Tipos genéricamente estables, bifurcación y thorn-bifurcación

Por: Darío Alejandro García Rico

Director: Alf Onshuus Niño

Universidad de Los Andes
Departamento de Matemáticas
Bogotá, Colombia
2009

Índice general

Introducción

El concepto de bifurcación - que fue definido originalmente por Saharon Shelah para su demostración del Teorema de Morley para teorías no contables - y la noción de independencia que se deriva de él, son las piezas fundamentales del desarrollo que ha tenido la Teoría de la Clasificación y la teoría de modelos geométrica.

La þ-independencia (léase thorn-independencia), que hizo su aparición en la tesis doctoral de mi director Alf Onshuus, es una noción de independencia que surge a partir de la þ-bifurcación la cual dota a una clase muy grande de teorías (conocidas como teorías rosy) de una noción de independencia geométrica con las mismas propiedades que genera la noción de independencia usual en teorías estables.

Los tipos genéricamente estables surgen como una generalización para teorías dependientes (ver definición 2.1) de los tipos completos en teorías estables, y de los tipos estables para teorías no estables, logrando extender además a los tipos conocidos como *establemente dominados* que fueron cruciales en el entendimiento de la estructura de los campos valuados algebraicamente cerrados (ver [7]).

Además, bifurcación se comporta bien en los tipos genéricamente estables. Por ejemplo, existe una única extensión global no bifurcante (estacionaridad) y se cumple transitividad para la relación de independencia usual.

Para los tipos en teorías estables, bifurcación y þ-bifurcación coindicen, y este fenómeno a los contextos inestables a través de la definición de *tipo estables*, que bifurcan sobre un conjunto A si y sólo si þ-bifurcan sobre A.

Es así como llegamos a la pregunta que motivó este trabajo: ¿Será que para los tipos genéricamente estables las nociones de bifurcación y þ-bifurcación coinciden?

Para responder esta pregunta, comenzaremos presentando en los primeros capítulos los conceptos principales para el desarrollo de nuestro trabajo, tales como bifurcación, þ-bifurcación, teorías dependientes y tipos genéricamente estables.

En el capítulo 3 introduciremos varios ejemplos de tipos genéricamente estables haciendo énfasis en las propiedades de bifurcación y þ-bifurcacion para ellos. En particular, tomando una generalización propia de la definición de tipos genéricamente estables al contexto de teorías independientes, mostramos un ejemplo de un tipo genéricamente estable que bifurca pero no þ-bifurca sobre $\emptyset$.

Finalmente, demostraremos en el capítulo 4 que para los tipos genéricamente estables en teorías rosy dependientes, las nociones de bifurcación y þ-bifurcación siempre coinciden.

Agradecimientos

En primer lugar, agradezco a Dios por permitirme realizar este trabajo, a la Universidad de los Andes por darme la oportunidad de realizar mis estudios de Maestría y al profesor Alf Onshuus por su dirección y apoyo en este trabajo.

Quisiera también extender mis agradecimientos a los profesores Alexander Berenstein y Andrés Villaveces, por permitirme exponer en varias oportunidades los avances parciales de mi trabajo, y por sus valiosos comentarios respecto del mismo.

Por último, agradezco a mi familia (y en especial a mi novia Alejandra) por toda la paciencia y comprensión que me brindaron durante todo este tiempo.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Notación

En este trabajo, T denotará una teoría completa en un lenguaje de primer orden $\mathcal{L}$. Como es costumbre, fijaremos un modelo suficientemente homogéneo y saturado $\mathfrak{C}$ (modelo monstruo) y supondremos que todos los elementos y subconjuntos de los que hablemos serán elementos y subconjuntos de $\mathfrak{C}$.

Análogamente, entenderemos por modelos de T a los submodelos elementales de $\mathfrak{C}$, y cualquier automorfismo será entendido como un automorfismo sobre $\mathfrak{C}$.

Además:

- Letras como $a, b, c, \ldots$ simbolizarán tuplas finitas en $\mathfrak{C}$.
- Las letra $A, B, C, \ldots$ simbolizarán subconjuntos de $\mathfrak{C}$.
- Letras griegas tales como $\varphi, \phi, \delta, \psi$ serán usadas para simbolizar fórmulas en el lenguaje $\mathcal{L}$.

Definición 1.1.

1. *Decimos que una sucesión* $\langle c_i : i < \lambda \rangle$ *es una* sucesión indiscernible sobre A *si para cada* $i_0 < i_1 < i_2 < \ldots < i_n < \lambda$ *se cumple que*

$$tp(c_0, c_1 \ldots c_n/A) = tp(c_{i_0} c_{i_1} \ldots c_{i_n}/A).$$

2. *Una sucesión* $\langle c_i : i < \lambda \rangle$ *se dice* conjunto indiscernible *si dados* $i_0, i_1, \ldots, i_n < \lambda$ *índices distintos entre sí,*

$$tp(c_0, c_1 \ldots c_n/A) = tp(c_{i_0} c_{i_1} \ldots c_{i_n}/A).$$

En la definición anterior, la diferencia entre sucesión indiscernible y conjunto indiscernible radica en que para una sucesión indiscernible el tipo depende únicamente del orden de los índices, mientras que para un conjunto indiscernible el tipo de una tupla *no depende del orden de los índices*.

El siguiente es un hecho cuya prueba puede encontrarse en [3], y que usaremos más adelante en este capítulo:

Hecho 1.2 (Teorema de Erdös - Rado)**.**
Dado un conjunto $A \subseteq \mathfrak{C}$ y una sucesión $\langle a_i : i < \beth_{(2^{|T|+|A|})^+} \rangle$ en $\mathfrak{C}$, existe una sucesión indiscernible $\langle c_i : i < \omega \rangle$ tal que, para cada $n < \omega$, existen $j_0 < j_1 < \ldots < j_n < \beth_{(2^{|T|+|A|})^+}$ con

$$c_0 c_1 \ldots c_n \equiv_A a_{j_0} a_{j_1} \ldots a_{j_n}$$

Imaginarios: Cuando nos referimos a elementos imaginarios estamos considerando la estructura original $\mathfrak{C}$ junto con nuevas suertes que representan clases de equivalencia de relaciones n-arias definibles sin parámetros, junto con funciones que asocian a cada n-tupla su clase de equivalencia.

Esta nueva estructura se nota por $\mathfrak{C}^{eq}$. Para más detalles, se puede consultar [5].

Definición 1.3. *Decimos que T* elimina imaginarios *si cada elemento imaginario es interdefinible con una tupla real, es decir para cada imaginario e existe una tupla real a tal que $dcl^{eq}(e) = dcl^{eq}(a)$.*

El siguiente es un criterio que facilita la demostración de que una teoría admite eliminación de imaginarios:

Hecho 1.4. *(Hecho 1.2 en [5]) Las siguientes son equivalentes:*

1. *T tiene eliminación de imaginarios.*
2. *Para cada relación definible R existe una tupla real a tal que, para todo $f \in Aut(\mathfrak{C})$, $f(a) = a$ si y sólo si $f(R) = R$.*
3. *Para cada fórmula (con parámetros) $\varphi(x)$ existe una fórmula $\psi(x, y) \in \mathcal{L}$ y una única tupla real a con la propiedad que $\varphi(\mathfrak{C}) = \psi(\mathfrak{C}, a)$.*

1.2. Teorías estables y teorías simples

A continuación daremos algunas definiciones sobre fórmulas que encontramos en [17] de las que obtenemos una clasificación importante para las teorías de primer orden.

Definición 1.5.

1. *Una fórmula $\varphi(x, y)$ tiene la* propiedad del orden *si existen sucesiones $\langle a_i : i < \omega \rangle$ y $\langle b_j : j < \omega \rangle$ tales que*
$$\mathfrak{C} \models \varphi(a_i, b_j) \text{ si y sólo si } i < j.$$
2. *Una fórmula $\varphi(x, y)$ tiene la* propiedad estricta del orden *si existe una sucesión $\langle a_i : i < \omega \rangle$ tal que para todo $i < \omega$, $\varphi(\mathfrak{C}, a_i) \subsetneq \varphi(\mathfrak{C}, a_{i+1})$.*

3. *Sea $k \geq 2$. Decimos que $\varphi(x, y)$ tiene la k-propiedad del árbol si existen elementos $\langle a_s : s \in \omega^{<\omega} \rangle$ tales que:*

   - *Para cada $f \in \omega^\omega$, $\{\varphi(x, a_{f \restriction n}) : n < \omega\}$ es consistente.*
   - *Para cada $s \in \omega^{<\omega}$, el conjunto $\{\varphi(x, a_{s\hat{}i}) : i < \omega\}$es k-inconsistente.*

4. *Una fórmula $\varphi(x, y)$ tiene la* propiedad del árbol *si tiene la k-propiedad del árbol para algún $k < \omega$.*

Definición 1.6.

1. *Una teoría T se dice* estable *si no existe una fórmula $\varphi(x, y) \in T$ con la propiedad del orden.*

2. *Una teoría T es* simple *si no existe una fórmula $\varphi(x, y) \in T$ con la propiedad del árbol.*

Algunos ejemplos de teorías estables son la teoría de Cuerpos Algebraicamente Cerrados (ACF por sus siglas en inglés) en el lenguaje $\mathcal{L} = \{+, \times, 0, 1\}$, y la teoría de Espacios Vectoriales sobre $\mathbb{Q}$.

Las teorías simples surgieron como una generalización de las teorías estables. De hecho, toda teoría estable es simple. El recíproco no es cierto, como lo muestra la teoría del Grafo Aleatorio (ver capítulo 3).

1.3. Bifurcación, þ-bifurcación y teorías rosy

En esta sección definiremos los conceptos principales de la Teoría de Clasificación de las teorías de primer orden. Las nociones de bifurcación y þ-bifurcación sobre todo son fundamentales para el desarrollo de nuestro trabajo. La mayor parte de las definiciones aparecen en el libro de Shelah [17], aunque en algunos casos tomamos definiciones alternativas que aparecen en [15].

Para þ-bifurcación y sus propiedades podemos remitirnos a [12].

Definición 1.7. *Sea $\varphi(x, b)$ una fórmula con parámetros y $A \subseteq \mathfrak{C}$ un conjunto.*

1. *Decimos que $\varphi(x, b)$* divide sobre *A si existe una sucesión $\langle b_i : i < \omega \rangle$ indiscernible sobre A tal que:*

   a. *$tp(b/A) = tp(b_i/A)$ para cada $i < \omega$.*
   b. *El conjunto $\Gamma = \{\varphi(x, b_i) : i < \omega\}$ es inconsistente.*

2. *Decimos que $\varphi(x, b)$* bifurca sobre *A si existen fórmulas $\psi_1(x, b_1), \ldots, \psi_n(x, b_n)$ tales que:*

   - *Para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, la fórmula $\psi_i(x, b_i)$ divide sobre A.*
   - $\mathfrak{C} \models \forall x \left(\varphi(x, b) \longrightarrow \bigvee_{i=1}^{n} \psi_i(x, b_i) \right)$

3. *Decimos que un tipo p* bifurca (divide) *sobre A si existe una fórmula $\varphi(x, b) \in p$ que bifurca (divide) sobre A.*

Comentario 1.8. *La definición original de división debida a Shelah (ver [17]) es la siguiente:*

Definición 1.9. *Decimos que una fórmula* $\varphi(x, b)$ divide sobre A *si existe* $k < \omega$ *y una sucesión* $\langle b_i : i < \omega\rangle$ *tales que:*

1. $tp(b/A) = tp(b_i/A)$ *para todo* $i < \omega$.

2. $\{\varphi(x, b_i) : i < \omega\}$ *es* k*-inconsistente.*

Sin embargo, ambas definiciones son equivalentes como veremos a continuación:

Proposición 1.10. *Una fórmula* $\varphi(x, b)$ *divide sobre* A *si y sólo si* $\varphi(x, b)$ *Shelah-divide sobre* A.

Demostración.

($\Rightarrow$) Supongamos que $\varphi(x, b)$ divide sobre A, entonce existe una sucesión indiscernible $\langle b_i : i < \omega\rangle$ tal que:

- $b_i \models tp(b/A)$ para todo $i < \omega$.
- $\{\varphi(x, b_i) : i < \omega\}$ es inconsistente.

Así, basta probar que $\{\varphi(x, b_i) : i < \omega\}$ es k-inconsistente para algún $k < \omega$.

Supongamos que no, entonces para cada $k < \omega$ existen $i_1 < \ldots < i_k < \omega$ tales que

$$\mathfrak{C} \models \exists x(\varphi(x, b_{i_1}) \wedge \cdots \wedge \varphi(x, b_{i_k}))$$

y por indiscernibilidad, tenemos que

$$\mathfrak{C} \models \exists x(\varphi(x, b_1) \wedge \cdots \wedge \varphi(x, b_k)).$$

De esta manera, por compacidad, es fácil ver que existe $c \in \mathfrak{C}$ tal que $T \cup \{\varphi(c, b_i) : i < \omega\}$ es consistente, contradiciendo que $\{\varphi(x, b_i) : i < \omega\}$ es inconsistente.

Por lo tanto, $\{\varphi(x, b_i) : i < \omega\}$ debe ser k-inconsistente para algún $k < \omega$, y se sigue que $\varphi(x, b)$ Shelah-divide sobre A.

($\Leftarrow$) Supongamos ahora que $\varphi(x, b)$ Shelah-divide sobre A, así, existe una sucesión $\langle b_i : i < \omega\rangle$ tal que

- $tp(b/A) = tp(b_i/A)$.
- $\{\varphi(x, b_i) : i < \omega\}$ es k-inconsistente para algún $k < \omega$.

Por compacidad, podemos extender dicha sucesión a una sucesión $\langle b_i : i < \beth_{(2^{|T|+|A|})^+}\rangle$ con las propiedades anteriores.

Por el teorema de Erdös-Rado, existe una sucesión *indiscernible* $\langle b'_i : i < \omega \rangle$ tal que para cada n, existen $i_0 < i_1 < \cdots < i_n < \beth_{(2^{|T|+|A|})^+}$ tales que

$$b'_0 b'_1 \cdots b'_n \equiv_A b_{i_0} b_{i_1} \cdots b_{i_n}$$

y tenemos:

- $b'_i \models tp(b/A)$ para cada $i < \omega$.
- $\{\varphi(x, b'_i) : i < \omega\}$ es inconsistente (pues resulta k-inconsistente.)

Se concluye entonces que $\varphi(x, b)$ divide sobre A.

□

Una de las razones más importantes para definir bifurcación a partir de división surge del problema de la extensión: no es cierto que un tipo divida sobre un conjunto A si y sólo si existe un conjunto $C \supseteq A$ para el cual todas las extensiones a C dividen, sin embargo, sí es cierto que un tipo bifurca sobre A si todas las extensiones a cierto conjunto $C \supseteq A$ dividen.

Otro punto importante es que al considerar medidas de Keisler en teorías dependientes, bifurcación coincide de cierta manera con "tener medida cero". De hecho, una fórmula bifurca sobre un modelo $\mathcal{M}$ si y solo si para toda μ medida de Keisler $\mathcal{M}$-invariante, $\mu(\phi(\mathfrak{C})) = 0$ (ver [9]).

Definimos el concepto de extensión no-bifurcante para hablar de algunas propiedades que posee la bifurcación en cualquier teoría de primer orden.

Definición 1.11.

1. *Sea $p \in S(A)$ un tipo. Decimos que q es una* extensión no bifurcante de p *si se cumplen:*

   - *$p \subseteq q$ como conjuntos de fórmulas.*
   - *q no-bifurca sobre A.*

   Además, si además $q \in S(B)$, decimos que es extensión no bifurcante de p a B.

2. *Una* cadena no bifurcante de tipos *es una sucesión de tipos $p_0 \subseteq p_1 \subseteq \cdots \subseteq p_n$ tales que p_{i+1} es extensión no-bifurcante de p_i, para $i = 0, \ldots, n-1$.*

Observación 1.12. *Sea $A \subseteq B$. Si p no bifurca sobre A entonces p no bifurca sobre B.*

Proposición 1.13. *Sea p un tipo parcial sobre B que no bifurca sobre $A \subseteq B$. Entonces existe $q \in S(B)$ extensión de p que no bifurca sobre A.*

Demostración. Sea $\Gamma(x) := \{\varphi(x) : \varphi(x) \in \mathcal{L}_B(x)$ *y* $\neg\varphi(x)$ bifurca sobre $A\}$. Veamos que $p(x) \cup \Gamma(x)$ es consistente: Si fuera inconsistente, por compacidad, existirían fórmulas $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x) \in \Gamma(x)$

tales que $p(x) \models \bigvee_{i=1}^{n} \neg\varphi_i(x)$, lo que implica (por la construcción de $\Gamma(x)$) que $p(x)$ deduce una disyunción finita de fórmulas que bifurcan sobre A, contradiciendo hecho de que p no bifurca sobre A.

Ahora, sea $q(x)$ cualquier completación de $p(x) \cup \Gamma(x)$ a un tipo completo sobre B. Claramente $q(x)$ no bifurca sobre A, pues contiene todas las negaciones de fórmulas que bifurcan sobre A.

□

Definición 1.14. *Dados $a \in \mathfrak{C}$, $B, C \subseteq \mathfrak{C}$, decimos que a* es independiente de B sobre A *si $tp(a/B)$ no bifurca sobre A; y lo notamos por $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A B$.*

De manera análoga a las definiciones de bifurcación e independencia, encontramos el concepto de þ-bifurcación y þ-independencia.

Las definiciones que daremos a continuación aparecieron por primera vez en la tesis de A. Onshuus, y son fundamentales para el trabajo que desarrollaremos en esta tesis.

Definición 1.15. *Sea $\varphi(x, b)$ una fórmula.*

1. *Decimos que $\varphi(x, b)$* divide fuertemente sobre A *si se cumple:*
   a. *$tp(b/A)$ es no algebraico.*
   b. *El conjunto $\{\varphi(x, b') : b' \models tp(b/A)\}$ es k-inconsistente para algún $k < \omega$.*
2. *Decimos que $\varphi(x, b)$* þ-divide sobre A *si existe una tupla finita $\bar{c} \in \mathfrak{C}^{eq}$ tal que $\varphi(x, b)$ divide fuertemente sobre $A\bar{c}$.*
3. *Decimos que $\varphi(x, b)$* þ-bifurca sobre A *si existen fórmulas $\psi_1(x, b_1), \ldots, \psi_n(x, b_n)$ tales que:*
   a. *Para cada i, la fórmula $\psi_i(x, b_i)$ þ-divide sobre A.*
   b. $\mathfrak{C} \models \forall x \left(\varphi(x, b) \longrightarrow \bigvee_{i=1}^{n} \psi_i(x, b_i) \right)$
4. *Un tipo p* þ-bifurca sobre A *si existe una fórmula $\varphi(x, b) \in p$ que þ-bifurca sobre A.*

Lema 1.16. *Sea $\varphi(x, b)$ una fórmula y A un conjunto. Si $\varphi(x, b)$ þ-divide sobre A entonces $\varphi(x, b)$ divide sobre A.*

Demostración. Dado que $\varphi(x, b)$ þ-divide sobre A, existe una tupla finita $\bar{c} \in \mathfrak{C}^{eq}$ tal que

(i) $tp(b/A\bar{c})$ es no-algebraico,

(ii) $\{\varphi(x, b') : b' \models tp(b/A\bar{c})\}$ es k-inconsitente para algún $k < \omega$.

Dado que $tp(b/A\bar{c})$ es no-algebraico, existe una sucesión de elementos $\langle b_i : i < \omega \rangle$ tales que:

- $tp(b/A\bar{c}) = tp(b_i/A\bar{c})$, y en particular, $tp(b/A) = tp(b_i/A)$ para todo $i < \omega$.

- $\{\varphi(x, b_i) : i < \omega\}$ es k-inconsistente para algún $k < \omega$.

De esta manera, la fórmula $\varphi(x, b)$ divide sobre A (según la definición original de Shelah). $\square$

Corolario 1.17.

1. *Si una fórmula $\varphi(x, b)$ þ-bifurca sobre A entonces $\varphi(x, b)$ bifurca sobre A.*
2. *Si un tipo p þ-bifurca sobre A entonces p bifurca sobre A.*

Demostración.

1. Como $\varphi(x, b)$ þ-bifurca sobre A, existen fórmulas $\psi_1(x, b_1), \ldots, \psi_n(x, b_n)$ que þ-dividen sobre A, para las cuales
$$\mathfrak{C} \models \forall x \left(\varphi(x, b) \longrightarrow \bigvee_{i=1}^{n} \psi_i(x, b_i) \right).$$
Ahora, por el lema, cada fórmula $\psi_i(x, b_i)$ divide sobre A, y se sigue que $\varphi(x, b)$ bifurca sobre A.
2. Si en p existe una fórmula que þ-bifurca sobre A, por (1), dicha fórmula bifurca sobre A, y se sigue que p bifurca sobre A.

$\square$

Definición 1.18. *Decimos que una tupla $\overline{a}$ es þ-independiente de B sobre un conjunto A si $tp(\overline{a}/B)$ no þ-bifurca sobre A. Esto lo notamos por $\overline{a} \downarrow^{þ}_{A} B$.*

En general, no bifurcacion es más fuerte que no þ-bifurcación. De hecho, acabamos de ver en el corolario 1.17 que si $a \downarrow_A B$ entonces $a \downarrow^{þ}_{A} B$, por lo que con þ-bifurcación no aparecen nuevos conjuntos independientes.

Por otra parte, þ-bifurcacion sí es sensible al uso de imaginarios (p.e., si $H \trianglelefteq G$ y $[G : H] = \infty$, es claro que $x \in H$ þ-bifurca si podemos hablar de G/H!!), y permite definir una noción de dimensión en más modelos que los que permitía el concepto de bifurcación. Cabe destacar, por ejemplo, que en teorías $\mathcal{O}$-minimales, la dimensión definida gracias a la þ-bifurcación ($U^{þ}$-rango) es la misma que la dimensión (topológica) usual (ver en [12], sección $5{,}2$).

Análogo al D-rango usado por Shelah en teorías simples (ver [11]), Onshuus definió en [12] unos rangos sobre tipos (conocidos como þ-rangos) que permitían de alguna manera codificar los fenómenos de þ-bifurcación.

Con esto, surgió una nueva clase de teorías (conocidas como *Teorías Rosy*) en las que los þ-rangos tomaban valores finitos. Dicha clase resultó ser una generalización de las teorías simples y las teorías $\mathcal{O}$-minimales.

Tal y como pasó en las teorías simples con la relación de independencia dada por la bifurcación, en teorías rosy la þ-independencia resulta ser una relación de independencia según la definición dada en [2], y algunas propiedades son las siguientes:

Hecho 1.19. *(Propiedades de þ-independencia en teorías rosy)*
Las siguientes son algunas propiedades de la þ-independencia en teorías rosy.

1. Monotonicidad: *Si p y q son tipos con $p \supseteq q$ y p no þ-bifurca sobre A, entonces q no þ-bifurca sobre A.*

2. Simetría: $B \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}\,^{þ}_{A} C$ *implica que* $C \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}\,^{þ}_{A} B$

3. Transitividad: *Si $A \subseteq B \subseteq C$ entonces $b \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}\,^{þ}_{A} C$ si y sólo si $b \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}\,^{þ}_{A} B$ y $b \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}\,^{þ}_{B} C$.*

4. *Sea $A \subseteq B$. Si $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}\,^{þ}_{A} B$ entonces $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}\,^{þ}_{A} acl(B)$.*

En teorías estables (y en simples con la propiedad de bifurcación estable), bifurcación coincide con þ-bifurcación. Onshuus y Hasson probaron en [8] que para los denominados *tipos estables* los conceptos de bifurcación y þ-bifurcación son los mismos.
De hecho, en [12] se prueba el siguiente resultado, un poco más general:

Hecho 1.20. *Si $\varphi(x, y)$ tiene NOP y existe una φ-fórmula en un tipo p que bifurca sobre A, entonces existe una φ-fórmula en p que þ-bifurca sobre A*

Capítulo 2

Teorías dependientes y tipos genéricamente estables

Las teorías dependientes (también conocidas como teorías sin la propiedad de independencia ó teorías NIP), definidas por Shelah, son una clase de teorías de primer orden que generalizan a las teorías estables, y que permiten incluír muchas de las estructuras clásicas que no eran estables, ni simples.

Algunos ejemplos de estas teorías son: la teoría de órdenes densos sin extremos $Th(\mathbb{Q}, <)$, las teorías $\mathcal{O}$-minimales (y cualquier teoría interpretable en una teoría $\mathcal{O}$-minimal), los números p-ádicos y los campos valuados algebraicamente cerrados (ACVF's por sus siglas en inglés.)

Como veremos más adelante en este capítulo (Teorema 2.6), las teorías dependientes son una generalización "ortogonal" a la dada por las teorías simples. De hecho, una teoría dependiente que a su vez sea simple debe ser una teoría estable.

Definición 2.1.

1. *Decimos que una fórmula $\varphi(x, y)$ tiene la* propiedad de independencia *(IP) si para cada $n < \omega$ se cumple que*

$$\mathfrak{C} \models \exists x_0 \cdots \exists x_i \cdots \exists x_n \exists y_\emptyset \cdots \exists y_J \cdots \exists y_{\wp(n+1)} \left(\bigwedge_{i \in J} \varphi(x_i, y_J) \wedge \bigwedge_{i \notin J} \neg\varphi(x_i, y_J) \right)$$

2. *Una teoría T se dice* dependiente *si no existe ninguna fórmula $\varphi(x, y)$ en T que tenga la propiedad de independencia.*

El siguiente es un hecho clásico cuya prueba podemos encontrar en [1].

Hecho 2.2. *Una teoría es T es dependiente si y sólo si para toda sucesión indiscernible $I = \langle \overline{a_i} : i < \lambda \rangle$,* *una fórmula $\varphi(\overline{x}, \overline{y})$ y una tupla $\overline{b} \in \mathfrak{C}$, uno de los conjuntos*

$$\{i < \lambda :\models \varphi(\overline{a_i}, \overline{b})\}$$

ó

$$\{i < \lambda :\models \neg\varphi(\overline{a_i}, \overline{b})\}$$

es acotado.

Definición 2.3. *Definimos $alt(\varphi(x, y))$ como el máximo número n tal que existe una sucesión indiscernible $\langle b_i : i < \omega \rangle$ con*

$$\mathfrak{C} \models \exists x \left(\bigwedge_{i=0}^{n} (\neg)^i \varphi(x, b_i) \right) \vee \exists x \left(\bigwedge_{i=0}^{n} (\neg)^{i+1} \varphi(x, b_i) \right)$$

Comentario 2.4. *Por el hecho 2.2, tenemos que una teoría T es dependiente si y sólo si para toda fórmula $\varphi(x, y)$ en T, $alt(\varphi) < \infty$.*

2.1. Teorías dependientes y estabilidad

El objetivo de esta sección es mostrar la interacción entre teorías estables, teorías simples y teorías dependientes, y ver que simplicidad y dependencia son dos generalizaciones en cierto sentido "ortogonales" de las teorías estables.

Para lograr esto, necesitamos ver primero el siguiente lema, que aparece en [17] y cuya demostración aparece en [14] (Lema 4.1).

Lema 2.5. *Una fórmula $\varphi(\overline{x}, \overline{y})$ tiene la propiedad del orden si y sólo si $\varphi(\overline{x}, \overline{y})$ tiene la propiedad de independencia ó existe una fórmula (con parámetros) $\chi(\overline{y})$ tal que $\varphi(\overline{x}, \overline{y}) \wedge \chi(\overline{y})$ tiene la propiedad estricta del orden.*

Teorema 2.6. *Sea T una teoría dependiente. Las siguientes son equivalentes:*

1. *T no tiene la propiedad estricta del orden*
2. *T es una teoría estable.*
3. *T es una teoría simple.*

Demostración.

- Es conocido que toda teoría estable es una teoría simple, así, tenemos $(2) \Rightarrow (3)$.
- $(1) \Rightarrow (2)$:
  Si T no es estable, existe una fórmula $\varphi(x, y)$ con la propiedad del orden. Por el lema anterior, existiría en T una fórmula con la propiedad estricta del orden, lo que contradice (1).

- (3) $\Rightarrow$ (1):
Supongamos que T tiene la propiedad estricta del orden, entonces existe una fórmula $\varphi(x, y)$ y una sucesión indiscernible $\langle a_i' : i < \omega \rangle$ tal que $\varphi(\mathfrak{C}, a_i') \subsetneq \varphi(\mathfrak{C}, a_{i+1}')$.

Usando compacidad, es fácil ver que podemos considerar una sucesión $I = \langle a_i : i \in \mathbb{Q} \rangle$ tal que $\varphi(\mathfrak{C}, a_i) \subsetneq \varphi(\mathfrak{C}, a_j)$ siempre que $i < j$.

Afirmación: La fórmula $\psi(x, y_1 y_2) := \neg\varphi(x, y_1) \wedge \varphi(x, y_2)$ tiene la 2-propiedad del árbol.

En primer lugar, construímos números $\langle p_s, q_s \in \mathbb{Q} : s \in \omega^{<\omega} \rangle$ por inducción sobre la longitud de s:

- Si $long(s) = 0$, entonces $s = \emptyset$ y tomamos $p_s = 0, q_s = 1$.
- Supongamos que p_s, q_s ya están construídos. Considere la sucesión dada por

$$h_n := q_s - \frac{q_s - p_s}{n+1}.$$

Es claro que $\{h_n\}_{n \geq 1}$ es una sucesión en $\mathbb{Q}$, con $p_s < h_n < h_{n+1} < q_s$ para todo $n \geq 1$. Definamos entonces $p_{s\hat{}i} := h_{2i+1}$ y $q_{s\hat{}i} := h_{2i}$.

De la elección de los elementos p_s, q_s es claro que se cumple

$$p_s < p_{s\hat{}i} < q_{s\hat{}i} < p_{s\hat{}i+1} < q_{s\hat{}i+1} < q_s$$

para todo $s \in \omega^{<\omega}$ y $i < \omega$.

Ahora, definamos $b_s = b_s^1 b_s^2 := a_{p_s} a_{q_s}$.

1. *Para cada $f \in \omega^{<\omega}$, $\{\psi(x, b_{f\restriction n}) : n < \omega\}$ es consistente:*
Por compacidad, basta ver que $\{\psi(x, b_{f\restriction n}) : n \leq k\} = \{\neg\varphi(x, a_{p_{f\restriction n}} a_{q_{f\restriction n}}) : n \leq k\}$ es consistente para cada $k < \omega$. Sea $s = f \restriction k$.

   Como $p_\emptyset < p_{s\restriction n} < p_s < q_s < q_{s\restriction n} < q_\emptyset$ para cada $0 < n < k$, tomando $c = a_{p_{s\hat{}1}} = a_{\frac{p_s+q_s}{2}}$, tenemos que
   $$c \models \bigwedge_{n \leq k} \neg\varphi(x, a_{p_{s\restriction n}}) \wedge \bigwedge_{n \leq k} \varphi(x, a_{q_{s\restriction n}}),$$
   tal y como queríamos.
2. *Para cada $s \in \omega^{<\omega}$, $\{\psi(x, b_{s\hat{}i}) : i < \omega\}$ es 2-inconsistente:*
Para esto, note que si $i < j$, $p_{s\hat{}i} < q_{s\hat{}i} < p_{s\hat{}j} < q_{s\hat{}j}$. Así, dado que $q_{s\hat{}i} < p_{s\hat{}j}$ se tiene que $\varphi(\mathfrak{C}, a_{q_{s\hat{}i}}) \subsetneq \varphi(\mathfrak{C}, a_{p_{s\hat{}j}})$ y la fórmula

$$\psi(x, b_{s\hat{}i}) := \neg\varphi(x, a_{p_{s\hat{}i}}) \wedge \varphi(x, a_{q_{s\hat{}i}}) \wedge \neg\varphi(x, a_{p_{s\hat{}j}}) \wedge \varphi(x, a_{q_{s\hat{}j}})$$

es inconsistente (por la segunda y tercera fórmula).

De esta forma, como la fórmula $\psi(x, y_1 y_2)$ tiene la 2-propiedad del árbol, se sigue que T no es simple.

$\square$

2.2. Tipos promedio

Definición 2.7. *Sea $I = \langle a_i : i < \lambda\rangle$ una sucesión indiscernible, B un conjunto. Definimos el* tipo promedio de I sobre B *como el conjunto*

$$Av(I, B) := \{\varphi(x, b) : \{i < \lambda :\models \neg\varphi(a_i, b)\} \text{ es acotado en } \lambda, b \in B\}$$

Comentario 2.8.

- *$Av(I, B) \in S(B)$ (ver Hecho 2.2).*
- *Si I es un conjunto indiscernible, entonces $\varphi(x, b) \in Av(I, B)$ si y sólo si $\{i < \lambda :\models \neg\varphi(a_i, b)\}$ es finito.*
- *Más aún, existe un número natural $k = k_\varphi$ tal que $\varphi(x, b) \in Av(I, B)$ si y sólo si*

$$|\{i < \omega :\models \varphi(a_i, b)\}| \geq k_\varphi$$

.

Hecho 2.9. *Sea I un conjunto indiscernible.*

1. *Una fórmula $\varphi(x, a_{<j}) \in Av(I, \cup I)$ si y sólo si $\mathfrak{C} \models \varphi(a_i, a_{<j})$ para todo $i \geq j$.*
2. *$a \models Av(I, \cup I)$ si y sólo si $I^\frown\{a\}$ es indiscernible.*

Definición 2.10.

1. *Un tipo $p \in S(B)$* no rompe sobre *A si dados $b, c \in B$ con el mismo tipo sobre A, $\varphi(x, b) \in p$ si y sólo si $\varphi(x, c) \in p$.*
2. *Un tipo $p \in S(B)$* no rompe fuertemente sobre *A si dados $b_0, b_1 \in B$ tuplas que comienzan una sucesión indiscernible sobre A, $\varphi(x, b_0) \in p$ si y sólo si $\varphi(x, b_1) \in p$.*

Proposición 2.11. *(Observación 5.4 en [19]) En una teoría dependiente T, si un tipo p rompe fuertemente sobre A entonces p divide sobre A.*

Demostración. Sea $p \in S(B)$ un tipo que rompe fuertemente sobre A, entonces, existe una sucesión indiscernible $I = \langle b_i : i < \omega\rangle$ tal que $\varphi(x, b_0), \neg\varphi(x, b_1) \in p$.
Sea $\psi(x, b_0 b_1) := \varphi(x, b_0) \wedge \neg\varphi(x, b_1) \in p$ y considere la sucesión $I' = \langle b_{2i} b_{2i+1}\rangle$.

- I' es una sucesión indiscernible sobre A.
- $tp(b_0 b_1/A) = tp(b_{2i} b_{2i+1}/A)$ para todo $i < \omega$.
- $\{\psi(x, b_{2i} b_{2i+1}) : i < \omega\}$ es inconsistente, pues de lo contrario $alt(\varphi) = \infty$, contradiciendo dependencia.

De esta manera, p es un tipo que divide sobre A. □

Definición 2.12. *Sea $\mathcal{O}$ un orden lineal, y A un conjunto. La sucesión $I = \langle a_i : i \in \mathcal{O}\rangle$ es una* sucesión no bifurcante sobre A *si I es una sucesión indiscernible y $tp(a_i/Aa_{<i})$ no bifurca sobre A, para todo $i \in \mathcal{O}$.*

Observación 2.13. *Sea $I = \langle c_i : i < \omega\rangle$ una sucesión de realizaciones de $p \in S(B)$ no bifurcante sobre A. Entonces $Av(I, B \cup I)$ es una extensión no bifurcante de p.*

Demostración. Sea $\varphi(x, d) \in Av(I, B \cup I)$. Por definición de tipo promedio, $\varphi(x, d) \in tp(c_k/Bc_{<k})$ para casi todo $k < \omega$. Como I es una sucesión no bifurcante, $\varphi(x, d)$ no bifurca sobre B. □

Hecho 2.14. *Sea $I = \langle c_i : i < \omega\rangle$ una sucesión no bifurcante sobre B que también es un conjunto indiscernible. Entonces la única extensión global (i.e. sobre $\mathfrak{C}$) no bifurcante de $Av(I, A \cup I)$ es $Av(I, \mathfrak{C})$*

Definición 2.15. *Un tipo $p \in S(A)$ se dice* estacionario *si tiene una única extensión no bifurcante sobre cualquier $B \supseteq A$.*

2.3. Tipos genéricamente estables

Los tipos *genéricamente estables* fueron estudiados por Shelah en [18] y por Usvyatsov en [20]. Estos tipos surgen como una generalización natural de los *tipos estables* (ver [8]), poseen muchas de las propiedades que hace importantes a los tipos completos en teorías estables (p.e. estacionaridad) y a los tipos establemente dominados(que fueron cruciales para el estudio de los ACVF's realizado por Haskell, Hrushovski y Macpherson, ver en [7]).

En esta sección, asumiremos T es una teoría dependiente.

Definición 2.16. *Sea $p \in S(B)$ un tipo completo. Decimos que p es* genéricamente estable *si existe una sucesión indiscernible $\langle c_i : i < \omega\rangle$ tal que*

1. *$c_i \models p$ para todo $i < \omega$.*
2. *$tp(c_i/Bc_{<i})$ no bifurca sobre B.*
3. *$\{c_i : i < \omega\}$ es un conjunto indiscernible sobre B.*

Esto es, un tipo es genéricamente estable si existe una sucesión no bifurcante (o sucesión de Morley) de realizaciones de p que es un conjunto indiscernible.

Lema 2.17. *Sea $I = \langle c_i : i < \omega \rangle$ un conjunto indiscernible sobre B, $C \supseteq B$. Entonces $p = Av(I, C)$ es definible sobre $\cup I$.*

Demostración. Dada una fórmula $\varphi(x, y)$, tome $k = k_\varphi$ como en el comentario 2.8. De esta manera, para cada $d \in C$,

$$\varphi(x, d) \in Av(I, C) \text{ si y sólo si } |\{i < \omega :\models \varphi(c_i, d)\}| \geq k,$$

y usando un reordenamiento de los índices vemos que esto se cumple si y sólo si

$$|\{i < 2k :\models \varphi(c_i, d)\}| \geq k \Leftrightarrow \bigvee_{u \subseteq 2k, |u|=k} \bigwedge_{i \in u} \varphi(c_i, d).$$

De esta manera, p es definible sobre $\cup I$ usando el esquema de definición

$$d_p x \varphi(x, y) = \bigvee_{u \subseteq 2k, |u|=k} \bigwedge_{i \in u} \varphi(c_i, y).$$

□

Comentario 2.18. *En [20], Usvyatsov prueba que p es definible sobre la clausura algebraica de B.*

Hecho 2.19. *Sea $p \in S(B)$ un tipo genéricamente estable y supongamos que $B = acl(B)$. Entonces p es estacionario.*

Corolario 2.20. *Una extensión no bifurcante de un tipo genéricamente estable es genéricamente estable.*

Demostración. Sea $p \in S(B)$ genéricamente estable, y sea $I = \langle c_i : i < \omega \rangle$ una sucesión de Morley en p.
Claramente, cada extensión de p a $acl(B)$ es genéricamente estable. Así, por estacionaridad, si q es una extensión no bifurcante de p a $C \supseteq B$, $q = Av(I, C)$, que claramente es genéricamente estable pues $\langle c_i : i < \omega \rangle$ es una sucesión de Morley en q que es un conjunto indiscernible.

□

Hecho 2.21. *[Resultado de Kim, Teorema 2.4.7 en [22]]*
Si en una teoría T se cumple la transitividad de la bifurcación entonces T es simple.

Corolario 2.22. (Transitividad de bifurcación para tipos genéricamente estables)

Sea $p \in S(C)$, $A \subseteq B \subseteq C$ tales que uno de los tipos $p, p\restriction_B, p\restriction_A$ es genéricamente estable, p no bifurca sobre B y $p\restriction_B$ no bifurca sobre A.
Entonces los tres tipos son genéricamente estables y p no bifurca sobre A.

Demostración. Claramente, restricción de un tipo genéricamente estable es genéricamente estable, además, por el corolario 2.20, toda extensión no bifurcante de un tipo genéricamente estable es genéricamente estable. Esto prueba que los tres tipos son genéricamente estables.

Sea q una extensión no bifurcante de $p \restriction_A$ a C. Por estacionaridad, como $q \restriction_B$ es una extension no bifurcante de $p \restriction_A$, $q \restriction_B = p \restriction_B$. Además, como vimos en el comentario 1.12, debe tenerse que q no bifurca sobre B.

Así, como q es una extensión no bifurcante de $q \restriction_B = p \restriction_B$, tenemos por estacionaridad que $p = q$, concluyendo así que p no bifurca sobre A.

□

Comentario 2.23. *Por el teorema 2.6 y el hecho 2.21, no se cumple transitividad para todos los tipos en una teoría dependiente.*

A continuación daremos algunas propiedades equivalentes a ser genéricamente estable, y algunas propiedades que poseen los tipos genéricamente estables con respecto a la relación de independencia definida por la bifurcación.

Proposición 2.24. *Sea $p \in S(A)$. Las siguiente son equivalentes:*

1. *p es genéricamente estable, esto es, existe una sucesión en p no bifurcante sobre A que es un conjunto indiscernible.*

2. *Cada sucesión en p no bifurcante en A es un conjunto indiscernible.*

3. *Existe un conjunto A-indiscernible I en p tal que $Av(I, \mathfrak{C})$ no bifurca sobre A.*

4. *Existe un conjunto A-indiscernible I en p tal que $Av(I, \mathfrak{C})$ no-rompe sobre A.*

Ejemplo 2.25. *Sea FDO ("Finite dense orders") la teoría de $\mathbb{Q}$ con símbolos de relación $<_n$, tal que*

$$\models q_1 <_n q_2 \text{ si y sólo si } |q_1 - q_2| \leq n \text{ y } q_1 < q_2.$$

Sea $\mathcal{M} \models FDO$ y p el tipo "al infinito" sobre $\mathcal{M}$. Entonces p es genéricamente estable.

Observación 2.26. *Si $p = tp(a/A)$ es genéricamente estable, entonces $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A B$ si y sólo si $a \models p|^d B$ con respecto a una de las definiciones de p sobre $acl(A)$.*

Lema 2.27. *(Simetría)*
Sean $p, q \in S(A)$ genéricamente estables. $a \models p, b \models q$, entonces

$$a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A b \Rightarrow b \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A a.$$

Demostración. Supongamos que $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A b$ y que $b \not\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A a$. Así, por la observación anterior, existe una fórmula $\varphi(a, b)$ tal que $\models d_p x \varphi(x, b) \wedge \neg d_q y \varphi(a, y)$.

Construyamos ahora sucesiones $\langle a_i, b_i : i < \omega + \omega \rangle$ de la siguiente manera:

- $a_0 = a$, $b_0 = b$.
- Escogemos a_i, b_i tales que
  1. $a_i \models p|^d A\langle a_j : j < i\rangle\langle b_j : j < i\rangle$
  2. $b_i \models q|^d A\langle a_j : j < i+1\rangle\langle b_j : j < i\rangle$

Por (2), $\langle b_i : i < \omega + \omega\rangle$ es una sucesión no bifurcante; y dado que q es genéricamente estable, se sigue que $\langle b_i : i < \omega + \omega\rangle$ es un conjunto indiscernible.

Ahora, por (1), tenemos que $\models \varphi(a_\omega, b_i)$ para $i < \omega$, y $\models \neg\varphi(a_\omega, b_i)$ para $i > \omega$, y definiendo $b'_{2i} := b_i, b'_{2i+1} := b_{\omega+i}$, obtenemos una sucesión indiscernible $\langle b'_i : i < \omega\rangle$ tal que

$$a_\omega \models \bigwedge_{i<\omega} \left(\varphi(x, b_{2i}) \wedge \neg\varphi(x, b_{2i+1})\right),$$

contradiciendo dependencia.

□

Teorema 2.28. *Sean $p, q \in S(A)$ genéricamente estables. $a \models p, b \models q$ y sean $\bar{c}, \bar{d}$ tuplas (posiblemente infinitas). Entonces:*

1. Monotonicidad: $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}_A b\bar{c}\bar{d}$ *implica que* $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}_A b\bar{c}$.
2. Simetría: $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}_A b$ *si y sólo si* $b \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}_A a$.
3. Transitividad: $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}_A \bar{c}\bar{d}$ *si y sólo si* $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}_{A\bar{c}} \bar{d}$ *y* $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}_A \bar{c}$.

Demostración.

1. Esta propiedad se cumple en general para la relación de independencia dada por la bifurcación. (ver observación 1.12)
2. Lema 2.27.
3. Para transitividad podemos usar el corolario 2.22, tomando a $p \subseteq tp(a/A\bar{c}) \subseteq tp(a/A\bar{c}\bar{d})$ como cadena no bifurcante de tipos, y teniendo en cuenta que p es genéricamente estable.

□

Capítulo 3

Ejemplos

En este capítulo daremos ejemplos de tipos genéricamente estables que no aparecen en la literatura tradicional.

Ejemplo 3.1. ***Ejemplo de una fórmula que divide pero no divide fuertemente*** *Consideremos T la teoría de órdenes densos sin extremos, $A = \mathbb{Q}$ y $a, b \in \mathfrak{C}$ con $tp(a/\mathbb{Q}) = tp(b/Q) = tp(\sqrt{2}/\mathbb{Q})$.*

Hecho 3.2. *La fórmula $\varphi(x; a, b) := a < x < b$ es una fórmula que divide sobre $\mathbb{Q}$ pero no divide fuertemente sobre $\mathbb{Q}$.*

En primer lugar considere una sucesión $\langle a_i b_i : i < \omega\rangle$ con tipo $tp(\sqrt{2}/\mathbb{Q})$ y con la propiedad que $a_0 < b_0 < a_1 < b_1 < \ldots < b_i < a_{i+1} < \ldots$. Esta sucesión es claramente indiscernible sobre $\mathbb{Q}$, y tenemos que $\{a_i < x < b_i : i < \omega\}$ es inconsistente (pues es 2-inconsistente).
Ahora, sean $\langle a'_i b'_i : i < \omega\rangle$ una sucesión con tipo $tp(\sqrt{2}/\mathbb{Q})$ y $c \in \mathfrak{C}$ tal que $a'_0 < a'_1 < \ldots a'_i < a'_{i+1} < \ldots < c < \ldots b'_{i+1} < b'_i < \ldots < b'_1 < b'_0$. Tenemos entonces que $tp(a'_i b'_i/\mathbb{Q}) = tp(ab/\mathbb{Q})$ y dado que $\{a'_i < x < b'_i : i < \omega\}$ es consistente, se sigue que el conjunto $\Gamma' = \{a' < x < b' : a'b' \models tp(ab/\mathbb{Q})\}$ no puede ser k-inconsitente para ningún $k < \omega$, y por tanto, la fórmula $\varphi(x; a, b) := a < x < b$ no divide fuertemente sobre $\mathbb{Q}$.

Hecho 3.3. *La fórmula $a < x < b$ no þ-bifurca sobre $\emptyset$.*

Demostración. Como T admite eliminación de imaginarios, basta ver que $\varphi(x, b)$ no divide fuertemente sobre $\bar{c}$ para toda tupla finita $\bar{c} \in \mathfrak{C}$.
Dado $\bar{c} \in C$, con $tp(a, b/\bar{c})$ no algebraico, sabemos por eliminación de cuantificadores que se cumple uno de los siguientes casos:

- $a < c_i < b$ para algunos c_i:

  En este caso, tomamos una sucesión indiscernible $\langle a_i b_i : i < \omega\rangle$ tales que

  $$a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < c_i < \ldots < b_2 < b_1 < b_0 = b$$

  para todos los c_i en el intervalo (a, b).

Así, como $\{a_i < x < b_i : i < \omega\}$ es consistente, la fórmula $a < x < b$ no divide fuertemente sobre $\bar{c}$.

- Si $c_i < a < b < c_j$ para todo i, j con $c_i < c_j$, entonces tomamos una sucesión indiscernible análoga al caso anterior (sólo que en vez de c_i tomamos algún $c \in \mathfrak{C}$ con $a < c < b$) y obtenemos que $a < x < b$ no divide fuertemente sobre $\bar{c}$.

De esta manera, la fórmula $a < x < b$ no þ-bifurca sobre $\emptyset$. □

3.1. Tipos genéricamente estables en $T = Th(\mathbb{Q}, +, \cdot, <_{\restriction(0,1)})$

Hecho 3.4. *Los únicos tipos genéricamente estables en esta teoría son los tipos "al infinito".*

Considere la relación $<_n$ definida por

$$x <_n y \text{ si y sólo si } \exists z_1, z_2, \ldots, z_n (0 < z_1 - x \wedge 0 < z_2 - z_1 \wedge \cdots \wedge 0 < z_n - z_{n-1} \wedge 0 < y - z_n).$$

Si $p \in S(B)$ es un tipo genéricamente estable, existe una sucesión no bifurcante $\langle c_i : i < \omega \rangle$ en p que es un conjunto indiscernible. De esta manera, dado que debe cumplirse que $c_i \not<_n c_j$ para cada $i < j < \omega$ (pues $\{c_i : i < \omega\}$ es un conjunto B-indiscernible), los elementos c_i deben estar "infinitamente alejados."

Además, no se puede cumplir que $b_1 <_n c_i <_n b_2$ para $b_1, b_2 \in B$, pues esto implicaría inmediatamente que $c_i <_n c_j$ para algún $j < \omega, j \neq i$.

Por lo tanto, el tipo p es el tipo de un elemento no acotado por elementos de B. (i.e., es un tipo genérico "al infinito"), y los elementos c_i deben estar "infinitamente alejados".

3.2. Ejemplo "triangulitos"

Sea $M = \mathbb{R} \times [0, 1]$ y sea $\triangle_x$ el conjunto de todos los puntos en M que están bajo las rectas de pendiente 1 y -1 que pasan por el punto x. Considere en M la relación dada por

$$xRy \text{ si y sólo si } x \in \triangle_y.$$

Definamos $T = Th(M, R)$

Hecho 3.5.

1. *xRb es una fórmula que bifurca sobre $\emptyset$.*
2. *xRb es una fórmula que no þ-bifurca sobre A.*
3. *No existe un tipo genéricamente estable que contenga la fórmula xRb para $b \in \mathfrak{C}$.*

Demostración.

1. Dado que $b = (b_x, b_y)$, basta considerar la sucesión $b_i = (b_x + 3i, b_y)$ para $i < \omega$. Claramente $\langle b_i : i < \omega \rangle$ es indiscernible sobre $\emptyset$, y tenemos que $\{xRb_i : i < \omega\}$ es inconsistente (2-inconsistente).

2. Es claro que xRb no divide fuertemente. Ahora, dado que (M, R) es interpretable en una estructura $\mathcal{O}$-minimal, se tiene eliminación de imaginarios y por tanto la fórmula xRb no þ-bifurca sobre A.

3. Supongamos que $xRb \in p$ y que p es un tipo genéricamente estable. Existe entonces una sucesión $\langle c_i : i < \omega \rangle$ de realizaciones de p que es un conjunto B-indiscernible.

   Definamos la fórmula $\phi(x, y, z) := \forall w(xRw \wedge zRw \longrightarrow yRw)$, (intuitivamente, ésta fórmula está diciendo que "y está entre x y z"). Tenemos que:

   - $\mathfrak{C} \models \forall x_1, x_2, x_3(\phi(x_1, x_2, x_3) \wedge \phi(x_1, x_3, x_2) \longrightarrow x_2 = x_3)$, lo que implica, dados $i, j, k < \omega$ distintos, que $\mathfrak{C} \models \neg\phi(c_i, c_j, c_k)$.
   - $\mathfrak{C} \models \exists w(x_1Rw \wedge x_2Rw \wedge x_3Rw) \longrightarrow \bigvee_{\sigma \in S_3} \phi(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)})$.

   Contradicción.

   De esta manera, dado que un tipo genéricamente estable no contiene una fórmula de la forma xRb, el único tipo genéricamente estable es el tipo "al infinito", que es

   $$p = \{\neg D_n(x, b) : b \in B, n < \omega\}$$

   donde

   $$D_n(v, w) = \exists x_1, x_2, \ldots, x_n y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}(y_1Rv \wedge y_1Rx_1 \wedge y_2Rx_1 \wedge y_2Rx_2 \wedge \cdots \wedge y_{n+1}Rx_n \wedge y_{n+1}Rw).$$

□

3.3. Ejemplo "Columnas"

Sea $M = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} [2m, 2m+1] \times \mathbb{Z}$ y considere la relación R sobre M dada por

$$(x, y)R(x', y') \text{ si y sólo si existe } m \in \mathbb{Z} \text{ tal que } 2m \leq x, x' \leq 2m+1 \text{ y } y < y'.$$

Sea $T = Th(M, R)$, y tomemos $b = (0, 1)$

Hecho 3.6.

1. *La fórmula $\varphi(x, b) := xRb$ bifurca sobre $A = \emptyset$.*

2. *$\varphi(x, b)$ no divide fuertemente sobre $A = \emptyset$.*

3. *El tipo $p = tp((0, 0)/b) \in S(b)$ es un tipo genéricamente estable.*

4. *$\varphi(x,b)$ þ-bifurca sobre $\emptyset$.*

Demostración.

1. Considere la sucesión indiscernible dada por $\langle b_i = (2i,1) : i < \omega \rangle$. Se cumple que $b_i \models tp(b/\emptyset)$ para cada $i < \omega$, y tenemos que $\{xRb_i : i < \omega\}$ es inconsistente, por lo que $\varphi(x,b) := xRb$ es una fórmula que bifurca sobre A.

2. Si tomamos $b_i' = (\frac{1}{i}, 1)$, tenemos que $tp(b/\emptyset) = tp(b_i'/\emptyset)$ para todo $i < \omega$, y además como $\mathfrak{C} \models (0,0)Rb_i'$ para todo $i < \omega$, se concluye que $\{xRb' : b' \models tp(b/\emptyset)\}$ no puede ser k-inconsistente para ningún $k < \omega$, y así, la fórmula $\varphi(x,b) := xRb$ no divide fuertemente sobre $\emptyset$.

3. Considere la sucesión $\langle c_i = (1 - \frac{1}{i}, 0) \rangle$.

   - Si consideramos el tipo

     $$tp(c_i/bc_{<i}) = \{\neg(x = c_j) : j = 1, 2, \ldots, i-1\} \cup \{xRb\} \cup \{\neg(xRc_j) : j = 1, \ldots, i-1\},$$

     este tipo no contiene ninguna fórmula que bifurque sobre b.

   - Claramente la sucesión resulta ser un conjunto indiscernible.

   De esta manera, el tipo $p = tp((1,0)/b) \in S(b)$ es un tipo genéricamente estable.

4. Considere en $\mathfrak{C}$ la relación dada por

   $$x \sim y \text{ si y sólo si } \mathfrak{C} \models \exists z(zRx \wedge zRy) \vee x = y.$$

   Hecho: La relación $\sim$ es una relación de equivalencia.

   Ahora, veamos que xRb es una fórmula que divide fuertemente sobre $\emptyset \cup \sim$. Si consideramos el conjunto $\{xRb' : b' \models tp(b/\emptyset\hat{\ } \sim)\}$ es claro que este conjunto resulta 2-inconsistente por la definición de $\sim$.

□

3.4. Tipos “genéricamente estables” en teorías con la propiedad de independencia

En el contexto de las teorías con la propiedad de independencia los tipos genéricamente estables no poseen las mismas propiedades que en teorías dependientes. De hecho no se tiene la equivalencia dada en la proposición 2.24, así que en principio podría escogerse cualquiera de ellas para realizar una generalización a este contexto.

En este trabajo decidimos usar la generalización con la misma definición dada en el capítulo 2, con el cual podemos encontrar contraejemplos importantes con respecto de bifurcación y þ-bifurcación.

3.4.1. Tipos genéricamente estables en el grafo aleatorio

El grafo aleatorio tiene lenguaje $\mathcal{L} = \{R\}$ donde R es un símbolo de relación binaria, y se encuentra axiomatizado por

$$\begin{aligned} T =& \{\forall x, y(xRy \leftrightarrow yRx)\} \\ \cup & \left\{ \varphi_n := \forall x_1, \dots, x_n \forall y_1, \dots, y_m \exists z \left(\bigwedge_{i,j=1}^{n,m} x_i \neq y_j \longrightarrow \bigwedge_{i=1}^{n} x_i Rz \wedge \bigwedge_{j=1}^{m} \neg y_j Rz \right) : m, n < \omega \right\}. \end{aligned}$$

Para $b \in \mathfrak{C}$ y $A \subseteq \mathfrak{C}$, $tp(b/A) = \{xRa : a \in A_1\} \cup \{\neg xRa' : a' \in A_2\}$ para algunos $A_1, A_2 \subseteq A, A_1 \cup A_2 = A, A_1 \cap A_2 = \emptyset$.

1. *xRb no divide sobre A:* en efecto, si $\langle b_i : i < \omega \rangle$ es una sucesión indiscernible y $b_i \models tp(b/A)$, tendríamos que, dados $i_1, \dots, i_n$, el conjunto $\{xRb_{i_j} : j = 1, 2, \dots, n\}$ es consistente (esto por el axioma φ_n en T). Así, por compacidad se sigue que $\{xRb_i : i < \omega\}$ es consistente. Una prueba análoga muestra que $\neg xRb$ no divide sobre A.

2. *Todo tipo no-algebraico es genéricamente estable:* Sea $p \in S(b)$ no algebraico, y tome $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \{c_i : i < \omega\}$ (nuevos símbolos de constante.)

   Considere la teoría $T' = T \cup \bigcup_{i<\omega} p(c_i) \cup \{c_i R c_j : i < j < \omega\}$.

   - Por compacidad, y usando los axiomas φ_n, puede concluírse fácilmente que T' es consistente.
   - $\{c_i : i < \omega\}$ es un conjunto B-indiscernible, en efecto, $tp(c_1, c_2, \dots, c_n) = \bigcup_{i=1}^{n} p(x_i) \cup \{x_i R x_j : i, j = 1, 2, \dots, n\} = tp(c_{i_1}, c_{i_2}, \dots, c_{i_n})$, esto para $i_1, i_2 \dots, i_n < \omega$.
   - $tp(c_i/Bc_{<i})$ no bifurca sobre B, en efecto, esto se cumple pues no existe ninguna fórmula (distinta de $x = y$) en T que divida.

   Por lo tanto, cualquier tipo no algebraico es un tipo genéricamente estable.

3.4.2. Ejemplo de $T_\in$

El ejemplo que presentamos a continuación muestra que en teorías con la propiedad de independencia, las nociones de bifurcación y þ-bifurcación para tipos genéricamente estables no necesariamente coinciden.

Intuitivamente podemos entender los modelos de esta teoría como modelos en los cuales están juntos "conjuntos" (los b para los cuales $\mathfrak{C} \models \neg X(b)$) y "elementos" (los a para los cuales $\mathfrak{C} \models X(a)$), con una relación de pertenencia (R) entre ellos.
Un ejemplo de modelo de esta teoría es $\mathcal{M} = \mathbb{N} \cup \wp^{inf,coinf}(\mathbb{N})$.

Ejemplo 3.7. ***Ejemplo de Shelah*** *(ver en [16]).*

Considere el lenguaje dado por $\mathcal{L} = \{X, R\}$ donde R es un símbolo de relación binaria y X es un predicado. Considere la teoría $T_\in$ axiomatizada por las siguientes sentencias:

1. $\forall x \forall y (xRy \longrightarrow X(x) \wedge \neg X(y))$.
2. $\forall x_1, \ldots, x_n \forall y_1, \ldots, y_m \exists z \left(\bigwedge_{i=1}^{m} X(x_i) \wedge \bigwedge_{j=1}^{n} X(y_j) \longrightarrow \left(\bigwedge_{i=1}^{m} x_i R z \wedge \bigwedge_{j=1}^{n} \neg y_j R z \right) \right)$
3. $\forall x_1, \ldots, x_n \forall y_1, \ldots, y_m \exists z \left(\bigwedge_{i=1}^{m} \neg X(x_i) \wedge \bigwedge_{j=1}^{n} \neg X(y_j) \longrightarrow \left(\bigwedge_{i=1}^{m} z R x_i \wedge \bigwedge_{j=1}^{n} \neg z R y_j \right) \right)$

Hecho 3.8. *La fórmula xRb divide sobre $\emptyset$. (Aquí, b es un subconjunto infinito - coinfinito de $\mathbb{N}$.)*

Demostración. Considere la sucesión $\langle b_i : i < \omega \rangle$ donde b_{i+1} es un subconjunto infinito - coinfinito de $\mathbb{N} - b_0 \cup \cdots \cup b_i$, esto para $i < \omega$.

- $\langle b_i : i < \omega \rangle$ es una sucesión indiscernible.
- $b_i \models tp(b/\emptyset)$ para todo $i < \omega$.
- $\{xRb_i : i < \omega\}$ es inconsistente (2-inconsistente).

□

Sea $p = tp(a/b) \in S(b)$, con $a, b \in \mathfrak{C}$ y $\mathfrak{C} \models aRb$.

Hecho 3.9. *p es un tipo genéricamente estable.*

Demostración. Sea $\langle c_i : i < \omega \rangle$ una sucesión de elementos distintos en el "conjunto" b.

- $c_i \models p$ para cada $i < \omega$.
- $\{c_i : i < \omega\}$ es un conjunto b-indiscernible.
- $tp(c_i/bc_{<i}) = \{xRb, X(x)\} \cup \{\neg xRc_j : j = 0, 1, \ldots, i-1\}$ no bifurca sobre b.

□

Lema 3.10. *La teoría $T_\in$ admite eliminación de imaginarios*

Demostración. Veamos que se cumple la parte (3) del hecho 1.4.

Cada fórmula $\varphi(x)$ con parámetros $\overline{b} \in \mathfrak{C}$ ($\overline{b} = \langle \overline{b_i}, \overline{b_j}, \overline{b_m}, \overline{b_k}, \overline{b'_k} \rangle$ es equivalente a una fórmula de la forma

$$\psi(x, \overline{b_i b_j}, \overline{b_m}, \overline{b_k}, \overline{b'_k}) := \bigwedge b_i R x \wedge \bigwedge \neg b_j R x \wedge \bigwedge \forall z (\neg (zRx \wedge zrb_m)) \\ \wedge \exists^{=n} z (zRx \wedge zRb_k) \wedge \exists^{\geq n'} z (zRx \wedge zRb'_k)$$

Ahora, considere la fórmula $\psi(x, \overline{y})$. Veamos que $\varphi(\mathfrak{C}) = \psi(\mathfrak{C}, \overline{a})$ únicamente para la tupla $\overline{a} = \overline{b}$.

Supongamos que $\overline{a} \neq \overline{b}$, entonces, Si $a_i \neq b_i$, Entonces sin pérdida relevante de generalidad, existe $c \in C$ tal que $\models \psi(c, \overline{b}) \wedge \neg a_i Rc$, por lo que $\varphi(\mathfrak{C}) \neq \psi(\mathfrak{C}, \overline{a})$. Contradicción.

Por lo tanto, $a_i = b_i$. Los demás casos a evaluar serían $a_j \neq b_j$, $a_m \neq b_m$, $a_k \neq b_k$ y $a'_k \neq b'_k$, pero todos tienen una conclusión similar al caso $a_i \neq b_i$.

De esta manera, como $\varphi(\mathfrak{C}) = \psi(\mathfrak{C}, \overline{a})$ únicamente para la tupla $\overline{a} = \overline{b}$, la teoría $T_\in$ admite eliminación de imaginarios. □

Lema 3.11. *Si una fórmula $\varphi(x, b)$ es tal que $\varphi(x, b) \models xRb$ entonces $\varphi(x, b)$ no þ-divide sobre $\emptyset$.*

Demostración. Dada una tupla *real* $\overline{c} = \langle \overline{c_i}, \overline{c_j}, \overline{c_k}, \overline{c_m} \rangle$, tenemos que

$$tp(b/\overline{c}) = \{c_i Rx, \neg c_j Rx, \forall z(\neg(zRx \wedge zRc_k)), \forall z(zRc_m \longrightarrow zRb)\}$$

De esta manera,

- Si $b - (c_m \cup \{c_i\}) = \{a_i : i < |b - (c_m \cup \{c_i\})|\}$ es infinito, considere la sucesión dada por $b_i = b - \{a_1, a_2, \ldots, a_i\}$. Tenemos que $tp(b_i/\overline{c}) = tp(b/\overline{c})$ y además, por compacidad, $\{xRb_i : i < \omega\}$ es consistente.

- Si $b - (c_m \cup \{c_i\})$ es finito, digamos $b - (c_m \cup \{c_i\}) = \{a_1 \ldots, a_m\}$, entonces sea $\langle a_m^i : i < \omega \rangle$ una sucesión de elementos en $\mathfrak{C} - (b \cup \{c_j\} \cup c_k)$.

  De esta forma al considerar la sucesión $\langle b_i = b - \{a_m\} \cup \{a_m^i\} : i < \omega \rangle$ obtenemos una sucesión infinita de elementos con $b_i \models tp(b/\overline{c})$ y $\{xRb_i : i < \omega\}$ es consistente.

De esta manera, tenemos que $\varphi(x, b)$ no divide fuertemente sobre $\overline{c}$ para ninguna tupla *real* $\overline{c} \in \mathfrak{C}$ finita.

Ahora, como $T_\in$ admite eliminación de imaginarios, se sigue que $\varphi(x, b)$ no þ-divide sobre $\emptyset$. □

Proposición 3.12. *El tipo p definido anteriormente no þ-bifurca sobre $\emptyset$.*

Demostración. Supongamos que alguna fórmula $\varphi(x, b) \in p$ þ-bifurca sobre $\emptyset$.

Entonces $\varphi(x, b) \models \bigvee_{i=1}^{n} \psi_i(x, b_i)$ donde las fórmulas $\psi_i(x, b_i)$ þ-dividen sobre $\emptyset$.

Como $p = tp(a/b) = \{X(x), xRb\}$, y $\varphi(x, b) \in p$, $\models \varphi(a, b_i)$ por lo que $\models \psi_i(a, b_i)$ para algún $i \leq n$.

Ahora, dado que $X(x)$ no þ-divide sobre $\emptyset$, se sigue que $\psi(x, b_i) \models xRb$, y por el lema anterior, $\psi(x, b_i)$ no þ-divide sobre $\emptyset$. Contradicción.

Por lo tanto, no existe una fórmula $\varphi(x, b) \in p$ que þ-bifurque sobre A, y se sigue que el tipo p no þ-bifurca sobre A. □

Capítulo 4

Tipos genéricamente estables en teorías rosy dependientes

En este capítulo asumiremos que T es una teoría rosy dependiente, y que $p(x,b) \in S(Ab)$ es un tipo genéricamente estable y *estacionario*.

Los resultados de este capítulo son válidos para tipos genéricamente estables en general, pero asumimos estacionaridad para simplificar un poco la notación.

Proposición 4.1. *Si $p(x,b)$ bifurca sobre A entonces $p(x,b)$ þ-bifurca sobre A.*

Demostración. Supongamos que $p(x,b) \in S(Ab)$ es un tipo genéricamente estable que bifurca sobre A pero no þ-bifurca sobre A.

Como p es genéricamente estable, existe una sucesión $\langle c_i : i < \omega \rangle$ tal que:

- $c_i \models p$ para todo $i < \omega$.
- $tp(c_i/Abc_{<_i})$ no bifurca sobre Ab.
- $\{c_i : i < \omega\}$ es un conjunto Ab-indiscernible.

Hecho 4.2. *Para todo $k < \omega$, $tp(b/c_0c_1 \dots c_k)$ no þ-bifurca sobre A.*

Demostración. Probemos este resultado por inducción sobre k:

- Por hipótesis, como $p(x,b)$ no þ-bifurca sobre A, se sigue que $c_0 \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}^{þ}_{A} b$, y por simetría, $b \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}^{þ}_{A} c_0$.
- Supongamos ahora que $b \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}^{þ}_{A} c_0 \dots c_k$. Usando nociones de þ-forking calculus procedemos de la siguiente manera:
  1. $c_{k+1} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}^{þ}_{A} b$ (Esto porque estamos suponiendo que $p(x,b)$ no þ-bifurca sobre A)
  2. Como $I = \langle c_i : i < \omega \rangle$ es una sucesión de Morley sobre b, $c_{k+1} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}_{Ab} c_0 \dots c_k$ lo que implica que $c_{k+1} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}^{þ}_{Ab} c_0 \dots c_k$.

3. Por transitividad, de $c_{k+1} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}^{\text{þ}}_A b$ y $c_{k+1} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}^{\text{þ}}_{Ab} c_0 \dots c_k$ obtenemos que $c_{k+1} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}^{\text{þ}}_A bc_0 \dots c_k$.
4. Por monotonicidad, $c_{k+1} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}^{\text{þ}}_{Ac_0 \dots c_k} b$.
5. Por simetría, $b \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}^{\text{þ}}_{Ac_0 \dots c_k} c_{k+1}$ y $b \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}^{\text{þ}}_A c_0 \dots c_k$ (esto último usando simetría en la hipótesis de inducción).
6. Por transitividad, $b \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}^{\text{þ}}_A c_0 \dots c_k c_{k+1}$, como queríamos.

De esta manera, tenemos que $b \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}^{\text{þ}}_A c_0 \dots c_k$ para todo $k < \omega$. □

Para no sobrecargar la notación denotaremos por d_{p_1} la definición del tipo $p(x, b_1)$ ($b_1 \models tp(b/A)$), y análogamente para $p(x, b_2)$.

Hecho 4.3. *Sean $b_1, b_2 \models tp(b/A)$ y $\phi(x, y)$ una fórmula. Si $p(x, b_1) \cup \phi(x, b_2)$ bifurca sobre b_1 entonces $\models \neg d_{p_1}\phi(b_2)$.*

Demostración. Dado que $p(x, b_1)$ es genéricamente estable, existe una sucesión no bifurcante I en $p(x, b_1)$ que es un conjunto indiscernible. Si $p(x, b_1) \cup \phi(x, b_2)$ bifurca sobre b_1, entonces $\phi(x, b_2) \notin Av(I, b_1 b_2)$, por lo tanto, $\models \neg d_{p_1}\phi(b_2)$.

□

Definamos la relación

$$b_1 E_\phi b_2 \text{ si y sólo si} \models \forall z (d_{p_1}\phi(z) \leftrightarrow d_{p_2}\phi(z)).$$

Con esto, obtenemos el siguiente corolario del hecho 4.3:

Corolario 4.4. *Sean $b_1, b_2 \models tp(b/A)$. Si $b_1 E_\phi b_2$ entonces $p(x, b_1) \cup \phi(x, b_2)$ no bifurca sobre b_1 y $p(x, b_2) \cup \phi(x, b_1)$ no bifurca sobre b_2.*

Lema 4.5. *Sean $b_1, b_2 \models tp(b/A)$. Las siguientes son equivalentes:*

1. *Existe una sucesión indiscernible $\langle c_i : i < \omega \rangle$ que es sucesión de Morley en $p(x, b_1)$ sobre b_1 y sucesión de Morley en $p(x, b_2)$ sobre b_2.*
2. *$p(x, b_1) \cup p(x, b_2)$ no bifurca sobre b_1 ni sobre b_2.*
3. *Para toda fórmula ϕ, $b_1 E_\phi b_2$.*

Demostración.

- (1) $\Leftrightarrow$ (2):

  $\Leftarrow$): Si q es la extensión no bifurcante de $p(x, b_1) \cup p(x, b_2)$ a $b_1 b_2$, q no bifurca sobre b_1 ni sobre b_2, y construímos una sucesión $\langle c_i : i < \omega \rangle$ de la siguiente manera:

  - $c_0 \models q$.
  - Escogemos $c_{k+1} \models q_{k+1}$ siendo q_{k+1} una extensión no bifurcante de q_k a $b_1 b_2 c_0 \dots c_k$.

Por transitividad para tipos genéricamente estables resulta que $\{c_i : i < \omega\}$ es una sucesión de Morley sobre b_1 y sobre b_2, probando (1).

$\Rightarrow$): Recíprocamente, si existe una sucesión indiscernible $I = \langle c_i : i < \omega \rangle$ que es sucesión de Morley sobre b_1 y sobre b_2, por el hecho 2.14, $Av(I, \mathfrak{C})$ es la única extensión no-bifurcante de $p(x, b_1)$, y de $p(x, b_2)$ a $\mathfrak{C}$, y como $p(x, b_1) \cup (x, b_2) \subseteq Av(I, \mathfrak{C})$, se sigue que $p(x, b_1) \cup p(x, b_2)$ no bifurca sobre b_1 ni sobre b_2.

- (2) $\Leftrightarrow$ (3):

($\Leftarrow$): Si $p(x, b_1) \cup p(x, b_2)$ bifurca sobre b_1, entonces existe una fórmula $\phi(x, y)$ tal que $p(x, b_1) \cup \phi(x, b_2)$ bifurca sobre b_1, y por el hecho anterior, tenemos que $\models \neg d_{p_1} \phi(b_2)$. Así, tendríamos que

$$\models \neg d_{p_1} \phi(b_2) \wedge d_{p_2} \phi(b_2),$$

lo que contradice que para todo $c \in \mathfrak{C}$, $\models d_{p_1} \phi(c) \leftrightarrow d_{p_2} \phi(c)$.

($\Rightarrow$): Sea $c \in \mathfrak{C}$ y supongamos sin pérdida de generalidad que $\models d_{p_1} \phi(c)$.

Dado que $p(x, b_1) \cup p(x, b_2)$ no bifurca sobre b_1 ni sobre b_2, tenemos que $p(x, b_1) \cup p(x, b_2)$ es extensión no bifurcante tanto de $p(x, b_1)$ como de $p(x, b_2)$.

Por estacionaridad, si q es la única extensión no bifurcante de q_1 a $b_1 b_2 c$, dado que $\models d_{p_1} \phi(c)$, se tiene que $q \supseteq p(x, b_1) \cup p(x, b_2) \cup \phi(x, c)$. Además, q no bifurca sobre $b_1 b_2$.

Por otra parte, dado que $p(x, b_2) \subseteq p(x, b_1) \cup p(x, b_2) \subseteq p(x, b_1) \cup p(x, b_2) \cup \phi(x, c)$ es una cadena no bifurcante de tipos, y $p(x, b_2)$ es genéricamente estable, tenemos que $p(x, b_2) \cup \phi(x, c)$ no bifurca sobre b_2, y así, $\models d_{p_2} \phi(c)$.

□

Definición 4.6. *Decimos que $b_1 E b_2$ si se cumple cualquiera de las condiciones del lema 4.5.*

Hecho 4.7. *La relación E es una relación de equivalencia sobre $tp(b/A)$.*

Demostración. Se puede ver fácilmente usando la condición (3) del lema 4.5.

□

Siguiendo con la demostración de la proposición 4.1, dado que $p \in S(Ab)$ bifurca sobre A, existe una fórmula $\varphi(x, b) \in p$ que bifurca sobre A.

Hecho 4.8. *La relación E_φ es una relación de equivalencia con infinitas clases de tipo $tp(b/A)$.*

Demostración. Se puede ver fácilmente que E_φ es una relación de equivalencia.

Ahora, dado que la bifurcación de $p(x,b)$ sobre A es atestiguada por la fórmula $\varphi(x,b)$, existe una sucesión indiscernible $\langle b_i : i < \omega \rangle$ tal que:

- $b_i \models tp(b/A)$ para cada $i < \omega$.
- $\{\varphi(x,b_i) : i < \omega\}$ es k-inconsistente.

Supongamos que sólo existen finitas clases. Entonces, existe una subsucesión $\langle b_{i_j} : j < \omega \rangle$ tales que $b_{i_j} R_\varphi b_{i_k}$ para todo $j,k < \omega$.

Como $b_{i_1} R_\varphi b_{i_2}$ y $b_{i_2} R_\varphi b_{i_3}$, por el corolario 4.4, tenemos que $p(x,b_{i_2}) \cup \varphi(x,b_{i_1})$ y $p(x,b_{i_2}) \cup \varphi(x,b_{i_3})$ no bifurcan sobre b_{i_2}.

Sea q_2 una extensión no bifurcante de $p(x,b_{i_2})$ a b_{i_1}, b_{i_3}. Entonces, como $p(x,b_{i_2}) \cup \varphi(x,b_{i_1})$ y $p(x,b_{i_2}) \cup \varphi(x,b_{i_3})$ no bifurca sobre b_{i_2}, debe cumplirse que $p(x,b_{i_2}) \cup \varphi(x,b_{i_1}) \cup \varphi(x,b_{i_3}) \subseteq q_2$. En particular, $\varphi(x,b_{i_1}) \cup \varphi(x,b_{i_2}) \cup \varphi(x,b_{i_3})$ es consistente.

Procediendo de manera inductiva se concluiría que $\varphi(x,b_{i_1}) \cup \cdots \cup \varphi(x,b_{i_{k+1}})$ es consistente, contradiciendo el hecho de que $\{\varphi(x,b_i) : i < \omega\}$ es k-inconsistente.

□

Corolario 4.9. *E es una relación de equivalencia con infinitas clases de tipo $tp(b/A)$.*

Dado que T es dependiente y que $I = \langle c_i : i < \omega \rangle$ es un conjunto indiscernible, existe un número k_φ tal que para todo $a \in \mathfrak{C}$,

$$|\{i < \omega : \varphi(c_i,a)\}| \geq k_\varphi \quad \Rightarrow \quad \varphi(x,a) \in Av(I,\mathfrak{C})$$

Lema 4.10. *Existe una relación de equivalencia definible R_φ tal que para cualesquiera $b_1, b_2 \models tp(b/A)$, $b_1 R_\varphi b_2$ si y sólo si $b_1 E_\varphi b_2$.*

Demostración. Dado que $p \in S(Ab)$ genéricamente estable y estacionario, por el hecho 2.19, $p(x,b)$ es definible sobre b. En particular, la φ-definición de $p(x,b)$ está dada por una fórmula $\theta(y,b)$.

Usando automorfismos de $\mathfrak{C}$ sobre A, es claro que para cualquier $b' \models tp(b/A)$, $\theta(y,b')$ es la φ-definición del tipo $p(x,b')$. En este orden de ideas, podemos definir

$$z_1 R_\varphi z_2 \text{ si y sólo si } \models \forall y(\theta(y,z_1) \leftrightarrow \theta(y,z_2)).$$

□

Por otra parte, $\theta(y,b)$ es equivalente a $\bigvee\limits_{u\subseteq 2k_\varphi|u|=k_\varphi} \bigwedge_{i\in u} \varphi(c_i,y)$ pues por el lema 2.17 y el hecho 2.19, ambas son las φ-definiciones del tipo $p(x,b)$.

Con esto, es fácil terminar la prueba de la proposición 4.1:

Note que $[b]_{R_\varphi}$ es definible sobre $c_0\dots c_{2k_\varphi}$, de hecho,

$$b' \in [b]_{R_\varphi} \text{ si y sólo si } \models \forall y \left(\theta(y,b') \leftrightarrow \bigvee_{u\subseteq 2k_\varphi|u|=k_\varphi} \bigwedge_{i\in u} \varphi(c_i,y)\right).$$

Por el hecho 4.8 y el lema 4.10, tenemos que $x \in [b]_{R_\varphi} \in tp(b/c_0\dots c_{2k_\varphi})$ es una fórmula que þ-divide sobre A, por lo que $b \not\perp\!\!\!\perp^{\text{þ}}_A c_0\dots c_{2k_\varphi}$.

Esto contradice el hecho 4.2. $\square$

Bibliografía

[1] H. Adler. *An introduction to theories without the independence property*. preprint 2^{nd} July 2007.

[2] H. Adler. *A geometric introduction to forking and thorn-forking*. Mathematics preprint Series, No. 390. Istitut de Matemàtica. Universitat de Barcelona. Feb 2007.

[3] S. Buechler. *Essential stability theory*. Perspectives in mathematical logic. Springer-Verlag. 1996

[4] E. Casanovas. *Stable and simple theories - Lecture notes*. Universidad de Barcelona. September 5, 2007.

[5] E. Casanovas. *Weak forms of elimination of imaginaries*. Mathematics preprint Series, No. 333. Institut de Matemàtica. Universitat de Barcelona. Mayo 2003.

[6] C. Ealy, A. Onshuus. *Characterizing Rosy theories*. The Journal of Symbolic Logic. Volume 72, Number 3. Sept. 2007.

[7] D. Haskell, E. Hrushovski, D. Macpherson. *Stable domination and independence in Algebraically Closed Valued Fields*. Lectures Notes in Logic. Cambridge University Press. 2007

[8] A. Hasson, A. Onshuus. *Stable types in rosy theories*. Submitted. 2008

[9] E. Hrushovski, A. Pillay. *On NIP and invariant measures*. arXiv:0710.2330v2 [math.LO]. 29 Jan 2009.

[10] J. Keisler. *Six classes of theories*. J. Australian Math. Soc. (A) **21,** 257-266 (1976).

[11] B. Kim. *Simple First Order Theories*. Tesis doctoral. Universidad de Notre Dame. 1996.

[12] A. Onshuus. *Properties and consequences of thorn-independence*. J. Symbolic Logic **71** (2006), 1-21.

[13] A. Onshuus. *Th-forking, algebraic independence and examples of rosy theories*. ArXiv: math.LO/0306003 v1. 2003

[14] A. Onshuus. Y. Peterzil. *A note on stable sets, groups, and theories with NIP*. Math. Log. Quart. **53**, No. 3, 295-300. (2007).

[15] Pillay, Anand. *Stability Theory - Lecture notes*. September 29, 2003.

[16] B. Poizat. *A course in model theory: an Introduction to Contemporary Mathematical Logic*. Universitext. Springer, New York. 2000.

[17] S. Shelah. *Classification theory and the number of non-isomorphic models*. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics **92**. North Holland, Amsterdam. 1990

[18] S. Shelah. *Classification theory for elementary classes with the dependence property - a modest beginning*. Sci. Math. Jpn **59** (2004), No. 2,265-316.

[19] S. Shelah. *Dependent theories, continued*. arXiv: math.LO/0406440. Special issue on set theory and algebraic model theory.

[20] A. Usvyatsov. *On generically stable types in dependent theories*. J. Symbolic Logic **74** (2009), 216-250.

[21] A. Usvyatsov. *Morley Sequences in dependent theories*. ArXiv: math.LO/0810.0733 v1. 3 Oct 2008

[22] F. Wagner. *Simple theories*. Mathematic and its Applications. Kluwer Academic Publishers. 2000