Sobre una demostración constructiva del teorema de Malgrange-Ehrenpreis

Por: Alicia Pérez G.

Director: Jaime Lesmes C.

Universidad de Los Andes
Departamento de Matemáticas
Bogotá, Colombia

2009

Agradecimientos

Quisiera agradecer muy especialmente a mi director, Jaime Lesmes, por haberme guiado durante la elaboración de este trabajo, por su paciencia, por las múltiples horas en que nos reunimos y por las que dedicó a leer los borradores del trabajo, por todas sus ideas, de las cuales surgió el tercer capítulo, en fin, por haber hecho posible esta tesis. También quiero agradecer a Ramiro, quien me apoyó durante todo este año de trabajo y escuchó y mejoró mis ideas. Te amo. Finalmente agradezco a mis papás y a mi hermano Edu por estar pendientes de mi trabajo y querer lo mejor para mí.

Índice general

Introducción **3**

1. Preliminares **5**

1.1. Definiciones Básicas y Notaciones 5
1.2. Distribuciones en $\mathbb{R}^n$ 6
1.3. La Transformada de Fourier 17
1.4. Propiedades de la Transformada de Fourier 26
1.5. La Transformada de Laplace 28
1.6. Medidas de Radon 28

2. El Teorema de Malgrange-Ehrenpreis **30**

2.1. El Teorema de Malgrange-Ehrenpreis 31
2.2. Ejemplos Clásicos 34
2.3. Núcleos de Convolución con Soporte Finito 44

3. Distribuciones con Soporte Infinito **54**

3.1. Planteamiento General del Problema 55
3.2. Un Caso Especial 57

Bibliografía **59**

Introducción

El concepto de solución fundamental de una ecuación diferencial fue formándose y aclarándose gradualmente durante los siglos XIX y XX, apareciendo especialmente en los casos de la ecuación de onda, de la ecuación de Laplace y de la ecuación del calor. Pero solamente hacia 1950, dentro del marco de la teoría de las distribuciones de L. Schwartz [13] (ver también [14]), dicho concepto pudo definirse de una manera general y aplicarse a la solución de ecuaciones diferenciales parciales lineales con coeficientes constantes.

La primera demostración de la existencia de una solución fundamental para cualquier operador diferencial parcial lineal con coeficientes constantes $P(\partial) \not\equiv 0$ fue dada independientemente en 1954 y 1955 por L. Ehrenpreis y B. Malgrange; estas demostraciones están basadas en el teorema de Hahn-Banach. Ya en 1956, F. Trèves dio una prueba "constructiva" en el sentido de que la solución fundamental se expresa por medio de una fórmula (se trata de la llamada "escalera de Hörmander", ver p. ej. [2], Vol.II, Cap. II, Secc. 3.3); aquí se usa partición de la unidad.

En 1994, N. Ortner y P. Wagner [8] dieron una demostración muy corta de la existencia de una solución fundamental en la forma de una integral de contorno sobre el toro unidimesional $\mathbf{T}^1$(ver también [9] y [15], donde se encuentran recuentos históricos sobre diversas demostraciones del teorema; en [1] se hace una explicación detallada de la demostración de [8]).

Recientemente, P. Wagner [16] dio una simplificación de esta prueba, mediante la construcción de una solución fundamental en la forma de una suma sobre $m+1$ distribuciones, donde m es el orden del operador diferencial. En este mismo trabajo, Wagner generaliza la prueba para obtener la construcción de una solución fundamental de cualquier operador diferencial lineal con diferencias y con coeficientes constantes. Estos son los operadores de convolución cuyo núcleo tiene soporte finito.

Para esta última clase de operadores, la primera demostración de la existencia de soluciones fundamentales, utilizando el teorema de Hahn-Banach, se debe a Ehrenpreis (1956). La demostración mediante la construcción de una escalera de Hörmander, se encuentra expuesta en [7]. La prueba de Wagner es probablemente la primera que se da utilizando una fórmula explícita.

Este trabajo tiene tres partes. En la primera parte se hace un recuento de los elementos básicos de la teoría de las distribuciones. Se definen las operaciones clásicas y las transformadas de Fourier y Laplace de las distribuciones, y se muestran algunas propiedades, necesarias para el desarrollo del trabajo. También se habla de las medidas de Radon, pues aparecen en los capítulos siguientes.

En el capítulo 2 se estudia a fondo la demostración del teorema de Malgrange-Ehrenpreis que publicó P. Wagner en [16]. Después se calculan explícitamente las soluciones fundamentales de tres operadores diferenciales lineales con coeficientes constantes: el operador de Cauchy-Riemann, el de Laplace y el operador de onda, ilustrando así la demostración anterior. Estos cálculos no se habían hecho antes para esta fórmula, aunque se basan en los ejemplos presentados por P. Wagner y N. Ortner en [8]. Finalmente se analiza el problema para los operadores de convolución con núcleo de soporte finito. Se explica completamente la demostración que se encuentra en [16] sobre la existencia de soluciones fundamentales.

Por último, se quiso tratar de generalizar la demostración de Wagner. Por lo tanto, en el tercer capítulo se habla de cómo se podría generalizar la demostración anterior para analizar de la existencia de soluciones fundamentales para operadores de convolución concentrados en un conjunto enumerable acotado. Se dan algunas condiciones novedosas sobre el soporte, bajo las cuales se puede dar una tal demostración.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Definiciones Básicas y Notaciones

Se denota por $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ al espacio de funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{C}$ que son diferenciables infinitas veces. Al soporte de toda función φ de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{C}$ se le denota $supp(\varphi) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n | \varphi(x) \neq 0\}}$.

En este documento utilizaremos la notación de multiíndices para los operadores diferenciales parciales y los polinomios. Un **multiíndice** es una n-tupla ordenada $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$. A continuación se recuerdan algunas notaciones de los multiíndices:

Sean $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ un vector y $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{N}^n$ dos multiíndices. Entonces definimos

- $x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$.
- $\alpha! := \alpha_1! \cdots \alpha_n!$.
- $|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$; este número se llama el **orden de** α.
- Decimos que $\beta \leq \alpha$ si $\beta_j \leq \alpha_j$ para todo $j = 1, \ldots, n$.
- Si $\beta \leq \alpha$ entonces $\binom{\alpha}{\beta} := \binom{\alpha_1}{\beta_1} \cdots \binom{\alpha_n}{\beta_n}$.

Ahora, para $i = 1, \ldots, n$, notemos por ∂_i al operador diferencial $\frac{\partial}{\partial x_i}$ sobre $\mathbb{R}^n$. Si $\partial = (\partial_1, \ldots, \partial_n)$ y $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ es un multiíndice, entonces

- $\partial^\alpha := \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n}$.
- La derivada parcial de orden $m \in \mathbb{N}$ más general se escribe ∂^α donde $|\alpha| = m$.
- El operador diferencial parcial lineal con coeficientes constantes de orden m más general se escribe $P(\partial) = \sum\limits_{|\alpha| \leq m} c_\alpha \partial^\alpha$ con $c_\alpha \in \mathbb{C}$.

- Llamaremos $P_k(\partial) := \sum_{|\alpha|=k} c_\alpha \partial^\alpha$ a la componente homogénea de P de orden k.
- Si $P(\partial)$ es un operador diferencial parcial con coeficientes constantes de orden m, la **parte principal de** P es $P_m(\partial)$, es decir, la componente homogénea de orden m.

1.2. Distribuciones en $\mathbb{R}^n$

Definición del Espacio de las Distribuciones

Sea $\mathscr{D} = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) |$ existe $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto tal que $\varphi \equiv 0$ en $\mathbb{R}^n \setminus K\}$. Entonces $\mathscr{D}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$, definiéndose la suma de funciones y la multiplicación por un escalar de la manera usual. Mas aún, $\mathscr{D}$ es un álgebra con la multiplicación ordinaria de funciones ya que para $\varphi_1, \varphi_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ se tiene que

$$supp(\varphi_1\varphi_2) \subset (supp\varphi_1) \cap (supp\varphi_2).$$

También, si $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ es cualquier función, entonces para todo $\varphi \in \mathscr{D}$, $\psi\varphi \in \mathscr{D}$ puesto que

$$supp(\psi\varphi) \subset (supp\psi) \cap (supp\varphi).$$

Diremos que una sucesión $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{D}$ converge a $\varphi \in \mathscr{D}$ cuando $k \to \infty$ si:

- Existe un compacto $K \subset \mathbb{R}^n$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$, $supp(\varphi_k) \subset K$.
- Para todo $m \in \mathbb{N}$ y para todo α multiíndice con $|\alpha| = m$, la sucesión $\{\partial^\alpha\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a $\partial^\alpha\varphi$.

Definición 1.2.1. *Una **distribución** T sobre $\mathbb{R}^n$ es un funcional lineal y secuencialmente continuo sobre el espacio vectorial $\mathscr{D}$, es decir, $T : \mathscr{D} \to \mathbb{C}$ es tal que*

- $\forall\varphi_1, \varphi_2 \in \mathscr{D}$, $T(\varphi_1 + \varphi_2) = T(\varphi_1) + T(\varphi_2)$,
- $\forall\lambda \in \mathbb{C}$ *y* $\forall\varphi \in \mathscr{D}$, $T(\lambda\varphi) = \lambda T(\varphi)$, *y*
- *si* $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{D}$ *converge a* $\varphi \in \mathscr{D}$ *entonces* $\{T(\varphi_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ *converge a* $T(\varphi)$ *en* $\mathbb{C}$.

Las distribuciones forman un espacio vectorial con las operaciones de suma y multiplicación por escalar definidas puntualmente. Este espacio se denota por $\mathscr{D}'$.

A veces utilizaremos la notación $\langle T, \varphi\rangle$ en lugar de $T(\varphi)$ para $T \in \mathscr{D}'$ y $\varphi \in \mathscr{D}$.

Ejemplo 1.2.2. *Si f es una función localmente integrable, entonces f define una distribución $T_f : \mathscr{D} \to \mathbb{C}$ por medio de $\langle T_f, \varphi\rangle := \int_{\mathbb{R}^n} f\varphi dx$ para todo $\varphi \in \mathscr{D}$.*

En efecto, la integral existe pues el soporte de φ es un compacto y f es integrable en este compacto. Como φ es continua entonces $f\varphi$ también es integrable en el soporte de φ, por lo tanto $\langle T_f, \varphi\rangle$ está bien definido.
Es claro que la integral es lineal en φ, por lo tanto el funcional es lineal.
Finalmente, si $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{D}$ es una sucesión tal que $\varphi_k \longrightarrow \varphi \in \mathscr{D}$ cuando $k \to \infty$ entonces existe un compacto $K \subset \mathbb{R}^n$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$, $supp(\varphi_k) \subset K$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} |\,\langle T_f, \varphi_k\rangle - \langle T_f, \varphi\rangle\,| &= \left| \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi_k(x)dx - \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx \right| \\ &\leq \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)||\varphi_k(x) - \varphi(x)|dx \\ &= \int\limits_{K} |f(x)||\varphi_k(x) - \varphi(x)|dx \\ &\leq \left(\max_{x\in K} |\varphi_k(x) - \varphi(x)| \right) \int\limits_{K} |f(x)|dx. \end{aligned}$$

Si $k \to \infty$, entonces $\max\limits_{x\in K} |\varphi_k(x) - \varphi(x)| \longrightarrow 0$ por lo tanto $|\,\langle T_f, \varphi_k\rangle - \langle T_f, \varphi\rangle\,| \longrightarrow 0$ en $\mathbb{C}$.
Así T_f es secuencialmente continuo y por lo tanto $T_f \in \mathscr{D}'$.

Por comodidad, a veces escribiremos $\langle f, \varphi\rangle$ en lugar de $\langle T_f, \varphi\rangle$.

Ejemplo 1.2.3 (La distribución δ de Dirac). *Para $x_0 \in \mathbb{R}^n$, definimos la distribución δ_{x_0} por medio de*

$$\langle \delta_{x_0}, \varphi\rangle := \varphi(x_0)$$

para todo $\varphi \in \mathscr{D}$. Es claro que la fórmula anterior define una distribución.

Se dice que una sucesión $\{T_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{D}'$ converge a una distribución $T \in \mathscr{D}'$ cuando $k \to \infty$ si para toda función $\varphi \in \mathscr{D}$, la sucesión de números complejos $\{\langle T_k, \varphi\rangle\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge al complejo $\langle T, \varphi\rangle$.

El Soporte de una Distribución

Decimos que una distribución $T \in \mathscr{D}'$ es **igual a cero** en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ si para toda función $\varphi \in \mathscr{D}$ que tenga soporte contenido en Ω se tiene que $\langle T, \varphi\rangle = 0$.

Si una distribución $T \in \mathscr{D}'$ es igual a cero en cada elemento de una familia de abiertos $(\Omega_i)_{i\in I}$ entonces T es igual a cero en $\Omega := \bigcup\limits_{i\in I} \Omega_i$ (ver [13], p. 26-28). Tenemos entonces la siguiente definición.

Definición 1.2.4. *Sea $T \in \mathscr{D}'$ una distribución sobre $\mathbb{R}^n$. Se llama **soporte de** T al complemento del mayor abierto de $\mathbb{R}^n$ donde T es igual a cero y lo denotaremos por $supp(T)$.*

Tenemos entonces que $x \in supp(T)$ si y sólo si T no es igual a cero en la vecindad de x.

Proposición 1.2.5. *Sean $T \in \mathscr{D}'$ y $\varphi \in \mathscr{D}$ tales que $supp(T) \cap supp(\varphi) = \phi$. Entonces $\langle T, \varphi \rangle = 0$.*

Demostración. Sea $K = supp(\varphi)$ compacto y para todo $y \in K$ sea U_y vecindad abierta de y tal que T es igual a cero en U_y. Sea además $h_y \in \mathscr{D}$ tal que $supp(h_y) \subset U_y$, $h_y(y) = 1$ y $0 \leq h_y \leq 1$. Pongamos, para todo $y \in K$,

$$A_y = \{x \in \mathbb{R}^n | h_y(x) > 0\}.$$

Entonces $K \subset \bigcup\limits_{y \in K} A_y$ y como K es compacto, existen $y_1, \dots, y_m \in K$ tales que $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{m} A_{y_i}$.

Para $1 \leq j \leq m$ sea $\psi_j = \begin{cases} \frac{\varphi h_{y_j}}{h_{y_1} + \cdots + h_{y_m}} & \text{si } x \in \bigcup\limits_{i=1}^{m} A_{y_i} \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases}$

Entonces, para todo $j = 1, \dots, m$, $supp(\psi_j) \subset supp(h_{y_j}) \subset U_{y_j}$ luego $\langle T, \psi_j \rangle = 0$. Finalmente $\varphi = \sum\limits_{i=1}^{m} \psi_j$ y así $\langle T, \varphi \rangle = 0$.

□

Diferenciación de Distribuciones

Queremos definir la derivada de una distribución T de tal forma que si T_f es la distribución definida por una función continuamente diferenciable f sobre $\mathbb{R}^n$, entonces la distribución definida por la función derivada $\partial f / \partial x_i$ coincida con la derivada de la distribución T_f con respecto a la variable x_i: para toda $\varphi \in \mathscr{D}$ tenemos

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \varphi dx \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x_i} \varphi dx_i \right) dx_1 \cdots dx_{i-1} dx_{i+1} \cdots dx_n \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(- \int\limits_{-\infty}^{\infty} f \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx_i \right) dx_1 \cdots dx_{i-1} dx_{i+1} \cdots dx_n \\
&= - \int\limits_{\mathbb{R}^n} f \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx \\
&= - \left\langle T_f, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle .
\end{aligned}$$

Siguiendo esta idea, la derivada de $T \in \mathscr{D}'$ con respecto a x_i será una nueva distribución definida de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial x_i} &: \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{C} \\
&\varphi \mapsto \left\langle \frac{\partial T}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle := - \left\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle .
\end{aligned}$$

Tenemos entonces la siguiente definición:

Definición 1.2.6. *Sean $T \in \mathscr{D}'$ una distribución en $\mathbb{R}^n$ y $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ un multiíndice. Entonces para cada $\varphi \in \mathscr{D}$ definimos*

$$\langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle := (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \varphi \rangle . \tag{1.1}$$

Es sencillo probar que la fórmula 1.1 define una distribución (ver [13], p. 35).

Observemos que si $P(\partial) = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha \partial^\alpha$ es un operador diferencial parcial lineal con coeficientes constantes y $T \in \mathscr{D}'$ es una distribución, entonces para toda $\varphi \in \mathscr{D}$ se tiene:

$$\begin{aligned}
\langle P(\partial)T, \varphi \rangle &= \left\langle \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha \partial^\alpha T, \varphi \right\rangle \\
&= \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha \langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle \\
&= \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \varphi \rangle \\
&= \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha \langle T, (-\partial)^\alpha \varphi \rangle \\
&= \langle T, P(-\partial)\varphi \rangle .
\end{aligned}$$

Multiplicación de Distribuciones

Definiremos el producto entre dos distribuciones únicamente cuando una de las dos está dada por una función infinitamente diferenciable, es decir, definiremos la distribución fT, donde $f \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ y $T \in \mathscr{D}'$. Nuevamente nos aseguraremos de que si T proviene de una función infinitamente diferenciable g entonces la distribución fT_g coincida con la distribución definida por la función infinitamente diferenciable fg. Para esto, sea $\varphi \in \mathscr{D}$. Entonces

$$\begin{aligned}
\langle fg, \varphi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)\varphi(x)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} g(x)(f(x)\varphi(x))dx \\
&= \langle g, f\varphi \rangle .
\end{aligned}$$

Definición 1.2.7. *Sean $T \in \mathscr{D}'$ una distribución y $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Entonces definimos la distribución fT por medio de*

$$\langle fT, \varphi \rangle := \langle T, f\varphi \rangle \qquad \textit{para toda } \varphi \in \mathscr{D}. \tag{1.2}$$

Es fácil ver que en efecto la fórmula 1.2 define una distribución (ver [13], p. 117).

Ahora veamos que se cumple la regla del producto para las derivadas $\frac{\partial}{\partial x_j}$, con $1 \leq j \leq n$.

Teorema 1.2.8 (Regla del Producto). *Sean $T \in \mathscr{D}'$ una distribución, $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ y $j \in \{1, \ldots, n\}$. Entonces*

$$\frac{\partial (fT)}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} T + f \frac{\partial T}{\partial x_j}.$$

Demostración. Sea $\varphi \in \mathscr{D}$. Entonces

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_j} T + f \frac{\partial T}{\partial x_j}, \varphi \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_j} T, \varphi \right\rangle + \left\langle f \frac{\partial T}{\partial x_j}, \varphi \right\rangle \\
&= \left\langle T, \frac{\partial f}{\partial x_j} \varphi \right\rangle + \left\langle \frac{\partial T}{\partial x_j}, f\varphi \right\rangle \\
&= \left\langle T, \frac{\partial f}{\partial x_j} \varphi \right\rangle - \left\langle T, \frac{\partial (f\varphi)}{\partial x_j} \right\rangle \\
&= \left\langle T, \frac{\partial f}{\partial x_j} \varphi \right\rangle - \left\langle T, \frac{\partial f}{\partial x_j} \varphi + f \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right\rangle \\
&= - \left\langle T, f \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right\rangle \\
&= - \left\langle fT, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right\rangle \\
&= \left\langle \frac{\partial (fT)}{\partial x_j}, \varphi \right\rangle.
\end{aligned}$$

□

Distribuciones con Soporte Compacto

Se denota por $\mathscr{E}$ al espacio de funciones complejas sobre $\mathbb{R}^n$ infinitamente diferenciables con soporte arbitrario, dotado de la topología de la convergencia uniforme sobre compactos de las funciones y de sus derivadas. Esta topología es metrizable y se tiene que una sucesión $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathscr{E}$ converge a $0 \in \mathscr{E}$ si para todo compacto K y para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$ multiíndice, $\lim_{k \to \infty} \left(\max_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi_k(x)| \right) = 0$. Veremos que los funcionales lineales continuos sobre $\mathscr{E}$ se pueden identificar con las distribuciones con soporte compacto .

Sean $T \in \mathscr{D}'$ una distribución con soporte compacto K y $\varphi \in \mathscr{E}$. Entonces si $\psi \in \mathscr{D}$ es tal que $\psi \equiv 1$ en una vecindad de K tenemos que $\psi\varphi \in \mathscr{D}$ y por lo tanto podemos aplicarle T a $\psi\varphi$. Además si $\rho \in \mathscr{D}$ es tal que $\rho \equiv 1$ en una vecindad de K entonces $\langle T, \psi\varphi \rangle = \langle T, \rho\varphi \rangle$. En efecto, $(\psi - \rho)\varphi \equiv 0$ en una vecindad de K por lo tanto $supp((\psi - \rho)\varphi) \cap supp(T) = \phi$. Entonces, por la proposición 1.2.5,

$$\langle T, \psi\varphi \rangle - \langle T, \rho\varphi \rangle = \langle T, (\psi - \rho)\varphi \rangle = 0.$$

Pongamos entonces, para todo $\varphi \in \mathscr{E}$, $\langle T, \varphi\rangle := \langle T, \psi\varphi\rangle$, donde ψ es una función en $\mathscr{D}$ tal que $\psi \equiv 1$ en una vecindad de K.

Veamos que así se define un funcional lineal continuo sobre $\mathscr{E}$. La linealidad viene del hecho de que T es lineal sobre $\mathscr{D}$. Ahora, sean $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{E}$ una sucesión que converge a $0 \in \mathscr{E}$ y $\psi \in \mathscr{D}$ tal que $\psi \equiv 1$ en K. Entonces $\{\psi\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $\mathscr{D}$ que converge a $0 \in \mathscr{D}$. En efecto, para todo $k \in \mathbb{N}$, $supp(\psi\varphi_k) \subset supp(\psi)$ y para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\max_{x\in supp(\psi)} |\partial^\alpha(\psi\varphi_k)| &\leq \max_{x\in supp(\psi)} \sum_{0\leq\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \left|\partial^\beta\psi\partial^{\alpha-\beta}\varphi_k\right| \\
&\leq \sum_{0\leq\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \max_{x\in supp(\psi)} \left|\partial^\beta\psi\partial^{\alpha-\beta}\varphi_k\right| \\
&\leq \sum_{0\leq\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \max_{x\in supp(\psi)} |\partial^\beta\psi| \max_{x\in supp(\psi)} \left|\partial^{\alpha-\beta}\varphi_k\right| \longrightarrow 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, como T define un funcional secuencialmente continuo en $\mathscr{D}$, tenemos que, cuando $k \longrightarrow \infty$,

$$\langle T, \varphi_k\rangle = \langle T, \psi\varphi_k\rangle \longrightarrow \langle T, 0\rangle = 0.$$

Recíprocamente, veamos que si L es un funcional lineal continuo sobre $\mathscr{E}$, entonces define una distribución con soporte compacto. Para todo $\varphi \in \mathscr{D} \subset \mathscr{E}$, definamos

$$\langle T, \varphi\rangle := L(\varphi).$$

Claramente T es una distribución.

Probaremos que T tiene soporte compacto. Supongamos que no. Entonces existe una sucesión $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{D}$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$, $supp(\varphi_k) \subset \{x \in \mathbb{R}^n : |x| > k\}$ y $\langle T, \varphi_k\rangle \geq 1$. Si $|x| \leq k$, tenemos que $\varphi_k \equiv 0$ en una vecindad de x, luego para todo compacto K y para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $\partial^\alpha\varphi_k \longrightarrow 0$ uniformemente sobre K, es decir, $\varphi_k \longrightarrow 0$ en $\mathscr{E}$. Como L es secuencialmente continua en $\mathscr{E}$, debemos tener que $L(\varphi_k) \longrightarrow L(0) = 0$, luego es imposible que $\langle T, \varphi_k\rangle \geq 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Finalmente veamos que L y T coinciden en $\mathscr{E}$. Sea $\{\psi_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{D}$ una sucesión tal que para todo $k \in \mathbb{N}$, $\psi_k(x) = 1$ si $|x| < k$ y $\psi_k(x) = 0$ si $|x| \geq 2k$. Entonces, para todo $\varphi \in \mathscr{E}$, $\psi_k\varphi \in \mathscr{D}$ y $\psi_k\varphi \longrightarrow \varphi$ en $\mathscr{E}$ cuando $k \longrightarrow \infty$. Por lo tanto,

$$L(\psi_k\varphi) \longrightarrow L(\varphi).$$

Para k suficientemente grande, $supp(T) \subset \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq k\}$, luego $\langle T, \varphi\rangle = \langle T, \psi_k\varphi\rangle$.
Pero $\langle T, \psi_j\varphi\rangle = L(\psi_j\varphi)$ para todo $j \in \mathbb{N}$, por lo tanto $\langle T, \varphi\rangle = L(\psi_j\varphi), \ \forall j \geq k$ y así

$$\langle T, \varphi\rangle = L(\psi_j\varphi) \longrightarrow L(\varphi).$$

Hemos probado que el espacio de las distribuciones con soporte compacto y el espacio de los funcionales lineales continuos sobre $\mathscr{E}$ están en correspondencia biunívoca. Se introduce entonces la siguiente notación:

Definición 1.2.9. *Llamaremos $\mathscr{E}'$ al espacio vectorial de distribuciones sobre $\mathbb{R}^n$ con soporte compacto.*

Ejemplo 1.2.10. *La distribución δ_{x_0} de Dirac es una distribución con soporte compacto $\{x_0\}$. Recíprocamente, si $T \in \mathscr{E}'$ es tal que $supp(T) = \{x_0\}$ entonces T es una combinación lineal finita de derivadas de δ_{x_0} (ver [11], p.255).*

El Producto Tensorial

Sean $\varphi, \psi \in \mathscr{D}$. Definimos el **producto tensorial de** φ **y** ψ, $\varphi \otimes \psi : \mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_y \longrightarrow \mathbb{C}$ por la fórmula:

$$\varphi \otimes \psi(x, y) = \varphi(x)\psi(y).$$

Entonces $\varphi \otimes \psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$.
Ahora trataremos de definir el producto tensorial de dos distribuciones $T, S \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$,

$$T \otimes S \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n).$$

Primero consideremos las dos distribuciones definidas por las funciones $\psi, \theta \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$.
Sea $\varphi(x, y) \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Entonces, por el teorema de Fubini,

$$\begin{aligned}
\langle \psi \otimes \theta, \varphi \rangle &= \langle \psi(x)\theta(y), \varphi(x, y) \rangle \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \psi(x)\theta(y)\varphi(x, y)dxdy \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(x) \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \theta(y)\varphi(x, y)dy \right) dx \\
&= \langle \psi(x), \langle \theta(y), \varphi(x, y) \rangle \rangle .
\end{aligned}$$

Si $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, entonces, para $x \in \mathbb{R}^n$ fijo la función $y \mapsto \varphi(x, y)$ pertenece a $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ y se tiene que $\forall S \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ la función $x \mapsto \langle S_y, \varphi(x, y) \rangle$ está en $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$. Tenemos la siguiente definición:

Definición 1.2.11. *Sean $T, S \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$. Se define $W \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ por medio de la siguiente fórmula: $\forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$,*

$$\langle W, \varphi(x, y) \rangle = \langle T_x, \langle S_y, \varphi(x, y) \rangle \rangle .$$

*A W se le llama **producto tensorial de** T **y** S y se escribe $T \otimes S := W$.*

La distribución W así definida existe y es única (ver [13], p. 108-109).

Lo que sigue es un resultado sobre el soporte del producto tensorial de dos distribuciones.

Teorema 1.2.12. *Sean $S, T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$. Entonces*

$$supp(S \otimes T) = supp(S) \times supp(T).$$

Demostración. Demostraremos la doble contenencia.

$\subset$: Sea $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ con $supp(\varphi) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus [supp(S) \times supp(T)]$.

Tomemos $U, V \subset \mathbb{R}^n$ abiertos tales que:

$$\begin{aligned} &supp(S) \subset U \\ &supp(T) \subset V \\ &supp(\varphi) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus [U \times V]. \end{aligned}$$

Si fijamos $x \in U$ entonces $\varphi(x, \cdot)$ tiene el soporte contenido en V^C, por lo tanto

$$\theta(x) := \langle T_y, \varphi(x, y) \rangle = 0.$$

Esto quiere decir que

$$\{x \in \mathbb{R}^n | \theta(x) \neq 0\} \subset U^C$$

y así $supp(\theta) \subset U^C \subset (supp(S))^C$. Entonces

$$\langle S_x \otimes T_y, \varphi(x, y) \rangle = \langle S_x, \theta(x) \rangle = 0.$$

Luego $S \otimes T$ es igual a cero sobre $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus [supp(S) \times supp(T)]$ y por lo tanto

$$supp(S \otimes T) \subset supp(S) \times supp(T).$$

$\supset$: Sea $(x_0, y_0) \in supp(S) \times supp(T)$.

Si A es una vecindad cualquiera de (x_0, y_0) entonces existen abiertos $U \ni x_0$ y $V \ni y_0$ tales que $U \times V \subset A$.

- $\exists \varphi \in \mathscr{D}$ tal que $supp(\varphi) \subset U$ y $\langle S, \varphi \rangle \neq 0$
- $\exists \psi \in \mathscr{D}$ tal que $supp(\psi) \subset V$ y $\langle T, \psi \rangle \neq 0$

Sea $\theta := \varphi \otimes \psi \in \mathscr{D}$. Entonces $supp(\theta) \subset U \times V \subset A$.

$$\begin{aligned} \langle S \otimes T, \theta \rangle &= \langle S_x, \langle T_y, \varphi(x)\psi(y) \rangle \rangle \\ &= \langle S_x, \varphi(x) \langle T_y, \psi(y) \rangle \rangle \\ &= \langle S, \varphi \rangle \langle T, \psi \rangle \neq 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto $(x_0, y_0) \in supp(S \otimes T)$.

$\square$

Convolución

Sean $S, T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$. En los casos en que la expresión tenga sentido, definimos la **convolución de S y T**, $S * T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ de la siguiente forma:
para todo $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$,

$$\langle S * T, \varphi \rangle := \langle S_x \otimes T_y, \varphi(x+y) \rangle .$$

Observemos que aunque $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, $\varphi(x+y)$ no tiene soporte compacto, a menos que $\varphi \equiv 0$. Se tiene que

$$supp(\varphi(x+y)) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n | x+y \in supp(\varphi)\}$$

es un subconjunto de $\mathbb{R}^{2n}$ paralelo al hiperplano $x+y=0$ y es no acotado. Entonces, para que la convolución tenga sentido, necesitamos que el conjunto $supp(\varphi(x+y)) \cap supp(S_x \otimes T_y)$ sea acotado $\forall \varphi \in \mathscr{D}$. El siguiente teorema nos da el caso más importante en el que existe la convolución de dos distribuciones.

Teorema 1.2.13. *Si $S \in \mathscr{E}'$ es una distribución con soporte compacto y $T \in \mathscr{D}'$ es una distribución arbitraria, entonces la convolución $S * T$ existe.*

Demostración. Sean $\varphi \in \mathscr{D}$, $A = supp(S)$ compacto y $B = supp(T)$. Entonces existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $\forall x \in A$, $|x| < M$. También existe $N \in \mathbb{R}$ tal que $\forall x \in supp(\varphi)$, $|x| < N$, ya que φ tiene soporte compacto.

Ahora, si $(x,y) \in \mathbb{R}^{2n}$ es tal que $x \in A$, $y \in B$ y $x+y \in supp(\varphi)$, entonces $|x+y| < N$ y

$$|y| = |(x+y) - x| \leq M + N.$$

Por lo tanto el conjunto

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n | x \in A,\ y \in B,\ x+y \in supp(\varphi)\}$$

es acotado. □

Ejemplo 1.2.14. *Sea $T \in \mathscr{D}'$ una distribución y $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Vamos a calcular $\delta_{x_0} * T$. Para toda $\varphi \in \mathscr{D}$,*

$$\begin{aligned} \langle \delta_{x_0} * T, \varphi \rangle &= \langle T_y, \langle \delta_{x_0}(x), \varphi(x+y) \rangle \rangle \\ &= \langle T_y, \varphi(y+x_0) \rangle . \end{aligned}$$

En particular $\delta * T = T$.

Las siguientes propiedades serán de gran utilidad en el siguiente capítulo.

Proposición 1.2.15. *Si $S \in \mathscr{E}'$, $T \in \mathscr{D}'$ y $\eta \in \mathbb{C}^n$ entonces*

$$(e^{\eta x} S) * (e^{\eta x} T) = e^{\eta x}(S * T) \qquad \text{(Aquí, } \eta x = \sum_{j=1}^{n} \eta_j x_j, \text{ para } x \in \mathbb{R}^n\text{).}$$

Demostración. Sea $\varphi \in \mathscr{D}$. Entonces

$$\begin{aligned}
\langle (e^{\eta x} S) * (e^{\eta x} T), \varphi \rangle &= \langle e^{\eta x} S_x, \langle e^{\eta y} T_y, \varphi(x+y) \rangle \rangle \\
&= \langle S_x, e^{\eta x} \langle T_y, e^{\eta y} \varphi(x+y) \rangle \rangle \\
&= \left\langle S_x, \left\langle T_y, e^{\eta(x+y)} \varphi(x+y) \right\rangle \right\rangle \\
&= \langle S * T, e^{\eta x} \varphi \rangle \\
&= \langle e^{\eta x} (S * T), \varphi \rangle .
\end{aligned}$$

□

Proposición 1.2.16. *Sean $T \in \mathscr{E}'$, $E \in \mathscr{D}'$ y $a \in \mathbb{R}^n$. Entonces*

$$T * \tau_a E = \tau_a T * E.$$

Aquí, $\langle \tau_a T, \varphi \rangle = \langle T_x, \varphi(x+a) \rangle$, $\forall \varphi \in \mathscr{D}$. Ver, más adelante, la definición que se encuentra después del ejemplo 1.3.4 y el teorema 1.3.10.

Demostración. Sea $\varphi \in \mathscr{D}$. Entonces

$$\begin{aligned}
\langle T * \tau_a E, \varphi \rangle &= \langle T_x, \langle \tau_a E_y, \varphi(x+y) \rangle \rangle \\
&= \langle T_x, \langle E_y, \varphi(x+(y+a)) \rangle \rangle \\
&= \langle T_x, \langle E_y, \varphi((x+a)+y) \rangle \rangle \\
&= \langle T_x \otimes E_y, \varphi((x+a)+y) \rangle \\
&= \langle E_y, \langle T_x, \varphi((x+a)+y) \rangle \rangle \\
&= \langle E_y, \langle \tau_a T_x, \varphi(x+y) \rangle \rangle \\
&= \langle \tau_a T * E, \varphi \rangle .
\end{aligned}$$

□

Proposición 1.2.17. *Sean $E \in \mathscr{E}'$ y $T \in \mathscr{D}'$. Entonces para todo multiíndice $\alpha \in \mathbb{N}^n$,*

$$\partial^\alpha (E * T) = (\partial^\alpha E) * T = E * (\partial^\alpha T).$$

Demostración. Sea $\varphi \in \mathscr{D}$. Entonces

$$\begin{aligned}
\langle \partial^\alpha (E * T), \varphi \rangle &= \langle E * T, (-\partial)^\alpha \varphi \rangle \\
&= \langle E_x, \langle T_y, (-\partial)^\alpha \varphi(x+y) \rangle \rangle \\
&= \langle E_x, \langle \partial^\alpha T_y, \varphi(x+y) \rangle \rangle \\
&= \langle E * (\partial^\alpha T), \varphi \rangle .
\end{aligned}$$

Similarmente, $\partial^\alpha (E * T) = (\partial^\alpha E) * T$. □

Distribuciones Temperadas

Sea $\mathscr{S} := \left\{\varphi \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n) : \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n, \sup\limits_{x \in \mathbb{R}^n} |x^{\alpha}\partial^{\beta}\varphi(x)| < \infty\right\}$, el espacio de funciones complejas sobre $\mathbb{R}^n$ infinitamente diferenciables que, junto con todas sus derivadas, decrecen más rápidamente que cualquier polinomio. Este espacio se conoce como el **Espacio de Schwartz** y se considera dotado de la topología metrizable dada de la siguiente manera:

Decimos que una sucesión $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{S}$ converge a $0 \in \mathscr{S}$ cuando $k \longrightarrow \infty$ si para todo par de multiíndices $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$,

$$\lim_{k\to\infty}\left(\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^{\alpha}\partial^{\beta}\varphi_k(x)|\right) = 0.$$

Nótese que $\mathscr{D} \subset \mathscr{S}$ y que si $\varphi_k \longrightarrow 0$ en $\mathscr{D}$ entonces también $\varphi_k \longrightarrow 0$ en $\mathscr{S}$.

Definición 1.2.18. *Una **distribución temperada** es una distribución que se puede extender a un funcional lineal continuo sobre $\mathscr{S}$. El espacio de las distribuciones temperadas, que es el espacio dual de $\mathscr{S}$, se denotará $\mathscr{S}'$.*

$\mathscr{D}$ es denso en $\mathscr{S}$, por lo tanto esta extensión está unívocamente determinada (ver [11], p. 62).

Proposición 1.2.19. *$\mathscr{D}$ es secuencialmente denso en $\mathscr{S}'$ (ver [11] p. 76.), es decir, $\forall T \in \mathscr{S}'$, $\exists\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{D}$ tal que $\forall \psi \in \mathscr{S}$,*

$$\lim_{k\to\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi_k\psi dx = \langle T, \psi\rangle\,.$$

Igualmente, se tiene que $\mathscr{D}$ es secuencialmente denso en $\mathscr{D}'$ (ver [13], Cap. VI, §4, Teorema XI).

Proposición 1.2.20. *Sean $P(\partial) = \sum_{|\alpha|\leq m} c_{\alpha}\partial^{\alpha}$ un operador diferencial parcial con coeficientes constantes, $\zeta \in \mathbb{C}^n$ y $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$. Entonces*

$$P(\partial)(e^{\zeta x}T) = e^{\zeta x}(P(\partial+\zeta)T).$$

Demostración.

1. Sea $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$. Entonces:

   • para $1 \leq j \leq n$ y $\alpha_j \in \mathbb{N}$ tenemos

$$\begin{aligned}
\partial_j^{\alpha_j}(e^{\zeta x}\varphi) &= \partial_j^{\alpha_j-1}(\zeta_j e^{\zeta x}\varphi + e^{\zeta x}\partial_j\varphi)\\
&= \partial_j^{\alpha_j-1}(e^{\zeta x}(\zeta_j+\partial_j)\varphi)\\
&= \partial_j^{\alpha_j-2}(\zeta_j e^{\zeta x}(\zeta_j+\partial_j)\varphi + e^{\zeta x}\partial_j(\zeta_j+\partial_j)\varphi)\\
&= \partial_j^{\alpha_j-2}(e^{\zeta x}(\zeta_j+\partial_j)^2\varphi)\\
&\;\vdots\\
&= e^{\zeta x}(\zeta_j+\partial_j)^{\alpha_j}\varphi,
\end{aligned}$$

- para $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ tenemos

$$\begin{aligned}
\partial^\alpha(e^{\zeta x}\varphi) &= \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n}(e^{\zeta x}\varphi) \\
&= \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_{n-1}^{\alpha_{n-1}}(e^{\zeta x}(\zeta_n + \partial_n)^{\alpha_n}\varphi) \\
&= \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_{n-2}^{\alpha_{n-2}}(e^{\zeta x}(\zeta_{n-1} + \partial_{n-1})^{\alpha_{n-1}}(\zeta_n + \partial_n)^{\alpha_n}\varphi) \\
&\vdots \\
&= e^{\zeta x}(\zeta_1 + \partial_1)^{\alpha_1} \dots (\zeta_n + \partial_n)^{\alpha_n}\varphi \\
&= e^{\zeta x}(\zeta + \partial)^\alpha \varphi.
\end{aligned}$$

- Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
P(\partial)(e^{\zeta x}\varphi) &= \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha \partial^\alpha (e^{\zeta x}\varphi) \\
&= \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha e^{\zeta x}(\zeta + \partial)^\alpha \varphi \\
&= e^{\zeta x} P(\zeta + \partial)\varphi.
\end{aligned}$$

2. Sea $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$. Entonces existe una sucesión $\{\varphi_k\}_{k\geq 0} \subset \mathscr{D}$ tal que $T = \mathscr{D}' - \lim_{k\to\infty} \varphi_k$. Por lo tanto, $\forall \psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned}
\langle P(\partial)(e^{\zeta x}T), \psi\rangle &= \langle T, e^{\zeta x} P(-\partial)\psi\rangle \\
&= \lim_{k\to\infty} \langle \varphi_k, e^{\zeta x} P(-\partial)\psi\rangle \\
&= \lim_{k\to\infty} \langle P(\partial)(e^{\zeta x}\varphi_k), \psi\rangle \\
&= \lim_{k\to\infty} \langle e^{\zeta x} P(\partial + \zeta)\varphi_k, \psi\rangle \\
&= \lim_{k\to\infty} \langle \varphi_k, P(-\partial + \zeta)(e^{\zeta x}\psi)\rangle \\
&= \langle T, P(-\partial + \zeta)(e^{\zeta x}\psi)\rangle \\
&= \langle e^{\zeta x} P(\partial + \zeta) T, \psi\rangle.
\end{aligned}$$

□

1.3. La Transformada de Fourier

Definición 1.3.1. *Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ la **transformada de Fourier de** f se define por medio de*

$$(\mathcal{F}f)(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} f(x)dx, \qquad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$,

$$\left| \int\limits_{R^n} e^{-ix\xi} f(x)dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|dx = \|f\|_{L^1}.$$

Entonces, $\sup\limits_{\xi \in \mathbb{R}^n} |(\mathcal{F}f)(\xi)| \leq \|f\|_{L^1}$, luego $\mathcal{F}f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$.
De hecho, veremos que si $\varphi \in \mathscr{S}$, entonces $\mathcal{F}\varphi \in \mathscr{S}$, pero antes veamos algunas propiedades.

Proposición 1.3.2. *Para toda función $\varphi \in \mathscr{S}$, $\mathcal{F}\varphi \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ y para todo operador diferencial parcial con coeficientes constantes $P(\partial) = \sum\limits_{|\alpha| \leq m} c_\alpha \partial^\alpha$ tenemos:*

1. *$P(-\partial)(\mathcal{F}\varphi) = \mathcal{F}(P(ix)\varphi(x))$.*
2. *$\mathcal{F}(P(-i\partial)\varphi) = P(\xi)\mathcal{F}\varphi$.*

Demostración. 1. ▪ para $1 \leq j \leq n$ y $\alpha_j \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \partial_j^{\alpha_j}(\mathcal{F}\varphi)(\xi) &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} (-ix_j)^{\alpha_j} e^{-ix\xi} \varphi(x)dx \\ &= \mathcal{F}((-ix_j)^{\alpha_j}\varphi(x)). \end{aligned}$$

▪ para $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$,

$$\begin{aligned} \partial^\alpha(\mathcal{F}\varphi) &= \partial_1^{\alpha_1} \ldots \partial_n^{\alpha_n} \mathcal{F}\varphi \\ &= \partial_1^{\alpha_1} \ldots \partial_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \mathcal{F}((-ix_n)^{\alpha_n}\varphi(x)) \\ &\vdots \\ &= \mathcal{F}((-ix_1)^{\alpha_1} \cdots (-ix_n)^{\alpha_n}\varphi(x)) \\ &= \mathcal{F}((-ix)^\alpha \varphi(x)). \end{aligned}$$

▪ Entonces

$$\begin{aligned} P(-\partial)(\mathcal{F}\varphi) &= \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha (-\partial)^\alpha (\mathcal{F}\varphi) \\ &= \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha (-1)^\alpha \mathcal{F}((-ix)^\alpha \varphi(x)) \\ &= \mathcal{F}(P(ix)\varphi(x)). \end{aligned}$$

2. Para $1 \leq j \leq n$ pongamos $\hat{x_j} = (x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n)$, $\hat{\xi_j} = (\xi_1 \ldots, \xi_{j-1}, \xi_{j+1}, \ldots, \xi_n)$. Fijemos $\hat{x_j} \in \mathbb{R}^{n-1}$. Entonces para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} \frac{\partial\varphi}{\partial x_j} dx_j = e^{-i\hat{x_j}\hat{\xi_j}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ix_j\xi_j} \frac{\partial\varphi}{\partial x_j} dx_j$$

$$= -e^{-i\hat{x_j}\hat{\xi_j}} \int_{-\infty}^{\infty} -i\xi_j e^{-ix_j\xi_j}\varphi dx_j$$

$$= i\xi_j e^{-i\hat{x_j}\hat{\xi_j}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix_j\xi_j}\varphi dx_j,$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(-i\partial_j\varphi) &= -i \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j} dx_j d\hat{x_j} \\
&= \xi_j \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-i\hat{x_j}\hat{\xi_j}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix_j\xi_j}\varphi dx_j d\hat{x_j} \\
&= \xi_j\mathcal{F}\varphi.
\end{aligned}$$

Ahora, para todo multiíndice $\alpha \in \mathbb{N}^n$,

$$\mathcal{F}((-i\partial)^\alpha\varphi) = \xi^\alpha\mathcal{F}\varphi$$

y entonces $\mathcal{F}(P(-i\partial)\varphi) = P(\xi)\mathcal{F}\varphi$.

□

Teorema 1.3.3. *Si $\varphi \in \mathscr{S}$ entonces $\mathcal{F}\varphi \in \mathscr{S}$. Además, si $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{S}$ converge a $0 \in \mathscr{S}$ cuando $k \longrightarrow \infty$ entonces la sucesión $\{\mathcal{F}\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{S}$ converge a 0 en $\mathscr{S}$ cuando $k \longrightarrow \infty$.*

Demostración.

1. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$. Entonces

$$\begin{aligned}
\sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} \left|\xi^\alpha\partial^\beta\mathcal{F}\varphi\right| &= \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} \left|\xi^\alpha\mathcal{F}((ix)^\beta\varphi)\right| \\
&= \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} \left|\mathcal{F}(\partial^\alpha x^\beta\varphi)\right| \\
&\leq \|\partial^\alpha(x^\beta\varphi)\|_{L^1} \\
&\leq C\|(1+|x|)^{n+1}\partial^\alpha(x^\beta\varphi)\|_{L^\infty} < \infty.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathcal{F}\varphi \in \mathscr{S}$.

2. Si $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{S}$ converge a 0 en $\mathscr{S}$, entonces por la parte anterior, para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ y para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$

$$\left|\xi^\alpha\partial^\beta\mathcal{F}\varphi_k\right| \leq C\|(1+|x|)^{n+1}\partial^\alpha(x^\beta\varphi_k)\|_{L^\infty} \longrightarrow 0$$

cuando $k \longrightarrow \infty$. Por lo tanto $\mathcal{F}\varphi_k \longrightarrow 0$ en $\mathscr{S}$.

□

Ejemplo 1.3.4. *Calcularemos* $\mathcal{F}(e^{-|x|^2/2})$.

1. *Supongamos* $n = 1$ *y sea* $\varphi(x) = e^{-x^2/2} \in \mathscr{S}$. *Entonces* $\varphi'(x) = -xe^{-x^2/2}$, *es decir,* φ *es solución de la ecuación diferencial*
$$\varphi' + x\varphi = 0.$$
Ahora, si tomamos transformada de Fourier en esta ecuación diferencial obtenemos, por la proposición 1.3.2,
$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left(\frac{d}{dx}\varphi\right) + \mathcal{F}(x\varphi) &= 0\\ i\xi\mathcal{F}\varphi + i\left(\frac{d}{d\xi}\mathcal{F}\varphi\right) &= 0\\ (\mathcal{F}\varphi)' + \xi(\mathcal{F}\varphi) &= 0.\end{aligned}$$
Por lo tanto $\mathcal{F}\varphi$ *es solución de la misma ecuación diferencial, es decir* $\mathcal{F}\varphi = c\varphi$ *para alguna constante* c *y se tiene* $c = \mathcal{F}\varphi(0) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}dx = \sqrt{2\pi}$. *Entonces*
$$\mathcal{F}(e^{-x^2/2})(\xi) = \sqrt{2\pi}e^{-\xi^2/2}.$$

2. *Ahora supongamos* $n \geq 2$ *y sea* $\varphi(x) = e^{-|x|^2/2}$. *Entonces* $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$,
$$\begin{aligned}\mathcal{F}\varphi(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi}e^{-|x|^2/2}dx\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^{n} e^{-ix_j\xi_j}e^{-x_j^2/2}dx\\ &= \prod_{j=1}^{n}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ix_j\xi_j}e^{-x_j^2/2}dx_j\\ &= \prod_{j=1}^{n}\sqrt{2\pi}e^{-\xi_j^2/2}\\ &= (2\pi)^{n/2}e^{-|\xi|^2/2}.\end{aligned}$$

Ahora definamos algunas funciones que aparecerán más adelante. Sea $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ una función.

1. Para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, definimos la **dilatación de** φ **por** λ,
$$\sigma_\lambda\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$$
por medio de $\sigma_\lambda\varphi(x) := \varphi(\lambda x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

2. Para cada $h \in \mathbb{R}^n$, definimos **la traslación de** φ **por** h,
$$\tau_h\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$$

por medio de $\tau_h\varphi(x) := \varphi(x-h)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

Estas operaciones se comportan de la siguiente forma con respecto a la transformada de Fourier:

Proposición 1.3.5. *Sean $\varphi \in \mathscr{S}$, $h \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Entonces:*

1. $\mathcal{F}(\tau_h\varphi) = e^{-ih\xi}\mathcal{F}\varphi$.
2. $\mathcal{F}(e^{ihx}\varphi) = \tau_h\mathcal{F}\varphi$.
3. $\mathcal{F}(\sigma_\lambda\varphi) = |\lambda|^{-n}\sigma_{\frac{1}{\lambda}}\mathcal{F}\varphi$.

Demostración. 1. $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\tau_h\varphi)(\xi) &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi}\varphi(x-h)dx \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i(y+h)\xi}\varphi(y)dy \\ &= e^{-ih\xi}\mathcal{F}\varphi.\end{aligned}$$

2. $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(e^{ihx}\varphi)(\xi) &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi+ihx}\varphi(x)dx \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-ix(\xi-h)}\varphi(x)dx \\ &= \mathcal{F}\varphi(\xi-h) \\ &= \tau_h\mathcal{F}\varphi.\end{aligned}$$

3. $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\sigma_\lambda\varphi)(\xi) &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi}\varphi(\lambda x)dx \\ &= |\lambda|^{-n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i\frac{y}{\lambda}\xi}\varphi(y)dy \\ &= |\lambda|^{-n}\mathcal{F}\varphi(\xi/\lambda) \\ &= |\lambda|^{-n}\sigma_{\frac{1}{\lambda}}\mathcal{F}\varphi.\end{aligned}$$

$\square$

Nótese que $\forall \varphi, \psi \in \mathscr{S}$,

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{F}\varphi, \psi \rangle &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} \varphi(x) dx \right) \psi(\xi) d\xi \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} \psi(\xi) d\xi \right) dx \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \mathcal{F}\psi dx \\
&= \langle \varphi, \mathcal{F}\psi \rangle .
\end{aligned}$$

La transformada de Fourier $\mathcal{F} : \mathscr{S} \longrightarrow \mathscr{S}$ tiene una transformada inversa:

Sea $\mathcal{F}^{-1} : \mathscr{S} \longrightarrow \mathscr{S}$ el operador definido por la fórmula:

$$\mathcal{F}^{-1}\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} \varphi(\xi) d\xi.$$

para todo $\varphi \in \mathscr{S}$. Demostraremos que $\mathcal{F}^{-1}$ es la transformación inversa de la transformada de Fourier. Para esto necesitaremos la siguiente proposición.

Proposición 1.3.6. *Sean $j \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tal que $\int\limits_{\mathbb{R}^n} j(x)dx = 1$ y $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ continua en $x = 0$. Entonces*

$$\varphi(0) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \epsilon^{-n} j\left(\frac{x}{\epsilon}\right) dx.$$

Demostración. Podemos limitarnos al caso en que $\varphi(0) = 0$. Si no, consideraremos la función $\varphi(x) - \varphi(0)$ y el resultado seguirá de inmediato.

Dado $\eta > 0$, sea $\gamma > 0$ tal que $\forall x \in \mathbb{R}^n$, si $|x| \leq \gamma$ entonces $|\varphi(x)| < \frac{\eta}{\|j\|_{L^1}}$ (continuidad de φ en 0). Entonces:

- $$\begin{aligned}
\left| \int\limits_{|x|\leq\gamma} \varphi(x)\epsilon^{-n} j\left(\frac{x}{\epsilon}\right) dx \right| &\leq \int\limits_{|x|\leq\gamma} \frac{\eta}{\|j\|_{L^1}} \epsilon^{-n} \left| j\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \right| dx \\
&= \frac{\eta}{\|j\|_{L^1}} \int\limits_{|y|\leq\frac{\gamma}{\epsilon}} |j(y)|\, dy \\
&\leq \eta.
\end{aligned}$$

- $$\left| \int\limits_{|x|>\gamma} \varphi(x)\epsilon^{-n} j\left(\frac{x}{\epsilon}\right) dx \right| \leq \int\limits_{|y|>\frac{\gamma}{\epsilon}} |\varphi(\epsilon y)||j(y)|dy$$
$$\leq \|\varphi\|_{L^\infty} \int\limits_{|y|>\frac{\gamma}{\epsilon}} |j(y)|\, dy \longrightarrow 0$$

cuando $\epsilon \to 0^+$ pues $j \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Por lo tanto,

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\epsilon^{-n} j\left(\frac{x}{\epsilon}\right) dx = 0 = \varphi(0).$$

□

Teorema 1.3.7 (Fórmula de Inversión de Fourier). *Para toda función $\varphi \in \mathscr{S}$ y para todo $x \in \mathbb{R}^n$ se tiene*

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} \mathcal{F}\varphi(\xi) d\xi = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}\varphi(x).$$

Demostración. 1. Primero probaremos el teorema cuando $x = 0$. Sea $v(x) = \frac{e^{-|x|^2/2}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}$. Entonces, por la proposición anterior, tenemos que

$$\begin{aligned}
\varphi(0) &= \lim_{\epsilon\to 0^+} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\epsilon^{-n} v\left(\frac{x}{\epsilon}\right) dx \\
&= \lim_{\epsilon\to 0^+} \left\langle \varphi, \epsilon^{-n}\sigma_{\frac{1}{\epsilon}} v \right\rangle \\
&= \lim_{\epsilon\to 0^+} \left\langle \varphi, \epsilon^{-n}\sigma_{\frac{1}{\epsilon}} \frac{\mathcal{F}v}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \right\rangle \quad \text{(ver el ejemplo 1.3.4)} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \lim_{\epsilon\to 0^+} \langle \varphi, \mathcal{F}\sigma_\epsilon v \rangle \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \lim_{\epsilon\to 0^+} \langle \mathcal{F}\varphi, \sigma_\epsilon v \rangle \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \langle \mathcal{F}\varphi, v(0) \rangle \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n} \langle \mathcal{F}\varphi, 1 \rangle \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}\varphi(\xi) d\xi \\
&= \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}\varphi(0).
\end{aligned}$$

Entonces $\varphi(0) = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}\varphi(0)$.

2. Ahora, para cualquier $x \in \mathbb{R}^n$, $\varphi(x) = \tau_{-x}\varphi(0) = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}(\tau_{-x}\varphi)(0)$, por lo tanto

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{R^n} \mathcal{F}(\tau_{-x}\varphi)(\xi)d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{R^n} e^{ix\xi}\mathcal{F}\varphi(\xi)d\xi \\ &= \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}\varphi(x).\end{aligned}$$

$\square$

Nótese que $\forall \varphi, \psi \in \mathscr{S}$,

$$\begin{aligned}\left\langle \mathcal{F}^{-1}\varphi, \psi \right\rangle &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi}\varphi(x)dx\right)\psi(\xi)d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\varphi(x)\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi}\psi(\xi)d\xi\right)dx \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^n}\varphi(x)\mathcal{F}^{-1}\psi dx \\ &= \left\langle \varphi, \mathcal{F}^{-1}\psi \right\rangle.\end{aligned}$$

Observación 1.3.8. *Para toda función $\varphi \in \mathscr{S}$ y para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$,*

$$\mathcal{F}^{-1}\varphi(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi}\varphi(x)dx = \frac{1}{(2\pi)^n}\mathcal{F}\varphi(-\xi) = \frac{1}{(2\pi)^n}\check{\mathcal{F}}\varphi(\xi).$$

Ahora nos dispondremos a definir la transformada de Fourier de una distribución $T \in \mathscr{S}'$ de tal forma que coincida con lo que ya hemos definido cuando T está dada por una función $\varphi \in \mathscr{S}$.

Definición 1.3.9. *Sea $T \in \mathscr{S}'$. Entonces definimos la transformada de Fourier, $\mathcal{F}T : \mathscr{S} \longrightarrow \mathbb{C}$ y la transformada inversa de Fourier de T, $\mathcal{F}^{-1}T : \mathscr{S} \longrightarrow \mathbb{C}$ por medio de*

$$\langle \mathcal{F}T, \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}\varphi \rangle$$

$$\left\langle \mathcal{F}^{-1}T, \varphi \right\rangle = \left\langle T, \mathcal{F}^{-1}\varphi \right\rangle$$

para todo $\varphi \in \mathscr{S}$. Tenemos que $\mathcal{F}T$ y $\mathcal{F}^{-1}T$ también son distribuciones temperadas.

Así como extendimos la transformada de Fourier a $\mathscr{S}'$, mirando su comportamiento en $\mathscr{S}$, también podemos extender otros operadores que actúan sobre $\mathscr{S}$.

Teorema 1.3.10. *Los siguientes operadores de $\mathscr{S}$ en $\mathscr{S}$ se extienden de manera única a operadores lineales secuencialmente continuos de $\mathscr{S}'$ en $\mathscr{S}'$:*

1. *Para todo $h \in \mathbb{R}^n$, τ_h*
2. *Para todo $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, σ_λ*

por medio de las fórmulas:

1. $\langle \tau_h T, \varphi \rangle = \langle T, \tau_{-h}\varphi \rangle$
2. $\langle \sigma_\lambda T, \varphi \rangle = (\lambda)^{-n} \left\langle T, \sigma_{\frac{1}{\lambda}}\varphi \right\rangle$

$\forall T \in \mathscr{S}'$, $\forall \varphi \in \mathscr{S}$.

De hecho, por medio de las fórmulas anteriores (con $\varphi \in \mathscr{D}$) se extienden los operadores τ_h y σ_λ a $\mathscr{D}'$. Así, en el ejemplo 1.2.14 mostramos que $\forall T \in \mathscr{D}'$ y $\forall x_0 \in \mathbb{R}^m$, $\delta_{x_0} * T = \tau_{x_0} T$ (ver también la proposición 1.2.16).

Miremos algunos ejemplos importantes de transformaciones de Fourier de distribuciones temperadas.

Ejemplo 1.3.11. *Consideremos a la función 1 como distribución temperada, o sea, para todo $\varphi \in \mathscr{S}$,*

$$\langle 1, \varphi \rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)dx.$$

Entonces, $\forall \varphi \in \mathscr{S}$,

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}1, \varphi \rangle &= \langle 1, \mathcal{F}\varphi \rangle \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}\varphi(\xi)d\xi \\ &= (2\pi)^n \varphi(0) \\ &= \langle (2\pi)^n \delta_0, \varphi \rangle \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\mathcal{F}(1) = (2\pi)^n \delta.$$

Ejemplo 1.3.12. *Ahora vamos a calcular $\mathcal{F}(\delta)$. Sea $\varphi \in \mathscr{S}$. Entonces*

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}(\delta), \varphi \rangle &= \langle \delta, \mathcal{F}\varphi \rangle \\ &= \mathcal{F}\varphi(0) \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)dx \\ &= \langle 1, \varphi \rangle , \end{aligned}$$

es decir,

$$\mathcal{F}(\delta) = 1.$$

Observación 1.3.13. *Si $T \in \mathscr{E}'$, su transformada de Fourier es una función*

$$(\mathcal{F}T)(\xi) = \left\langle T_x, e^{-ix\xi} \right\rangle,$$

y su transformada de Fourier inversa también es una función

$$(\mathcal{F}^{-1}T)(x) = \left\langle T_\xi, e^{ix\xi} \right\rangle.$$

El teorema de Paley-Wiener-Schwartz (ver [4], p. 181) asegura que estas funciones se extienden a todo $\mathbb{C}^n$ como funciones analíticas.

1.4. Propiedades de la Transformada de Fourier

Esta sección contiene algunas identidades que serán necesarias más adelante, cuando estemos trabajando con operadores diferenciales parciales lineales con coeficientes constantes.

Proposición 1.4.1. *Sean $T \in \mathscr{S}'$ una distribución temperada, $\alpha \in \mathbb{N}^n$ un multiíndice y $h \in \mathbb{R}^n$. Entonces*

1. $\mathcal{F}((-i\partial)^\alpha T) = \xi^\alpha \mathcal{F}T$.
2. $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}T = \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}T = T$.
3. $\mathcal{F}(\tau_h T) = e^{-ih\xi}\mathcal{F}T$.
4. $\mathcal{F}(e^{ihx}T) = \tau_h \mathcal{F}T$.

Demostración. Sea $\varphi \in \mathscr{S}$. Entonces:

1. $\langle \mathcal{F}((-i\partial)^\alpha T), \varphi\rangle = \langle T, (i\partial)^\alpha(\mathcal{F}\varphi)\rangle = \langle T, \mathcal{F}(x^\alpha\varphi)\rangle = \langle \mathcal{F}T, \xi^\alpha\varphi\rangle = \langle \xi^\alpha\mathcal{F}T, \varphi\rangle$.
2. $\left\langle \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}T, \varphi \right\rangle = \left\langle T, \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}\varphi \right\rangle = \langle T, \varphi\rangle$.
3. Como $\mathscr{S}$ es denso en $\mathscr{S}'$ (pues $\mathscr{D}$ es denso en $\mathscr{S}'$), existe una sucesión $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{S}$ tal que $\varphi_k \longrightarrow T$ en $\mathscr{S}'$. Entonces

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{F}(\tau_h T), \varphi\rangle &= \lim_{k\to\infty} \langle \mathcal{F}(\tau_h\varphi_k), \varphi\rangle \quad \text{pues } \tau_h \text{ y } \mathcal{F} \text{ son secuencialmente continuas} \\
&= \lim_{k\to\infty} \left\langle e^{-ih\xi}\mathcal{F}\varphi_k, \varphi \right\rangle \\
&= \left\langle e^{-ih\xi}\mathcal{F}T, \varphi \right\rangle.
\end{aligned}$$

4. Existe una sucesión $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{S}$ tal que $\varphi_k \longrightarrow T$ en $\mathscr{S}'$. Entonces

$$\begin{aligned}
\left\langle \mathcal{F}(e^{ihx}T), \varphi \right\rangle &= \lim_{k\to\infty} \left\langle \mathcal{F}(e^{ihx}\varphi_k), \varphi \right\rangle \quad \text{pues } \mathcal{F} \text{ es secuencialmente continua} \\
&= \lim_{k\to\infty} \langle \tau_h(\mathcal{F}\varphi_k), \varphi \rangle \\
&= \langle \tau_h(\mathcal{F}T), \varphi \rangle .
\end{aligned}$$

□

Proposición 1.4.2. *Sean $P(\partial) = \sum_{|\alpha|\le m} c_\alpha \partial^\alpha$ un operador diferencial parcial con coeficientes constantes y $S \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. Entonces*

$$P(\partial)\mathcal{F}^{-1}(S) = \mathcal{F}_\xi^{-1}(P(i\xi)S).$$

Demostración. Sea $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Entonces

$$\begin{aligned}
\left\langle P(\partial)\mathcal{F}^{-1}S, \varphi \right\rangle &= \left\langle \mathcal{F}^{-1}S, P(-\partial)\varphi \right\rangle \\
&= \left\langle \mathcal{F}^{-1}S, P(-\partial)\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}\varphi) \right\rangle \\
&= \left\langle \mathcal{F}^{-1}S, \mathcal{F}(P(ix)\mathcal{F}^{-1}\varphi) \right\rangle \\
&= \left\langle S, P(ix)\mathcal{F}^{-1}\varphi \right\rangle \\
&= \left\langle \mathcal{F}_\xi^{-1}(P(i\xi)S), \varphi \right\rangle .
\end{aligned}$$

□

Teorema 1.4.3. *Sean $S \in \mathscr{E}'$ y $T \in \mathscr{S}'$. Entonces*

$$\mathcal{F}(S * T) = (\mathcal{F}T)(\mathcal{F}S).$$

Demostración. Sea $\varphi \in \mathscr{D}$. Entonces

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{F}(S*T), \varphi \rangle &= \langle S*T, \mathcal{F}\varphi \rangle \\
&= \langle T_y, \langle S_x, (\mathcal{F}\varphi)(x+y) \rangle \rangle \\
&= \left\langle T_y, \left\langle S_x, \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi(x+y)}\varphi(\xi)d\xi \right\rangle \right\rangle \\
&= \left\langle T_y, \left\langle S_x, \left\langle \varphi(\xi), e^{-i\xi(x+y)} \right\rangle \right\rangle \right\rangle \\
&= \left\langle T_y, \left\langle S_x \otimes \varphi(\xi), e^{-i\xi(x+y)} \right\rangle \right\rangle \\
&= \left\langle T_y, \left\langle \varphi(\xi), \left\langle S_x, e^{-i\xi(x+y)} \right\rangle \right\rangle \right\rangle \\
&= \left\langle T_y, \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\xi) \left\langle S_x, e^{-i\xi(x+y)} \right\rangle d\xi \right\rangle
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left\langle T_y, \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(\xi)\mathcal{F}S(\xi)e^{-i\xi y}d\xi \right\rangle \qquad \text{(ver la observación 1.3.13)} \\
&= \langle T, \mathcal{F}(\varphi\mathcal{F}S)\rangle \\
&= \langle \mathcal{F}T, \varphi\mathcal{F}S\rangle \\
&= \langle (\mathcal{F}T)(\mathcal{F}S), \varphi\rangle \,.
\end{aligned}
$$

□

1.5. La Transformada de Laplace

En esta sección definiremos la transformada de Laplace de las distribuciones con soporte compacto y veremos cómo se relaciona con la transformada de Fourier.

Definición 1.5.1. *Sea $T \in \mathscr{E}'$. La* ***transformada de Laplace de*** *T es la función $\mathcal{L}T$ que se define, para todo $y \in \mathbb{R}^n$ por medio de*

$$(\mathcal{L}T)(y) := \langle T_x, e^{xy}\rangle \,.$$

Nótese que $(\mathcal{L}T)(y) = (\mathcal{F}T)(iy)$ y por lo tanto $\mathcal{L}T$ es una función analítica, como se observó en 1.3.13.

Ejemplo 1.5.2. *Si $a \in \mathbb{R}^n$ tenemos que, para $y \in \mathbb{R}^n$,*

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{L}\delta_a)(y) &= \langle \delta_a(x), e^{xy}\rangle \\
&= e^{ay}.
\end{aligned}
$$

1.6. Medidas de Radon

Sea K un compacto en $\mathbb{R}^n$. Se denota por $C_0(K)$ al espacio de las funciones continuas sobre $\mathbb{R}^n$ cuyo soporte está contenido en K. Si dotamos a este espacio de la norma $\|\cdot\|_K$, donde
$\|\varphi\|_K = \max\limits_{x\in K} |\varphi(x)| \; \forall\varphi \in C_0(K)$, entonces resulta ser un espacio de Banach.

Ahora sea $\mathfrak{K} = \bigcup\{C_0(K) | K \subset \mathbb{R}^n,\ K \text{ es compacto}\}$, dotado de la topología localmente convexa más fina tal que todas las inyecciones canónicas

$$i_K : C_0(K) \longrightarrow \mathfrak{K}$$

son continuas.

Una **medida de Radon** μ sobre $\mathbb{R}^n$ es una forma lineal y continua sobre $\mathfrak{K}$, y está caracterizada por la siguiente propiedad:

Para todo compacto K de $\mathbb{R}^n$, existe una constante c tal que para toda $\varphi \in C_0(K)$ se tiene

$$|\mu(\varphi)| \leq c\|\varphi\|_K.$$

Como $\mu = \mu_1 + i\mu_2 = (\mu_1^+ - \mu_1^-) + i(\mu_2^+ - \mu_2^-)$, el teorema de Representación de Riesz asegura que existe una medida de Borel $d\mu$ sobre $\mathbb{R}^n$, tal que, $\forall \varphi \in \mathfrak{K}$,

$$\mu(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) d\mu(x).$$

Si μ es una medida de Radon sobre $\mathbb{R}^n$ entonces define una distribución de la siguiente forma: para toda $\varphi \in \mathscr{D}$, ponemos

$$\langle \mu, \varphi \rangle := \mu(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) d\mu(x).$$

Es claro que este funcional es lineal. Ahora, si $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{D}$ es una sucesión que converge a φ en $\mathscr{D}$, entonces existe una constante c tal que

$$|\mu(\varphi_k) - \mu(\varphi)| = |\mu(\varphi_k - \varphi)| \leq c\|\varphi_k - \varphi\|_K \longrightarrow 0$$

cuando $k \to \infty$.

Ejemplo 1.6.1. *La distribución δ_a es una medida de Radon positiva para todo $a \in \mathbb{R}^n$.*

Ya que todas las medidas de Radon son distribuciones, se define el **soporte de una medida de Radon** de la misma manera que el soporte de una distribución. Ahora, si una medida de Radon μ tiene soporte compacto, entonces μ se puede extender a un funcional lineal y continuo sobre el espacio de funciones complejas continuas sobre $\mathbb{R}^n$ con soporte arbitrario. Esta extensión se consigue de una manera similar a la extensión de distribuciones con soporte compacto, presentada en la sección 1.2.

Observación 1.6.2. *Si μ es una medida de Radon con soporte compacto entonces podemos hallar su transformada de Laplace. En el siguiente capítulo nos será de gran utilidad hallarla. Por lo tanto tenemos:*

$$(\mathcal{L}\mu)(x) = \langle \mu(\eta), e^{\eta x} \rangle .$$

Capítulo 2

El Teorema de Malgrange-Ehrenpreis

El teorema de Malgrange-Ehrenpreis afirma que todo operador diferencial parcial lineal con coeficientes constantes tiene una solución fundamental. Esto quiere decir que para todo operador diferencial $P(\partial) = \sum\limits_{|\alpha|\leq m} c_\alpha \partial^\alpha$ existe una distribución $E \in \mathscr{D}'$ tal que

$$P(\partial)E = \delta.$$

En la primera parte de este capítulo presentaremos una demostración constructiva de este teorema. Es decir, mostraremos la fórmula explícita de una solución $E \in \mathscr{D}'$, que fue hallada por P. Wagner y se encuentra en [16].

Más adelante calcularemos soluciones fundamentales de los operadores de Cauchy-Riemann, de Laplace y de onda, utilizando la fórmula descrita en la demostración del teorema de Malgrange-Ehrenpreis.

Finalmente, definiremos el concepto de solución fundamental de un núcleo de convolución. Los operadores de convolución en $\mathscr{D}'$ están dados exactamente por las distribuciones con soporte compacto. Las distribuciones $T \in \mathscr{E}'$ para las cuales existe una solución fundamental del correspondiente operador de convolución, o sea, una distribución $E \in \mathscr{D}'$ con $T * E = \delta$, forman una clase importante de distribuciones y son llamadas **distribuciones invertibles** (ver [5] p. 330-342). En particular las distribuciones con soporte finito tienen esta propiedad como se mostrará más adelante. Esta prueba también es constructiva y está hecha en [16].

2.1. El Teorema de Malgrange-Ehrenpreis

Para describir la fórmula de una solución fundamental, empezaremos por considerar un sistema lineal de ecuaciones. Por lo tanto, antes de demostrar el teorema, probaremos el siguiente resultado.

Lema 2.1.1. *Si $\lambda_0, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ son diferentes dos a dos, entonces la solución única del sistema lineal de ecuaciones*

$$\sum_{j=0}^{m} a_j \lambda_j^k = \begin{cases} 0 & si\ k = 0, \ldots, m-1 \\ 1 & si\ k = m \end{cases}$$

está dada por $a_j = \prod\limits_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{m} \frac{1}{\lambda_j - \lambda_k}$.

Demostración. Sea Λ la matriz asociada a este sistema lineal. Entonces $\Lambda = \left(\lambda_j^k\right)_{kj}$ es una matriz de Vandermonde. Esta matriz es invertible pues los λ_j son diferentes dos a dos. Por lo tanto el sistema tiene una única solución.

Sea $p(z) = \prod\limits_{j=0}^{m}(z - \lambda_j)$. Entonces las raíces de p son precisamente los $\lambda_j,\ j = 0, \ldots, m$. Ahora tomemos N suficientemente grande, de tal forma que $|\lambda_j| < \frac{N}{2}$ para todo $j = 0, \ldots, m$. Entonces, por el teorema del residuo de Cauchy, para $0 \leq k \leq m$ se tiene:

$$\int\limits_{|z|=N} \frac{z^k}{p(z)} dz = 2\pi i \sum_{j=0}^{m} \frac{\lambda_j^k}{p'(\lambda_j)}.$$

Haciendo tender N a ∞ en el lado izquierdo de la igualdad, obtenemos

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{p'(\lambda_j)} \lambda_j^k &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{N \to \infty} \int\limits_{|z|=N} \frac{z^k}{p(z)} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{N \to \infty} \int_0^{2\pi} \frac{\left(Ne^{it}\right)^k iNe^{it}}{\prod\limits_{j=0}^{m} (Ne^{it} - \lambda_j)} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{N \to \infty} \int_0^{2\pi} \frac{N^{k+1} e^{(k+1)it}}{\prod\limits_{j=0}^{m} (Ne^{it} - \lambda_j)} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{N \to \infty} \frac{N^{k+1}}{N^{m+1}} \int_0^{2\pi} \frac{e^{(k+1)it}}{\prod\limits_{j=0}^{m} \left(e^{it} - \frac{\lambda_j}{N}\right)} dt. \end{aligned}$$

Ahora, para $0 \leq j \leq m$, tenemos que $|e^{it} - \frac{\lambda_j}{N}| \geq 1 - \frac{|\lambda_j|}{N} > \frac{1}{2}$, luego

$$\int_0^{2\pi} \left| \frac{e^{(k+1)it}}{\prod_{j=0}^{m} \left(e^{it} - \frac{\lambda_j}{N}\right)} dt \right| \leq \int_0^{2\pi} 2^{m+1} dt = 2^{m+2}\pi.$$

Se puede entonces aplicar el teorema de la convergencia dominada y se obtiene:
Si $k < m$,

$$\frac{1}{2\pi} \lim_{N\to\infty} \frac{N^{k+1}}{N^{m+1}} \int_0^{2\pi} \frac{e^{(k+1)it}}{\prod_{j=0}^{m} \left(e^{it} - \frac{\lambda_j}{N}\right)} dt = 0.$$

Si $k = m$,

$$\frac{1}{2\pi} \lim_{N\to\infty} \frac{N^{m+1}}{N^{m+1}} \int_0^{2\pi} \frac{e^{(m+1)it}}{\prod_{j=0}^{m} \left(e^{it} - \frac{\lambda_j}{N}\right)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dt = 1.$$

Entonces tenemos

$$\sum_{j=0}^{m} \frac{1}{p'(\lambda_j)} \lambda_j^k = \begin{cases} 0 & \text{si } k = 0, \dots, m-1 \\ 1 & \text{si } k = m \end{cases},$$

luego la única solución del sistema debe ser $a_j = \frac{1}{p'(\lambda_j)}$ y $p'(\lambda_j) = \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq j}}^{m} (\lambda_j - \lambda_k)$.

$\square$

Teorema 2.1.2. *Sea $P(\xi) = \sum_{|\alpha|\leq m} c_\alpha \xi^\alpha \in \mathbb{C}[\xi] \setminus \{0\}$ un polinomio de grado m sobre $\mathbb{R}^n$, no idénticamente nulo. Si $\eta \in \mathbb{R}^n$ es tal que $P_m(\eta) \neq 0$, si $\lambda_0, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ son distintos dos a dos y si $a_j = \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq j}}^{m} (\lambda_j - \lambda_k)^{-1}$, entonces*

$$E = \frac{1}{\overline{P_m(2\eta)}} \sum_{j=0}^{m} a_j e^{\lambda_j \eta x} \mathcal{F}_\xi^{-1} \left(\frac{\overline{P(i\xi + \lambda_j \eta)}}{P(i\xi + \lambda_j \eta)} \right)$$

es solución fundamental de $P(\partial)$.

Demostración.

1. Veamos que la expresión para E tiene sentido. Para $\lambda \in \mathbb{R}$ fijo, sea

$$N = \{\xi \in \mathbb{R}^n | P(i\xi + \lambda\eta) = 0\}.$$

Veamos que N tiene medida de Lebesgue igual a cero:
Podemos suponer, después de un cambio de coordenadas, que $P_m(1, 0, \dots, 0) \neq 0$. Ahora, para $\xi' = (\xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$ fijo, pongamos

$$N_{\xi'} = \{\xi_1 \in \mathbb{R} | P(i(\xi_1, \xi') + \lambda\eta) = 0\}.$$

Entonces $N = \bigcup_{\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}} N_{\xi'} \times \{\xi'\}$ y por el teorema de Fubini,

$$\int_N d\xi = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{N_{\xi'}} d\xi_1 d\xi' = 0$$

pues los $N_{\xi'}$ son conjuntos finitos $\forall \xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$ ya que son los conjuntos de raíces del polinomio $P(i(\xi_1, \xi') + \lambda\eta)$ en la variable ξ_1. En efecto, no existe ningún $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$ tal que $\forall \xi_1 \in \mathbb{R}$ se tenga $P(i(\xi_1, \xi') + \lambda\eta) = 0$, pues en este polinomio el coeficiente de ξ_1^m es precisamente $i^m P_m(1, 0, \ldots, 0) \neq 0$.
Entonces N tiene medida de Lebesgue igual a cero, por lo cual

$$S(\xi) = \frac{\overline{P(i\xi + \lambda\eta)}}{P(i\xi + \lambda\eta)} \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n).$$

Entonces tiene sentido tomar la transformada de Fourier inversa de S.

2. Para $S \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ y $\zeta \in \mathbb{C}^n$,

$$\begin{aligned} P(\partial)(e^{\zeta x}\mathcal{F}_\xi^{-1}(S)) &= e^{\zeta x} P(\partial + \zeta)\mathcal{F}_\xi^{-1}(S) && \text{(debido a 1.2.20)} \\ &= e^{\zeta x}\mathcal{F}_\xi^{-1}(P(i\xi + \zeta)S) && \text{(debido a 1.4.2).} \end{aligned}$$

Tomando $S = \frac{\overline{P(i\xi+\lambda\eta)}}{P(i\xi+\lambda\eta)}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$, lo anterior implica que

$$P(\partial)\left(e^{\lambda\eta x}\mathcal{F}_\xi^{-1}\left(\frac{\overline{P(i\xi + \lambda\eta)}}{P(i\xi + \lambda\eta)}\right)\right) = e^{\lambda\eta x}\mathcal{F}_\xi^{-1}(\overline{P(i\xi + \lambda\eta)}).$$

Ahora, $\overline{P(i\xi + \lambda\eta)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \overline{c_\alpha}\,\overline{(i\xi + \lambda\eta)^\alpha} = \sum_{|\alpha| \leq m} \overline{c_\alpha}(-i\xi + \lambda\eta)^\alpha = \overline{P}(-i\xi + \lambda\eta)$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\xi^{-1}(\overline{P(i\xi + \lambda\eta)}) &= \mathcal{F}_\xi^{-1}(\overline{P}(-i\xi + \lambda\eta)) \\ &= \overline{P}(-\partial + \lambda\eta)\mathcal{F}_\xi^{-1}(1) && \text{(debido a 1.4.2)} \\ &= \overline{P}(-\partial + \lambda\eta)\delta, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} P(\partial)\left(e^{\lambda\eta x}\mathcal{F}_\xi^{-1}\left(\frac{\overline{P(i\xi + \lambda\eta)}}{P(i\xi + \lambda\eta)}\right)\right) &= e^{\lambda\eta x}\overline{P}(-\partial + \lambda\eta)\delta \\ &= \overline{P}(-\partial + 2\lambda\eta)(e^{\lambda\eta x}\delta) && \text{(debido a 1.2.20)} \\ &= \overline{P}(-\partial + 2\lambda\eta)\delta \\ &= \sum_{|\alpha|=m} \overline{c_\alpha}(-\partial + 2\lambda\eta)^\alpha\delta + \sum_{|\alpha| \leq m-1} \overline{c_\alpha}(-\partial + 2\lambda\eta)^\alpha\delta \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{|\alpha|=m} \overline{c_\alpha}(2\lambda\eta)^\alpha\delta + \sum_{k=0}^{m-1}\lambda^k T_k \\
&= \lambda^m \overline{P_m(2\eta)}\delta + \sum_{k=0}^{m-1}\lambda^k T_k,
\end{aligned}
$$

donde las $T_k \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ son combinaciones lineales de derivadas de δ.

Para concluir,

$$
\begin{aligned}
P(\partial)E &= P(\partial)\left(\frac{1}{\overline{P_m(2\eta)}}\sum_{j=0}^{m} a_j e^{\lambda_j\eta x}\mathcal{F}_\xi^{-1}\left(\frac{\overline{P(i\xi+\lambda_j\eta)}}{P(i\xi+\lambda_j\eta)}\right)\right) \\
&= \frac{1}{\overline{P_m(2\eta)}}\sum_{j=0}^{m} a_j P(\partial)\left(e^{\lambda_j\eta x}\mathcal{F}_\xi^{-1}\left(\frac{\overline{P(i\xi+\lambda_j\eta)}}{P(i\xi+\lambda_j\eta)}\right)\right) \\
&= \frac{1}{\overline{P_m(2\eta)}}\sum_{j=0}^{m} a_j\left(\lambda_j^m\overline{P_m(2\eta)}\delta + \sum_{k=0}^{m-1}\lambda_j^k T_k\right) \\
&= \delta\sum_{j=0}^{m} a_j\lambda_j^m + \frac{1}{\overline{P_m(2\eta)}}\sum_{k=0}^{m-1} T_k\sum_{j=0}^{m} a_j\lambda_j^k \\
&= \delta \qquad\qquad \text{(debido al Lema 2.1.1)}
\end{aligned}
$$

□

2.2. Ejemplos Clásicos

Ahora calcularemos las soluciones de las ecuaciones de Cauchy-Riemann, de Laplace en $\mathbb{R}^2$ y del operador de onda usando la fórmula descrita en 2.1.2.

Ejemplo 2.2.1 (El Operador de Cauchy-Riemann). *Sea $P(\partial) = \partial_1 + i\partial_2$. Hallaremos la solución fundamental de $P(\partial)$ que expresa la fórmula del teorema 2.1.2.*

Sea $\eta \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ y pongamos $z = x_1 + ix_2$ y $\gamma = \eta_1 + i\eta_2$. Entonces para todo $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}_\xi^{-1}\left(\frac{\overline{P(i\xi+\lambda\eta)}}{P(i\xi+\lambda\eta)}\right) &= \mathcal{F}_\xi^{-1}\left(\frac{-i\xi_1-\xi_2+\lambda(\eta_1-i\eta_2)}{i\xi_1-\xi_2+\lambda(\eta_1+i\eta_2)}\right) \\
&= (-\partial_1+i\partial_2+\lambda\overline{\gamma})\mathcal{F}_\xi^{-1}\left(\frac{1}{i\xi_1-\xi_2+\lambda\gamma}\right) \quad \text{(debido a 1.4.2)} \\
&= (-\partial_1+i\partial_2+\lambda\overline{\gamma})\mathcal{F}_\xi^{-1}\left(\frac{1}{i(\xi_1+\lambda\eta_2)-(\xi_2-\lambda\eta_1)}\right) \\
&= (-\partial_1+i\partial_2+\lambda\overline{\gamma})e^{i(-\lambda\eta_2x_1+\lambda\eta_1x_2)}\mathcal{F}_\xi^{-1}\left(\frac{1}{i\xi_1-\xi_2}\right) \quad \text{(debido a 1.4.1(4))}.
\end{aligned}
$$

Sabemos que $\frac{1}{2\pi z}$ es una solución fundamental de $P(\partial)$ (ver [1], Capítulo III), por lo tanto

$$\begin{aligned}(\partial_1 + i\partial_2)\frac{1}{2\pi z} &= \delta \\ (i\xi_1 - \xi_2)\mathcal{F}\left(\frac{1}{2\pi z}\right) &= 1 \\ \mathcal{F}\left(\frac{1}{2\pi z}\right) &= \frac{1}{i\xi_1 - \xi_2}.\end{aligned}$$

Entonces,

$$\mathcal{F}_\xi^{-1}\left(\frac{\overline{P(i\xi+\lambda\eta)}}{P(i\xi+\lambda\eta)}\right) = (-\partial_1 + i\partial_2 + \lambda\overline{\gamma})\left(e^{i\lambda(-\eta_2 x_1 + \eta_1 x_2)}\frac{1}{2\pi z}\right) \tag{2.1}$$

$$= e^{i\lambda(-\eta_2 x_1 + \eta_1 x_2)}\left(-(\partial_1 - i\lambda\eta_2) + i(\partial_2 + i\lambda\eta_1) + \lambda\overline{\gamma}\right)\frac{1}{2\pi z} \quad \text{(debido a 1.2.20)} \tag{2.2}$$

$$= e^{i\lambda(-x_1\eta_2 + x_2\eta_1)}(-\partial_1 + i\partial_2)\frac{1}{2\pi z}. \tag{2.3}$$

Ahora escojamos $\lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{R}$ diferentes y pongamos $a_0 = \frac{1}{\lambda_0 - \lambda_1}$ y $a_1 = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_0}$. Entonces, la solución fundamental de $P(\partial)$ dada por el teorema 2.1.2 es:

$$\begin{aligned}E &= \frac{1}{2\eta_1 - 2i\eta_2}\left(\frac{e^{\lambda_0\eta x}}{\lambda_0 - \lambda_1}e^{i\lambda_0(-x_1\eta_2 + x_2\eta_1)} + \frac{e^{\lambda_1\eta x}}{\lambda_1 - \lambda_0}e^{i\lambda_1(-x_1\eta_2 + x_2\eta_1)}\right)(-\partial_1 + i\partial_2)\frac{1}{2\pi z} \\ &= \frac{1}{2\pi\overline{\gamma}}\left(\frac{e^{\lambda_0\overline{\gamma}z} - e^{\lambda_1\overline{\gamma}z}}{\lambda_0 - \lambda_1}\right)\frac{1}{2}(-\partial_1 + i\partial_2)\frac{1}{z}.\end{aligned}$$

Sea $\varphi \in \mathscr{D}$. Entonces

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{1}{2}(-\partial_1 + i\partial_2)\frac{1}{z}, \varphi \right\rangle &= \frac{1}{2}\left\langle \frac{1}{z}, (\partial_1 - i\partial_2)\varphi \right\rangle \\ &= \frac{1}{2}\iint_{\mathbb{R}^2}\frac{(\partial_1 - i\partial_2)\varphi(x_1, x_2)}{z}dx_1dx_2.\end{aligned}$$

Sea $R > 0$ tal que $supp(\varphi) \subset \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < R\}$. Tenemos que

$$\begin{aligned}\iint_{\mathbb{R}^2}\frac{(\partial_1 - i\partial_2)\varphi(x_1, x_2)}{z}dx_1dx_2 &= \iint\limits_{|z|<R}\frac{(\partial_1 - i\partial_2)\varphi(x_1, x_2)}{z}dx_1dx_2 \\ &= \lim_{\epsilon \searrow 0}\iint\limits_{\epsilon<|z|<R}\frac{(\partial_1 - i\partial_2)\varphi(x_1, x_2)}{z}dx_1dx_2\end{aligned}$$

Ahora, por el teorema de Green,

$$\iint\limits_{\epsilon<|z|<R}\frac{(\partial_1 - i\partial_2)\varphi(x_1, x_2)}{z}dx_1dx_2 = 2\iint\limits_{\epsilon<|z|<R}\frac{\varphi(x_1, x_2)}{z^2}dx_1dx_2 - \int\limits_{|z|=\epsilon}\frac{\varphi(x_1, x_2)}{z}(idx_1 + dx_2)$$

y se tiene:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{|z|=\epsilon} \frac{\varphi(x_1,x_2)}{z}(idx_1+dx_2) &= i\int\limits_{|z|=\epsilon} \frac{\varphi(x_1,x_2)}{z}d\overline{z} \\
&= i\int\limits_0^{2\pi} \frac{\varphi(\epsilon\cos\theta,\epsilon\sin\theta)}{\epsilon e^{i\theta}}\epsilon(-i)e^{-i\theta}d\theta \\
&= \int\limits_0^{2\pi} \varphi(\epsilon\cos\theta,\epsilon\sin\theta)e^{-2i\theta}d\theta \longrightarrow \varphi(0)\int\limits_0^{2\pi} e^{-2i\theta}d\theta \quad \text{cuando } \epsilon\to 0 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Se deduce que

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{(\partial_1 - i\partial_2)\varphi(x_1,x_2)}{z}dx_1dx_2 = 2\text{ p.v.}\iint \frac{\varphi(x_1,x_2)}{z^2}dx_1dx_2 = 2\left\langle \text{p.v.}\frac{1}{z^2},\varphi\right\rangle.$$

Por lo tanto

$$\partial_z\left(\frac{1}{z}\right) := \frac{1}{2}(\partial_1 - i\partial_2)\left(\frac{1}{z}\right) = -\text{p.v.}\frac{1}{z^2} \quad \text{(como se nota en [8], p. 6)}$$

y

$$E = \frac{1}{2\pi\overline{\gamma}}\left(\frac{e^{\lambda_0\overline{\gamma}z} - e^{\lambda_1\overline{\gamma}z}}{\lambda_0-\lambda_1}\right)\text{p.v.}\left(\frac{1}{z^2}\right).$$

Nótese que $\frac{e^{\lambda_0\overline{\gamma}z}-e^{\lambda_1\overline{\gamma}z}}{z}$ es una función continua en $z=0$ (de hecho, es analítica), por lo tanto E es una función localmente integrable.
Si tomamos $\lambda_0 = 1$ y $\lambda_1 = -1$ la solución que obtenemos es

$$E = \frac{1}{2\pi\overline{\gamma}}\sinh(\overline{\gamma}z)\text{p.v.}\left(\frac{1}{z^2}\right).$$

Ejemplo 2.2.2 (El Operador de Laplace en $\mathbb{R}^2$). *Vamos a hallar una solución fundamental del operador $P(\partial) = \partial_1^2 + \partial_2^2$ utilizando la fórmula hallada en el teorema 2.1.2.*

Sea $\eta \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ y pongamos $z = x_1 + ix_2$, $\gamma = \eta_1 + i\eta_2$ y $\rho = \xi_1 + i\xi_2$. Entonces para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ se tiene

$$\begin{aligned}
P(i\xi+\lambda\eta) &= (i\xi_1+\lambda\eta_1)^2 + (i\xi_2+\lambda\eta_2)^2 \\
&= (i\xi_1+\lambda\eta_1-\xi_2+i\lambda\eta_2)(i\xi_1+\lambda\eta_1+\xi_2-i\lambda\eta_2) \\
&= (i\rho+\lambda\gamma)(i\overline{\rho}+\lambda\overline{\gamma}).
\end{aligned}$$

Entonces

$$\mathcal{F}_\xi^{-1}\left(\frac{\overline{P(i\xi+\lambda\eta)}}{P(i\xi+\lambda\eta)}\right)=\mathcal{F}_\xi^{-1}\left(\frac{(-i\overline{\rho}+\lambda\overline{\gamma})(-i\rho+\lambda\gamma)}{(i\rho+\lambda\gamma)(i\overline{\rho}+\lambda\overline{\gamma})}\right). \tag{2.4}$$

Por otra parte, para toda distribución $T\in\mathscr{S}'$,

$$(\partial_1-i\partial_2)\left(e^{\lambda(x_1\eta_1+x_2\eta_2)}\mathcal{F}_\xi^{-1}T\right)=e^{\lambda(x_1\eta_1+x_2\eta_2)}(\partial_1+\lambda\eta_1-i(\partial_2+\lambda\eta_2))\mathcal{F}_\xi^{-1}T \quad \text{(debido a 1.2.20)} \tag{2.5}$$

$$=e^{\lambda(x_1\eta_1+x_2\eta_2)}\mathcal{F}_\xi^{-1}\left((i\xi_1+\xi_2+\lambda(\eta_1-i\eta_2))T\right) \quad \text{(debido a 1.4.2)} \tag{2.6}$$

$$=e^{\lambda(x_1\eta_1+x_2\eta_2)}\mathcal{F}_\xi^{-1}\left((i\overline{\rho}+\lambda\overline{\gamma})T\right). \tag{2.7}$$

Poniendo $T=\frac{\overline{P(i\xi+\lambda\eta)}}{P(i\xi+\lambda\eta)}=\frac{(-i\overline{\rho}+\lambda\overline{\gamma})(-i\rho+\lambda\gamma)}{(i\rho+\lambda\gamma)(i\overline{\rho}+\lambda\overline{\gamma})}$ en la expresión anterior y teniendo en cuenta la ecuación 2.4, tenemos que:

$$(\partial_1-i\partial_2)\left(e^{\lambda(x_1\eta_1+x_2\eta_2)}\mathcal{F}_\xi^{-1}\left(\frac{\overline{P(i\xi+\lambda\eta)}}{P(i\xi+\lambda\eta)}\right)\right)=e^{\lambda(x_1\eta_1+x_2\eta_2)}\mathcal{F}_\xi^{-1}\left(\frac{(-i\overline{\rho}+\lambda\overline{\gamma})(-i\rho+\lambda\gamma)}{i\rho+\lambda\gamma}\right).$$

Ahora,

$$\begin{aligned}\frac{(-i\overline{\rho}+\lambda\overline{\gamma})(-i\rho+\lambda\gamma)}{i\rho+\lambda\gamma}&=\frac{-i\rho(-i\overline{\rho}+\lambda\overline{\gamma})+\lambda\gamma(-i\overline{\rho}+\lambda\overline{\gamma})}{i\rho+\lambda\gamma}\\&=\frac{-i\rho(-i\overline{\rho}+\lambda\overline{\gamma})-\lambda\gamma(-i\overline{\rho}+\lambda\overline{\gamma})}{i\rho+\lambda\gamma}+\frac{2\lambda\gamma(-i\overline{\rho}+\lambda\overline{\gamma})}{i\rho+\lambda\gamma}\\&=i\overline{\rho}-\lambda\overline{\gamma}+2\lambda\gamma\frac{-i\overline{\rho}+\lambda\overline{\gamma}}{i\rho+\lambda\gamma}\\&=(i\overline{\rho}+\lambda\overline{\gamma})-2\lambda\overline{\gamma}+2\lambda\gamma\frac{-i\overline{\rho}+\lambda\overline{\gamma}}{i\rho+\lambda\gamma},\end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned}(\partial_1-i\partial_2)\left(e^{\lambda(x_1\eta_1+x_2\eta_2)}\mathcal{F}_\xi^{-1}\left(\frac{\overline{P(i\xi+\lambda\eta)}}{P(i\xi+\lambda\eta)}\right)\right)&=e^{\lambda(x_1\eta_1+x_2\eta_2)}\mathcal{F}_\xi^{-1}(i\overline{\rho}+\lambda\overline{\gamma})-2\lambda\overline{\gamma}e^{\lambda(x_1\eta_1+x_2\eta_2)}\delta\\&\quad+2\lambda\gamma e^{\lambda(x_1\eta_1+x_2\eta_2)}\mathcal{F}_\xi^{-1}\left(\frac{-i\overline{\rho}+\lambda\overline{\gamma}}{i\rho+\lambda\gamma}\right)\\&=(\partial_1-i\partial_2)\delta-2\lambda\overline{\gamma}\delta+2\lambda\gamma e^{\lambda(x_1\eta_1+x_2\eta_2)}e^{i\lambda(-x_1\eta_2+x_2\eta_1)}(-\partial_1+i\partial_2)\left(\frac{1}{2\pi z}\right).\end{aligned}$$

En esta última igualdad, el primer término viene de aplicar la ecuación 2.7 a la distribución $T=1$ y el tercer sumando es la ecuación 2.3 del ejemplo 2.2.1.

Escojamos ahora $\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$ diferentes dos a dos y pongamos $a_0=\frac{1}{(\lambda_0-\lambda_1)(\lambda_0-\lambda_2)}$, $a_1=\frac{1}{(\lambda_1-\lambda_0)(\lambda_1-\lambda_2)}$

y $a_2 = \frac{1}{(\lambda_2-\lambda_0)(\lambda_2-\lambda_1)}$ como en el teorema 2.1.2. Tenemos entonces que

$$\begin{aligned}
(\partial_1 - i\partial_2)E &= (\partial_1 - i\partial_2)\left(\frac{1}{4|\eta|^2}\sum_{j=0}^{2} a_j e^{\lambda_j \eta x}\mathcal{F}_\xi^{-1}\left(\frac{\overline{P(i\xi+\lambda_j\eta)}}{P(i\xi+\lambda_j\eta)}\right)\right)\\
&= \frac{1}{4|\eta|^2}\sum_{j=0}^{2} a_j(\partial_1 - i\partial_2)\left(e^{\lambda_j \eta x}\mathcal{F}_\xi^{-1}\left(\frac{\overline{P(i\xi+\lambda_j\eta)}}{P(i\xi+\lambda_j\eta)}\right)\right)\\
&= \frac{1}{4|\gamma|^2}\sum_{j=0}^{2} a_j\left((\partial_1 - i\partial_2)\delta - 2\lambda_j\overline{\gamma}\delta + 2\lambda_j\gamma e^{\lambda_j\eta x}e^{i\lambda_j(-x_1\eta_2+x_2\eta_1)}(-\partial_1+i\partial_2)\left(\frac{1}{2\pi z}\right)\right)\\
&= \frac{1}{4|\gamma|^2}\left[(a_0+a_1+a_2)(\partial_1 - i\partial_2)\delta - 2\overline{\gamma}(a_0\lambda_0 + a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2)\delta\right]\\
&\quad + \frac{1}{4\pi\overline{\gamma}}\sum_{j=0}^{2} a_j\lambda_j e^{\lambda_j\overline{\gamma}z}(-\partial_1+i\partial_2)\frac{1}{z}.
\end{aligned}$$

Los dos primeros términos de la última expresión son cero pues los a_j solucionan el sistema lineal expuesto en el lema 2.1.1, por lo tanto

$$(\partial_1 - i\partial_2)E = \frac{1}{4\pi\overline{\gamma}}\sum_{j=0}^{2} a_j\lambda_j e^{\lambda_j z\overline{\gamma}}(-\partial_1+i\partial_2)\frac{1}{z},$$

es decir,

$$\partial_z E = -\frac{1}{4\pi\overline{\gamma}}\sum_{j=0}^{2} a_j\lambda_j e^{\lambda_j z\overline{\gamma}}\partial_z\frac{1}{z}.$$

Ahora, por el teorema 1.2.8, para todo λ_j con $j = 0, 1, 2$, se tiene que

$$\partial_z\left(\frac{e^{\lambda_j\overline{\gamma}z}}{z}\right) = \lambda_j\overline{\gamma}e^{\lambda_j\overline{\gamma}z}\frac{1}{z} + e^{\lambda_j\overline{\gamma}z}\partial_z\frac{1}{z},$$

por lo tanto

$$-e^{\lambda_j\overline{\gamma}z}\partial_z\frac{1}{z} = (\lambda_j\overline{\gamma} - \partial_z)\left(\frac{e^{\lambda_j\overline{\gamma}z}}{z}\right).$$

Entonces

$$\partial_z E = \frac{1}{4\pi}\sum_{j=0}^{2} a_j\lambda_j^2\frac{e^{\lambda_j\overline{\gamma}z}}{z} - \frac{1}{4\pi\overline{\gamma}}\sum_{j=0}^{2} a_j\lambda_j\partial_z\left(\frac{e^{\lambda_j\overline{\gamma}z}}{z}\right). \tag{2.8}$$

Sabemos que $\frac{1}{2\pi}\ln|z|$ es solución fundamental simétrica con respecto al origen del operador de Laplace en $\mathbb{R}^2$ (ver [6]), por lo tanto cualquier otra solución fundamental debe ser de la forma $\frac{1}{2\pi}\ln|z| + g(z)$ donde g es una función armónica. Supongamos que $g = u + iv$, donde u y v son funciones reales armónicas. Como $P(\partial)$ tiene coeficientes reales, la solución fundamental debe ser real, por lo tanto $v = 0$. Además u es la parte real de una función holomorfa. Es decir, existe h

función holomorfa tal que $2Re(h) = u$. Podemos escribir entonces $u = h + \bar{h}$ y así $g = h + \bar{h}$. Tenemos que $E = \frac{1}{2\pi} \ln |z| + h(z) + \overline{h(z)}$, donde h es una función analítica. Derivando esta ecuación obtenemos

$$\partial_z E = \frac{1}{4\pi z} + h'(z).$$

Si igualamos esta expresión a la expresión en la ecuación 2.8, tenemos que

$$\frac{1}{4\pi z} + h'(z) = \frac{1}{4\pi} \sum_{j=0}^{2} a_j \lambda_j^2 \frac{e^{\lambda_j \overline{\gamma} z}}{z} - \frac{1}{4\pi \overline{\gamma}} \sum_{j=0}^{2} a_j \lambda_j \partial_z \left(\frac{e^{\lambda_j \overline{\gamma} z}}{z} \right)$$

Si, para $j = 0, 1, 2$, expandimos la función $\frac{e^{\lambda_j \overline{\gamma} z}}{z}$ en su serie de Laurent alrededor de 0 obtenemos

$$\frac{e^{\lambda_j \overline{\gamma} z}}{z} = \frac{1}{z} + \lambda_j \overline{\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda_j \overline{\gamma} z)^n}{(n+1)!}$$

y reemplazando en la ecuación anterior obtenemos

$$\begin{aligned} h'(z) &= \frac{\overline{\gamma}}{4\pi} \sum_{j=0}^{2} a_j \lambda_j^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda_j \overline{\gamma} z)^n}{(n+1)!} - \frac{1}{4\pi \overline{\gamma}} \sum_{j=0}^{2} a_j \lambda_j \partial_z \left(\frac{1}{z} + \lambda_j \overline{\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda_j \overline{\gamma} z)^n}{(n+1)!} \right) \\ &= \frac{\overline{\gamma}}{4\pi} \sum_{j=0}^{2} a_j \lambda_j^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda_j \overline{\gamma} z)^n}{(n+1)!} - \frac{1}{4\pi} \sum_{j=0}^{2} a_j \lambda_j^2 \partial_z \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda_j \overline{\gamma} z)^n}{(n+1)!} \right), \end{aligned}$$

pues $a_0 \lambda_0 + a_1 \lambda_1 + a_2 \lambda_2 = 0$
Para hallar h integramos con respecto a z y nos queda que

$$h(z) = \frac{1}{4\pi} \sum_{j=0}^{2} a_j \lambda_j^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(\lambda_j \overline{\gamma} z)^n}{(n+1)!} \left(\frac{\lambda_j \overline{\gamma} z}{n+1} - 1 \right) \right) + C,$$

donde la serie converge para todo z.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} E = \frac{1}{2\pi} \ln |z| &+ \frac{1}{4\pi} \sum_{j=0}^{2} a_j \lambda_j^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(\lambda_j \overline{\gamma} z)^n}{(n+1)!} \left(\frac{\lambda_j \overline{\gamma} z}{n+1} - 1 \right) \right) \\ &+ \frac{1}{4\pi} \sum_{j=0}^{2} a_j \lambda_j^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(\lambda_j \gamma \overline{z})^n}{(n+1)!} \left(\frac{\lambda_j \gamma \overline{z}}{n+1} - 1 \right) \right) + C. \end{aligned}$$

Ejemplo 2.2.3 (El Operador de Onda). *En este ejemplo calcularemos la solución fundamental del operador de onda usando la fórmula hallada en el teorema 2.1.2.*

Introduciremos la siguiente definición:

Definición 2.2.4. *(ver [5] p. 113) Un polinomio $P \in \mathbb{C}[\xi_1, \ldots, \xi_n]$ de grado m es hiperbólico con respecto a $\eta \in \mathbb{R}^n$ si $P_m(\eta) \neq 0$ y existe $\tau_0 \in \mathbb{R}$ tal que $P(\xi + i\tau\eta) \neq 0$ para todo $\tau < \tau_0$.*

Tenemos también el siguiente teorema cuya demostración se encuentra en [5], p. 113:

Teorema 2.2.5. *Un polinomio homogéneo $P \in \mathbb{C}[\xi_1, \ldots, \xi_n]$ es hiperbólico con respecto a un vector $\eta \in \mathbb{R}^n$ si y sólo si $P(\eta) \neq 0$ y para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ la ecuación*

$$P(\xi + \tau\eta) = 0$$

tiene únicamente raíces reales.

Por ejemplo, en el caso del operador de onda $P(\partial) = \partial_t^2 - \partial_{x_1}^2 - \cdots - \partial_{x_n}^2$, el polinomio P es hiperbólico con respecto al vector $\eta = (1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$. A continuación estudiaremos unas soluciones fundamentales para un operador hiperbólico homogéneo cualquiera, para luego volver al caso especial de la ecuación de onda.

Notemos antes que del Teorema 2.2.5 se sigue que si un polinomio homogéneo $P \in \mathbb{C}[\xi_1, \ldots, \xi_n]$ es hiperbólico con respecto a $\eta \in \mathbb{R}^n$, entonces P es múltiplo de un polinomio con coeficientes reales. En efecto, si fijamos $\xi \in \mathbb{R}^n$ y si m es el grado de P, el producto de las raíces de $P(\xi + \tau\eta)$ es $(-1)^m \frac{P(\xi)}{P(\eta)}$ que debe ser un número real.

Sean $P(\partial)$ un operador sobre $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^n$ homogéneo de grado m y $\eta \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ tal que $P(\partial)$ es hiperbólico con respecto a η. Sea $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Entonces

$$\begin{aligned} P(i\xi + \lambda\eta) &= P(i(\xi - i\lambda\eta)) \\ &= (i)^m P(\xi - i\lambda\eta) \neq 0 \qquad\qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^{n+1}. \end{aligned}$$

Nótese que $F = e^{\lambda\eta(t,x)} \mathcal{F}_\xi^{-1}(P(i\xi + \lambda\eta)^{-1})$ es solución fundamental de $P(\partial)$. En efecto,

$$\begin{aligned} P(\partial)F &= P(\partial)\left(e^{\lambda\eta(t,x)} \mathcal{F}_\xi^{-1}(P(i\xi + \lambda\eta)^{-1})\right) \\ &= e^{\lambda\eta(t,x)} P(\partial + \lambda\eta) \mathcal{F}_\xi^{-1}(P(i\xi + \lambda\eta)^{-1}) && \text{(debido a 1.2.20)} \\ &= e^{\lambda\eta(t,x)} \mathcal{F}_\xi^{-1}(1) && \text{(debido a 1.4.2)} \\ &= e^{\lambda\eta(t,x)} \delta \\ &= \delta. \end{aligned}$$

Además, si $\lambda > 0$ entonces $supp(F) \subset \{(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1} | \eta(t,x) \geq 0\}$. En efecto, sea $(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tal que $\eta(t,x) < 0$. Sea U un abierto de $\mathbb{R}^{n+1}$ tal que $(t,x) \in U$ y $\forall (s,y) \in U$, $\eta(s,y) < 0$. Sea $\varphi \in \mathscr{D}$ tal que $supp(\varphi) \subset U$. Entonces $supp(\check{\varphi}) \subset \{(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1} | \eta(t,x) > 0\}$ y por el teorema de Paley-Wiener (ver [4], p. 181) para todo $N \in \mathbb{N}$ existe una constante $C_N > 0$ tal que

$$|\mathcal{F}^{-1}\varphi(\xi)| = \frac{1}{(2\pi)^{n+1}} |\mathcal{F}\check{\varphi}(\xi)| \leq C_N(1+|\xi|)^{-N} e^{H(Im\xi)} \qquad \forall \xi \in \mathbb{C}^{n+1}, \tag{2.9}$$

donde $H(Im\xi) := \sup\{(t,x) \cdot Im\xi | (t,x)$ pertenece a la envolvente convexa cerrada de $supp(\check{\varphi})\}$.

Entonces $\forall N \in \mathbb{N}$ existe $C_N > 0$ constante tal que

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}^{-1}\varphi(\xi - i\lambda\eta)| &\leq C_N(1+|\xi - i\lambda\eta|)^{-N} e^{H(Im(\xi - i\lambda\eta))} && \forall \xi \in \mathbb{R}^{n+1} \\ &= C_N(1+\sqrt{|\xi|^2 + \lambda^2|\eta|^2})^{-N} e^{H(-\lambda\eta)} && \forall \xi \in \mathbb{R}^{n+1}. \end{aligned}$$

Ahora,

$$\begin{aligned} H(-\lambda\eta) &= \sup\{(t,x)\cdot(-\lambda\eta) | (t,x) \text{ pertenece a la envolvente convexa cerrada de } supp(\check{\varphi})\} \\ &\leq \sup\{-\lambda\eta(t,x) | \eta(t,x) > 0\} \qquad (\text{pues } supp(\check{\varphi}) \subset \{(t,x)|\eta(t,x)>0\}) \\ &= \lambda \sup\{\eta(s,y) | \eta(s,y) < 0\} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$|\mathcal{F}^{-1}\varphi(\xi - i\lambda\eta)| \leq C_N(1+\sqrt{|\xi|^2 + \lambda^2|\eta|^2})^{-N}.$$

Por otra parte, existen constantes positivas c y μ tales que para todo $\xi \in \mathbb{R}^{n+1}$

$$|P(i\xi + \lambda\eta)| \geq c(1+\sqrt{|\xi|^2+\lambda^2|\eta|^2})^{-\mu} \qquad (\text{ver [5], Ejemplo A.2.7, p. 368}).$$

Entonces,

$$\begin{aligned} |\langle F, \varphi\rangle| &= \left| \left\langle e^{\lambda\eta(t,x)} \mathcal{F}_\xi^{-1}(P(i\xi+\lambda\eta)^{-1}), \varphi \right\rangle \right| \\ &= \left| \left\langle P(i(t,x)+\lambda\eta)^{-1}, \mathcal{F}_\xi^{-1}(e^{\lambda\eta\xi}\varphi) \right\rangle \right| \\ &= \left| \left\langle \frac{1}{P(i(t,x)+\lambda\eta)}, \mathcal{F}_\xi^{-1}\varphi(\xi - i\lambda\eta) \right\rangle \right| && (\text{debido a 1.3.5 (1)}) \\ &= \left| \int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} \frac{\mathcal{F}^{-1}\varphi(\xi - i\lambda\eta)}{P(i\xi+\lambda\eta)} d\xi \right| \\ &\leq \frac{C_N}{c} \int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} (1+\sqrt{|\xi|^2+\lambda^2|\eta|^2})^{\mu - N} d\xi \\ &\leq \frac{C_N}{c}(1+\lambda|\eta|)^{(\mu-N)/2} \int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} (1+|\xi|)^{(\mu-N)2} d\xi, \end{aligned}$$

para $N > \mu + 2(n+1)$, pues como $\mu - N < 0$, se tiene:

$(1+\sqrt{|\xi|^2+\lambda^2|\eta|^2})^{(\mu-N)/2} \leq (1+\lambda|\eta|)^{(\mu-N)/2}$, y, $(1+\sqrt{|\xi|^2+\lambda^2|\eta|^2})^{(\mu-N)/2} \leq (1+|\xi|)^{(\mu-N)/2}$.

Si hacemos tender λ a $+\infty$ obtenemos $|\langle F, \varphi\rangle| = 0$.

Si una solución $u \in \mathscr{D}'$ de la ecuación $P(\partial)u = 0$ tiene su soporte contenido en un semiespacio con borde no característico, es decir, para todo vector $\vec{n} \neq 0$ normal al borde del semiespacio se tiene $P_m(\vec{n}) \neq 0$, entonces $u \equiv 0$ (ver [4] p. 312, Corolario 8.6.9). Por lo tanto cualquier solución fundamental con soporte contenido en un semiespacio con borde no característico es única. En el caso que estamos considerando, el soporte de F está contenido en el semiespacio con normal al borde igual a η y $P_m(\eta) = P(\eta) \neq 0$. Por lo tanto tenemos que $F = e^{\lambda\eta(t,x)}\mathcal{F}_\xi^{-1}(P(i\xi+\lambda\eta)^{-1})$ es la única solución fundamental de $P(\partial)$ cuyo soporte está contenido en el semiespacio $\{(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1} | \eta(t,x) \geq 0\}$, para $\lambda > 0$ arbitrario.

Similarmente, $\check{F} = e^{\lambda\eta(t,x)}\mathcal{F}_\xi^{-1}(P(i\xi+\lambda\eta)^{-1})$ es la solución fundamental de $P(\partial)$ cuyo soporte está contenido en el semiespacio $\{(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1} | \eta(t,x) \leq 0\}$, para $\lambda < 0$ arbitrario.

Por lo tanto, si los coeficientes de P son reales, para $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_\xi^{-1}\left(\frac{\overline{P(i\xi+\lambda\eta)}}{P(i\xi+\lambda\eta)}\right) &= P(-\partial+\lambda\eta)\mathcal{F}_\xi^{-1}(P(i\xi+\lambda\eta)^{-1}) \\
&= \begin{cases} P(-\partial+\lambda\eta)(e^{-\lambda\eta(t,x)}F) & \text{si } \lambda > 0 \\ P(-\partial+\lambda\eta)(e^{-\lambda\eta(t,x)}\check{F}) & \text{si } \lambda < 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} e^{-\lambda\eta(t,x)}P(-\partial+2\lambda\eta)F & \text{si } \lambda > 0 \\ e^{-\lambda\eta(t,x)}P(-\partial+2\lambda\eta)\check{F} & \text{si } \lambda < 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

Ahora, si retomamos la fórmula de la solución fundamental de $P(\partial)$ del teorema 2.1.2, obtenemos

$$\begin{aligned}
E &= \frac{1}{\overline{P(2\eta)}}\sum_{j=0}^{2} a_j e^{\lambda_j\eta(t,x)}\mathcal{F}_\xi^{-1}\left(\frac{\overline{P(i\xi+\lambda_j\eta)}}{P(i\xi+\lambda_j\eta)}\right) \\
&= \frac{1}{\overline{P(2\eta)}}\sum_{j=0}^{2} a_j P(-\partial+2\lambda_j\eta)\begin{cases} F & \text{si } \lambda_j > 0 \\ \check{F} & \text{si } \lambda_j < 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

Sean $P(\partial) = \partial_t^2 - \partial_{x_1}^2 - \cdots - \partial_{x_n}^2$ el operador de onda y $\eta = (1,\vec{0}) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Supongamos que escogemos $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 > 0$. Entonces, reemplazando en la ecuación anterior, obtenemos

$$E = \frac{1}{4}\left(a_0P(-\partial+2\lambda_0(1,\vec{0})) + a_1P(-\partial+2\lambda_1(1,\vec{0})) + a_2P(-\partial+2\lambda_2(1,\vec{0}))\right)F$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{4}\left(a_0((-\partial_t + 2\lambda_0)^2 - \Delta_x) + a_1((-\partial_t + 2\lambda_1)^2 - \Delta_x) + a_2((-\partial_t + 2\lambda_2)^2 - \Delta_x)\right) F \\
&= \frac{1}{4}\left((a_0 + a_1 + a_2)P(\partial) - 4(a_0\lambda_0 + a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2)\partial_t + 4(a_0\lambda_0^2 + a_1\lambda_1^2 + a_2\lambda_2^2)\right) F \\
&= F.
\end{aligned}
$$

Similarmente si escogemos $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 < 0$, lo que obtenemos es $E = \check{F}$.
Ahora calculemos F para el caso en que la dimensión espacial es 1, es decir, cuando $n = 1$. Para esto, sean

$$
g(t,x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \; -t < x < t \;\text{ y }\; t > 0 \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases}
$$

y $\lambda > 0$. Entonces para $\eta \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ se tiene que

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}(e^{-\lambda(\eta_1 t + \eta_2 x)} g(t,x)) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda(\eta_1 t + \eta_2 x)} g(t,x) e^{-i(\xi_1 t + \xi_2 x)} dt dx \\
&= \int_0^{\infty}\int_{-t}^{t} e^{-x(\lambda\eta_2 + i\xi_2)} e^{-t(\lambda\eta_1 + i\xi_1)} dx dt \\
&= \int_0^{\infty} \frac{e^{-t(\lambda\eta_2 + i\xi_2)} - e^{t(\lambda\eta_2 + i\xi_2)}}{-(\lambda\eta_2 + i\xi_2)} e^{-t(\lambda\eta_1 + i\xi_1)} dt \\
&= \frac{-1}{\lambda\eta_2 + i\xi_2}\int_0^{\infty} e^{-t(\lambda(\eta_1+\eta_2) + i(\xi_1+\xi_2))} - e^{-t(\lambda(\eta_1-\eta_2) + i(\xi_1-\xi_2))} dt \\
&= \frac{-1}{(\lambda\eta_2 + i\xi_2)(\lambda(\eta_1+\eta_2) + i(\xi_1+\xi_2))} + \frac{1}{(\lambda\eta_2 + i\xi_2)(\lambda(\eta_1-\eta_2) + i(\xi_1-\xi_2))} \\
&\qquad (\text{para } \lambda > 0,\ \eta_1 + \eta_2 > 0,\ \eta_1 - \eta_2 > 0) \\
&= \frac{-(\lambda(\eta_1-\eta_2) + i(\xi_1-\xi_2)) + (\lambda(\eta_1+\eta_2) + i(\xi_1+\xi_2))}{(\lambda\eta_2 + i\xi_2)(\lambda\eta_1 + i\xi_1 + \lambda\eta_2 + i\xi_2)(\lambda\eta_1 + i\xi_1 - (\lambda\eta_2 + i\xi_2))} \\
&= \frac{2(\lambda\eta_2 + i\xi_2)}{(\lambda\eta_2 + i\xi_2)((\lambda\eta_1 + i\xi_1)^2 - (\lambda\eta_2 + i\xi_2)^2)} \\
&= \frac{2}{P(i\xi + \lambda\eta)}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $\forall\lambda > 0$ y $\forall\eta \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ con $P(\eta) \neq 0$, $\eta_1 + \eta_2 > 0$ y $\eta_1 - \eta_2 > 0$ se tiene que

$$
\mathcal{F}_\xi^{-1}(P(i\xi + \lambda\eta)^{-1}) = \frac{1}{2} e^{-\lambda(\eta_1 t + \eta_2 x)} g(t,x).
$$

Luego para $\eta = (1,0)$,

$$
E = F = \frac{1}{2} g(t,x).
$$

2.3. Núcleos de Convolución con Soporte Finito

Observemos que si E es solución fundamental de $P(\partial) = \sum_{|\alpha|\leq m} c_\alpha \partial^\alpha$, o sea, $P(\partial)E = \delta$ entonces

$$P(\partial)\delta * E = P(\partial)(\delta * E) = P(\partial)E = \delta.$$

Llamemos $T := P(\partial)\delta$. Por lo tanto $P(\partial)E = \delta$ se puede reescribir mediante la ecuación

$$T * E = \delta,$$

donde la distribución $T \in \mathscr{E}'$ tiene soporte igual a $\{0\}$. Ahora supongamos que $T \in \mathscr{E}'$ es una distribución con soporte compacto arbitrario. Se define la solución fundamental de la siguiente manera:

Definición 2.3.1. *$E \in \mathscr{D}'$ es una* ***solución fundamental del operador de convolución*** *$T \in \mathscr{E}'$ si*

$$T * E = \delta.$$

Digamos que T es una distribución con soporte finito $\{x_1, \ldots, x_r\}$, es decir, T se puede escribir como una combinación lineal finita de las distribuciones δ_{x_k} y sus derivadas, para $1 \leq k \leq r$ (como en el ejemplo 1.2.10). Pongamos entonces

$$T = \sum_{k=1}^{r} P_k(\partial)\delta_{x_k},$$

donde $P_k(\partial)$ es un operador diferencial parcial con coeficientes constantes, para todo $1 \leq k \leq r$. Entonces $\forall E \in \mathscr{D}'$,

$$\begin{aligned} T * E &= \left(\sum_{k=1}^{r} P_k(\partial)\delta_{x_k} \right) * E \\ &= \sum_{k=1}^{r} P_k(\partial)(\delta_{x_k} * E) \\ &= \sum_{k=1}^{r} P_k(\partial)\tau_{x_k} E, \end{aligned}$$

o sea, E es solución fundamental del núcleo de convolución T si y sólo si E es solución fundamental del operador diferencial parcial con diferencias (ó traslaciones)

$$\sum_{k=1}^{r} P_k(\partial)\tau_{x_k}.$$

Ahora nos disponemos a probar que todo operador de este tipo posee una solución fundamental. Primero probemos el siguiente resultado de álgebra lineal.

Lema 2.3.2. *Sean $f_1(t), \ldots, f_q(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones linealmente independientes. Entonces existen $t_1, \ldots, t_q \in \mathbb{R}$, tales que la matriz $\boldsymbol{F} = (f_i(t_j))_{i,j}$ es invertible.*

Demostración. Llamemos $\vec{f}(t)$ al vector cuya i-ésima componente es la función $f_i(t)$. Escojamos $t_1 \in \mathbb{R}$ de tal forma que $\vec{f}(t_1) \neq \vec{0}$, es decir, de tal forma que el subespacio

$$V_1 = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^q | \vec{x} \cdot \vec{f}(t_1) = 0 \right\}$$

sea de dimensión $q-1$.
Inductivamente, para $1 \leq r \leq q-1$ supongamos que hemos escogido $t_1, \ldots, t_r$ de tal forma que el subespacio

$$V_r = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^q | \vec{x} \cdot \vec{f}(t_j) = 0 \;\; \forall j = 1, \ldots, r \right\}$$

es de dimensión $q-r$, y sea $\vec{x_r} \in V_r$ con $\vec{x_r} \neq \vec{0}$. Entonces existe $t_{r+1} \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{x_r} \cdot \vec{f}(t_{r+1}) \neq 0$ (de lo contrario, las funciones serían linealmente dependientes). Ahora sea

$$V_{r+1} = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^q | \vec{x} \cdot \vec{f}(t_j) = 0 \;\; \forall j = 1, \ldots, r+1 \right\}.$$

Como $x_r \notin V_{r+1}$ tenemos que $V_{r+1} \subsetneqq V_r$, luego $\dim(V_{r+1}) = q - r - 1$.

Hemos demostrado entonces que existen $t_1, \ldots, t_q \in \mathbb{R}$ tales que

$$V_q = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^q | \vec{x} \cdot \vec{f}(t_j) = 0 \;\; \forall j = 1, \ldots, q \right\} = \left\{ \vec{0} \right\}$$

lo que quiere decir que las filas de la matriz **F** son linealmente independientes. □

El siguiente lema nos dice que, si encontramos una medida de Radon con cierta propiedad, podemos hallar una solución fundamental de una distribución $T \in \mathscr{E}'$, a partir de ésta. Este no es todavía el resultado que queremos. Después probaremos que, cuando T tiene soporte finito, podemos construir una medida de Radon con la propiedad que se necesita para que exista la solución fundamental de T.

Lema 2.3.3. *Sean $T \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ y μ una medida de Radon sobre $\mathbb{R}^n$ con soporte compacto tal que*

$$\mathcal{L}\mu(2x) \cdot \check{\bar{T}} = \delta.$$

Entonces la distribución

$$E = \left\langle \mu(\eta), e^{\eta x} \mathcal{F}_\xi^{-1} \left(\frac{\overline{\mathcal{F}T(\xi - i\eta)}}{\mathcal{F}T(\xi - i\eta)} \right) \right\rangle$$

es una solución fundamental de T.

Antes de empezar la demostración, veamos qué es $\langle E, \varphi \rangle$ para $\varphi \in \mathscr{D}$ dada. Como veremos más adelante, para $\eta \in \mathbb{R}^n$, la expresión que está en el lado derecho de $\langle , \rangle$ es una distribución, llamémosla F_η. Es decir, para $\varphi \in \mathscr{D}$, $\langle F_\eta, \varphi \rangle := \left\langle e^{\eta x} \mathcal{F}_\xi^{-1} \left(\frac{\overline{(\mathcal{F}T)(\xi - i\eta)}}{(\mathcal{F}T)(\xi - i\eta)} \right)(x), \varphi(x) \right\rangle$. También veremos que la función

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathscr{D}' \\ \eta &\mapsto F_\eta \end{aligned}$$

es continua, por lo tanto $\langle F_\eta, \varphi \rangle$ es una función que depende continuamente de η. Podemos aplicar entonces la medida $\mu(\eta)$ a la función $\langle F_\eta, \varphi \rangle$ (pues μ tiene soporte compacto) y así tenemos que

$$\langle E, \varphi \rangle = \langle \langle \mu(\eta), F_\eta \rangle, \varphi \rangle = \langle \mu(\eta), \langle F_\eta, \varphi \rangle \rangle .$$

Demostración.

1. Veamos que la expresión para E tiene sentido, es decir, que, para todo $\eta \in \mathbb{R}^n$, existe la transformada inversa de Fourier del cociente, y que la función f es continua y tiene sentido aplicar la medida μ.

   En primer lugar, el teorema de Paley-Wiener-Schwartz nos asegura que la transformada de Fourier de una distribución con soporte compacto es una función analítica sobre $\mathbb{C}^n$ (ver [4], p. 181). Entonces, para $\eta \in \mathbb{R}^n$ fijo, $(\mathcal{F}T)(\xi - i\eta)$ es analítica en $\mathbb{R}^n$.

   Si $g(z)$ es una función analítica sobre $\mathbb{C}^n$, con $g \not\equiv 0$, entonces

$$g(z) = \sum_\nu a_\nu z^\nu = \sum_{\lambda=0}^{\infty} p_\lambda(z), \tag{2.10}$$

   donde $p_\lambda(z) = \sum\limits_{|\nu|=\lambda} a_\nu z^\nu$. Sea $\lambda_0 = \text{mín}\{\lambda \in \mathbb{N} | p_\lambda \not\equiv 0\}$.

   Ahora, para cada $\vec{c} = (c_2, \ldots, c_n) \in \mathbb{C}^{n-1}$, la aplicación $\sigma_{\vec{c}} : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ definida por $\sigma_{\vec{c}}(w_1, \ldots, w_n) = (w_1, w_2 + c_2 w_1, \ldots, w_n + c_n w_1)$ se llama un **corte**. Denotemos por Σ al conjunto de todos los cortes. Tenemos que Σ es un grupo abeliano de biyecciones biholomorfas de $\mathbb{C}^n$ sobre $\mathbb{C}^n$ (ver [3], Cap. III, § 3).

   Entonces $\forall \sigma \in \Sigma$, $g \circ \sigma = \sum\limits_{\lambda=\lambda_0}^{\infty} (p_\lambda \circ \sigma)$, y para $\vec{c} = (c_2, \ldots, c_n) \in \mathbb{C}^{n-1}$ y $\lambda \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$\begin{aligned} (p_\lambda \circ \sigma_{\vec{c}})(w_1, 0, \ldots, 0) &= p_\lambda(w_1, c_2 w_1, \ldots, c_n w_1) \\ &= \sum_{|\nu|=\lambda} a_\nu w_1^{\nu_1} (c_2 w_1)^{\nu_2} \cdots (c_n w_1)^{\nu_n} \\ &= \sum_{|\nu|=\lambda} a_\nu c_2^{\nu_2} \cdots c_n^{\nu_n} w_1^\lambda \\ &= \widetilde{p_\lambda}(c_2, \ldots, c_n) w_1^\lambda, \end{aligned}$$

donde $\widetilde{p_\lambda}$ es un polinomio en $n-1$ variables. Más precisamente, $\widetilde{p_\lambda}(c_2,\ldots,c_n) = \sum\limits_{|\nu|=\lambda} a_\nu c_2^{\nu_2}\cdots c_n^{\nu_n}$ y los a_ν son los mismos coeficientes de p_λ.

Ahora, no todos los coeficientes de $\widetilde{p_{\lambda_0}}$ son nulos (de lo contrario $p_{\lambda_0}\equiv 0$). Por lo tanto existen $c_2^{(0)},\ldots,c_n^{(0)}\in\mathbb{C}$ tales que $\widetilde{p_{\lambda_0}}\left(c_2^{(0)},\ldots,c_n^{(0)}\right)\neq 0$.

Sea $\sigma_0=\sigma_{\left(c_2^{(0)},\ldots,c_n^{(0)}\right)}$. Entonces

$$
\begin{aligned}
(g\circ\sigma_0)(w_1,0,\ldots,0) &= \sum_{\lambda=\lambda_0}^{\infty}(p_\lambda\circ\sigma_0)(w_1,0,\ldots,0)\\
&= \sum_{\lambda=\lambda_0}^{\infty}\widetilde{p_\lambda}\left(c_2^{(0)},\ldots,c_n^{(0)}\right)w_1^\lambda\not\equiv 0,
\end{aligned}
$$

pues $\widetilde{p_{\lambda_0}}\left(c_2^{(0)},\ldots,c_n^{(0)}\right)\neq 0$.

Por lo tanto, para cualquier función analítica $g\not\equiv 0$ sobre $\mathbb{C}^n$ podemos encontrar un corte σ_0 tal que $(g\circ\sigma_0)(w_1,0,\ldots,0)\not\equiv 0$. Nótese que pueden tomarse $c_2^{(0)},\ldots,c_n^{(0)}$ números reales.

Analicemos el conjunto

$$Z_{z'}=\{z_1\in\mathbb{C}|(\mathcal{F}T)(z_1,z')=0\}$$

definido para cada $z'=(z_2,\ldots,z_n)\in\mathbb{C}^{n-1}$. Fijemos $z'\in\mathbb{C}^{n-1}$. Sabemos que $Z_{z'}=\mathbb{C}$ ó es a lo sumo enumerable ya que, para todo $z'\in\mathbb{C}^{n-1}$, la función $(\mathcal{F}T)(z_1,z')$ es analítica en $\mathbb{C}$ (ver [12], p. 208-209, Teorema 10.18).

Como se notó anteriormente (con $g=\mathcal{F}T$), efectuando eventualmente un corte $\sigma_{\left(c_2^{(0)},\ldots,c_n^{(0)}\right)}$, con $c_2^{(0)},\ldots,c_n^{(0)}\in\mathbb{R}$, podemos obtener que $\forall z'\in\mathbb{C}^{n-1}$, $\mathcal{F}T(z_1,z')\not\equiv 0$ pues (en la ecuación 2.10), si $p_{\lambda_0}(z_1,z')\not\equiv 0$, el coeficiente de $z_1^{\lambda_0}$ en $\mathcal{F}T(z_1,z')$ se hace igual a

$$a_{(\lambda_0,0,\ldots,0)}=\widetilde{p_{\lambda_0}}\left(c_2^{(0)},\ldots,c_n^{(0)}\right)\neq 0.$$

Consideremos ahora el conjunto $N=\{\xi\in\mathbb{R}^n|(\mathcal{F}T)(\xi-i\eta)=0\}$. Entonces

$$N=\bigcup_{\xi'\in\mathbb{R}^{n-1}}\{\xi'\}\times N_{\xi'}$$

donde $N_{\xi'}=\{\xi_1\in\mathbb{R}|(\mathcal{F}T)((\xi_1,\xi')-i\eta)=0\}$, para cada $\xi'=(\xi_2,\ldots,\xi_n)\in\mathbb{R}^{n-1}$.

Tenemos ya que puede suponerse que $\forall z'\in\mathbb{C}^{n-1}$, el conjunto $Z_{z'}$ es a lo sumo enumerable;

por lo tanto cada $N_{\xi'}$ es a lo sumo enumerable. Esto implica que

$$\int\limits_{N} dx = \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \int\limits_{N_{\xi'}} d\xi_1 d\xi = 0.$$

Entonces $S(\xi) = \frac{\overline{\mathcal{F}T(\xi - i\eta)}}{\mathcal{F}T(\xi - i\eta)} \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{S}'$ y tiene sentido tomar la transformada inversa de Fourier.

Finalmente, veamos que la función

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathscr{D}' \\ \eta &\mapsto e^{\eta x} \mathcal{F}_\xi^{-1} \left(\frac{\overline{(\mathcal{F}T)(\xi - i\eta)}}{(\mathcal{F}T)(\xi - i\eta)} \right) \end{aligned}$$

es continua. Para esto, sea $\{\eta_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{R}^n$ tal que $\eta_k \longrightarrow \eta$ cuando $k \longrightarrow \infty$. Entonces para toda función $\varphi \in \mathscr{D}$ y $\forall k \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$\begin{aligned} \langle f(\eta_k), \varphi \rangle &= \left\langle e^{\eta_k x} \mathcal{F}_\xi^{-1} \left(\frac{\overline{(\mathcal{F}T)(\xi - i\eta_k)}}{(\mathcal{F}T)(\xi - i\eta_k)} \right), \varphi(x) \right\rangle \\ &= \left\langle \left(\frac{\overline{(\mathcal{F}T)(\xi - i\eta_k)}}{(\mathcal{F}T)(\xi - i\eta_k)} \right), \mathcal{F}_x^{-1}(e^{\eta_k x} \varphi(x)) \right\rangle \\ &= \left\langle \left(\frac{\overline{(\mathcal{F}T)(\xi - i\eta_k)}}{(\mathcal{F}T)(\xi - i\eta_k)} \right), (\mathcal{F}^{-1}\varphi)(\xi - i\eta_k) \right\rangle \qquad \text{(debido a 1.3.5 (1))} \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\overline{(\mathcal{F}T)(\xi - i\eta_k)}}{(\mathcal{F}T)(\xi - i\eta_k)} (\mathcal{F}^{-1}\varphi)(\xi - i\eta_k) d\xi. \end{aligned}$$

Sea $g_k(\xi) = \frac{\overline{(\mathcal{F}T)(\xi - i\eta_k)}}{(\mathcal{F}T)(\xi - i\eta_k)} (\mathcal{F}^{-1}\varphi)(\xi - i\eta_k)$. Entonces, para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$|g_k(\xi)| = |(\mathcal{F}^{-1}\varphi)(\xi - i\eta_k)|,$$

y, por el teorema de Paley-Wiener, para todo $N \in \mathbb{N}$ existe una constante $C_N > 0$ tal que

$$|(\mathcal{F}^{-1}\varphi)(\xi - i\eta_k)| \leq C_N (1 + \sqrt{|\xi|^2 + |\eta_k|^2})^{-N} e^{H(-\eta_k)} \quad \text{(ver la ecuación 2.9)}.$$

Sean $a > 0$ y $b > 0$ tales que la envolvente convexa cerrada de $supp(\varphi)$ está contenida en la bola cerrada de radio a y centro en el origen, y para todo $k \in \mathbb{N}$, $|\eta_k| \leq b$. Entonces

$$\begin{aligned} H(-\eta_k) &\leq \sup\{-x \cdot \eta_k | x \in \overline{B(0,a)}\} \\ &\leq |x||\eta_k| \qquad\qquad \forall x \in \overline{B(0,a)} \\ &\leq ab. \end{aligned}$$

Por lo tanto
$$C_N(1+\sqrt{|\xi|^2+|\eta_k|^2})^{-N}e^{H(-\eta_k)} \leq C_N(1+|\xi|)^{-N}e^{ab}$$
y así, para todo $k \in \mathbb{N}$, y para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$,
$$|g_k(\xi)| \leq C_N(1+|\xi|)^{-N}e^{ab},$$
y $C_N(1+|\xi|)^{-N}e^{ab} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ para $N > n+1$. Entonces, por el teorema de la convergencia dominada,
$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} \langle f(\eta_k), \varphi\rangle &= \lim_{k\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\overline{(\mathcal{F}T)(\xi - i\eta_k)}}{(\mathcal{F}T)(\xi - i\eta_k)}(\mathcal{F}^{-1}\varphi)(\xi - i\eta_k)d\xi \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \lim_{k\to\infty} \frac{\overline{(\mathcal{F}T)(\xi - i\eta_k)}}{(\mathcal{F}T)(\xi - i\eta_k)}(\mathcal{F}^{-1}\varphi)(\xi - i\eta_k)d\xi \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\overline{(\mathcal{F}T)(\xi - i\eta)}}{(\mathcal{F}T)(\xi - i\eta)}(\mathcal{F}^{-1}\varphi)(\xi - i\eta)d\xi \\
&= \langle f(\eta), \varphi\rangle,
\end{aligned}$$
y así f es continua.

2. Ahora probaremos que $T * E = \delta$. Si $S \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ y $\eta \in \mathbb{R}^n$ entonces
$$\begin{aligned}
T * (e^{\eta x}\mathcal{F}^{-1}S) &= (e^{\eta x}e^{-\eta x}T) * (e^{\eta x}\mathcal{F}^{-1}S) \\
&= e^{\eta x}((e^{-\eta x}T) * (\mathcal{F}^{-1}S)) \text{ (debido a 1.2.15)} \\
&= e^{\eta x}(\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}((e^{-\eta x}T) * (\mathcal{F}^{-1}S))) \\
&= e^{\eta x}(\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(e^{-\eta x}T)S)) \text{ (debido a 1.4.3)} \\
&= e^{\eta x}(\mathcal{F}_\xi^{-1}(\mathcal{F}T(\xi - i\eta)S)) \text{ (debido a 1.4.1(4))}.
\end{aligned}$$
Poniendo $S = \frac{\overline{\mathcal{F}T(\xi-i\eta)}}{\mathcal{F}T(\xi-i\eta)}$, tenemos que para toda $\varphi \in \mathscr{D}$,
$$\begin{aligned}
\langle T * E, \varphi\rangle &= \langle E_x, \langle T_y, \varphi(x+y)\rangle\rangle \\
&= \langle \mu(\eta), \langle F_{\eta_x}, \langle T_y, \varphi(x+y)\rangle\rangle\rangle \\
&= \langle \mu(\eta), \langle T * F_\eta, \varphi\rangle\rangle \\
&= \left\langle \mu(\eta), \left\langle T * e^{\eta x}\mathcal{F}_\xi^{-1}\left(\frac{\overline{\mathcal{F}T(\xi - i\eta)}}{\mathcal{F}T(\xi - i\eta)}\right), \varphi\right\rangle\right\rangle \\
&= \left\langle \mu(\eta), \left\langle e^{\eta x}\mathcal{F}_\xi^{-1}(\overline{\mathcal{F}T(\xi - i\eta)}), \varphi\right\rangle\right\rangle,
\end{aligned}$$
por lo tanto $T * E = \left\langle \mu(\eta), e^{\eta x}\mathcal{F}_\xi^{-1}(\overline{\mathcal{F}T(\xi - i\eta)})\right\rangle$.

Ahora,

$$\begin{aligned}\overline{(\mathcal{F}T)(\xi - i\eta)} &= \overline{\left\langle T_x, e^{-ix(\xi - i\eta)}\right\rangle}\\ &= \left\langle \overline{T_x}, e^{-x\eta + ix\xi}\right\rangle\\ &= \left\langle \check{\overline{T_x}}, e^{x\eta - ix\xi}\right\rangle\\ &= \left\langle e^{x\eta}\check{\overline{T_x}}, e^{-ix\xi}\right\rangle\\ &= \mathcal{F}(e^{x\eta}\check{\overline{T}}),\end{aligned}$$

lo que quiere decir que

$$\mathcal{F}_\xi^{-1}\left(\overline{\mathcal{F}T\left(\xi - i\eta\right)}\right) = \mathcal{F}_\xi^{-1}\left(\mathcal{F}\left(e^{\eta x}\check{\overline{T}}\right)\right) = e^{\eta x}\check{\overline{T}}.$$

Podemos concluir entonces que

$$T * E = \left\langle \mu(\eta), e^{2\eta x}\check{\overline{T}}\right\rangle = (\mathcal{L}\mu)(2x)\check{\overline{T}} = \delta$$

y así, E es una solución fundamental de T.

$\square$

A continuación probaremos el resultado principal.

Proposición 2.3.4. *Para toda distribución $T \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$ con soporte finito existe una solución fundamental $E \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$.*
Más específicamente:
Sea $T = \sum\limits_{k=1}^{r} P_k(\partial)\delta_{x_k}$ con $x_k \in \mathbb{R}^n$ diferentes dos a dos y con $P_k(\xi) \in \mathbb{C}[\xi] \setminus \{0\}$ de grado $\leq m$. Supongamos que $x_1 = 0$ y que el grado de P_1 es m. Sean $q = r(m+1)$ y $\eta \in \mathbb{R}^n$ tal que los ηx_k son diferentes dos a dos y $P_{1,m}(2\eta) \neq 0$ (aquí $P_{1,m}$ es la parte principal del polinomio P_1). Entonces existen λ_j, $a_j \in \mathbb{R}$ para $j = 1, \ldots, q$, tales que

$$E = \sum_{j=1}^{q} a_j\, e^{\lambda_j \eta x}\mathcal{F}_\xi^{-1}\left(\frac{\overline{\mathcal{F}T(\xi - i\lambda_j\eta)}}{\mathcal{F}T(\xi - i\lambda_j\eta)}\right)$$

es una solución fundamental de T.

Antes de hacer la demostración, veamos que existe dicho η. Para toda pareja $i, j \in \{1, \ldots, r\}$ con $i \neq j$, sea $H_{i,j} = \{\eta \in \mathbb{R}^n | \eta(x_i - x_j) = 0\}$. Entonces $dim(H_{i,j}) = n - 1$ por lo tanto $H_{i,j}$ tiene medida 0. Ahora sea $H_{P_{1,m}} = \{\eta \in \mathbb{R}^n | P_{1,m}(2\eta) = 0\}$. Este conjunto también tiene medida 0 y por lo tanto la unión $\left(\bigcup\limits_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{r} H_{i,j}\right) \cup H_{P_{1,m}}$ también tiene medida 0. Luego existe $\eta \in \mathbb{R}^n$ tal que $\eta \notin \left(\bigcup\limits_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{r} H_{i,j}\right) \cup H_{P_{1,m}}$, es decir, existe $\eta \in \mathbb{R}^n$ tal que para $i, j \in \{1, \ldots, r\}$ con $i \neq j$, $\eta(x_i - x_j) \neq 0$

y $P_{1,m}(2\eta) \neq 0$.

Demostración. $P_{k,m}$ denotará la parte homogénea de grado m del polinomio P_k (que eventualmente puede ser 0), es decir, si $P_k(\xi) = \sum\limits_{|\alpha|\leq m} b_{k,\alpha}\, \xi^\alpha$ entonces

$$P_{k,m}(\xi) = \sum_{|\alpha|=m} b_{k,\alpha}\, \xi^\alpha.$$

1. Consideremos el siguiente sistema de q ecuaciones con $2q$ incógnitas (a_j, λ_j para $j = 1, \ldots, q$):

$$\sum_{j=1}^{q} a_j\, e^{-2\lambda_j \eta x_k} \lambda_j^i = \begin{cases} 0 & \text{si } k \geq 2 \text{ ó } 0 \leq i < m \\ \frac{1}{P_{1,m}(2\eta)} & \text{si } k = 1 \text{ e } i = m \end{cases}$$

Probaremos que existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_q \in \mathbb{R}$ tales que el sistema lineal en a_j tiene solución.

Para $k = 1, \ldots, r$ pongamos $c_k = -2\eta x_k$. Entonces los c_k son diferentes dos a dos. Sea $f_{i,k}(t) = e^{c_k t}\, t^i$ para $k = 1, \ldots, r$ e $i = 0, \ldots, m$. Entonces estas funciones son linealmente independientes. En efecto, si

$$f(t) = \sum_{k,i} d_{i,k} e^{c_k t}\, t^i = 0 \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

y si suponemos que $c_r > c_{r-1} > \cdots > c_1$ entonces

$$d_{m,r} = \lim_{t\to\infty} f(t) e^{-c_r t}\, t^{-m} = 0.$$

Si seguimos este proceso inductivamente, tenemos que

$$d_{i,k} = \lim_{t\to\infty} f(t) e^{-c_k t}\, t^{-i} = 0$$

para todo i, k.
Demos un orden cualquiera a las funciones $f_{i,k}$, digamos que las subindexamos por f_r con $r = 1, \ldots, q$. Entonces, por el lema 2.3.2, existen q valores de t (llamémoslos $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$) tales que la matriz $(f_r(\lambda_j))_{rj}$ es invertible. Entonces el sistema tiene solución.

2. Pongamos $\mu = \sum\limits_{j=1}^{q} a_j \delta_{\lambda_j \eta}$, con $(a_j, \lambda_j)_{j=1,\ldots,q}$ solución del sistema de ecuaciones en (1). Entonces μ es una medida de Radon con soporte finito.

Para todo $\varphi \in \mathscr{S}$,

$$\left\langle \check{\overline{T}}, \varphi \right\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{r} \overline{P_k(\partial)\delta_{x_k}}, \varphi(-x) \right\rangle$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{r} \left\langle \delta_{x_k}, \overline{P_k}(-\partial)\varphi(-x) \right\rangle \\
&= \sum_{k=1}^{r} \overline{P_k}(-\partial_x)\varphi(-x) \mid_{x=x_k} \\
&= \sum_{k=1}^{r} (\overline{P_k}(\partial)\varphi)(-x_k) \\
&= \sum_{k=1}^{r} \left\langle \delta_{-x_k}, \overline{P_k}(\partial)\varphi \right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{k=1}^{r} \overline{P_k}(-\partial)\delta_{-x_k}, \varphi \right\rangle
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $\check{\overline{T}} = \sum\limits_{k=1}^{r} \overline{P_k}(-\partial)\delta_{-x_k}$, y

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{L}\mu)(2x) \cdot \check{\overline{T}} &= \left(\sum_{j=1}^{q} a_j \mathcal{L}(\delta_{\lambda_j \eta})(2x) \right) \left(\sum_{k=1}^{r} \overline{P_k}(-\partial)\delta_{-x_k} \right) \\
&= \left(\sum_{j=1}^{q} a_j \, e^{\lambda_j \eta 2x} \right) \left(\sum_{k=1}^{r} \overline{P_k}(-\partial)\delta_{-x_k} \right) \\
&= \sum_{j=1}^{q} \sum_{k=1}^{r} a_j e^{2\lambda_j \eta x} \overline{P_k}(-\partial)\delta_{-x_k}.
\end{aligned}
$$

Ahora,

$$
\begin{aligned}
e^{2\lambda_j \eta x}\overline{P_k}(-\partial)\delta_{-x_k} &= \overline{P_k}(-\partial + 2\lambda_j \eta)(e^{2\lambda_j \eta x}\delta_{-x_k}) \qquad \text{(debido a 1.2.20)} \\
&= \overline{P_k}(-\partial + 2\lambda_j \eta)(e^{-2\lambda_j \eta x_k} e^{2\lambda_j \eta (x+x_k)}\delta_{-x_k}) \\
&= \overline{P_k}(-\partial + 2\lambda_j \eta)(e^{-2\lambda_j \eta x_k}\delta_{-x_k}) \\
&= e^{-2\lambda_j \eta x_k}\overline{P_k}(-\partial + 2\lambda_j \eta)\delta_{-x_k}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,

$$
(\mathcal{L}\mu)(2x) \cdot \check{\overline{T}} = \sum_{j=1}^{q} \sum_{k=1}^{r} a_j \, e^{-2\lambda_j \eta x_k} \overline{P_k}(-\partial + 2\lambda_j \eta)\delta_{-x_k}.
$$

Por otra parte,

$$
\begin{aligned}
\overline{P_k}(-\partial + 2\lambda_j \eta) &= \overline{P_{k,m}}(-\partial + 2\lambda_j \eta) + \sum_{|\alpha| \le m-1} \overline{b_{k,\alpha}}(-\partial + 2\lambda_j \eta)^{\alpha} \\
&= \overline{P_{k,m}(2\lambda_j \eta)} + \sum_{i=0}^{m-1} D_{k,i}(\partial, \eta)\lambda_j^i,
\end{aligned}
$$

luego, si reemplazamos esto último en la igualdad anterior, obtenemos

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}\mu)(2x) \cdot \check{\overline{T}} &= \sum_{j=1}^{q}\sum_{k=1}^{r} a_j\, e^{-2\lambda_j \eta x_k} \sum_{i=0}^{m-1} \lambda_j^i D_{k,i}(\partial,\eta)\delta_{-x_k} + \sum_{j=1}^{q}\sum_{k=1}^{r} a_j\, e^{-2\lambda_j\eta x_k}\overline{P_{k,m}(2\lambda_j\eta)}\delta_{-x_k} \\
&= \sum_{k=1}^{r}\sum_{i=0}^{m-1} D_{k,i}(\partial,\eta)\delta_{-x_k}\sum_{j=1}^{q} a_j\, e^{-2\lambda_j\eta x_k}\lambda_j^i + \sum_{k=1}^{r}\sum_{j=1}^{q} a_j\, e^{-2\lambda_j\eta x_k}\lambda_j^m\overline{P_{k,m}(2\eta)}\delta_{-x_k} \\
&= \overline{P_{1,m}(2\eta)}\delta_{-x_1}\left(\frac{1}{\overline{P_{1,m}(2\eta)}}\right) \\
&= \delta.
\end{aligned}$$

Por el lema anterior, tenemos entonces que

$$\begin{aligned}
\delta &= T * \left\langle \mu(\zeta), e^{\zeta x}\mathcal{F}_\xi^{-1}\left(\frac{\overline{\mathcal{F}T(\xi - i\zeta)}}{\mathcal{F}T(\xi - i\zeta)}\right)\right\rangle \\
&= T * \left\langle \sum_{j=1}^{q} a_j\delta_{\lambda_j\eta}(\zeta), e^{\zeta x}\mathcal{F}_\xi^{-1}\left(\frac{\overline{\mathcal{F}T(\xi - i\zeta)}}{\mathcal{F}T(\xi - i\zeta)}\right)\right\rangle \\
&= T * \sum_{j=1}^{q} a_j e^{\lambda_j\eta x}\mathcal{F}_\xi^{-1}\left(\frac{\overline{\mathcal{F}T(\xi - i\lambda_j\eta)}}{\mathcal{F}T(\xi - i\lambda_j\eta)}\right) \\
&= T * E
\end{aligned}$$

□

Observación 2.3.5. *Si el soporte de T es $\{x_1, x_2, \dots, x_r\}$ con $x_1 \neq 0$ entonces el soporte de $T(x - x_1) := \tau_{x_1}T$ es $\{0, x_2 - x_1, \dots, x_r - x_1\}$. Por lo tanto podemos hallar la solución fundamental de $T(x - x_1)$ mediante el procedimiento anterior. Si llamamos E a la solución fundamental de $T(x - x_1)$ entonces la solución fundamental de T será $E(x - x_1)$. En efecto, debido a la proposición 1.2.16 tenemos que*

$$T * \tau_{x_1}E = \tau_{x_1}T * E = \delta.$$

Capítulo 3

Una Clase de Operadores de Convolución Invertibles con Soporte Infinito

En la última proposición del capítulo anterior (proposición 2.3.4) se probó que todo operador de convolución con soporte finito tiene una solución fundamental. Nos propusimos entonces estudiar a cuáles operadores invertibles (ver [5], Definición 16.3.12, p. 330) se podría extender el método de Wagner. El ejemplo 16.3.19 de [5] (p. 333) nos motivó a considerar distribuciones de la forma

$$T = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k P_k(\partial)\delta_{x_k}, \tag{3.1}$$

donde:

- $\{x_k\}_{k\geq 1}$ es una sucesión acotada en $\mathbb{R}^n$,
- $(\alpha_k) \in \ell^1$, $\alpha_k \neq 0$ $\forall k \geq 1$ y
- $\forall k \geq 1$, $P_k(\partial) = \sum\limits_{|\alpha|\leq m} a_{k,\alpha}\partial^\alpha$ es un polinomio diferencial de grado $\leq m$ siendo $m \geq 0$ fijo y además existe una constante $K > 0$ tal que $|a_{k,\alpha}| \leq K$ para todo $k \geq 1$ y todo α con $|\alpha| \leq m$.

De esta forma tenemos que $T \in \mathscr{E}'$ está bien definida. En efecto, sea $R > 0$ tal que para todo $k \geq 1$, $|x_k| \leq R$. Sea $\varphi \in \mathscr{E}$. Entonces para todo $k \geq 1$,

$$\begin{aligned} |\langle P_k(\partial)\delta_{x_k}, \varphi\rangle| &= \left|\left\langle \sum_{|\alpha|\leq m} a_{k,\alpha}\partial^\alpha\delta_{x_k}, \varphi\right\rangle\right| \\ &\leq K \sum_{|\alpha|\leq m} |\langle\delta_{x_k}, \partial^\alpha\varphi\rangle| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= K \sum_{|\alpha|\leq m} |(\partial^\alpha \varphi)(x_k)| \\
&\leq K \sum_{|\alpha|\leq m} \max_{|x|\leq R} |(\partial^\alpha \varphi)(x)| \\
&= KC(m,\varphi),
\end{aligned}$$

donde $C(m,\varphi)$ es constante para todo $k \geq 1$. Por lo tanto $(\langle P_k(\partial)\delta_{x_k},\varphi\rangle) \in \ell^\infty$ para todo $\varphi \in \mathscr{E}$. Como $(\alpha_k) \in \ell^1$ tenemos que $\langle T,\varphi\rangle$ converge para todo $\varphi \in \mathscr{E}$.

Este problema no se pudo resolver en toda su generalidad, sino únicamente para un caso especial. Sin embargo, creemos que vale la pena hacer el planteamiento general y luego considerar el caso en que se encontró solución.

3.1. Planteamiento General del Problema

Sea T como en la ecuación 3.1. Podemos suponer que $x_1 = 0$ ya que si E es solución fundamental de $T(x - x_1)$ entonces $E(x - x_1)$ será solución fundamental de T (ver la observación 2.3.5).

La idea es hallar una medida de Radon μ sobre $\mathbb{R}^n$ con soporte compacto, tal que

$$(\mathcal{L}\mu)(2x)\check{\overline{T}} = \delta,$$

para luego aplicar el lema 2.3.3.

Para cada $k \geq 1$, sea m_k el grado del polinomio P_k y para cada polinomio P_k denotemos por $P_{k,l}$ a la parte homogénea de grado l $(0 \leq l \leq m)$, donde $P_{k,l} \equiv 0$ si $l > m_k$. Escojamos $\eta \in \mathbb{R}^n$ tal que $P_{1,m_1}(\eta) \neq 0$ y $\eta \cdot x_k \neq 0 \;\forall\, k \geq 2$. Pongamos

$$\mu = \sum_{j=1}^{\infty} a_j\ \delta_{\lambda_j \eta},$$

donde $(a_j) \in \ell^1$ y $(\lambda_j) \in \ell^\infty$ son sucesiones que hay que determinar posteriormente. Tenemos entonces:

- $(\mathcal{L}\mu)(2x) = \left\langle \sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j\ \delta_{\lambda_j\eta}(y), e^{2xy} \right\rangle = \sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j\ e^{2\lambda_j \eta x}$,
- $\check{\overline{T}} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k \overline{P_k}(-\partial)\delta_{-x_k}$,
- $(\mathcal{L}\mu)(2x)\check{\overline{T}} = \left(\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j\ e^{2\lambda_j\eta x}\right)\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k \overline{P_k}(-\partial)\delta_{-x_k}\right)$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_k a_j e^{2\lambda_j \eta x} \overline{P_k}(-\partial)(\delta_{-x_k})$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_k a_j e^{-2\lambda_j \eta x_k} \overline{P_k}(-\partial + 2\lambda_j \eta)\delta_{-x_k},$$

- $\forall k \geq 1$, $\overline{P_k}(-\partial + 2\lambda_j\eta)\delta_{-x_k} = \overline{P_{k,m_k}}(2\eta)\lambda_j^{m_k}\delta_{-x_k} + \sum_{l=0}^{m_k-1}\lambda_j^l T_{k,l}$, donde las distribuciones $T_{k,l}$ son combinaciones lineales de derivadas de δ_{-x_k}.

Todas estas igualdades se obtienen de la misma forma que en la demostración de la proposición 2.3.4. Por lo tanto,

$$(\mathcal{L}\mu)(2x)\check{\overline{T}} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_k a_j e^{-2\lambda_j\eta x_k} \left(\overline{P_{k,m_k}}(2\eta)\lambda_j^{m_k}\delta_{-x_k} + \sum_{l=0}^{m_k-1} \lambda_j^l T_{k,l} \right).$$

El problema consiste ahora en hallar las sucesiones $(a_j) \in \ell^1$ y $(\lambda_j) \in \ell^\infty$, de tal forma que

$$(*) \begin{cases} 1. \ \sum_{j=1}^{\infty} a_j \lambda_j^{m_1} = \frac{1}{\alpha_1 \overline{P_{1,m_1}}(2\eta)} & \\ 2. \ \sum_{j=1}^{\infty} a_j \lambda_j^{l} = 0 & \text{para } 0 \leq l \leq m_1 - 1 \\ 3. \ \sum_{j=1}^{\infty} a_j \ e^{-2\lambda_j \eta x_k} \lambda_j^{l} = 0, & \text{para } k \geq 2, \ 0 \leq l \leq m_k \end{cases}.$$

Así, tendríamos que

$$(\mathcal{L}\mu)(2x)\check{\overline{T}} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_k a_j e^{-2\lambda_j\eta x_k} \overline{P_{k,m_k}}(2\eta)\lambda_j^{m_k}\delta_{-x_k} + \left(\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_k a_j e^{-2\lambda_j\eta x_k} \sum_{l=0}^{m_k-1} \lambda_j^l T_{k,l} \right)$$
$$= \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_1 a_j e^{-2\lambda_j \eta x_1} \overline{P_{1,m_1}}(2\eta)\lambda_j^{m_1}\delta_{-x_1}$$
$$= \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j \lambda_j^{m_1} \right) \alpha_1 \overline{P_{1,m_1}}(2\eta)\delta$$
$$= \delta,$$

y el problema quedaría resuelto.

Pero el sistema $(*)$, en esta generalidad, aparece muy complicado. Por ejemplo, en el caso en el cual la convolución por T es un operador con diferencias (sin derivadas), o sea, cuando $m = 0$, las ecuaciones 1, 2 y 3 se reducen a

$$(*)' \begin{cases} 1'. \ \sum_{j=1}^{\infty} a_j = \frac{1}{\alpha_1} & \\ 3'. \ \sum_{j=1}^{\infty} a_j \ e^{-2\lambda_j \eta x_k} = 0, & \text{para } k \geq 2 \end{cases},$$

problema que se enmarca en la dualidad de ℓ^1 y ℓ^∞, pero para el cual no encontramos prueba de la existencia de una solución. Sin embargo encontramos un caso en el que sí se puede resolver este problema.

3.2. Un Caso Especial

Si ocurre que los puntos x_k del soporte de T se hallan todos contenidos en un número finito de hiperplanos afines paralelos de $\mathbb{R}^n$, con dos condiciones adicionales que enunciaremos en seguida, sí se puede resolver el problema general. Más precisamente tenemos:

Proposición 3.2.1. *Sea*

$$T = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k P_k(\partial)\delta_{x_k}$$

la distribución dada en la ecuación 3.1, con las condiciones allí enunciadas. Supongamos adicionalmente que existen números reales $c_1 = 0, c_2, \ldots, c_r$ distintos dos a dos y un vector $\eta \in \mathbb{R}^n$ con $P_{1,m_1}(\eta) \neq 0$ tales que si ponemos, para $1 \leq p \leq r$,

$$B_p = \{x_k \mid k \geq 1, \eta x_k = c_p\},$$

se tenga:

$$B_1 = \{x_1\}$$

$$\bigcup_{p=1}^{r} B_p = \{x_k \mid k \geq 1\}.$$

Entonces existe una medida de Radon μ en $\mathbb{R}^n$ con soporte compacto, tal que

$$(\mathcal{L}\mu)(2x)\check{\overline{T}} = \delta.$$

Demostración. Sea $q = r(m+1)$ y pongamos $\mu = \sum\limits_{j=1}^{q} a_j \delta_{\lambda_j \eta}$, donde los $a_1, \ldots, a_q, \lambda_1, \ldots, \lambda_q$ satisfacen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{q} a_j \lambda_j^{m_1} = \frac{1}{\alpha_1 \overline{P_{1,m_1}(2\eta)}} \\ \sum\limits_{j=1}^{q} a_j e^{-2c_p\lambda_j} \lambda_j^{l} = 0 \qquad \text{si } (p \geq 2 \text{ y } 0 \leq l \leq m) \text{ ó si } (p = 1 \text{ y } 0 \leq l \leq m \text{ y } l \neq m_1) \end{cases}.$$

Entonces μ es una medida de Radon con soporte compacto y, de acuerdo con lo expuesto anteriormente,

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}\mu)(2x)\check{\overline{T}} &= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{q} \alpha_k a_j e^{-2\lambda_j \eta x_k} \overline{P_{k,m_k}(2\eta)} \lambda_j^{m_k} \delta_{-x_k} + \left(\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{q} \alpha_k a_j e^{-2\lambda_j \eta x_k} \sum_{l=0}^{m_k-1} \lambda_j^l T_{k,l}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \overline{P_{k,m_k}(2\eta)} \left(\sum_{j=1}^{q} a_j e^{-2\lambda_j \eta x_k} \lambda_j^{m_k}\right) \delta_{-x_k} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sum_{l=0}^{m_k-1} T_{k,l} \left(\sum_{j=1}^{q} a_j e^{-2\lambda_j \eta x_k} \lambda_j^{l}\right)
\end{aligned}$$

$$= \alpha_1 \overline{P_{1,m_1}(2\eta)} \left(\sum_{j=1}^{q} a_j \lambda_j^{m_1} \right) \delta \qquad \text{(pues } \eta x_k = 0 \text{ únicamente para } k = 1\text{).}$$
$$= \delta.$$

La existencia de los $a_1, \ldots, a_q, \lambda_1, \ldots, \lambda_q$ se sigue de la independencia lineal de las funciones $t \mapsto e^{-2c_p t} t^l$ ($1 \leq p \leq r$, $0 \leq l \leq m$), como en la prueba de la proposición 2.3.4. □

La solución fundamental de T será entonces

$$E = \sum_{j=1}^{q} a_j e^{\lambda_j \eta x} \mathcal{F}_\xi^{-1} \left(\frac{\overline{(\mathcal{F}T)(\xi - i\lambda_j \eta)}}{(\mathcal{F}T)(\xi - i\lambda_j \eta)} \right).$$

Como $\mathcal{F}T$ es una función analítica en $\mathbb{C}^n$, se prueba de la misma manera que en el lema 2.3.3 que el cociente $\frac{\overline{(\mathcal{F}T)(\xi - i\lambda_j \eta)}}{(\mathcal{F}T)(\xi - i\lambda_j \eta)}$ representa una distribución temperada.

Bibliografía

[1] J. I. Dávila, *Sobre una demostración explícita del teorema de Malgrange-Ehrenpreis*. Tesis para optar el título de Matemático, Universidad de los Andes, 1998.

[2] I. M. Gel'fand, G. E. Shilov, *Generalized functions. Vol. 2. Spaces of fundamental and generalized functions*. (Translated from the Russian). Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1968 [1977].

[3] H. Grauert, K. Fritzsche, *Several Complex Variables*, Springer, 1976.

[4] L. Hörmander, *The analysis of linear partial differential operators. I. Distribution Theory and Fourier Analysis.* Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 256. Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[5] L. Hörmander, *The analysis of linear partial differential operators. II. Differential operators with constant coefficients.* Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 257. Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[6] F. John, *Partial Differential Equations.* Springer-Verlag, New York, 1981.

[7] J. Lesmes, *Teoria das Distribuições e Equações Diferenciais.* Monografias Matemáticas No. 11, IMPA, Rio de Janeiro, 1972.

[8] N. Ortner, P. Wagner, *A Short Proof of the Malgrange-Ehrenpreis Theorem*, Functional Analysis, Proc. of the 1st Int. Workshop, ed. by S. Dierolf, S. Dineen, P. Domanski, 343-352, de Gruyter, Berlin, 1996.

[9] N. Ortner, P. Wagner, *A Survey on Explicit Representation Formulae for Fundamental Solutions of Linear Partial Differential Operators*, Acta Applicandae Mathematicae **47** (1997) 101-124.

[10] N. Ortner, P. Wagner, *On the Fundamental Solution of the Operator of Dynamic Thermoelasticity*, J. Math. Anal. Appl. **170** (1992) 524-550

[11] J. Rauch, *Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1991.

[12] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill International Editions, Singapore, 1987.

[13] L. Schwartz, *Théorie des Distributions*, Nouv. Éd., Hermann, Paris, 1966.

[14] L. Schwartz, *Mathematics for the Physical Sciences*, Dover Publications, New York, 2008.

[15] P. Wagner, *On the explicit calculation of fundamental solutions*, J. Math. Anal. Appl. **297** (2004) 404-418.

[16] P. Wagner, P., *A New Constructive Proof of the Malgrange-Ehrenpreis Theorem*, Am. Math. Monthly. **116** (2009) 457-462.