposición 4.21, pues cada módulo sobre un campo es libre y por lo tanto proyectivo. □

Proposición 4.23. *Sea A una R-álgebra separable. Si M es un A-módulo a izquierda el cual es proyectivo como un R-módulo, entonces es proyectivo como un A-módulo.*

Demostración. Sea $0 \longrightarrow L \longrightarrow N \xrightarrow{\eta} M \longrightarrow 0$ una sucesión exacta de A-módulos a izquierda. Para mostrar que M es A-proyectivo es suficiente ver que esta sucesión escinde. Como M es un R-módulo proyectivo, entonces esta sucesión de R-módulos escinde, esto es, existe $\psi : M \to N$ un homomorfismo de R-módulos tal que $\eta\psi = id_M$. Además, como M y N son A-módulos a izquierda, $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ tiene estructura de A^e-módulo a izquierda dada por $\big((a \otimes a')f\big)(m) = af(a'm)$.

Podemos usar la separabilidad de A para modificar ψ convenientemente con el fin de obtener un nuevo morfismo $\psi' : M \to N$ tal que $\eta\psi' = id_M$ y que sea A-lineal. Sea e un idempotente separable para A, definimos $\psi' = e\psi$, esto es, si $e = \sum_1^n x_i \otimes y_i$, entonces $\psi'(m) = \sum_1^n x_i \psi(y_i m)$, $\forall m \in M$. Pero como η es un A-homomorfismo y $\mu(e) = 1_A$, para cada $\mathfrak{m} \in M$

$$\eta\psi'(m) = \eta\big(\sum x_i \psi(y_i m)\big) = \sum x_i \eta\psi(y_i m) = \sum x_i y_i m = m.$$

Además, como $\ker(\mu)e = 0$, tenemos que $(a \otimes 1 - 1 \otimes a)\psi' = (a \otimes 1 - 1 \otimes a)e\psi = 0, \forall a \in A$, luego para todo $a \in A$ y $m \in M$

$$a\psi'(m) = \big((a \otimes 1)\psi'\big)(m) = \big((1 \otimes a)\psi'\big)(m) = \psi'(am).$$

Por lo tanto, ψ' es un homomorfismo de A-módulos, lo que completa la demostración. □

Corolario 4.24. *Si R es un campo y A una R-álgebra separable entonces A es una **R-álgebra clásicamente separable**, esto es, para cada extensión de campo K de R, el radical de Jacobson de $A \otimes_R K$ es igual al ideal cero.*

Demostración. Sea K una extensión de campo de R. Por el corolario 4.14, $A \otimes_R K$ es una K-álgebra separable. Pero, como cada $A \otimes_R K$-módulo es K-proyectivo (ya que cada módulo sobre un campo es libre), por la proposición 4.23, todo $A \otimes_R K$-módulo es proyectivo. Además, como todo anillo unitario sobre el cual cada módulo a izquierda unitario es proyectivo, es un ***anillo semisimple***[1], esto es, su radical de Jacobson es el ideal cero, tenemos que $JacRad(A \otimes_R K) = 0$. □

Ahora demostraremos los recíprocos de los corolarios 4.22 y 4.24. Esto es, si R es un campo y A una R-álgebra clásicamente separable y de dimensión finita como R-espacio vectorial, entonces es separable.

Teorema 4.25. *Sea R un campo. Una R-álgebra A es separable si y sólo si es una R-álgebra clásicamente separable y la dimensión de A como R-espacio vectorial es finita.*

Demostración. Una implicación son los corolarios 4.22 y 4.24. Veamos el recíproco: Sea S una clausura algebraica de R. Si A es clásicamente separable y de dimensión finita como R-espacio vectorial, entonces $A \otimes_R S$ es un anillo artiniano semisimple. Luego, por la teoría de Wedderburn - Artin, $A \otimes_R S$ es una suma directa de un número finito de anillos de matrices plenas sobre algunas álgebras de división, donde cada álgebra de división es de dimensión finita como un módulo sobre su centro y cada centro contiene (una copia de) S. Pero, no hay álgebras de división propias de dimesión finita como módulos sobre un campo algebraicamente cerrado, entonces $A \otimes_R S$ es una suma directa finita de anillos de matrices plenas sobre S. Ahora, por el ejemplo 4.7, cada uno de estos anillos de matrices es una S-álgebra separable, así, por proposición 4.20, $A \otimes_R S$ es separable sobre $S \oplus \cdots \oplus S$ (n veces, donde n es el número de componentes simples de $A \otimes_R S$). Además, como $S \oplus \cdots \oplus S$ es S-separable, por proposición 4.19, $A \otimes_R S$ es S-separable. Por lo tanto, del corolario 4.17 tenemos que A es R-separable. □

Concluimos este capítulo con un importante teorema cuya demostración involucra ideas y resultados los cuales sólo enunciaremos. También daremos algunas definiciones previas a dicha demostración.

Un R-módulo M es llamado ***módulo fielmente llano*** si es llano y $M \otimes_R N = 0$ implica que $N = 0$ para cada R-módulo N.

Lema 4.26. *Sean S una R-álgebra fielmente llana como R-módulo y M un R-módulo. Entonces, M es R-llano si y sólo si $M \otimes_R S$ es S-llano.*

Demostración. Supongamos que M es R-llano. Sea $0 \to N' \to N$ una sucesión exacta de S-módulos, entonces $0 \to N' \otimes_S S \to N \otimes_S S$ es también exacta como R-módulos. Por lo tanto, $0 \to N' \otimes_S S \otimes_R M \to N \otimes_S S \otimes_R M$ es exacta.

Recíprocamente, supongamos que M no es R-llano, entonces, sea $0 \to L' \to L$ una sucesión exacta de R-módulos tal que $0 \to M \otimes_R L' \xrightarrow{\alpha} M \otimes_R L$ no es exacta, esto es, $\ker(\alpha) \neq 0$; como S es R-llano, tenemos que $0 \to S \otimes_R L' \to S \otimes_R L$ es una sucesión

[1] Ver [HU, p. 439] para detalles.

exacta de S-módulos. Veamos que $0 \to (M\otimes_R S)\otimes_S(S\otimes_R L') \to (M\otimes_R S)\otimes_S(S\otimes_R L)$ no es exacta y así $M \otimes_R S$ no es S-llano: notemos que

$$\begin{aligned}\alpha\otimes_R id_S : M\otimes_R L'\otimes_R S &\cong (M\otimes_R S)\otimes_S(S\otimes_R L') \\ &\longrightarrow (M\otimes_R S)\otimes_S(S\otimes_R L) \cong M\otimes_R L\otimes_R S\end{aligned}$$

no es inyectivo pues teníamos que $\ker(\alpha)\neq 0$ y S es un R-módulo fielmente llano. Así, $\ker(\alpha)\otimes_R S \neq 0$. □

Un anillo local con ideal maximal $\mathfrak{m}$ es llamado ***anillo henseliano*** si cada polinomio mónico f en $R[x]$ cuya imagen $\bar{f}$ en $(R/\mathfrak{m})[x]$ se factoriza como $\bar{f} = g_0h_0$ donde g_0, h_0 son polinomios mónico primos relativos en $(R/\mathfrak{m})[x]$, tiene una factorización $f = gh$ en $R[x]$ con g, h mónicos y $\bar{g} = g_0, \bar{h} = h_0$, siendo $\bar{g}, \bar{h}$ la imágenes naturales de g y h en $(R/\mathfrak{m})[x]$.

Un resultado que usaremos es

***I*)** Para cualquier anillo local R, existe una R-álgebra (conmutativa) local $R^\star$ tal que

***a*)** $R^\star$ es un anillo henseliano,
***b*)** $R^\star$ es un R-módulo fielmente llano, y
***c*)** $\mathfrak{m}R^\star$ es el ideal maximal de $R^\star$ con $R^\star/\mathfrak{m}R^\star \cong R/\mathfrak{m}$.

Adicionalmente, necesitamos un resultado de álgebras de Azumaya sobre anillos henselianos.

***II*)** Sean R un anillo henseliano, A una R-álgebra finitamente generada como un R-módulo, $\mathfrak{A}$ un ideal bilátero de A y $\bar{e}$ un idempotente en $A/\mathfrak{A}$. Entonces existe un idempotente e en A que es preimagen de $\bar{e}$ bajo el morfismo natural de A a $A/\mathfrak{A}$.

Por otro lado, es quizás más sencillo reconocer si una álgebra finita dimensional sobre un campo es o no separable (ver [CR], [DeMI] y [A] para detalles). Por ejemplo, sobre un campo perfecto, una álgebra es separable si y sólo si no contiene ideales nilpotentes, esto es, si y sólo si es semisimple.

La importancia del siguiente teorema es que muestra que la separabilidad de una álgebra finitamente generada como un módulo sobre un anillo conmutativo, depende de la separabilidad de ciertas álgebras cercanas sobre campos. Más precisamente, vimos en el corolario 4.14 que si R era un anillo conmutativo y A una R-álgebra separable, entonces $A_m \cong A\otimes_R R_\mathfrak{m}$ es $R_\mathfrak{m}$-separable y $A/\mathfrak{m}A \cong A\otimes_R (R/\mathfrak{m})$ es $R/\mathfrak{m}$-separable, con $\mathfrak{m}\in \text{máx}(R)$. El siguiente teorema contiene al recíproco de este resultado en el caso que la álgebra es finitamente generada como un R-módulo.

Teorema 4.27. *Sea A una R-álgebra finitamente generada como un R-módulo. Son equivalentes*
a) *A es una R-álgebra separable.*
b) *$A_\mathfrak{m} \cong A\otimes_R R_\mathfrak{m}$ es una $R_\mathfrak{m}$-álgebra separable para cada $\mathfrak{m}\in\text{máx}(R)$.*
c) *$A/\mathfrak{m}A \cong A\otimes_R R/\mathfrak{m}$ es una $R/\mathfrak{m}$-álgebra separable para cada $\mathfrak{m}\in\text{máx}(R)$.*

Demostración. ***a*)** $\Longrightarrow$ ***b*)** y ***c*)**: Por el corolario 4.14.

b) $\Longrightarrow$ ***a)***: Por la definición de separabilidad, $A_{\mathfrak{m}}$ es $(A_{\mathfrak{m}})^e$-proyectivo y por lo tanto llano, donde $\mathfrak{m} \in \text{máx}(R)$, luego, por la proposición 3.11, A es A^e-llano. Pero si $A = Ra_1 + \ldots + Ra_n$, es claro que $\ker(\mu)$ (ver la ecuación (4.1)) es generado como un ideal a izquierda en A^e por $\{a_i \otimes 1 - 1 \otimes a_i : i = 1, \ldots, n\}$, así

$$0 \longrightarrow \ker(\mu) \longrightarrow A^e \xrightarrow{\mu} A \longrightarrow 0$$

es una presentación finita de A como A^e-módulo. Entonces, por la proposición 3.16, A es A^e-proyectivo y por lo tanto R-separable.

c) $\Longrightarrow$ ***a)***: Sea $\mathfrak{m} \in \text{máx}(R)$. Como $R_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}R_{\mathfrak{m}} \cong R/\mathfrak{m}$, tenemos que

$$(A \otimes_R R_{\mathfrak{m}})/\big(\mathfrak{m}(A \otimes_R R_{\mathfrak{m}})\big) \cong A \otimes_R (R_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}R_{\mathfrak{m}}) \cong A \otimes_R (R/\mathfrak{m}) \cong A/\mathfrak{m}A.$$

Luego, como ya demostramos que b implica a, sólo debemos mostrar que c implica a cuando R es un anillo local. Sea $R^\star$ una R-álgebra henseliana dada en (I). Como $R^\star$ es fielmente llano sobre R, por el lema 4.26, A será A^e-llano si $A \otimes_R R^\star$ es $(A \otimes_R R^\star) \otimes_{R^\star} (A^{op} \otimes_R R^\star)$-llano. Entonces, por la proposición 3.16, A es R-separable si y sólo si $A \otimes_R R^\star$ es $R^\star$-separable. Además, por $(I.c)$

$$(A \otimes_R R^\star)/\big(\mathfrak{m}(A \otimes_R R^\star)\big) \cong A \otimes_R (R^\star/\mathfrak{m}R^\star) \cong A \otimes_R (R/\mathfrak{m}) \cong A/\mathfrak{m}A,$$

por lo tanto, nada se pierde si asumimos que R es henseliano. Luego, debemos mostrar que si R es un anillo henseliano con ideal maximal $\mathfrak{m}$ y A una R-álgebra finitamente generada como un R-módulo, entonces A es R-separable si $A/\mathfrak{m}A$ es $R/\mathfrak{m}$ separable: tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
A^e \arrow[r, "\mu"] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
(A/\mathfrak{m}A)^e \arrow[r, "\bar{\mu}"] & A/\mathfrak{m}A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

con columnas los epimorfismos naturales y las filas los homomorfismos multiplicación (ver la ecuación (4.1)). Asumiendo que $A/\mathfrak{m}A$ es $R/\mathfrak{m}$-separable, sabemos que $(A/\mathfrak{m}A)^e$ contiene un idempotente separable $\bar{e}$ para $A/\mathfrak{m}A$. Afirmamos que $\bar{e}$ puede ser regresado a un idempotente e en A^e tal que $\mu(e) = 1$, esto es, existe un idempotente $e \in A^e$ que va a $\bar{e}$ bajo el morfismo natural de A^e sobre $(A/\mathfrak{m}A)^e$, con la propiedad que $\mu(e) = 1$.

Para ver esto, primero regresamos a $\bar{e}$ a un idempotente $e' \in A^e$, lo cual puede ser hecho por (II). Como $\bar{\mu}(\bar{e}) = 1$ en $A/\mathfrak{m}A$, la conmutatividad del diagrama implica que $\mu(e') \in 1 + \mathfrak{m}A$. Pero, por el lema 3.8, $\mathfrak{m}A \subseteq JacRad(A)$, luego $1 + \mathfrak{m}A$ consiste de unidades en A. Tomemos

$$e = \big(\mu(e')^{-1} \otimes 1\big)e'\big(\mu(e') \otimes 1\big).$$

Claramente, e es idempotente y va a $\bar{e}$. Así, sea

$$\begin{aligned}\mu(e) = \big(\mu(e')^{-1} \otimes 1\big)e' \cdot \mu\big(\mu(e') \otimes 1\big) &= \big(\mu(e')^{-1} \otimes 1\big)e'\mu(e') \\ &= \big(\mu(e')^{-1} \otimes 1\big)\mu((e')^2) = \big(\mu(e')^{-1} \otimes 1\big)\mu(e') = 1_A.\end{aligned}$$

Ahora, notemos que la sucesión $0 \to \ker(\mu) \to A^e \to A \to 0$ escinde como R-módulos con el morfismo $a \mapsto a \otimes 1$ de A a A^e. Luego, el morfismo $\pi : \lambda \longmapsto \lambda - \mu(\lambda) \otimes 1$ es una proyección de R-módulos de A^e sobre $\ker(\mu)$. Consecuentemente, tenemos un homomorfismo de R-módulos $\lambda e \longmapsto \lambda e - (\mu(\lambda) \otimes 1)e$, (la composición de los morfismos $(A^e)e \xrightarrow{incl} A^e \xrightarrow{\pi} \ker(\mu) \xrightarrow{(\;)e} \ker(\mu)e)$ el cual es una proyección sobre $\ker(\mu)e$. Por lo tanto, hay un R-submódulo M de $(A^e)e$ tal que

$$(A^e)e = M \oplus \ker(\mu)e.$$

También, se puede ver que el núcleo del morfismo natural de A^e a $(A/\mathfrak{m}A)^e$ es $\mathfrak{m}A^e$. Así, $\ker(\mu)e \subseteq \mathfrak{m}(A^e)$ porque la imagen de $\ker(\mu)e$ en $(A/\mathfrak{m}A)^e$ es cero. Pero, entonces, $\ker(\mu)e \subseteq \mathfrak{m}(A^e)e = \mathfrak{m}\ker(\mu)e \oplus \mathfrak{m}M$, luego

$$\ker(\mu)e = \mathfrak{m}\ker(\mu)e.$$

Además, $\ker(\mu)e$ es un R-módulo finitamente generado pues $(A^e)e$ lo es, por lo tanto, por el corolario 1.12 del lema de Nakayama, $\ker(\mu)e = 0$ y así e es un idempotente separable para A, concluyendo la demostración. $\square$

CAPÍTULO 5

Álgebras de Azumaya

Durante este capítulo seguiremos a [A], [M] y a [DeMI] y en la sección de isomorfismo entre álgebras de Azumaya a [ACvE].

En la proposición 4.19 vimos que si A es una R-álgebra separable, entonces A es una álgebra separable sobre su centro $Z(A)$. Ahora regresamos nuestra atención en este tipo de álgebras.

A es una ***R*-álgebra central** si es fiel como un R-módulo y $R1_A = Z(A)$. Cuando estudiamos álgebras fieles identificamos a R con $R1_A$ y por lo tanto cosideramos a R como un subanillo del centro de A. Llamaremos a A una ***R*-álgebra de Azumaya** si A es una R-álgebra central separable.

Notemos que una álgebra de Azumaya A sobre un campo R es central simple pues, por el teorema 4.25 y su demostración, es clásicamente separable y por lo tanto semisimple (tomando $K = R$), además, es artiniana. Entonces, por el teorema de Wedderburn - Artin, es una suma directa finita de anillos de matrices sobre algebras de división cada una de las cuales contienen al campo R que es el centro de A. Por lo tanto, A es sólo un sumando directo y así es simple. Recíprocamente, cualquier anillo simple el cual es finito dimensional sobre su centro es central separable. Por lo tanto, la teoría de álgebras centrales separables sobre un campo R es el estudio de R-álgebras centrales simples de dimensión finita ([A], [DeMI]).

Si A es una R-álgebra, hemos visto que A es naturalmente un A^e-módulo a izquierda. Esta estructura induce un homomorfismo de R-álgebras definido por

$$\varphi : A^e \to \operatorname{End}_R(A) \text{ es } \big(\varphi(\alpha)\big)(a) = \Big(\varphi\big(\sum a_i \otimes a'_i\big)\Big)(a) = \alpha a = \sum a_i a a'_i \tag{5.1}$$

(multiplicación escalar) el cual veremos, es un isomorfismo si A es una R-álgebra de Azumaya.

Proposición 5.1. *Sea A una R-álgebra de Azumaya. Entonces, R es un R-sumando directo de A.*

Demostración. Sea $e \in A^e$ un idempotente separable para A. Como φ es un homomorfismo de anillos (ver la ecuación 5.1), entonces $\varphi(e)$ es idempotente, es decir, $\varphi(e)$ es una proyección de A en A, así, la imagen de $\varphi(e)$ es un R-sumando directo de A teniendo a $\ker(\varphi(e))$ como el sumando directo complementario. Pero como $\ker(\mu)e = 0$ (μ en la ecuación (4.1)), tenemos que para cada $a, b \in A$, $a\big(\varphi(e)(b)\big) = (a \otimes 1_A)eb = (1_A \otimes a)eb = \big(\varphi(e)(b)\big)a$, por lo tanto $\varphi(e)(b) \in Z(A) = R$ y así la imagen de $\varphi(e)$ es R. □

Corolario 5.2. *Sean A una R-álgebra de Azumaya y $\mathfrak{a}$ un ideal de R. Entonces*

$$\mathfrak{a}A \cap R = \mathfrak{a}.$$

Demostración. Por la proposición 5.1, $A = L \oplus R$ para algún R-submódulo L de A, entonces $\mathfrak{a}A \cap R = \mathfrak{a}(L \oplus R) \cap R = (\mathfrak{a}L \oplus \mathfrak{a}) \cap R = \mathfrak{a}$. □

Lema 5.3. *Sean A una R-álgebra de Azumaya y $\mathfrak{M}$ un ideal maximal bilátero de A. Entonces, existe $\mathfrak{m} \in \text{máx}(R)$ tal que $\mathfrak{M} = \mathfrak{m}A$.*

Demostración. Sean $\mathfrak{m} = \mathfrak{M} \cap R$ y $\mathfrak{M}' = \mathfrak{m}A$. Claramente, $\mathfrak{M}' \subseteq \mathfrak{M}$. Veamos la otra contenencia. Por la proposición 4.18, $A/\mathfrak{M}$ es una álgebra de Azumaya sobre $R/\mathfrak{m}$. Pero $A/\mathfrak{M}$ es simple, entonces su centro $R/\mathfrak{m}$ es un campo y así $\mathfrak{m} \in \text{máx}(R)$. No obstante, por el corolario 5.2, $\mathfrak{M}' \cap R = \mathfrak{m}$, luego $A/\mathfrak{M}'$ es también una álgebra de Azumaya sobre el campo $R/\mathfrak{m}$ y por lo tanto es simple por el anterior comentario. Así $\mathfrak{M}/\mathfrak{M}' = 0$, esto es, $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}'$. □

Proposición 5.4. *Sean A y B R-álgebras de Azumaya. Entonces, $A \otimes_R B$ es una R-álgebra Azumaya.*

Demostración. Como R es un R-sumando directo de A y de B por la proposición 5.1, entonces $R \otimes_R R \cong R$ puede ser identificado con un subanillo de $A \otimes_R B$, luego $A \otimes_R B \neq 0$ y por lo tanto, $A \otimes_R B$ es separable por la proposición 4.13. Además, como A y B son módulos proyectivos finitamente generados sobre A^e y B^e respectivamente (pues 1_A genera a A sobre A^e y 1_B genera a B sobre B^e), por la proposición 4.1,

$$\text{End}_{A^e}(A) \otimes_R \text{End}_{B^e}(B) \cong \text{End}_{A^e \otimes_R B^e}(A \otimes_R B) \cong \text{End}_{(A \otimes_R B)^e}(A \otimes_R B)$$

y por el corolario 4.10, esto es equivalente a $A^A \otimes_R B^B \cong (A \otimes_R B)^{A \otimes_R B}$, es decir,

$$R \cong R \otimes_R R \cong Z(A \otimes_R B).$$

Por lo tanto, $A \otimes_R B$ es central, y así es una R-álgebra de Azumaya. □

Proposición 5.5. *Sean A una R-álgebra de Azumaya y S una R-álgebra conmutativa. Entonces, $A \otimes_R S$ es una S-álgebra de Azumaya.*

Demostración. Por la proposición 5.1, R es un R-sumando directo de A, entonces $A\otimes_R S$ contiene una copia de S, luego $A \otimes_R S \neq 0$ y así es S-separable por el corolario 4.14. Además, por los corolarios 4.2 y 4.10, por ser A un A^e-módulo proyectivo finitamente generado (pues 1_A genera a A sobre A^e), tenemos que

$$\begin{aligned} S \cong R \otimes_R S = Z(A) \otimes_R S \cong \mathrm{End}_{A^e}(A) \otimes_R S \cong \mathrm{End}_{A^e \otimes_R S}(A \otimes_R S) \\ \cong \mathrm{End}_{(A\otimes_R S)\otimes_S (A\otimes_R S)^{op}}(A \otimes_R S) \cong Z(A \otimes_R S). \end{aligned}$$

□

Corolario 5.6. *Sean A una R-álgebra de Azumaya y $m \in$ máx(R). Entonces, $A_{\mathfrak{m}} \cong A \otimes_R R_{\mathfrak{m}}$ es una $R_{\mathfrak{m}}$-álgebra de Azumaya y $A/\mathfrak{m}A \cong A \otimes_R R/\mathfrak{m}$ es una $R/\mathfrak{m}$-álgebra de Azumaya.*

Demostración. Es directo a partir de la proposición 5.5. □

El siguiente teorema proporciona conceptos equivalentes de una álgebra de Azumaya.

Teorema 5.7. *Sea A una R-álgebra. Son equivalentes*
i) *A es una R-álgebra de Azumaya.*
ii) *A es un A^e-progenerador y A es R-central.*
iii) *A es un R-progenerador y $\varphi : A^e \longrightarrow \mathrm{End}_R(A)$ es un isomorfismo de R-álgebras (ver la ecuación (5.1)).*

Demostración. ***ii)*** $\Longrightarrow$ ***i)***: Por definición.

ii) $\Longleftrightarrow$ ***iii)***: Del capítulo del Teorema de Morita tenemos que si A es R-central, entonces por el corolario 4.10,

$$\mathrm{End}_{A^e}(A) \cong R,$$

así como A es un A^e-progenerador, tenemos que

$$A^e \text{ y } R \text{ son Morita equivalentes,}$$

por lo tanto A es un R-progenerador por el corolario 2.4.e. Además, por el corolario 2.4.a,

$$A^e \cong \mathrm{End}_R(A)$$

bajo multiplicación a izquierda, el cual es precisamente el morfismo φ de la ecuación (5.1), así $ii \Rightarrow iii$. El recíproco es devolvernos en el proceso.

i) $\Longrightarrow$ ***ii)***: Por definición A es A^e-proyectivo. Además, como 1_A genera a A sobre A^e, entonces A es A^e-módulo finitamente generado. Falta mostrar que A es A^e-generador, para esto, por el lema 2.1, basta mostrar que

$$A^* \otimes_{\mathrm{End}_{A^e}(A)\cong R} A = \mathrm{Hom}_{A^e}(A, A^e) \otimes_R A \cong A^e$$

bajo el morfismo $f \otimes a \mapsto f(a)$. Pero, por el corolario 4.11,

$$\mathrm{Hom}_{A^e}(A, A^e) \cong \mathrm{Ann}_{A^e}(\ker(\mu)) \text{ como } R\text{-módulos bajo } f \longmapsto f(1_A).$$

Por lo tanto, debemos ver que

$$\mathrm{Ann}_{A^e}(\ker(\mu)) \otimes_R A \cong A^e \text{ bajo el morfismo } b \otimes a \longmapsto (a \otimes 1)b = (1 \otimes a)b$$

(pues $a \otimes 1 - 1 \otimes a \in \ker(\mu)$). Pero esto último es equivalente a

$$A^e \langle\, \mathrm{Ann}_{A^e}(\ker(\mu))\,\rangle = A^e$$

Veamos esto por contradicción: supongamos que $A^e\langle\, \mathrm{Ann}_{A^e}(\ker(\mu))\,\rangle \subsetneqq A^e$. Si $A^e\langle\, \mathrm{Ann}_{A^e}(\ker(\mu))\,\rangle$ es un ideal propio de A^e, entonces está contenido en un ideal maximal bilátero $\mathfrak{M}$ de A^e. Por la proposición 5.4, A^e es una R-álgebra de Azumaya, por lo tanto por el lema 5.3, $\mathfrak{M} = \mathfrak{a}A^e$ para algún ideal propio $\mathfrak{a}$ de R y así, $A^e\langle\, \mathrm{Ann}_{A^e}(\ker(\mu))\,\rangle \subseteq \mathfrak{a}A^e$. Aplicando el morfismo multiplicación μ (ver la ecuación (4.1)), tenemos que

$$A^e\mu\big(\langle\, \mathrm{Ann}_{A^e}(\ker(\mu))\,\rangle\big) \subseteq \mu(\mathfrak{a}A^e) = \mathfrak{a}A.$$

Además, por el corolario 4.11, $\mu\big(\mathrm{Ann}_{A^e}(\ker(\mu))\big) = Z(A) = R$, por lo tanto

$$A^eR = A \subseteq \mathfrak{a}A \quad \text{y así} \quad \mathfrak{a}A = A.$$

Luego, $A^e = \mathfrak{a}A^e = \mathfrak{M}$ lo cual es una contradicción (pues un ideal maximal es propio). Entonces, $A^e\langle\, \mathrm{Ann}_{A^e}(\ker(\mu))\,\rangle = A^e$ y A es un A^e-generador. □

Corolario 5.8. *Si A es una R-álgebra de Azumaya, entonces A es finitamente generada como un R-módulo.*

Corolario 5.9. *Sean A una R-álgebra de Azumaya y M un R-módulo. Entonces,*

$$(M \otimes_R A)^A \cong M \quad \textit{como } R\textit{-módulos}$$

bajo el morfismo $m \otimes 1_A \leftrightarrow m$. Y, para todo A/R-módulo bilátero (es decir, A^e-módulo a izquierda) N

$$N^A \otimes_R A \cong N$$

bajo el morfismo $\sum n_i \otimes a_i \leftrightarrow \sum n_i a_i$.

Demostración. Por el teorema 5.7, A es un A^e-progenerador, luego por el corolario 4.10, los lemas 2.1.a y 4.9 y la proposición 4.5 tenemos que

$$\begin{aligned} M &\cong R \otimes_R M \cong \mathrm{End}_{A^e}(A) \otimes_R M \cong \big(\mathrm{Hom}_{A^e}(A, A^e) \otimes_{A^e} A\big) \otimes_R M \\ &\cong \mathrm{Hom}_{A^e}(A, A^e) \otimes_{A^e} (M \otimes_R A) \cong \mathrm{Hom}_{A^e}\big(A, A^e \otimes_{A^e} (M \otimes_R A)\big) \\ &\cong (M \otimes_R A)^A. \end{aligned}$$

También, por un argumento similar, por ser N A^e-módulo a izquierda,

$$N \cong \big(\mathrm{Hom}_{A^e}(A, A^e) \otimes_{A^e} N\big) \otimes_R A \cong \mathrm{Hom}_{A^e}(A, N) \otimes_R A \cong N^A \otimes_R A.$$

Es sencillo verificar que la composición de los distintos isomorfismos dan los morfismos expuestos en el enunciado de este corolario. □

Corolario 5.10. *Sea A una R-álgebra de Azumaya. Entonces, hay una correspondencia uno a uno entre los ideales $\mathfrak{a}$ de R y los ideales biláteros $\mathfrak{A}$ de A dada por $\mathfrak{a} \to \mathfrak{a}A$ y $\mathfrak{A} \to \mathfrak{A} \cap R$.*

Demostración. Por los corolarios 5.2 y 5.9, (ver el corolario 5.2)

$$\mathfrak{a} \cong (\mathfrak{a} \otimes_R A)^A \cong (\mathfrak{a}A)^A = \mathfrak{a}A \cap Z(A) = \mathfrak{a}A \cap R \quad \text{y}$$

$$\mathfrak{A} \cong \mathfrak{A}^A \otimes_R A = \big(\mathfrak{A} \cap Z(A)\big) \otimes_R A = (\mathfrak{A} \cap R) \otimes_R A \cong (\mathfrak{A} \cap R)A.$$

Esto establece la correspondencia uno a uno. Además, la composición de los isomorfismos es igual en cada caso. □

Del anterior corolario tenemos que si $(\mathfrak{a}_i)_{i\in I}$ es una familia de ideales en R, entonces $\cap_i(\mathfrak{a}_i A) = (\cap \mathfrak{a}_i)A$ (pues la preimagen preserva intersecciones).

Corolario 5.11. *Una R-álgebra A es separable si y sólo si A es una $Z(A)$-álgebra separable y $Z(A)$ es una R-álgebra separable.*

Demostración. Por la transitividad de la separabilidad (proposición 4.19) si A es separable sobre $Z(A)$ y $Z(A)$ es R-separable, entonces A es R-separable.

Recíprocamente, por la misma proposición, si A es R-separable, entonces A es $Z(A)$-separable, falta ver que $Z(A)$ es R-separable: como A es una $Z(A)$-álgebra de Azumaya, entonces A y A^{op} son $Z(A)$-proyectivos por el teorema 5.7. Luego, (por un fácil argumento que involucra bases duales) $A^e = A \otimes_R A^{op}$ es $Z(A) \otimes_R Z(A)$-proyectivo, pero como también A es A^e-proyectivo, tenemos que A es $Z(A) \otimes_R Z(A)$-proyectivo por la proposición 1.5.

Por lo tanto, cualquier $Z(A) \otimes_R Z(A)$-sumando directo de A es un $Z(A) \otimes_R Z(A)$-módulo proyectivo. Pero, como $Z(A)$ es el centro de A, cualquier $Z(A)$-sumando directo de A es un $Z(A) \otimes_R Z(A)$-sumando directo y por la proposición 5.1, $Z(A)$ es un $Z(A)$-sumando directo de A. En conclusión, $Z(A)$ es $Z(A) \otimes_R Z(A)$-proyectivo, esto es, $Z(A)$ es R-separable. □

Lema 5.12. *Sea A una R-álgebra finitamente generada. Entonces,*

$$Z(A)_{\mathfrak{m}} = Z(A_{\mathfrak{m}}) \quad \textit{para cada } \mathfrak{m} \in \text{máx}(R).$$

Demostración. Sean $z/s' \in Z(A)_{\mathfrak{m}}$ y $a/s \in A_{\mathfrak{m}}$ (es decir, $z \in Z(A), a \in A$ y $s, s' \in R$-$\mathfrak{m}$). Entonces, $(z/s')(a/s) = (za)/(s's) = (az)/(ss') = (a/s)(z/s')$, luego $z/s' \in Z(A_{\mathfrak{m}})$.

Recíprocamente, sea $z/s' \in Z(A_{\mathfrak{m}})$, entonces si $a_1, \ldots, a_n \in A$ son generadores de A sobre R, tenemos que $(z/s')(a_i/s) = (a_i/s)(z/s')$ para cada $i = 1, \ldots, n$ y $s \in R$-$\mathfrak{m}$. Luego,

$$\text{para cada } i \text{ existe } s_i \in R\text{-}\mathfrak{m} \quad \text{tal que} \quad s_i(za_iss' - s'sa_iz) = 0.$$

Tomemos $s'' = \prod_1^n s_i$, entonces $s''(za_iss' - s'sa_iz) = 0$, para cada $i = 1, \ldots, n$. Así $ss's''z \in Z(A)$ y por lo tanto, $z/s' \in Z(A)_{\mathfrak{m}}$. □

Teorema 5.13. *Sea A una R-álgebra finitamente generada como un R-módulo. Entonces, A es una R-álgebra de Azumaya si y sólo si $A_{\mathfrak{m}}$ es una $R_{\mathfrak{m}}$-álgebra de Azumaya para cada $\mathfrak{m} \in \text{máx}(R)$.*

Demostración. Por el teorema 4.27, A es una R-álgebra separable si y sólo si $A_{\mathfrak{m}}$ es una $R_{\mathfrak{m}}$-álgebra separable para cada $\mathfrak{m} \in \text{máx}(R)$. Además, por el lema 5.12 y la proposición 3.9, $Z(A)/R = 0$ si y sólo si para todo $\mathfrak{m} \in \text{máx}(R)$,

$$0 = \big(Z(A)/R\big)_{\mathfrak{m}} = Z(A)_{\mathfrak{m}}/R_m = Z(A_{\mathfrak{m}})/R_{\mathfrak{m}}.$$

Por último, A es fiel como un R-módulo si y sólo si $A_{\mathfrak{m}}$ es fiel como un $R_{\mathfrak{m}}$-módulo para cada $\mathfrak{m} \in \text{máx}(R)$: por la proposición 3.10 y el corolario 4.3, por ser A un R-progenerador (teorema 5.7), $R \to \text{End}_R(A)$ es inyectivo (esto es, $rA = 0$ implica que $r = 0$) si y sólo si $R_{\mathfrak{m}} \to \text{End}_R(A)_{\mathfrak{m}} \cong \text{End}_{R_{\mathfrak{m}}}(A_{\mathfrak{m}})$ es inyectivo para todo $\mathfrak{m} \in \text{máx}(R)$, finalizando así la demostración. □

Proposición 5.14. *Sean R un anillo conmutativo noetheriano y A una R-álgebra finitamente generada como un R-módulo tales que el morfismo $r \mapsto r1_A$ identifica a R como un subanillo de $Z(A)$. Si $A/\mathfrak{m}A$ es una $R/\mathfrak{m}$-álgebra de Azumaya para cada $\mathfrak{m} \in \text{máx}(R)$, entonces A es una R-álgebra de Azumaya.*

Demostración. Por el teorema 4.27, A es una R-álgebra separable. Como $r \longmapsto r1_A$ es un homomorfismo inyectivo, A es un R-módulo fiel. Resta ver que $Z(A) = R$. Tenemos que A es un A^e-módulo proyectivo (por ser R-separable) y que es un A^e-módulo finitamente generado (pues 1_A genera a A sobre A^e). Luego, por los corolarios 4.2 y 4.10, para cada $\mathfrak{m} \in \text{máx}(R)$,

$$\begin{aligned} Z(A)/\mathfrak{m}Z(A) &\cong Z(A) \otimes_R R/\mathfrak{m} \cong \text{End}_{A^e}(A) \otimes_R R/\mathfrak{m} \\ &\cong \text{End}_{A^e \otimes_R R/\mathfrak{m}}(A \otimes_R R/\mathfrak{m}) \\ &\cong \text{End}_{(A \otimes_R R/\mathfrak{m}) \otimes_{R/\mathfrak{m}} (A \otimes_R R/\mathfrak{m})^{op}}(A \otimes_R R/\mathfrak{m}) \\ &\cong Z(A \otimes_R R/\mathfrak{m}) \cong Z(A/\mathfrak{m}A). \end{aligned}$$

Y como $Z(A/\mathfrak{m}A) = R/\mathfrak{m}$ por ser $A/\mathfrak{m}A$ una $R/\mathfrak{m}$-álgebra de Azumaya, entonces

$$Z(A)/\mathfrak{m}Z(A) \cong R/\mathfrak{m}R \quad \text{para cada} \quad \mathfrak{m} \in \text{máx}(R).$$

Además, como R es noetheriano, A es un R-módulo finitamente generado y $Z(A)$ es un R-submódulo de A, tenemos que $Z(A)$ es finitamente generado como R-módulo, y por lo tanto, por corolario 1.13 de Lema de Nakayama, $Z(A) = R$, concluyendo así la demostración. □

Finalmente, tenemos el siguiente teorema que es muy interesante.

Teorema 5.15. *Sean R un anillo conmutativo noetheriano y A una R-álgebra finitamente generada como un R-módulo tal que el morfismo $R \longrightarrow Z(A)$ dado por $r \longmapsto r1_A$ identifica a R como un subanillo de $Z(A)$. Son equivalentes*

i) *A es una R-álgebra de Azumaya.*

ii) *$A_{\mathfrak{m}} \cong A \otimes_R R_{\mathfrak{m}}$ es una $R_{\mathfrak{m}}$-álgebra de Azumaya cada $\mathfrak{m} \in \text{máx}(R)$.*

iii) *$A/\mathfrak{m}A \cong A \otimes_R R/\mathfrak{m}$ es una $R/\mathfrak{m}$-álgebra de Azumaya para cada $\mathfrak{m} \in \text{máx}(R)$*

Demostración. Es inmediata a partir del corolario 5.6, del teorema 5.13 y de la proposición 5.14. □

Por último, recordemos que si A es una R-álgebra de Azumaya, entonces A es un R-progenerador y que $\mathrm{End}_R(A)$ siendo isomorfo a $A^e = A \otimes_R A^{op}$ es una R-álgebra de Azumaya. También, tenemos que si P es un R-módulo libre finitamente generado, entonces $\mathrm{End}_R(P)$ es una R-álgebra de Azumaya. La siguiente proposición generaliza estos dos hechos.

Proposición 5.16. *Sean R un anillo conmutativo y P un R-progenerador. Entonces, $\mathrm{End}_R(P)$ es una R-álgebra de Azumaya.*

Demostración. Por el lema 2.1, $P^* \otimes_R P \cong \mathrm{End}_R(P)$. Pero, por el corolario, 2.4 P^* es un R-módulo proyectivo finitamente generado, luego $P^* \otimes_R P$ lo es también. Además, es claro que $\mathrm{End}_R(P)$ es R-fiel ya que P lo es. Por lo tanto, por el corolario 1.15, $\mathrm{End}_R(P)$ es un R-progenerador.

Finalmente, debemos mostrar que si $A = \mathrm{End}_R(P)$, entonces $\varphi : A^e \to \mathrm{End}_R(A)$ en la ecuación (5.1) es un isomorfismo: por el corolario 2.4, $A^{op} \cong \mathrm{End}_R(P^*)$, luego por el corolario 4.4,

$$A^e = A \otimes_R A^{op} \cong \mathrm{End}_R(P) \otimes_R \mathrm{End}_R(P^*) \cong \mathrm{End}_R(P \otimes_R P^*) \cong \mathrm{End}_R(A).$$

Es fácil ver que la composición de estos isomorfismos es φ. Concluimos que $\mathrm{End}_R(P)$ es una R-álgebra de Azumaya por teorema 5.7.*iii*. □

Corolario 5.17. *Sea A una R-álgebra la cual es un progenerador como un R-módulo. Entonces, R es un R-sumando directo de cualquier subalgebra B de A.*

Demostración. Por la proposición 5.16, $\mathrm{End}_R(A)$ es una R-álgebra de Azumaya. Además, A puede ser considerada una subalgebra de $\mathrm{End}_R(A)$ identificándola con el conjunto de multiplicaciones a izquierda por elementos de A. Bajo esta identificación tenemos que $R \subseteq B \subseteq A \subseteq \mathrm{End}_R(A)$. Pero por la proposición 5.1, R es un R-sumando directo de $\mathrm{End}_R(A)$, esto es, existe un R-submódulo L de $\mathrm{End}_R(A)$ tal que $R \cap L = (0)$ y $R + L = \mathrm{End}_R(A)$. Entonces, $R \cap (B \cap L) = (0)$ y $R + (B \cap L) = B$. Luego, R es un R-sumando directo de B. □

5.1. Conmutadores en Álgebras de Azumaya

Consideremos ahora la siguiente situación general. Sean A una R-álgebra y B cualquier R-subalgebra de A. Entonces A es naturalmente un B/R-módulo bilátero (es decir, un $B^e = B \otimes_R B^{op}$-módulo a izquierda). Y como antes, sea $A^B = \{a \in A : ab = ba \, \forall b \in B\}$, así A^B puede ser visto como una R-subalgebra de A la cual conmuta con B.

A continuación demostraremos dos teoremas fuertes en la representación de álgebras de Azumaya como un producto tensorial de sus subálgebras. Mientras el primer teorema dice que las subálgebras de Azumaya de una álgebra de Azumaya A ocurren en parejas o pares, siendo cada miembro de la pareja la subalgebra conmutador de la otra y cuyo producto tensorial es isomorfo a A, el segundo teorema dice que cualquier representación de A como un producto tensorial de sus subálgebras sólo puede ocurrir en esta forma, es decir, siendo ambas (sub)álgebras de Azumaya y cada miembro de la pareja la subalgebra conmutador de la otra.

Teorema 5.18. *Sean A una R-álgebra de Azumaya, B una R-subalgebra separable de A que contiene a R y $C = A^B$. Entonces C es una R-subalgebra separable de A y $A^C = B$. Si adicionalmente B es central (y por lo tanto de Azumaya), entonces C también lo es y el morfismo de R-álgebras $B \otimes_R C \longrightarrow A$ dado por $b \otimes c \longmapsto bc$ es un isomorfismo.*

Demostración. ***a)*** Iniciamos demostrando el teorema bajo la hipótesis que B es una R-álgebra de Azumaya. Entonces $B \otimes_R C \cong A$ bajo el morfismo dado en el corolario 5.9 (notemos que el morfismo es un homomorfismo de anillos porque B y C conmutan). Como R, por la proposición 5.1, es un R-sumando directo de B, C es R-separable por el corolario 4.16. Además, si $x \in Z(C)$, tenemos que conmuta con todos los elementos de $B \otimes_R C \cong A$. Luego, $x \in Z(A) = R$ y así C es R-central y por lo tanto de Azumaya. Entonces, por el corolario 5.9, tenemos que $A^C = (B \otimes_R C)^C = B$.

b) Ahora demostraremos el teorema en el caso que $A = \mathrm{End}_R(P)$ para algún R-progenerador P. En este caso, si B es una subalgebra separable de A que contiene a R, tenemos que

$$C = A^B = (\mathrm{End}_R(P))^B = \mathrm{End}_B(P).$$

Ahora, por el corolario 5.11, B es separable y central sobre su centro $Z(B)$ y $Z(B)$ es R-separable. Además, la propiedad para proyectivos de la proposición 4.23, nos permite concluir que P es un $Z(B)$-progenerador (ya que P es $Z(B)$-fiel por ser A-fiel y usamos el corolario 1.15). Por lo tanto, B puede ser considerada una subalgebra de Azumaya de $\mathrm{End}_{Z(B)}(P)$, la cual es $Z(B)$-álgebra de Azumaya por la proposición 5.16. Aplicando los resultados de (a), tenemos que $C = A^B = \mathrm{End}_B(P) = (\mathrm{End}_{Z(B)}(P))^B$ es una $Z(B)$-álgebra de Azumaya y $(\mathrm{End}_{Z(B)}(P))^C = B$. Ahora, por la transitividad de la separabilidad, (proposición 4.19), C es una R-álgebra separable y el hecho que $Z(B) \subseteq C$ implica que

$$B = (\mathrm{End}_{Z(B)}(P))^C = (\mathrm{End}_R(P))^C = A^C.$$

c) Finalmente trataremos el caso general del teorema. Sea A una R-álgebra de Azumaya, por la proposición 5.4, su álgebra envolvente $A^e = A \otimes_R A^{op}$ es una R-álgebra de Azumaya de la forma $A^e \cong \mathrm{End}_R(A)$ donde A es un R-progenerador (teorema 5.7). Luego, (b) puede ser aplicado a las subálgebras de A^e.

Nuestra primera observación es que como A y A^{op} son R-proyectivos y fiel, A y A^{op} pueden ser vistos como subanillos de A^e y $(A^e)^{A^{op}} = A$ por (a). Por lo tanto, para cualquier subalgebra A' de A, la subalgebra $A' \otimes_R A^{op}$ de A^e tiene la propiedad

$$(\diamond) \quad (A^e)^{A' \otimes_R A^{op}} = \left((A^e)^{A^{op}}\right)^{A'} = A^{A'}.$$

Ahora, sea B cualquier subalgebra separable de A que contiene a R. Entonces, $B \otimes_R A^{op}$ es una subalgebra separable de A^e, luego, aplicando (b) y $(\diamond)$, tenemos que

$$(A^e)^{B\otimes_R A^{op}} = A^B = C$$

es una R-álgebra separable y

$$B \otimes_R A^{op} = \left((A^e)^{A^e}\right)^{B\otimes_R A^{op}} = (A^e)^C.$$

Se sigue que

$$A \cap (B \otimes_R A^{op}) = A \cap (A^e)^C = A^C,$$

luego la demostración está completa si mostramos que

$$A \cap (B \otimes_R A^{op}) = B$$

Veamos, como $A^{op} = R \oplus L$ para algún R-submódulo L de A^{op}, $B \otimes_R A^{op} \cong B \oplus (B \otimes_R L)$ y $A^e \cong A \oplus (A \otimes_R L)$, entonces $(B \otimes_R L) \cap A \subseteq (A \otimes_R L) \cap A = (0)$. Consecuentemente, cualquier elemento de $B \oplus (B \otimes_R L)$ en A debe estar en B. □

Teorema 5.19. *Sean A una R-álgebra de Azumaya, B y C R-subalgebra de A tales que el morfismo $B \otimes_R C \to A$ dado por $b \otimes c \mapsto bc$ es un isomorfismo de R-álgebras. Entonces B y C son R-álgebras de Azumaya con $A^B = C$ y $A^C = B$.*

Demostración. Por el corolario 5.17 R es un R-sumando directo de B y de C, por lo tanto, B y C son R-álgebras separables por el corolario 4.16. Como los elementos de B conmutan con los elementos de C $\big((b \otimes 1_C)(1_B \otimes c) = b \otimes c = (1_B \otimes c)(b \otimes 1_C)\big)$, entonces

$$Z(B) \subseteq Z(B \otimes_R C) \cong Z(A) = R,$$

luego B es R-central. Similarmente vemos que C es de Azumaya.

Finalmente, por el corolario 5.9,

$$A^B = (B \otimes_R C)^B = C \quad \text{y} \quad A^C = (B \otimes_R C)^C = B.$$

□

Supongamos que A es una R-álgebra de Azumaya y M un A-progenerador, entonces M es un R-progenerador (porque A lo es, teorema 5.7) y $\mathrm{End}_R(M)$ es una R-álgebra de Azumaya (proposición 5.16). A puede ser vista como una R-subalgebra de $\mathrm{End}_R(M)$ identificando un elemento $a \in A$ con la multiplicación por el escalar a en M. Entonces, por el teorema 5.18, $(\mathrm{End}_R(M))^A = \mathrm{End}_A(M)$ es una R-álgebra de Azumaya tal que $A \otimes_R \mathrm{End}_A(M) \cong \mathrm{End}_R(M)$. Ahora nos preguntamos si hay otro A-progenerador N tal que

$$\mathrm{End}_A(M) \cong \mathrm{End}_A(N) \quad \text{como } R\text{-álgebras.}$$

Lema 5.20. *Sean A una R-álgebra de Azumaya, M y N A-progeneradores. Entonces, $\mathrm{End}_A(M) \cong \mathrm{End}_A(N)$ como R-álgebras si y sólo si $N \cong M \otimes_R P$ como A-módulos a izquierda, para algún R-módulo P proyectivo, finitamente generado y de rango uno.*

Demostración. Primero supongamos que $N \cong M \otimes_R P$ como A-módulos a izquierda, para algún R-módulo P proyectivo, finitamente generado y de rango uno. Por el lema 3.19, $\mathrm{End}_R(P) \cong R$, luego, por la proposición 4.1,

$$\mathrm{End}_A(N) \cong \mathrm{End}_{A\otimes_R R}(M \otimes_R P) \cong \mathrm{End}_A(M) \otimes_R \mathrm{End}_R(P) \cong \mathrm{End}_A(M).$$

Ahora, primero demostraremos el recíproco para el caso $A = R$. Sea N un R-progenerador con $B = \mathrm{End}_R(M) \cong \mathrm{End}_R(N)$. Este isomorfismo induce en N una estructura de B-módulo y por la proposición 4.23, N es B-proyectivo. Además, por la proposición 2.3, la categoría de B-módulos a izquierda es equivalente a la categoría de R-módulos, bajo la cual al B-módulo N le corresponde algún R-módulo proyectivo P tal que $M\otimes_R P \cong N$ y por el lema 2.1, $P \cong \mathrm{Hom}_R(M, R) \otimes_B N$. Es claro del último isomorfismo que P es también finitamente generado sobre R ya que M y N lo son.

Falta mostrar que si $A = R$, entonces P es de rango uno: como M, N y P son R-módulos proyectivos finitamente generados, entonces para cada $\mathfrak{m} \in \mathrm{máx}(R)$, por la observación 3.7, $N_\mathfrak{m}, M_\mathfrak{m}$ y $P_\mathfrak{m}$ son todos libres sobre $R_\mathfrak{m}$ de rango finito, digamos n, m y p respectivamente. Entonces, $mp = n$ pues $M\otimes_R P \cong N$. Ahora, $\mathrm{End}_R(M) \cong \mathrm{End}_R(N)$ implica que $\mathrm{End}_{R_\mathfrak{m}}(M_\mathfrak{m}) \cong \mathrm{End}_{R_\mathfrak{m}}(N_\mathfrak{m})$, luego

$$m^2 = \mathrm{Rank}_{R_\mathfrak{m}}\big(\mathrm{End}_{R_\mathfrak{m}}(M_\mathfrak{m})\big) = \mathrm{Rank}_{R_\mathfrak{m}}\big(\mathrm{End}_{R_\mathfrak{m}}(N_\mathfrak{m})\big) = n^2,$$

por lo tanto $p = 1$ y así P es de rango uno. Para demostrar el lema para A en general, observemos que $\mathrm{End}_A(M) \cong \mathrm{End}_A(N)$ y el teorema 5.18 implican que

$$\mathrm{End}_R(M) \cong A \otimes_R \mathrm{End}_A(M) \cong A \otimes_R \mathrm{End}_A(N) \cong \mathrm{End}_R(N),$$

luego el caso ya establecido nos lleva a que $N \cong M \otimes_R P$ y al resto del lema. □

5.2. Isomorfismos entre Álgebras de Azumaya

En esta sección consideraremos cuándo un homomorfismo entre álgebras de Azumaya es un isomorfismo y demostraremos que cada endomorfismo de una álgebra de Azumaya es un automorfismo.

Proposición 5.21. *Sean A y A' álgebras de Azumaya sobre R y R' respectivamente, y $\phi : A \longrightarrow A'$ un homomorfismo de anillos tal que la restricción de ϕ a R induce un isomorfismo entre R y R' (es decir, entre sus centros). Si*

$$\mathrm{Rank}_{R_\mathfrak{m}}(A_\mathfrak{m}) = \mathrm{Rank}_{R'_{\phi(\mathfrak{m})}}(A'_{\phi(\mathfrak{m})}) \quad \textit{para cada } \mathfrak{m} \in \mathrm{máx}(R) \tag{5.2}$$

entonces, ϕ es un isomorfismo.

Demostración. Recordemos que $\ker(\phi)$ es un ideal bilátero de A, luego por el corolario 5.10, es de la forma $\mathfrak{a}A$ para algún ideal $\mathfrak{a}$ en R. Sea $\alpha \in \mathfrak{a}$, entonces $\phi(\alpha 1_A) = 0$ implica que $\alpha 1_A = 0$ pues $\phi|_R : R \to R'$ es inyectivo, así, tenemos que $\mathfrak{a}A = 0$ y por lo tanto ϕ es inyectivo.

Consecuentemente, $\phi : A \to \phi(A)$ es un isomorfismo y como $\phi(R) = R'$, entonces $\phi(A)$ es una R'-álgebra de Azumaya contenida en A' la cual también es una R'-álgebra de Azumaya. Luego, por el teorema 5.18, $(A')^{\phi(A)}$ es una R'-álgebra de Azumaya y

$$\tau : \phi(A) \otimes_{R'} (A')^{\phi(A)} \to A'$$

es un isomorfismo. Además, por la proposición 5.1,

$$(A')^{\phi(A)} \cong R' \oplus L$$

para algún R'-submódulo de $(A')^{\phi(A)}$. Basta ver que $L = 0$ pues así, $(A')^{\phi(A)} = R'$ y por ser τ sobreyectivo y $R' = \phi(R)$, entonces $\phi(A) = A'$.

Para ver que $L = 0$, sea $\mathfrak{m}' \in \text{máx}(R')$. Por el teorema 5.7 y el corolario 5.8, $A', \phi(A)$ y $(A')^{\phi(A)}$ son R'-módulos proyectivos finitamente generados y por lo tanto también lo es L. Así, por la observación 3.7, las localizaciones de todos estos módulos con respecto a $\mathfrak{m}'$ son todos $R'_{\mathfrak{m}'}$-módulos libres de rango finito. Ahora, sea $\mathfrak{m} = \phi^{-1}(\mathfrak{m}')$, tenemos que $\mathfrak{m} \in \text{máx}(R)$. Como $\phi|_R : R \to R'$ es un isomorfismo y $A \cong \phi(A)$, por ser ϕ inyectivo, tenemos que

$$\text{Rank}_{R_{\mathfrak{m}}}(A_{\mathfrak{m}}) = \text{Rank}_{R'_{\mathfrak{m}'}}(\phi(A)_{\mathfrak{m}'}).$$

Pero por hipótesis, $\text{Rank}_{R_{\mathfrak{m}}}(A_{\mathfrak{m}}) = \text{Rank}_{R'_{\mathfrak{m}'}}(A'_{\mathfrak{m}'})$, entonces

$$\text{Rank}_{R'_{\mathfrak{m}'}}(\phi(A)_{\mathfrak{m}'}) = \text{Rank}_{R'_{\mathfrak{m}'}}(A'_{\mathfrak{m}'}).$$

Luego, localizando el isomorfismo τ con respecto a $\mathfrak{m}'$ y comparando los rangos de los $R'_{\mathfrak{m}'}$-módulos, tenemos que

$$\text{Rank}_{R'_{\mathfrak{m}'}}\left(\left((A')^{\phi(A)}\right)_{\mathfrak{m}'}\right) = 1.$$

Y (por la proposición 3.10) localizando la ecuación $(A')^{\phi(A)} \cong R' \oplus L$ con respecto a $\mathfrak{m}'$ se sigue que $L_{\mathfrak{m}'} = 0$ para cada $\mathfrak{m}' \in \text{máx}(R')$. Finalmente, por la proposición 3.9, $L = 0$ como queríamos. □

Directamente, a partir de esta proposición tenemos:

Corolario 5.22. *Cada endomorfismo de una álgebra de Azumaya es un automorfismo. Es decir, si A es una R-álgebra de Azumaya, entonces*

$$\text{End}_R(A) = \text{Aut}_R(A).$$

Teorema 5.23. *Sean A y A' álgebras de Azumaya sobre R y R' respectivamente, y $\phi : A \to A'$ un homomorfismo de anillos. Entonces, ϕ es un isomorfismo si y sólo si la restricción de ϕ a R induce un isomorfismo entre R y R' (es decir, entre sus centros) y se satisface la ecuación (5.2).*

Demostración. Si $\phi : A \to A'$ es un isomorfismo de anillos, entonces ϕ es sobreyectivo, luego envía el centro de A al centro de A'. Por lo tanto, ϕ induce un morfismo de R a R'. Similarmente, ϕ^{-1} induce un morfismo de R' a R. Por consiguiente, ϕ induce un isomorfismo de R a R' y satisface la ecuación (5.2).

Recíprocamente, si ϕ induce un isomorfismo de R a R' y satisface la ecuación (5.2), por la proposición 5.21, $\phi : A \to A'$ es un isomorfismo. □

Corolario 5.24. *Sean A y A' álgebras de Azumaya sobre R y R' respectivamente, con el mismo rango constante, y $\phi : A \to A'$ un homomorfismo de anillos. Entonces, ϕ es un isomorfismo si y sólo si la restricción de ϕ a R induce un isomorfismo entre R y R'* (*es decir, entre sus centros*)*.*

Demostración. La hipótesis que los rangos constantes son los mismos, implica la condición de la ecuación (5.2). Resta sólo aplicar el teorema 5.23. □

CAPÍTULO 6

El Grupo de Brauer

Nosotros dedicamos este capítulo a la definición y a algunas propiedades fundamentales del grupo de Brauer de un anillo conmutativo R. Este grupo abeliano refleja la complejidad y variedad de las R-álgebras de Azumaya y es un importante invariante del anillo. El grupo de Brauer da una equivalencia entre las álgebras de Azumaya la cual es una equivalencia de Morita local. Por esta razón, sólo haremos una breve introducción en este tema pues ya hemos estudiado en detalle la equivalencia de Morita. Para esto, seguiremos a [AG], [M] y a [DeMI].

Sean R un anillo conmutativo y $\mathcal{B}(R)$ el conjunto de las R-álgebras de Azumaya tales que cada R-álgebra de Azumaya es isomorfa como R-álgebra a exactamente un miembro de $\mathcal{B}(R)$. En $\mathcal{B}(R)$ podemos definir una operación binaria asociativa y conmutativa identificando a $A \otimes_R B$ con el elemento de $\mathcal{B}(R)$ al cual es isomorfo, donde A y B son elementos de $\mathcal{B}(R)$. Además, como $\mathcal{B}(R)$ contiene un elemento isomorfo a R, $\mathcal{B}(R)$ posee una identidad para esta operación y por lo tanto forma un monoide conmutativo bajo $\otimes_R$.

Si P es un R-progenerador, por la proposición 5.16, tenemos que $\mathrm{End}_R(P)$ es una R-álgebra de Azumaya. Sea $\mathcal{B}'(R)$ el subconjunto de $\mathcal{B}(R)$ que consiste de esas R-álgebras de Azumaya A tales que $A \cong \mathrm{End}_R(P)$ como R-álgebras, para algún R-progenerador P. Por la proposición 1.19, si P_1 y P_2 son R-progeneradores, entonces $P_1 \otimes_R P_2$ es un R-progenerador, y como $\mathrm{End}_R(P_1 \otimes_R P_2) \cong \mathrm{End}_R(P_1) \otimes_R \mathrm{End}_R(P_2)$ por el corolario 4.4, tenemos que $\mathcal{B}'(R)$ es cerrado bajo producto tensorial sobre R. Adicionalmente, como R es un R-progenerador y $R \cong \mathrm{End}_R(R)$, tenemos que $\mathcal{B}'(R)$ contiene la identidad de $\mathcal{B}(R)$ y así es un submonoide conmutativo de $\mathcal{B}(R)$.

Ahora definimos una relación de equivalencia $\sim$ en $\mathcal{B}(R)$ dada por: para todo A y B en $\mathcal{B}(R)$, $A \sim B$ si y sólo si existen elementos Y y Z en $\mathcal{B}'(R)$ tales que $A \otimes_R Y \cong B \otimes_R Z$ como R-álgebras, esto es, si y sólo si existen R-progeneradores P_1 y P_2 tales que

$$A \otimes_R \mathrm{End}_R(P_1) \cong B \otimes_R \mathrm{End}_R(P_2).$$

Como $\mathcal{B}'(R)$ es un submonoide de $\mathcal{B}(R)$, tenemos que $\sim$ es una relación de equivalencia.

Sean $\mathfrak{Br}(R) = \mathcal{B}(R)/\sim$ y $[A]$ la clase de equivalencia que contiene a $A \in \mathcal{B}(R)$. Definimos en $\mathfrak{Br}(R)$ una operación binaria por

$$[A][B] = [A \otimes_R B].$$

Si $A' \in [A]$ y $B' \in [B]$, por definición existen $Y, Y', Z, Z' \in \mathcal{B}'(R)$ tales que $A \otimes_R Y \cong A' \otimes_R Y'$ y $B \otimes_R Z \cong B' \otimes_R Z'$ como R-álgebras, de lo que obtenemos, $(A \otimes_R B) \otimes_R (Y \otimes_R Z) \cong (A' \otimes_R B') \otimes_R (Y' \otimes_R Z')$. Por lo tanto, la operación está bien definida. Claramente es asociativa, conmutativa y posee una identidad que es $[R]$.

Finalmente, por el teorema 5.7, A es un R-progenerador y $A^e = A \otimes_R A^{op}$ es isomorfo a $\mathrm{End}_R(A)$ en $\mathcal{B}'(R)$, luego,

$$[A^e] = [A][A^{op}] = [\mathrm{End}_R(A)] = [\mathrm{End}_R(R)] = [R],$$

(pues $\mathrm{End}_R(A) \otimes_R \mathrm{End}_R(R) \cong R \otimes_R \mathrm{End}_R(A)$) mostrando que

$$[A]^{-1} = [A^{op}].$$

Así, $\mathfrak{Br}(R)$ es un grupo abeliano y es conocido como ***el grupo de Brauer de R***.

En el caso que R es un campo, los elementos de $\mathfrak{Br}(R)$ están en correspondencia uno a uno con las clases de isomorfía de las R-álgebras de división que tienen a R como su centro y las cuales son finito dimensionales como R-espacios vectoriales. Para ver esto, como ya sabemos, cada álgebra de Azumaya sobre un campo es simple y de dimensión finita sobre su centro, luego, por el teorema de Wedderburn - Artin, es isomorfa al anillo de matrices $\mathcal{M}_n(D)$ sobre un anillo de división R-central D. Entonces,

$$A \otimes_R R \cong A \cong \mathcal{M}_n(D) \cong D \otimes_R \mathcal{M}_n(R) \cong D \otimes_R \mathrm{End}_R(R^n),$$

luego $[A] = [D]$ en $\mathfrak{Br}(R)$ (Notemos que para R un campo, $\mathcal{B}'(R)$ consiste de todos los anillos de matrices $\mathcal{M}_n(R)$ sobre R, para $n = 1, 2, 3, \ldots$). Además, si D_1 y D_2 son R-álgebras de división finito dimensionales como R-espacios vectoriales con centro R y $[D_1] = [D_2]$, entonces existen enteros positivos n_1 y n_2 tales que

$$\mathcal{M}_{n_1}(D_1) \cong D_1 \otimes_R \mathcal{M}_{n_1}(R) \cong D_2 \otimes_R \mathcal{M}_{n_2}(R) \cong \mathcal{M}_{n_2}(D_2),$$

de lo cual se sigue que $n_1 = n_2$ y $D_1 \cong D_2$ [1]. Por lo tanto, si R es un campo, $[A] = [B]$ en $\mathfrak{Br}(R)$ si y sólo si sus R-álgebras de división centrales correspondientes, finito dimensionales como R-espacios vectoriales, son isomorfas.

A continuación estableceremos algunas propiedades funtoriales básicas del grupo de Brauer.

Proposición 6.1. $\mathfrak{Br}(\ )$ *es un funtor covariante de la categoría de anillos conmutativos a la categoría de grupos abelianos* $\mathcal{A}b$.

[1] Ver [HU, p. 423] para detalles.

Demostración. Sea $f : R \to S$ un homomorfismo de anillos conmutativos, luego f dota a S de una estructura de R-álgebra. Por la proposición 5.5, si $A \in \mathcal{B}(R)$, entonces $A \otimes_R S$ es isomorfo a un elemento de $\mathcal{B}(S)$ y así, f induce un morfismo de $\mathfrak{Br}(R)$ a $\mathfrak{Br}(S)$. Adicionalmente, si P es un R-progenerador, $P \otimes_R S$ es un S-progenerador y por el corolario 4.2, $\mathrm{End}_R(P) \otimes_R S \cong \mathrm{End}_S(P \otimes_R S)$, luego $\mathcal{B}'(R)$ va a $\mathcal{B}'(S)$ en el morfismo de $\mathcal{B}(R)$ en $\mathcal{B}(S)$. Se sigue que el morfismo

$$\mathfrak{Br}(f) : \mathfrak{Br}(R) \to \mathfrak{Br}(S) \quad \text{dado por} \quad \mathfrak{Br}(f)([A]) = [A \otimes_R S]$$

está bien definido, es decir, es independiente de la elección del representante en $[A]$. También, si $A, B \in \mathfrak{Br}(R), (A \otimes_R S) \otimes_S (B \otimes_R S) \cong (A \otimes_R B) \otimes_R S$, así $\mathfrak{Br}(f)$ es un homomorfismo de grupos.

Ahora supongamos que $g : S \to T$ es otro homomorfismo de anillos conmutativos, entonces, T es una S-álgebra vía g y una R-álgebra vía gf, así para cada $A \in \mathcal{B}(R), (A \otimes_R S) \otimes_S T \cong A \otimes_R T$, y por lo tanto

$$\mathfrak{Br}(g)\mathfrak{Br}(f) = \mathfrak{Br}(gf).$$

Además, claramente, la identidad en R induce la identidad en $\mathfrak{Br}(R)$ (es decir, $\mathfrak{Br}(id_R)$ $= id_{\mathfrak{Br}(R)}$ para todo anillo conmutativo R). $\square$

Proposición 6.2. *Para cada R-álgebra de Azumaya A, $[A] = [R]$ en $\mathfrak{Br}(R)$ si y sólo si existe un R-progenerador P tal que $A \cong \mathrm{End}_R(P)$ como R-álgebras (es decir, $A \in \mathcal{B}'(R)$).*

Demostración. Si $A \in \mathcal{B}'(R)$, existe un R-progenerador P tal que $A \cong \mathrm{End}_R(P)$ así $A \otimes_R \mathrm{End}_R(R) \cong \mathrm{End}_R(P) \otimes_R R$.

Recíprocamente, si $[A] = [R]$, existen R-progeneradores P_1 y P_2 tales que $A \otimes_R \mathrm{End}_R(P_1) \cong R \otimes_R \mathrm{End}_R(P_2) \cong \mathrm{End}_R(P_2)$. Sea $B = \mathrm{End}_R(P_1)$, podemos identificar a A y a B vía este isomorfismo con subálgebras de $\mathrm{End}_R(P_2)$ obteniendo que

$$\mathrm{End}_R(P_2) \cong A \otimes_R B \cong AB = \mathrm{End}_R(P_2) \cdot P_2$$

puede ser visto como un B-módulo a izquierda bajo la operación $bp_2 = b(p_2)$ para $b \in B, p_2 \in P_2$. Como $B = \mathrm{End}_R(P_1)$ con P_1 un R-progenerador, al R-módulo $M = P_1^* \otimes_B P_2$ le corresponde P_2 bajo la equivalencia entre la categoría de R-módulos y la categoría de B-módulos a izquierda en la proposición 2.3 (equivalencia Morita). Además, como es una equivalencia de categorías, $\mathrm{End}_R(M) \cong \mathrm{End}_B(P_2)$ como R-álgebras. Pero, por el teorema 5.19

$$\begin{aligned}\mathrm{End}_B(P_2) &= \{f \in \mathrm{End}_R(P_2) : f(b(p_2)) = b(f(p_2)), \forall b \in B, p_2 \in P_2\} \\ &= \big(\mathrm{End}_R(P_2)\big)^B \cong A,\end{aligned}$$

luego $A \cong \mathrm{End}_R(M)$.

Ahora verifiquemos que M es un R-progenerador y así $A \in \mathcal{B}'(R)$: Como P_2 es R-proyectivo, por la proposición 4.23, P_2 es B-proyectivo, luego, por la proposición

1.9, M es R-proyectivo. Además, P_1^* y P_2 son finitamente generados sobre R , entonces $P_1^* \otimes_R P_2$ lo es, implicando que $M = P_1^* \otimes_B P_2$ como una imagen homomorfa de $P_1^* \otimes_R P_2$ es finitamente generado. Finalmente, como $\mathrm{End}_R(M) \cong A$ es una R-álgebra fiel (A por ser Azumaya es un R-progenerador), M debe ser R-módulo fiel. Por lo tanto M es un R-progenerador por el corolario 1.15. $\square$

De la anterior proposición, observemos que $\mathfrak{Br}(R)$ es trivial si y sólo si para cada R-álgebra de Azumaya A existe un R-progenerador P tal que $A \cong \mathrm{End}_R(P)$ como R-álgebras. Además, por la proposición 3.6, si R es un anillo local, entonces $\mathfrak{Br}(R)$ es trivial si y sólo si para cada R-álgebra de Azumaya A existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $A \cong \mathcal{M}_n(R)$ como R-álgebras.

Corolario 6.3. *Sean A y B R-álgebras de Azumaya. Entonces, $[A] = [B]$ en $\mathfrak{Br}(R)$ si y sólo si $A \otimes_R B^{op} \cong \mathrm{End}_R(P)$ como R-álgebras, para algún R-progenerador P.*

Demostración. Es directo a partir de la proposición anterior, teniendo en cuenta que $[A] = [B]$ si y sólo si $[A][B]^{-1} = [R]$ si y sólo si $[A \otimes_R B^{op}] = [R]$. $\square$

CAPÍTULO 7

Cómputo y Resultados

Ahora conoceremos el ejemplo de la álgebra de Weyl cuantizada $\mathbf{A_q}$, la cual, es una álgebra casi-Azumaya, esto es, una álgebra que es libre sobre su centro, de rango finito y que tiene locus de Azumaya no vacío. Calcularemos su locus de Azumaya $\mathcal{AL}$ cuya definición general para una R-álgebra A cualquiera es, un subconjunto abierto denso contenido en el conjunto de ideales maximales del centro de A $\big(\mathcal{AL} \subseteq \text{máx}(Z(A))\big)$, tal que la fibra $A/\langle\, m \,\rangle_A$ es un anillo de matrices con entradas en $Z(A)/m$, para cada $m \in \mathcal{AL}$. Para esto, discutiremos otras álgebras similares y algunos resultados adicionales. Además, al finalizar este capítulo, esbozaremos dos posibles aplicaciones de estas álgebras de Weyl cuantizadas $\mathbf{A_q}$.

Los pasos a seguir son:

Paso 1: $\mathbf{A_q}$ es una $\mathbb{C}$-álgebra libre con base $\{X^i\partial^j : i, j \geq 0\}$.

Paso 2: La álgebra de Weyl cuantizada $\mathbf{A_q}$ es libre de rango finito sobre su centro el cual es el anillo de polinomios $\mathbb{C}[X^n, \partial^n]$.

Paso 3: Cálculo del locus de Azumaya de la $\mathbb{C}$-álgebra $\mathbf{A_q}$.

La álgebra de Weyl cuantizada $\mathbf{A_q}$ es definida sobre $\mathbb{C}$ por

$$\mathbf{A_q} = \mathbb{C}\langle\, X, \partial \,\rangle / \langle\, \partial X - qX\partial - 1 \,\rangle$$

donde $q \in \mathbb{C}$ es una raíz n-ésima primitiva de la unidad, $n > 1$

Paso 1: Primero veamos que $\mathbf{A_q}$ es una $\mathbb{C}$-álgebra libre con base $\{X^i\partial^j : i, j \geq 0\}$ (proposición 7.7).

Sea $\mathbf{R_t}$ la $\mathbb{Z}[t]$-álgebra definida por

$$\mathbf{R_t} = \mathbb{Z}[t]\langle\, X, \partial \,\rangle / \langle\, \partial X - tX\partial - 1 \,\rangle.$$

Como $\partial X = 1 + tX\partial$ en $\mathbf{R_t}$, entonces para cada $r, s \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$\partial^r X = (1 + t + \cdots + t^{r-1})\partial^{r-1} + t^r X \partial^r \quad \text{y} \tag{7.1}$$

$$\partial X^s = (1 + t + \cdots + t^{s-1})X^{s-1} + t^s X^s \partial \tag{7.2}$$

Definición 7.1. Definimos el homomorfismo de $\mathbb{Z}[t]$-módulos

$$\phi : \mathbf{R_t} \to \mathrm{End}_{\mathbb{Z}[t]}(\mathbb{Z}[t][x]) \;\; \text{por} \;\; \phi(X) = X(\,.\,),\ \phi(\partial) = \partial_t(\,.\,) \text{ y } \phi_{|\mathbb{Z}[t]} = id_{\mathbb{Z}[t]},$$

donde la acción de $X(\,.\,)$ en un polinomio de $\mathbb{Z}[t][x]$ es multiplicarlo por la variable x y la acción de $\partial_t(\,.\,)$, a partir de la ecuación (7.2), para cada $k \in \mathbb{N}$, es

$$\partial_t(x^k) = (\partial_t X^k)(1) = (1 + t + \cdots + t^{k-1})x^{k-1} \tag{7.3}$$

Proposición 7.2. *La $\mathbb{Z}[t]$-álgebra $\mathbf{R_t}$ es libre con base $\mathcal{B} = \{X^i \partial^j : i, j \geq 0\}$.*

Demostración. Primero veamos que la $\mathbb{Z}[t]$-álgebra $\mathbf{R_t}$ está generada por $\mathcal{B}$: Como cada elemento de $\mathbf{R_t}$ es de la forma

$$\sum_{\vec{i}=\vec{0}}^{\vec{N}} p\,(t)_{(i_1,\ldots,i_m)} X^{i_1}\partial^{i_2}X^{i_3}\cdots\partial^{i_m} \quad \text{donde} \quad p\,(t)_{\vec{i}} \in \mathbb{Z}[t],$$

basta ver que $X\partial^r X, \partial X^s \partial \in gen_{\mathbb{Z}[t]}\mathcal{B}$. De las cuaciones (7.1) y (7.2) tenemos que

$$X\partial^r X = X(\partial^r X) = (1 + t + \cdots + t^{r-1})X\partial^{r-1} + t^r X^2 \partial^r \quad \text{y}$$
$$\partial X^s \partial = (\partial X^s)\partial = (1 + t + \cdots + t^{s-1})X^{s-1}\partial + t^s X^s \partial^2.$$

Luego $\mathcal{B}$ genera a $\mathbf{R_t}$ sobre $\mathbb{Z}[t]$.

Ahora mostremos que el conjunto $\mathcal{B}$ es linealmente independiente sobre $\mathbb{Z}$[t]: Como X y ∂ son operadores, mostrar dicha independencia es equivalente a ver que el homomorfismo ϕ en la definición 7.1 es inyectivo. Sea $f \in \mathbf{R_t}$ tal que $\phi(f) \equiv 0$. Por la primera parte,

$$f = \sum_{i,j=0,0}^{N,M} p_{ij}(t)X^i\partial^j = \sum_{j=0}^{M} a_j(X)\partial^j \quad \text{donde} \quad a_j(X) \in \mathbb{Z}[t]\langle\, X \,\rangle.$$

Luego,

$$0 = (\phi(f))(1) = \Big(\sum_{j=0}^{M} a_j(X)\partial^j\Big)(1) = a_0(x) \qquad \Rightarrow \quad f = \sum_{j=1}^{M} a_j(X)\partial^j$$
$$0 = (\phi(f))(x) = \Big(\sum_{j=1}^{M} a_j(X)\partial^j\Big)(x) = a_1(x) \qquad \Rightarrow \quad f = \sum_{j=2}^{M} a_j(X)\partial^j$$
$$\vdots$$
$$0 = (\phi(f))(x^M) = \big(a_M(X)\partial^M\big)(x^M) = a_M(x) \qquad \Rightarrow \quad f = 0$$

Por lo tanto ϕ es inyectivo y así el conjunto $\mathcal{B}$ es linealmente independiente sobre $\mathbb{Z}$[t], concluyendo la demostración. □

Proposición 7.3. *Sean S y R anillos con identidad, $\varphi : S \to R$ un homomorfismo de anillos y M un S-módulo libre con base $\{v_i : i \in I\}$. Entonces, $R \otimes_S M$ es un R-módulo libre con base $\{1_R \otimes_S v_i : i \in I\}$.*

Demostración. Como M es un S-módulo libre, entonces existe un conjunto de índices I tal que $M \cong S^I$. Luego, como φ le da a R una estructura de S-módulo ($sr := \varphi(s)r$, $s \in S, r \in R$), tenemos que

$$R \otimes_S M \cong R \otimes_S S^I \cong (R \otimes_S S)^I \cong R^I$$

como R-módulos, dados por $1_R \otimes_S v_i \longmapsto 1_R \otimes_S e_i \longmapsto (1_R \otimes_S 1_S)_i \longmapsto e_i$. Por lo tanto, $R \otimes_S M$ es un R-módulo libre con base $\{1_R \otimes_S v_i : i \in I\}$. □

Corolario 7.4. $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}[t]} \mathbf{R_t}$ *es un $\mathbb{C}$-módulo libre con base $\{1 \otimes_{\mathbb{Z}[t]} X^i \partial^j : i, j \geq 0\}$.*

Demostración. En la proposición 7.3 tomemos $S = \mathbb{Z}[t], R = \mathbb{C}, \varphi : \mathbb{Z}[t] \to \mathbb{C}$ el homomorfismo de anillos definido por $\varphi(t) = q$ y $\varphi_{|\mathbb{Z}} = id_{\mathbb{Z}}$ y consideremos el $\mathbb{Z}[t]$-módulo libre $M = \mathbf{R_t}$ cuya base es $\{X^i \partial^j : i, j \geq 0\}$ por la proposición 7.2. □

Proposición 7.5. *Sea $\varphi : S \to R$ un homomorfismo de anillos conmutativos con identidad. Entonces,*

$$R \otimes_S \big(S[\mathbf{x}]/\langle\, \mathbf{f}\,\rangle\big) \cong \big(R[\mathbf{x}]/\langle\, \varphi\mathbf{f}\,\rangle\big) \quad \textit{como } R\textit{-álgebras}$$

donde $S[\mathbf{x}] = S[x_1, \ldots, x_n]$, $R[\mathbf{x}] = R[x_1, \ldots, x_n]$, $\langle\, \mathbf{f}\,\rangle = \langle\, f_1, \ldots, f_m\,\rangle$ y $\langle\, \varphi\mathbf{f}\,\rangle = \langle\, \varphi(f_1), \ldots, \varphi(f_m)\,\rangle$.

Demostración. Es claro que el morfismo φ le da al anillo conmutativo R una estructura de S-módulo ($sr = rs : r\varphi(s) = \varphi(s)r$, $s \in S, r \in R$). Además, sabemos que φ se puede extender al homomorfismo de anillos $\varphi : S[\mathbf{x}] \to R[\mathbf{x}]$.

Primero demostremos que $R \otimes_S S[\mathbf{x}] \cong R[\mathbf{x}]$. Veamos, sea

$$\phi : R \otimes_S S[\mathbf{x}] \longrightarrow R[\mathbf{x}] \quad \text{definida por}$$

$$r \otimes (s x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}) \longmapsto r\varphi(s) x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n} \quad \text{es decir} \quad r \otimes f(\mathbf{x}) \longmapsto r\varphi\big(f(\mathbf{x})\big).$$

Teniendo encuenta que φ es un homomorfismo de anillos conmutativos y la acción de S en R, es sencillo ver que ϕ está bien definida y es un homomorfismo de anillos. Además, ϕ es R-lineal pues

$$\phi\big(r'(r \otimes_S f)\big) = \phi\big((r'r) \otimes_S f\big) = r'r\varphi(f) = r'\phi(r \otimes_s f).$$

También es claro que ϕ es sobreyectivo ya que

$$r x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n} = \phi\big(r \otimes_S (x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n})\big).$$

Por último veamos que ϕ es inyectivo, si

$$0 \;= \phi\left(\sum_{j=1}^{M}\left(r^{(j)} \otimes \sum_{\mathbf{i^{(j)}}}^{\mathbf{N^{(j)}}} s_{\mathbf{i^{(j)}}} x_1^{i_1^{(j)}} \cdots\, x_n^{i_n^{(j)}}\right)\right) = \phi\left(\sum_{j=1}^{M} \sum_{\mathbf{i^{(j)}}}^{\mathbf{N^{(j)}}} \left(r^{(j)} s_{\mathbf{i^{(j)}}} \otimes_S x_1^{i_1^{(j)}} \cdots\, x_n^{i_n^{(j)}}\right)\right)$$

$$= \sum_{j,\mathbf{i}^{(\mathbf{j})}} r^{(j)} \varphi(s_{\mathbf{i}^{(\mathbf{j})}}) x_1^{i_1^{(j)}} \cdots x_n^{i_n^{(j)}} = \sum_{j,\mathbf{i}^{(\mathbf{j})}} r^{(j)} s_{\mathbf{i}^{(\mathbf{j})}} x_1^{i_1^{(j)}} \cdots x_n^{i_n^{(j)}},$$

tenemos que $r^{(j)} s_{(i_1^{(j)},\dots,i_n^{(j)})} = 0$, así ϕ es inyectivo y por lo tanto un isomorfismo de R-álgebras.

Ahora veamos el isomorfismo general: Recordemos que si A y B son anillos, $\mathfrak{a}$ un ideal de A y $\phi : A \to B$ un isomorfismo de anillos, entonces $A/\mathfrak{a} \cong B/\phi(\mathfrak{a})$. En nuestro contexto, sean $A = R \otimes_S S[\mathbf{x}], B = R[\mathbf{x}], \phi$ el isomorfisnmo definido al inicio de esta demostración y $\mathfrak{a} = R \otimes_S \langle\, \mathbf{f}\, \rangle$. Claramente $\mathfrak{a}$ es un ideal de $R \otimes_S S[\mathbf{x}]$ puesto que el producto en dicho anillo es $\big(\sum_i r_i \otimes f_i\big)\big(\sum_j r'_j \otimes f'_j\big) = \sum_{i,j} r_i r'_j \otimes f_i f'_j$ y $\langle\, \mathbf{f}\, \rangle$ es el ideal de $S[\mathbf{x}]$ generado por $f_1, \dots, f_m$. Además, como

$$\phi(r \otimes_S f f_i) = r\varphi(f f_i) = \big(r\varphi(f_i)\big)\varphi(f_i) \in \langle\, \varphi(f_i)\, \rangle_{R[\mathbf{x}]} \quad \text{y}$$

$$(r x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n})\varphi(f_i) = r\varphi(x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n} f_i) = \phi\big(r \otimes (x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n} f_i)\big),$$

tenemos que

$$\langle\, \varphi(f_i)\, \rangle_{R[\mathbf{x}]} = \phi\big(R \otimes_S \langle\, f_i\, \rangle_{S[\mathbf{x}]}\big) \quad \text{donde} \qquad f \in S[\mathbf{x}], r \in R, i = 1, \dots, m,$$

entonces

$$\phi\big(R \otimes_S \langle\, \mathbf{f}\, \rangle\big) = \langle\, \varphi\mathbf{f}\, \rangle_{R[\mathbf{x}]}.$$

Luego

$$\Big(\big(R \otimes_S S[\mathbf{x}]\big)/\big(R \otimes_S \langle\, \mathbf{f}\, \rangle\big)\Big) \cong \big(R[\mathbf{x}]/\langle\, \varphi\mathbf{f}\, \rangle\big)$$

y así, $R \otimes_S \big(S[\mathbf{x}]/\langle\, \mathbf{f}\, \rangle\big) \cong \big(R[\mathbf{x}]/\langle\, \varphi\mathbf{f}\, \rangle\big)$ como R-álgebras. □

Corolario 7.6. $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}[t]} \mathbf{R_t} \cong \mathbf{A_q}$ *como* $\mathbb{C}$*-álgebras.*

Demostración. La proposición 7.5 claramente es válida si tomamos los anillos libres no conmutativos $S\langle x_1, \dots, x_n\rangle, R\langle x_1, \dots, x_n\rangle$. Luego, si $S = \mathbb{Z}[t], R = \mathbb{C}, f = \partial X - tX\partial - 1$ y $\varphi : \mathbb{Z}[t] \to \mathbb{C}$ el homomorfismo de anillos conmutativos definido por $\varphi(t) = q$ y $\varphi_{|\mathbb{Z}} = id_{\mathbb{Z}}$, el cual se puede extender a $\varphi : \mathbb{Z}[t]\langle X, \partial\rangle \to \mathbb{C}\langle X, \partial\rangle$ un morfismo de anillos no conmutativos, entonces,

$$\varphi(f) = \varphi(\partial)\varphi(X) + \varphi(-1)\varphi(t)\varphi(X)\varphi(\partial) + \varphi(-1) = f,$$

y así, $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}[t]} \mathbf{R_t} \cong \mathbf{A_q}$ como $\mathbb{C}$-álgebras. □

Finalmente, para $q \in \mathbb{C}$, (q puede no ser una raíz n-esima de la unidad), tenemos,

Proposición 7.7. $\mathbf{A_q}$ *es una* $\mathbb{C}$*-álgebra libre con base* $\{X^i\partial^j : i, j \geq 0\}$.

Demostración. Se obtiene directamente de los corolarios 7.4 y 7.6. □

Paso 2: Ahora veamos que la álgebra de Weyl cuantizada $\mathbf{A_q}$ es libre de rango finito sobre su centro el cual es el anillo de polinomios $\mathbb{C}[X^n, \partial^n]$.

Proposición 7.8. *Si $q \in \mathbb{C}$ es una raíz n-ésima primitiva de la unidad con $n > 1$, entonces*

$$Z(\mathbf{A_q}) = \mathbb{C}[X^n, \partial^n].$$

Demostración. Como q es una raíz n-ésima primitiva de la unidad, $n > 1$ y $0 = 1 - q^n = (1-q)(1+q+\cdots+q^{n-1})$ entonces

$$1 + q + \cdots + q^{n-1} = 0 \tag{7.4}$$

i) $Z(\mathbf{A_q}) \supseteq \mathbb{C}[X^n, \partial^n]$: Por la proposición 7.7, $\mathbf{A_q}$ tiene como base sobre $\mathbb{C}$ a $\{X^i\partial^j : i, j \geq 0\}$, luego basta mostrar que $\partial^n X = X\partial^n$ y $\partial X^n = X^n \partial$. Pero esto es directo a partir de las ecuaciones (7.1), (7.2) y (7.4).

ii) $Z(\mathbf{A_q}) \subseteq \mathbb{C}[X^n, \partial^n]$: Por la proposición 7.7, cada $f \in \mathbf{A_q}$ es de la forma

$$f = \sum_{i,j=0,0}^{N,M} b_{ij} X^i \partial^j = \sum_{j=0}^{M} a_j(X)\partial^j \quad \text{con} \quad b_{ij} \in \mathbb{C}.$$

Supongamos que $f \in Z(\mathbf{A_q})$, hay dos posibilidades:
a) Si

$$f = a_0(X) = \sum_{i=0}^{N} b_{i0} X^i,$$

entonces por (i) y la ecuación (7.2),

$$0 = [f, \partial] = \sum_{n \nmid i} b_{i0}[X^i, \partial] = \sum_{n \nmid i} b_{i0}\Big(-(1+q+\cdots+q^{i-1})X^{i-1} + (1-q^i)(X^i\partial)\Big)$$

y como $\{X^i\partial^j\}_{i,j\geq 0}$ es linealmente independiente sobre $\mathbb{C}$, entonces $b_{i0}(1-q^i) = 0$, luego $b_{i0} = 0$ si $n \nmid i$ y por lo tanto $f \in \mathbb{C}[X^n, \partial^n]$.
b) Si

$$f = \sum_{j=0}^{M} a_j(X)\partial^j \quad \text{con} \quad a_M \neq 0, M \geq 1,$$

como en (a), por (i) y la ecuación (7.1),

$$\begin{aligned} 0 = [f, X] &= \sum_{j=0}^{M}\big(a_j(X)[\partial^j, X] + [a_j(X), X]\partial^j\big) = \sum_{j=0}^{M} a_j(X)[\partial^j, X] \\ &= \sum_{n \nmid j}^{M} a_j(X)[\partial^j, X] = \sum_{n \nmid j}^{M} a_j(X)\Big((1+\cdots+q^{j-1})\partial^{j-1} + (q^j-1)X\partial^j\Big) \end{aligned}$$

y por ser $\{X^i\partial^j\}_{i,j\geq 0}$ linealmente independiente sobre $\mathbb{C}$, entonces $a_j(X)(q^j - 1) = 0$. Luego, $a_j(X) = 0$ si $n \nmid j$. Así, usando (a) para $a_j(X)$ con $n \mid j$ se concluye que $f \in \mathbb{C}[X^n, \partial^n]$. □

Proposición 7.9. *Si $q \in \mathbb{C}$ es una raíz n-ésima primitiva de la unidad con $n > 1$, entonces $\mathbf{A_q}$ es una álgebra libre sobre su centro $Z(\mathbf{A_q}) = \mathbb{C}[X^n, \partial^n]$ con base el conjunto $\mathcal{B} = \{X^i\partial^j : 0 \leq i, j < n\}$. Así,* $\mathrm{Rank}_{Z(\mathbf{A_q})}(\mathbf{A_q}) = n^2$.

Demostración. Si $f \in \mathbf{A_q}$, por la proposición 7.7 y por el algoritmo Euclideano tenemos que dados $i, j \in \mathbb{N}$ existen $q_i, q_j, r_i, r_j \in \mathbb{Z}, 0 \leq r_i, r_j < n$ tales que

$$f = \sum_{i,j=0,0}^{N,M} a_{ij}X^i\partial^j = \sum_{i,j=0,0}^{N,M} \big(a_{ij}(X^n)^{q_i}(\partial^n)^{q_j}\big)X^{r_i}\partial^{r_j} \quad \text{donde} \quad a_{ij} \in \mathbb{C}.$$

Luego, $\mathcal{B}$ genera a $\mathbf{A_q}$ sobre $Z(\mathbf{A_q})$. Ahora veamos la independencia lineal de $\mathcal{B}$ sobre $Z(\mathbf{A_q})$: sean $0 \leq i, j < n$ y $v_{ij} \in Z(\mathbf{A_q}) = \mathbb{C}[X^n, \partial^n]$, si

$$0 = \sum_{i,j=0,0}^{n-1} v_{ij}X^i\partial^j = \sum_{i,j=0,0}^{n-1} (a_{ij}X^{nq_i}\partial^{nq_j})X^i\partial^j = \sum_{i,j=0,0}^{n-1} a_{ij}X^{q_in+i}\partial^{q_jn+j},$$

como $\{X^i\partial^j\}_{i,j\geq 0}$ es linealmente independiente sobre $\mathbb{C}$, entonces para todo i, j, $a_{ij} = 0$, luego $v_{ij} = 0$ para cada i, j, concluyendo así la demostración. □

Paso 3: Por último, calcularemos el locus de Azumaya de la $\mathbb{C}$-álgebra $\mathbf{A_q}$.

Para esto, notemos que si $q \in \mathbb{C}$ es una raíz n-ésima primitiva de la unidad, con $n > 1$, como $Z(\mathbf{A_q}) = \mathbb{C}[X^n, \partial^n]$ entonces, por Hilbert, todo ideal maximal allí es de la forma

$$\mathfrak{m}_{\alpha,\beta} = \langle X^n - \alpha, \partial^n - \beta \rangle \quad \text{donde} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

Ahora veremos para cuáles valores de α y β el anillo (fibra)

$$\mathbf{A}_{\mathbf{q},\alpha,\beta} = \mathbf{A_q}/\langle \mathfrak{m}_{\alpha,\beta} \rangle_{A_q}$$

es isomorfo al anillo de matrices $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (notemos que $\big(Z(\mathbf{A_q})/\mathfrak{m}_{\alpha,\beta}\big) \cong \mathbb{C}$) y así, como $\mathcal{AL} \subseteq \text{máx}(Z(\mathbf{A_q}))$ será un abierto denso en la topología de Zariski, tenemos que la álgebra de Weyl cuantizada $\mathbf{A_q}$ es una álgebra casi-Azumaya.

Proposición 7.10. *Sea $q \in \mathbb{C}$ una raíz n-ésima primitiva de la unidad, $n > 1$. Entonces,*

$$\mathbf{A}_{\mathbf{q},0,0} \cong \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

Demostración. Veamos que $V = \mathbb{C}[x]/\langle x^n \rangle$ es un $\mathbf{A}_{\mathbf{q},0,0}$-módulo irreducible:

a) V es un $\mathbf{A}_{\mathbf{q},0,0}$-módulo. En efecto, en primer lugar, V es un $\mathbf{A_q}$-módulo, pues $\mathbb{C}[x]$ y $W = \langle x^n \rangle$ lo son. Esto claro para $\mathbb{C}[x]$, mostrémoslo para W. Notemos que $W = \{p(x) \in \mathbb{C}[x] : grd(p) \geq n\}$, luego $X(p(x)) = xp(x)$ con $grd(xp) = grd(p) + 1$, así $Xp(x) \in W$, y por las ecuaciones 7.3 y 7.4 si $m > n$ y $m = n$ respectivamente, $\partial_q(x^m) \in W$. Finalmente, como $X^n(V) = \{0\} = {\partial_q}^n(V)$ y $X^n, {\partial_q}^n \in Z(\mathbf{A_q})$ entonces V es un $\mathbf{A}_{\mathbf{q},0,0}$-módulo.

b) V es irreducible como un $\mathbf{A}_{\mathbf{q},0,0}$-módulo: si $0 \neq f \in V$ con $f(x) = \sum_{i=0}^{N} a_i x^i$, $a_i \in \mathbb{C}$, $a_N \neq 0, N < n$, se tiene que

$$\partial_q{}^N(f(x)) = a_N(1+q+\ldots+q^{N-1})(1+q+\ldots+q^{N-2})\cdots(1-q) \neq 0$$

y así

$$\big(\partial_q{}^N(f)\big)^{-1}\big(\partial_q{}^N(f)\big) = 1 \in \mathbf{A}_{\mathbf{q},0,0}f,$$

luego $1, x, x^2, \ldots, x^{n-1} \in \mathbf{A}_{\mathbf{q},0,0}f$ y por lo tanto $\mathbf{A}_{\mathbf{q},0,0}f = V$, así V es un $\mathbf{A}_{\mathbf{q},0,0}$-módulo irreducible.

Finalmente, como $\mathbb{C}$ es un campo algebraicamente cerrado, V es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión finita n, $\mathbf{A}_{\mathbf{q},0,0}$ es una $\mathbb{C}$-álgebra, V es un $\mathbf{A}_{\mathbf{q},0,0}$-módulo irreducible y la $\dim_{\mathbb{C}} \mathbf{A}_{\mathbf{q},0,0} = n^2 = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{M}_n$, por el teorema de Burnside [1] , $\mathbf{A}_{\mathbf{q},0,0} \cong \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V) \cong \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ como anillos. $\square$

Teorema 7.11. *Sea $q \in \mathbb{C}$ una raíz n-ésima primitiva de la unidad, $n > 1$. El locus de Azumaya de $\mathbf{A}_{\mathbf{q}}$ es*

$$\mathcal{AL}(\mathbf{A}_{\mathbf{q}}) = \Big\{\langle X^n - \alpha, \partial^n - \beta \rangle \in \text{máx}(Z(\mathbf{A}_{\mathbf{q}})) : \alpha\beta \neq \frac{1}{(1-q)^n}\Big\},$$

esto es,

$$\mathbf{A}_{\mathbf{q},\alpha,\beta} \cong \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \qquad \textit{si y sólo si} \qquad \alpha\beta \neq \frac{1}{(1-q)^n} \quad \alpha,\beta \in \mathbb{C}$$

Demostración. Para cada $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, gracias a que

$$\partial X - qX\partial = 1, \quad X^n = \alpha \quad \text{y} \quad \partial^n = \beta,$$

tenemos que el conjunto $\{X^i\partial^j : 0 \leq i, j < n\}$ es una base sobre $\mathbb{C}$ para $\mathbf{A}_{\mathbf{q},\alpha,\beta}$. Así, consideremos el homomorfismo

$$\tau : \mathbf{A}_{\mathbf{q},\alpha,\beta} \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \quad \text{definido por} \quad \tau(X) = A \text{ y } \tau(\partial) = B$$

con las relaciones

$$BA - qAB = I, \quad A^n = \alpha I \quad \text{y} \quad B^n = \beta I.$$

Hay dos posibles casos: el primero, cuando $\alpha = 0 = \beta$, el cual fue visto en la proposición 7.10. El segundo, cuando $\alpha \neq 0$ o $\beta \neq 0$.

Supongamos $\alpha \neq 0$.

i) Como $A^n = \alpha I \neq 0$ entonces A es diagonalizable. En efecto, como $G = \langle A \rangle \cong \mathbb{Z}_N, N \leq n$, es un grupo cíclico finito abeliano y $V = \mathbb{C}^N$ es una representación de G entonces $V \cong \bigoplus V_i$ donde cada V_i es una representación irreducible de G.

[1] Teorema de Burnside: Si $\mathbb{K}$ es un campo algebraicamente cerrado, V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita, R una $\mathbb{K}$-álgebra y V un R-módulo fiel simple, entonces $R \cong \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ como anillos. Su demostración es directa a partir del Teorema de Densidad de Jacobson. Ver [HU, p. 420].

Sea λ_i un valor propio de A con vector propio $v_i \in \mathbb{C}^n$, esto es $Av_i = \lambda_i v_i$, tales que $v_i \in V_i$ para algún i. Como $Gv_i = \mathbb{C}v_i \subseteq V_i$ y V_i es una representación irreducible de G, entonces $\mathbb{C}v_i = V_i$ y por lo tanto

$$\dim_{\mathbb{C}} V_i = 1 \quad \text{y} \quad V \cong \bigoplus \mathbb{C}v_i,$$

es decir, V es una suma directa de espacios propios, luego, $\mathbb{C}^n$ tiene una base de vectores propios, y así A es diagonalizable.

***ii*)**

$$A = diag(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) \quad \text{donde}$$

$$\alpha_k = |\alpha|^{1/n} q_k = |\alpha|^{1/n} {q_1}^k \quad \text{y} \quad q_k = \exp\left(\frac{2k\pi i}{n}\right) \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

son todas las n raíces n-ésimas de la unidad: Haciendo un cambio de base adecuado, $A = diag(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$ donde $\alpha_i = |\alpha|^{1/n} q_i$ con q_i una raíz n-ésima de la unidad, $i = 0, 1, \ldots, n-1$.

Ahora veamos que $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ son todos distintos si y sólo si el conjunto $\{I, A, \ldots, A^{n-1}\}$ es linealmente independiente sobre $\mathbb{C}$. Como cada A^i es una matriz diagonal, ver la independencia es equivalente a ver que la matriz nxn cuyas filas son dichas diagonales tiene determinante distinto de cero. Pero esto es directo pues

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \ldots & \alpha_{n-1} \\ {\alpha_0}^2 & {\alpha_1}^2 & \ldots & {\alpha_{n-1}}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ {\alpha_0}^{n-1} & {\alpha_1}^{n-1} & \ldots & {\alpha_{n-1}}^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{0 \le i < j < n} (\alpha_i - \alpha_j)$$

***iii*)** Si $B = (b_{ij})_{0 \le i,j < n}$, entonces $BA - qAB = \big(b_{ij}(\alpha_j - q\alpha_i)\big)_{0 \le i,j < n} = I$, luego, tomando la raíz n-ésima primitiva de la unidad $q = q_1$, tenemos que

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha_0(1-q)} & b_{01} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha_1(1-q)} & b_{12} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\alpha_2(1-q)} & b_{23} & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \frac{1}{\alpha_{n-2}(1-q)} & b_{n-2,n-1} \\ b_{n-1,0} & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \frac{1}{\alpha_{n-1}(1-q)} \end{pmatrix}$$

***iv*)** Además, $b_{01}, b_{12}, \ldots, b_{n-2,n-1}, b_{n-1,0}$ son todos no nulos si y sólo si $\mathcal{B} = \{A^i B^j : 0 \le i, j < n\}$ es una base para $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sobre $\mathbb{C}$:

Si $b_{n-1,0} = 0$ entonces B es una matriz triangular superior y, $gen_{\mathbb{C}}(\mathcal{B}) \subseteq \{\text{Matrices triangulares superiores}\} \subsetneq \mathcal{M}_n$, o si $b_{k,k+1} = 0$ para algún $k = 0, \ldots, n-2$, entonces B es una matriz cuya fila k (contando desde cero) tiene todas las entradas nulas excepto la entrada $b_{kk} = \frac{1}{\alpha_k(1-q)}$, luego $gen_{\mathbb{C}}(\mathcal{B}) \subseteq \{$Matrices cuya fila k (contando desde cero) tienen todas las entradas nulas excepto la entrada $kk\} \subsetneq \mathcal{M}_n$.

Recíprocamente, supongamos que $b_{01}, b_{12}, \ldots, b_{n-2,n-1}, b_{n-1,0}$ son todos no nulos y sean

$$V = \mathbb{C}^n \quad \text{y} \quad R = gen_{\mathbb{C}}(\mathcal{B}).$$

Veamos que V es un R-módulo irreducible. Demostramos antes que $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ son todos distintos entre sí, si y sólo si el conjunto $\mathcal{B}_A = \{I, A, \ldots, A^{n-1}\}$ es linealmente independiente sobre $\mathbb{C}$, luego $gen_{\mathbb{C}}(\mathcal{B}_A) = \mathcal{D}_n(\mathbb{C})$, pues $\dim_{\mathbb{C}}(gen_{\mathbb{C}}(\mathcal{B}_A)) = n = \dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{D}_n(\mathbb{C}))$, donde $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ es el conjunto de matrices diagonales nxn, así $\mathcal{D}_n \subset R$.

Sea $0 \neq v \in V$, $v = (v_1, \ldots, v_n)^t$, con $0 \neq v_i \in \mathbb{C}$ para algún $i = 1, \ldots n$. Como $E_{ii} \in \mathcal{D}_n \subset R$, entonces $E_{ii}v = v_i e_i \in Rv$, luego $e_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)^t \in Rv$ para algún $i = 1, \ldots n$. También,

$$diag(B) = diag\left(\frac{1}{\alpha_0(1-q)}, \ldots, \frac{1}{\alpha_{n-1}(1-q)}\right) \in \mathcal{D}_n \subset R,$$

así

$$B - diag(B) \in R$$

y como $b_{01}, b_{12}, \ldots, b_{n-2,n-1}, b_{n-1,0}$ son todos no nulos por hipótesis, entonces

$$H = diag(b_{01}^{-1}, b_{12}^{-1}, \ldots, b_{n-2,n-1}^{-1}, b_{n-1,0}^{-1}) \in \mathcal{D}_n \subset R,$$

luego

$$C = H(B - diag(B)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in R$$

Por lo tanto,

$$Ce_n = e_{n-1}, \quad Ce_{n-1} = e_{n-2}, \quad \cdots \quad Ce_2 = e_1, \quad Ce_1 = e_n \quad \in Rv,$$

de lo que concluimos que $Rv = V$, esto es, V es un R-módulo irreducible.

Luego, como $\mathbb{C}$ es un campo algebraicamente cerrado, V es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión finita n, R es una $\mathbb{C}$-álgebra, V es un R-módulo irreducible y la $\dim_{\mathbb{C}} R \leq n^2 = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{M}_n$, entonces por el teorema de Burnside [2], $R \cong \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V) \cong \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ como anillos y por lo tanto $\mathcal{B}$ es una base para $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sobre $\mathbb{C}$.

v) Ahora veamos que a partir de $B^n = \beta I$ tenemos que $\alpha\beta \neq \frac{1}{(1-q)^n}$ si y sólo si $b_{01}, b_{12}, \ldots, b_{n-2,n-1}, b_{n-1,0}$ son todos no nulos. Hay dos posibles casos: $\beta \neq 0$ ó $\beta = 0$. ***a)*** Si $\beta \neq 0$, entonces, como ya se vió, B es diagonalizable y hay una base de $\mathbb{C}^n$ en la cual B es una matriz diagonal con entradas $\beta_k = |\beta|^{1/n} q_k$ y $q_k = \exp(\frac{2k\pi i}{n})$ una raíz n-ésima de la unidad, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, así el polinomio característico de B, $p_B(t)$, tiene como raíces a $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1}$, es decir, ellos son los valores propios de B.

[2] Teorema de Burnside: Si $\mathbb{K}$ es un campo algebraicamente cerrado, V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita, R una $\mathbb{K}$-álgebra y V un R-módulo fiel simple, entonces $R \cong \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ como anillos. Su demostración es directa a partir del Teorema de Densidad de Jacobson. Ver [HU, p. 420]

En conclusión, si $\beta \neq 0$, $B^n = \beta I$ si y sólo si B es una matriz similar a $diag(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1})$ si y sólo si los valores propios de B son $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1}$. Además, como

$$\alpha_k = |\alpha|^{1/n} q^{2k\pi i/n} \quad \text{y} \quad \beta_l = |\beta|^{1/n} q^{2l\pi i/n} \quad \text{con } k, l = 0, 1, \ldots, n-1,$$

entonces

$$\alpha_k \beta_l = |\alpha\beta|^{1/n} q^{2(k+l)\pi i/n}$$

y para l fijo $\alpha_0\beta_l, \ldots, \alpha_{n-1}\beta_l$ son todas las raíces n-ésimas de $\alpha\beta$, luego

$$\prod_{k=0}^{n-1} \alpha_k \beta_l = \alpha\beta \quad \text{con } l \text{ fijo.}$$

Pero como

$$\begin{aligned} p_B(t) = &\ det(tI - B) \\ = &\left(t - \frac{1}{\alpha_0(1-q)}\right) \cdots \left(t - \frac{1}{\alpha_{n-1}(1-q)}\right) - b_{n-1,0}\, b_{01} \cdots b_{n-2,n-1} \end{aligned}$$

$$\text{y} \quad p_B(\beta_l) = 0,$$

entonces dado $l \in \{0, \ldots, n-1\}$ fijo, tenemos que

$$\begin{aligned} b_{01}, b_{12}, \ldots, b_{n-2,n-1}, b_{n-1,0} \quad &\text{son todos no nulos} \\ &\iff \beta_l - \frac{1}{\alpha_k(1-q)} \neq 0, k = 0, \ldots, n-1 \\ &\iff \beta_l \alpha_k \neq \frac{1}{1-q}, k = 0, \ldots, n-1 \\ &\iff \alpha\beta = \prod_{k=0}^{n-1} \alpha_k \beta_l \neq \frac{1}{(1-q)^n}. \end{aligned}$$

b) Si $\beta = 0$ entonces $B^n = 0$, luego todos los valores propios de B son cero, (esto se obtiene a partir de la Forma Canónica de Jordan de B). Así

$$p_B(0) = 0$$

y por lo tanto $\frac{1}{\pm\alpha(1-q)^n} \neq 0$ si y sólo si $b_{01}, b_{12}, \ldots, b_{n-2,n-1}, b_{n-1,0}$ son todos no nulos.

vi) Notemos que todo lo anterior es válido si q es cualquiera de las raíces n-ésimas primitivas de la unidad, pues sólo se ordena de forma adecuada las raíces n-ésimas de α.

En conclusión tenemos que $\alpha\beta \neq \frac{1}{(1-q)^n}$ si y sólo si $\mathcal{B} = \{A^i B^j : 0 \leq i, j < n\}$ es una base para $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sobre $\mathbb{C}$ si y sólo si τ es un isomorfismo de anillos. $\square$

Por lo tanto, si $q \in \mathbb{C}$ es una raíz n-ésima primitiva de la unidad con $n > 1$, la álgebra de Weyl cuantizada $\mathbf{A_q}$ es una álgebra casi-Azumaya pues es una álgebra libre sobre su centro $Z(\mathbf{A_q}) = \mathbb{C}[X^n, \partial^n]$, con base el conjunto $\mathcal{B} = \{X^i \partial^j : 0 \leq i, j < n\}$, de rango finito, $\mathrm{Rank}_{Z(\mathbf{A_q})}(\mathbf{A_q}) = n^2$, y tiene locus de Azumaya no vacío, el cual es

$$\mathcal{AL}(\mathbf{A_q}) = \left\{ \langle\, X^n - \alpha, \partial^n - \beta \,\rangle \in \text{máx}(Z(\mathbf{A_q})) : \alpha\beta \neq \frac{1}{(1-q)^n} \right\}$$

Para finalizar, esbozaremos dos posibles aplicaciones de estas álgebras de Weyl cuantizadas $\mathbf{A_q}$.

a*) *Relación con la teoría de representaciones de un grupo cuántico: ([CP]) Sea $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie compleja semi-simple y $U(\mathfrak{g})$ su álgebra envolvente. Sea $U_\chi(\mathfrak{g})$ un cociente primitivo (es decir, $U_\chi(\mathfrak{g}) = U(\mathfrak{g})/\mathfrak{m}_\chi$ donde $\mathfrak{m}_\chi \in \text{máx}\big(Z(U(\mathfrak{g}))\big)$). Por un resultado clásico de Beilinson-Bernstein, [BB], $U_\chi(\mathfrak{g})$ es isomorfo a operadores diferenciales de una variedad bandera X de $\mathfrak{g}$. Por lo tanto, localmente en X, $U_\chi(\mathfrak{g})$ es isomorfo a una álgebra de Weyl usual. Este principio de localización es una herramienta indispensable en el estudio de la teoría de representaciones de $\mathfrak{g}$.

Una álgebra de Weyl cuantizada juega un papel similar en la teoría de representaciones de un grupo cuántico. Backelin y Kremnizer, [BK], construyeron una variedad bandera cuantizado y un haz de operadores diferenciales cuantizados sobre estos. Las secciones globales de este haz son esencialmente el grupo cuántico de Lusztig, y localmente, estos operadores son descritos por ciertas álgebras de Weyl cuantizadas. Sin embargo, estas álgebras de Weyl sólo coinciden con nuestras álgebras de Weyl cuantizadas en el caso del grupo cuántico de $\mathfrak{sl}_2$. En general, ellas son más complicadas y sería interesante encontrar su locus de Azumaya.

b*) *Relación con la conjetura de Kontsevich y Belov Kanel sobre automorfismos de álgebras de Weyl y Poisson: (Ver [KBK] para detalles). Con el fin de encontrar un isomorfismo entre el grupo de automorfismos de una álgebra de Weyl n-ésima $A_n(\mathbb{C})$ y el grupo de automorfismos de una álgebra de Poisson $\mathbb{C}[\mathbb{C}^{2n}]$ (con la estructura obtenida al identificar $\mathbb{C}^{2n}$ con $\mathbb{C}^n \times T^*\mathbb{C}^{2n}$), Kontsevich y Belov Kanel propusieron usar reducción módulo p y las propiedades de Azumaya de $A_n(\mathbb{F}_p)$. Un automorfismo de $A_n(\mathbb{F}_p)$ inducirá un automorfismo de su centro $Z[A_n(\mathbb{F}_p)]$, el cual, es un anillo de polinomios en $2n$ variables que tiene una estructura de Poisson natural. Entonces, se deben usar ultra-productos y el Teorema de Lós de la teoría de modelos para regresar a la situación de característica cero. Con el fin de evitar esto, difícil de controlar, (ultra-productos y reducciones), se puede abordar la conjetura de Belov Kanel intentando transportar automorfismos de álgebras de Weyl $A_n(\mathbb{C})$ a automorfismos de álgebras de Weyl cuantizadas por una raíz de la unidad. Pero, la existencia de tales “transportaciones” parece ser un tema no trivial.

CAPÍTULO 8

Anexos

8.1. Introducción a la Teoría de Categorías

A continuación daremos algunos conceptos y resultados básicos de la Teoría de Categorías los cuales pueden ser encontrados y complementados en los textos [McL] y [W].

Definición 8.1. Una ***categoría*** $\mathcal{C}$ consiste de: una clase $\mathrm{obj}(\mathcal{C})$ de objetos, un conjunto $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, C')$ de morfismos para cada par ordenado (C, C') de objetos, un morfismo identidad $id_C \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, C)$ para cada objeto C y una función composición de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, C') \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C', C'')$ en $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, C'')$ para cada tripla ordenada (C, C', C'') de objetos. Debe cumplir dos axiomas: Axioma de Asociatividad: $(hg)f = h(gf)$ para $f : A \to B, g : B \to C, h : C \to D$, y Axioma de Unidad: $id_B \circ f = f \circ id_A$ para $f : A \to B$.

Definición 8.2. Un ***objeto inicial*** (respectivamente ***terminal***) (si existe) en una categoría $\mathcal{C}$ es un objeto I (resp. T) tal que para cada C en $\mathcal{C}$ existe exactamente un morfismo de I a C (resp. de C a T). Todos los objetos iniciales (resp. terminales) deben ser isomorfos. Por ejemplo, $\emptyset$ en $\mathcal{S}ets$ es inicial y todos los conjuntos de un elemento son objetos terminales.

Definición 8.3. Un ***objeto cero*** (si existe) en una categoría $\mathcal{C}$ es un objeto que es inicial y terminal. Por ejemplo $\mathcal{S}ets$ no tiene objeto cero, pero 0 es el objeto cero de la categoría de grupos abelianos $\mathcal{A}b$ y de la categoría de R-módulos a derecha $\mathcal{M}od$-R.

Definición 8.4. $m : B \to C$ es un ***morfismo mónico*** en una categoría $\mathcal{C}$ si para cualquiera dos morfismos paralelos $f_1, f_2 : A \to B$ la igualdad $mf_1 = mf_2$ implica que $f_1 = f_2$ (es decir, m es cancelable a la izquierda). En una categoría aditiva esto es equivalente a decir que $mf = 0$ implica que $f = 0$. Por ejemplo, en $\mathcal{S}ets$ y $\mathcal{A}b$ los morfismos mónicos son precisamente las inyecciones o monomorfismos.

Definición 8.5. $e : B \to C$ es un ***morfismo epi*** en una categoría $\mathcal{C}$ si para cualquiera dos morfismos paralelos $g_1, g_2 : C \to D$ la igualdad $g_1 e = g_2 e$ implica que $g_1 = g_2$ (es decir, e es cancelable a la derecha). En una categoría aditiva esto es equivalente a decir que $ge = 0$ implica que $g = 0$. Por ejemplo, en $\mathcal{S}ets$ y $\mathcal{A}b$ los morfismos epi son precisamente las sobreyecciones o epimorfismos.

Definición 8.6. El ***núcleo de un morfismo*** $f : B \to C$ en una categoría $\mathcal{C}$ que tiene objeto cero, es un morfismo $\kappa : A \to B$ tal que $f\kappa = 0$ y satisface la siguiente propiedad universal: cada morfismo $\iota : A' \to B$ en $\mathcal{C}$ tal que $f\iota = 0$ se factoriza a través de A como $\iota = \kappa\iota'$ para un único $\iota' : A' \to A$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, "\kappa"] \arrow[drr, "0"] & & \\
 & B \arrow[r, "f"] & C \\
A' \arrow[uu, dotted, "\exists!\,\iota'"] \arrow[ur, "\forall\,\iota"] \arrow[urr, "0"'] & &
\end{tikzcd}$$

Definición 8.7. El ***conúcleo de un morfismo*** $f : B \to C$ en una categoría $\mathcal{C}$ que tiene objeto cero, es un morfismo $\varsigma_\kappa : C \to D$ tal que $\varsigma_\kappa f = 0$ y satisface la siguiente propiedad universal: cada morfismo $\epsilon : C \to D'$ en $\mathcal{C}$ tal que $\epsilon f = 0$ se factoriza a través de D como $\epsilon = \epsilon'\varsigma_\kappa$ para un único $\epsilon' : D \to D'$

$$\begin{tikzcd}
 & & D \arrow[dd, dotted, "\exists!\,\epsilon'"] \\
B \arrow[r, "f"] \arrow[urr, "0"] \arrow[drr, "0"'] & C \arrow[ur, "\varsigma_\kappa"'] \arrow[dr, "\forall\,\epsilon"] & \\
 & & D'
\end{tikzcd}$$

Observación 8.8. Notemos que cada núcleo es mónico y cada conúcleo es epi. Además, en la categoría de $\mathcal{M}od$-R las nociones de núcleo, mónico y monomorfismo son la misma, al igual que conúcleo, epi y epimorfismo coinciden.

Definición 8.9. Cada categoría $\mathcal{C}$ tiene una ***categoría opuesta*** $\mathcal{C}^{op}$. Los objetos de $\mathcal{C}^{op}$ son los mismos objetos de $\mathcal{C}$, pero los morfismos y composiciones son reversados, esto es, hay una correspondencia uno a uno $f \mapsto f^{op}$ entre morfismos $f : B \to C$ en $\mathcal{C}$ y morfismos $f^{op} : C \to B$ en $\mathcal{C}^{op}$. Además, f es mónico si y sólo si f^{op} es epi, y, f es epi si y sólo si f^{op} es mónico. Similarmente, tomando opuestos intercambiamos núcleos y conúcleos, así como objetos inicial y terminal. Como esto es una dualidad, $\mathcal{C}^{op}$ es también llamada ***categoría dual*** de $\mathcal{C}$

Definición 8.10. Una ***subcategoría*** $\mathcal{B}$ de una categoría $\mathcal{C}$ es una colección de algunos objetos y algunos morfismos de $\mathcal{C}$, tal que los morfismos de $\mathcal{B}$ son cerrados bajo la composición e incluyen id_B para cada $B \in \text{obj}(\mathcal{B})$.

Definición 8.11. Una ***subcategoría plena*** es una subcategoría $\mathcal{B}$ de la categoría $\mathcal{C}$ tal que para cada par de objetos B y B' de $\mathcal{B}$, $\text{Hom}_{\mathcal{B}}(B, B') = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, B')$.

Definición 8.12. Una categoría $\mathcal{C}$ es una **Ab-*categoría*** si para cada par de objetos A, B de $\mathcal{C}$ el conjunto de morfismos $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ en $\mathcal{C}$ tiene estructura de grupo abeliano aditivo de tal forma que la composición se distribuye sobre la adición. En particular, dado un diagrama en $\mathcal{C}$ de la forma

$$A \xrightarrow{f} B \underset{g}{\overset{g'}{\longrightarrow}} C \xrightarrow{h} D$$

tenemos que $h(g + g')f = hgf + hg'f$ en $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, D)$.

Definición 8.13. Una ***categoría aditiva*** $\mathcal{C}$ es una **Ab**-categoría con objeto cero y un producto $A \times B$ para cada par ordenado (A, B) de objetos de $\mathcal{C}$.

Definición 8.14. Una categoría $\mathcal{A}$ es ***categoría abeliana*** si es una categoría aditiva, cada morfismo en $\mathcal{A}$ tiene un núcleo y un conúcleo, cada mónico en $\mathcal{A}$ es el núcleo de su conúcleo y cada epi en $\mathcal{A}$ es el conúcleo de su núcleo.

Proposición-Definición 8.15. *En una categoría abeliana $\mathcal{A}$ cada morfismo f tiene una factorización $f = me$, con m mónico y e epi. Más aún $m = \mathrm{ker}(\mathrm{coker}(f))$ y $e = \mathrm{coker}(\mathrm{ker}(f))$. Llamamos $m = \mathrm{im}(f)$ la **imagen de f** que es un subobjeto de su codominio B y $e = \mathrm{coim}(f)$ la **coimagen de f** que es un subobjeto de su dominio A. Más generalmente, si $f = m_1 t e_1$ con m_1 mónico, t un isomorfismo y e_1 epi, entonces $m_1 \equiv \mathrm{im}(f), e_2 \equiv \mathrm{coim}(f)$, como objetos, y t es el isomorfismo usual entre ellos.*

Demostración. Ver [McL, p. 195]. □

Observación 8.16. En la categoría $\mathcal{A}b$ dado un morfismo $f : A \to B$ tenemos que $\mathrm{ker}(f)$ es un subgrupo de A e $\mathrm{im}(f)$ es un subgrupo de B, entonces f se factoriza

$$A \xrightarrow[\text{epi}]{e_1} A/\mathrm{ker}(f) \xrightarrow{\sim} \mathrm{im}(f) \xrightarrow[\text{monic}]{m_1} B$$

donde e_1 es epi y m_1 es mónico. Note que $\mathrm{coker}(f) \equiv B/\mathrm{im}(f)$ y $\mathrm{coim}(f) \equiv A/\mathrm{ker}(f)$.

Definición 8.17. Sea $\mathcal{A}$ una categoría abeliana.

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

es ***exacta en B*** si $\mathrm{im}(f) \equiv \mathrm{ker}(g)$ (o equivalentemente cuando $\mathrm{coker}(f) \equiv \mathrm{coim}(g)$). Note que $\mathrm{im}(f) \leq \mathrm{ker}(g)$ si y sólo si $gf = 0$. Además,

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

es una ***sucesión corta exacta*** si es exacta en A, B y C. Como $0 \to A$ es el morfismo cero, exactitud en A significa que f es mónico, dualmente, exactitud en C significa que g es epi. En otras palabras, la anterior es una sucesión exacta corta si y sólo si $f = \mathrm{ker}(g)$ y $g = \mathrm{coker}(f)$ si y sólo si $\mathrm{im}(f) = \mathrm{ker}(g)$, g es epi y f es mónico.

Similarmente,

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{\varsigma\kappa} C \longrightarrow 0$$

es una ***sucesión corta exacta a derecha*** si $\varsigma_\kappa = \operatorname{coker}(f)$ o equivalentemente es exacta en B y C. Y

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\kappa} B \xrightarrow{g} C$$

es una ***sucesión corta exacta a izquierda*** si $\kappa = \ker(g)$ o equivalentemente es exacta en A y B.

Observación 8.18. En una categoría abeliana $\mathcal{A}$, la factorización $f = me$ de cualquier morfismo $f : A \to B$ determina tres secuencias exactas:

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \cdot \arrow[r, "\ker(f)"] & A \arrow[r, "\operatorname{coim}(f)"] \arrow[dr, "f"'] & \cdot \arrow[r] \arrow[d, "\operatorname{im}(f)"] & 0 \\
 & & & B \arrow[d, "\operatorname{coker}(f)"] & \\
 & & & \cdot \arrow[d] & \\
 & & & 0 &
\end{tikzcd}$$

Definición 8.19. Un ***funtor o funtor covariante*** es un morfismo de categorías. En detalle, para las categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ un funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, con dominio $\mathcal{C}$ y codominio $\mathcal{D}$ consiste de dos funciones relacionadas: la función objeto F la cual asigna a cada objeto C de $\mathcal{C}$ un objeto $F(C)$ de $\mathcal{D}$ y la función morfismo, también escrita F, la cual asigna a cada morfismo $f : C \to C'$ de $\mathcal{C}$ un morfismo $F(f) : F(C) \to F(C')$ de $\mathcal{D}$, de tal forma que $F(id_C) = id_{F(C)}$ y $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ para $f : C \to C', g : C' \to C''$ de $\mathcal{C}$

Definición 8.20. Un ***funtor contravariante*** $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es un funtor covariante de $\mathcal{C}^{op}$ a $\mathcal{D}$. Esto es, le asocia a cada objeto C de $\mathcal{C}$ un objeto $F(C)$ de $\mathcal{D}$, y a cada morfismo $f : C_1 \to C_2$ de $\mathcal{C}$ le asocia un morfismo $F(f) : F(C_2) \to F(C_1)$ en $\mathcal{D}$. Además, $F(id_C) = id_{F(C)}$ y F reversa composiciones: $F(fg) = F(f)F(g)$.

Definición 8.21. Un ***funtor fiel*** (o ***inclusión***) es un funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ tal que para todo par de objetos C, C' en $\mathcal{C}$ y todo par de morfismos paralelos $f_1, f_2 : C \to C'$ en $\mathcal{C}$, la igualdad $F(f_1) = F(f_2)$ implica que $f_1 = f_2$, es decir, para cada par de objetos C, C' de $\mathcal{C}$ la función $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(C, C') \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(C), F(C'))$ es inyectivo.

Definición 8.22. Un ***funtor pleno*** es un funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ tal que para todo par de objetos C, C' en $\mathcal{C}$ y dado $g \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(C), F(C'))$ existe $f \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(C, C')$ tal que $F(f) = g$, es decir, para cada par de objetos C, C' de $\mathcal{C}$ la función $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(C, C') \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(C), F(C'))$ es sobreyectivo.

Definición 8.23. Un ***funtor completamente fiel*** es un funtor que es pleno y fiel.

Definición 8.24. Un ***funtor aditivo*** F es un funtor entre **Ab**-categorías $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, tal que cada función $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, C') \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(C), F(C'))$ es un homomorfismo de grupos, para cada par de objetos C, C' de $\mathcal{C}$.

Definición 8.25. Un funtor entre categorías abelianas es un ***funtor exacto*** si y sólo si es un funtor aditivo y preserva secuencias exactas cortas si y sólo si es un funtor aditivo y preserva núcleos y conúcleos si y sólo si preserva límites (o límites inversos o límites proyectivos, particularmente productos) finitos y colímites (o límites directos o límites inductivos, particularmente coproductos o sumas directas) finitos.

Definición 8.26. Un funtor entre categorías abelianas es un ***funtor exacto a derecha*** (respectivamente ***a izquierda***) si y sólo si es un funtor aditivo y preserva secuencias exactas cortas a derecha (resp. a izquierda) si y sólo si es un funtor aditivo y preserva conúcleos (resp. núcleos) si y sólo si preserva colímites (resp. límites) finitos.

Proposición 8.27. *Sea $\mathcal{A}$ una categoría abeliana. Entonces* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, -) : \mathcal{A} \to \mathcal{A}b$ *es un funtor exacto a izquierda para cada M en $\mathcal{A}$.*

Demostración. Sea $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ una sucesión exacta en $\mathcal{A}$, veamos que la siguiente sucesión de grupos abelianos también es exacta

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, A) \xrightarrow{f_\star} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, B) \xrightarrow{g_\star} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, C)$$

Si $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}$ entonces $f_\star(\alpha) = f \circ \alpha$, si este es cero entonces α debe ser cero pues f es mónico y por lo tanto $f_\star$ también lo es. Como $g \circ f = 0$ tenemos que $g_\star f_\star(\alpha) = g \circ f \circ \alpha = 0$, luego $g_\star f_\star = 0$. Resta mostrar que si $\beta \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, B)$ es tal que $g_\star(\beta) = 0$, entonces existe $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, A)$ tal que $\beta = f_\star(\alpha)$. Pero, si $g\beta = 0$ entonces $\beta(M) \subseteq f(A)$, luego β se factoriza a través de A, es decir, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, dotted, "\exists\alpha"'] & B \arrow[d, "id_B"] \\ M \arrow[r, "\beta"] & B \end{tikzcd}$$

□

Corolario 8.28. $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-, M)$ *es un funtor contravariante exacto a izquierda, esto es, si $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta en la categoría $\mathcal{A}$, entonces la siguiente sucesión de grupos abelianos también es exacta*

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(C, M) \xrightarrow{g^\star} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(B, M) \xrightarrow{f^\star} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, M)$$

donde $f^\star(\gamma) = \gamma \circ f$.

Demostración. Notemos que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, M) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^{op}}(M, A)$. □

Definición 8.29. Una ***transformación natural*** $\eta : F \Rightarrow G$ entre dos funtores $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es una función la cual asigna a cada objeto C de $\mathcal{C}$ un morfismo $\eta_C : F(C) \to G(C)$ de $\mathcal{D}$, de tal forma que para cada morfismo $f : C \to C'$ en $\mathcal{C}$ el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} F(C) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\eta_C"'] & F(C') \arrow[d, "\eta_{C'}"] \\ G(C) \arrow[r, "G(f)"] & G(C') \end{tikzcd}$$

También se dice que $\eta_C : F(C) \to G(C)$ es ***natural*** en C. Además, si cada η_C es un isomorfismo, decimos que η es un ***isomorfismo natural*** y escribimos $\eta : F \cong G$.

Definición 8.30. Un funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es una ***equivalencia de categorías*** si existe un funtor $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ y existen isomorfismos naturales $id_{\mathcal{C}} \cong GF$ y $id_{\mathcal{D}} \cong FG$. Además, F y G se dicen ***equivalencias inversas*** o ***casi-inversas***.

Definición 8.31. Dos ***funtores L y R son adjuntos***, $L : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ y $R : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$, si existe para cada par de objetos A en $\mathcal{A}$ y B en $\mathcal{B}$ una biyección:

$$\tau := \tau_{AB} : \ \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(L(A), B) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, R(B))$$

la cual en “natural”en A y B en el sentido que para todo $f : A \to A'$ en $\mathcal{A}$ y $g : B \to B'$ en $\mathcal{B}$ el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(L(A'), B) \arrow[r, "(Lf)^\star"] \arrow[d, "\tau_{A'B}"', "\cong"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(L(A), B) \arrow[r, "g_\star"] \arrow[d, "\tau_{AB}"', "\cong"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(L(A), B') \arrow[d, "\tau_{AB'}"', "\cong"] \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A', R(B)) \arrow[r, "f^\star"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, R(B)) \arrow[r, "(Rg)_\star"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, R(B')) \end{tikzcd}$$

Esto es, τ es un isomorfismo natural entre los funtores $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(L, -)$ y $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-, R)$ desde la categoría $\mathcal{A}^{op} \times \mathcal{B}$ a la categoría $\mathcal{S}ets$. Decimos que L es el ***adjunto a izquierda*** de R, R es el ***adjunto a derecha*** de L y que (L, R) es un ***par de adjuntos***.

La siguiente proposición muestra que si R es un anillo y B es un R-módulo a izquierda, como para cada grupo abeliano C, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}b}(B, C)$ es un R-módulo a derecha (con la operación $(fr)(b) = f(rb)$), entonces, $- \otimes_R B : \mathcal{M}od\text{-}R \to \mathcal{A}b$ es adjunto a izquierda para $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}b}(B, -)$. Más generalmente, si S es otro anillo y B es un R-S-bimódulo, el funtor $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}S}(B, -) : \mathcal{M}od\text{-}S \to \mathcal{M}od\text{-}R$ es adjunto a derecha para $- \otimes_R B$.

Proposición 8.32. *Sean R y S anillos, B un R-S-bimódulo y C un S-módulo a derecha. Como, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}S}(B, C)$ es naturalmente un R-módulo a derecha con la acción $(fr)(b) = f(rb)$ para $f \in \mathrm{Hom}_S(B, C), r \in R, b \in B$, entonces, el funtor $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}S}$: $\mathcal{M}od\text{-}S \to \mathcal{M}od\text{-}R$ es adjunto a derecha para $\otimes_R B$, esto es, para cada R-módulo A y S-módulo C hay un isomorfismo natural*

$$\tau : \tau_{AC} : \ \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}S}(A \otimes_R B, C) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}R}(A, \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}S}(B, C))$$

Demostración. Dado $f : A \otimes_R B \to C$, definimos $\big(\tau_{AC}(f)\big)(a)$ como el morfismo $b \mapsto f(a \otimes b)$ para cada $a \in A$. Dado $g : A \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}od\text{-}S}(B, C)$, definimos $\tau_{AC}^{-1}(g)$ como el morfismo inducido por la forma bilineal $a \otimes b \mapsto \big(g(a)\big)(b)$. Es sencillo verificar que $\big(\tau_{AC}(f)\big)(a)$ es un morfismo de S-módulos, $\tau_{AC}(f)$ es un morfismo de R-módulos, $\tau_{AC}^{-1}(g)$ es un morfismo de S-módulos, τ_{AC} es un isomorfismo con inversa τ_{AC}^{-1} y que τ es transformación natural. □

Definición 8.33. *Inclusión de Yoneda*. Cada categoría aditiva $\mathcal{A}$ puede ser sumergida en la categoría abeliana $\mathcal{A}b^{\mathcal{A}^{op}}$ a través del funtor H que envía a A de $\mathcal{A}$ a $H(A) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-, A) : \mathcal{A}^{op} \to \mathcal{A}b$. Como cada $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, -)$ es exacto a izquierda, entonces H es funtor exacto a izquierda. Como los funtores $H(A)$ son exactos a izquierda, la inclusión de Yoneda H realmente llega a la subcategoría $\mathcal{L}$ de todos los funtores contravariantes exactos a izquierda de $\mathcal{A}$ a $\mathcal{A}b$ siempre que $\mathcal{A}$ sea una categoría abeliana.

Lema 8.34. *Lema de Yoneda*. *La inclusión de Yoneda H refleja exactitud. Esto es, si para todo M en $\mathcal{A}$ la sucesión*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, A) \xrightarrow{\alpha_\star} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, B) \xrightarrow{\beta_\star} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, C)$$

es exacta en $\mathcal{A}b$, entonces $A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$ *es exacta en $\mathcal{A}$.*

Demostración. Tomando $M = A$, vemos que $\beta\alpha = \beta_\star\alpha_\star(id_A) = 0$. Y tomando $M = \ker(\beta)$, vemos que la inclusión $\iota : \ker(\beta) \to B$ satisface $\beta_\star(\iota) = \beta\iota = 0$, luego existe $\sigma \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\ker(\beta), A)$ tal que $\iota = \alpha_\star(\sigma) = \alpha\sigma$, por lo tanto $\mathrm{im}(\alpha) \supseteq \alpha\sigma(\ker(\beta)) = \iota(\ker(\beta)) = \ker(\beta)$. □

Proposición 8.35. *Si $(L, R) : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ son un par de funtores aditivos adjuntos, entonces L es exacto a derecha y R es exacto a izquierda.*

Demostración. Sea $0 \to B' \to B \to B'' \to 0$ una sucesión exacta en $\mathcal{B}$. Por la naturaleza de la adjunción τ, para cada A en $\mathcal{A}$ el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(L(A), B') \arrow[r] \arrow[d, "\tau_{AB'}"', "\cong"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(L(A), B) \arrow[r] \arrow[d, "\tau_{AB}"', "\cong"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(L(A), B'') \arrow[d, "\tau_{AB''}"', "\cong"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, R(B')) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, R(B)) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, R(B''))
\end{tikzcd}$$

y como $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(LA, -)$ es exacto a izquierda, entonces

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, R(B')) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, R(B)) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, R(B''))$$

es exacta para todo A. Además, por el lema de Yoneda 8.34, $0 \to R(B') \to R(B) \to R(B'')$ es exacta. Esto muestra que cada adjunto a derecha R es exacto a izquierda. En particular, $L^{op} : \mathcal{A}^{op} \to \mathcal{B}^{op}$, el cual es adjunto a derecha, es exacto a izquierda, luego L es exacto a derecha. $\square$

Observación 8.36. Sea R un anillo y B un R-módulo a izquierda. Como, $- \otimes_R B : \mathcal{M}od\text{-}R \to \mathcal{A}b$ es adjunto a izquierda para $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}b}(B, -)$, por la proposición 8.32, entonces $- \otimes_R B$ es exacto a derecha.

BIBLIOGRAFÍA

[A] M. Artin. *On Azumaya Algebras and Finite Dimensional Representations of Rings*. Journal of Algebra 11 (1969).

[ACvE] K. Adjamagbo, J. Y. Charbonnel and A. van den Essen. *On ring homomorphisms of Azumaya algebras*. http://arxiv.org/abs/math/0509188v1.

[ACvE2] K. Adjamagbo and A. van den Essen. *A proof of the equivalence of the Dixmier, Jacobian and Poisson conjectures.*. Acta Math. Vietnam. 32 (2007), no. 2-3, 205–214.

[AG] M. Auslander and O. Goldman. *The Brauer group of a commutative ring.* Trans. Amer. Math. Soc. 97 (1960).

[AM] F. Atiyah and I. G. Macdonald. *Introduction to Commutative Algebra.* Addison-Wesley Publishing Compagny, 1969.

[BB] Beilinson-Bernstein. *Localization de g-modules.* C.R.Acad. Sc. Paris, 292 Série I (1981) 15-18.

[BK] E. Backelin and K. Kremnizer. *Localization of quantum groups at a root of unity.* J. Amer. Math. Soc, page 1-18 (June 2008).

[CP] V. J. Chari and A. Pressley. *A Guide to Quantum Groups.* Cambridge University Press. Cambridge, Englan, 1994.

[CR] C. W. Curtis and I. Reiner. *Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras.* Interscience. 1962.

[DeMI] F. DeMeyer and E. Ingraham. *Separable algebras over commutative rings.* Lecture Notes in Mathematics, Vol. 181, Springer-Verlag. Berlin-New York, 1971. iv+157 pp.

[HU] T. Hungerford. *Algebra*. Graduate Texts in Mathematics, 73. Springer-Verlag. New York-Berlin, 1980. xxiii+502 pp. ISBN: 0-387-90518-9 00A05 (15-01 16-01)

[KBK] Kontsevich and A. Belov Kanel. *Automorphisms of the Weyl algebra*. Lett. Math. Phys. 74, (2005), no 2 181-199.

[M] J. S. Milne. *Etale cohomology*. Princeton University Press. Princeton, New Jersey, 1980.

[Mat] H. Matsumura. *Commutative algebra*. Second edition. Mathematics Lecture Note Series, vol. 56, Benjamin/Cummings Publishing Co., Inc., Reading, Mass., 1980.

[McL] S. Mac Lane. *Categories for the working mathematician*. Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 5. Springer-Verlag. New York, 1998. xii+314 pp. ISBN: 0-387-98403-8 18-02.

[S] S. Schwede. *Morita theory in abelian, derived and stable model categories*. Structured ring spectra, 33–86, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 315, Cambridge University Press. Cambridge, England, 2004.

[W] C.A. Weibel. *An Introduction to Homological Algebra*. Cambridge University Press. Cambridge, England, 1994. ISBN: 0-521-55987-1.