

Diseño de Rutas y Frecuencias para un Sistema BRT con Múltiples Corredores: Una  
Aproximación con Generación Simultánea de Columnas y Restricciones

Trabajo de Tesis  
Presentado al  
Departamento de Ingeniería Industrial

por  
Jaime E. González  
Asesor: Andrés L. Medaglia

Para optar al título de  
Magister en Ingeniería Industrial

Centro para la Optimización y Probabilidad Aplicada (COPA)  
Departamento de Ingeniería Industrial  
Universidad de los Andes  
Bogotá, Colombia  
Enero de 2011



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>9</b>
<b>2. El Problema de Diseño de Rutas para un Sistema BRT</b>	<b>15</b>
<b>3. Modelo de Redes para el problema BRTRDP</b>	<b>19</b>
<b>4. Metodología de solución para el BRTRDP</b>	<b>23</b>
4.1. Modelo Relajado . . . . .	23
4.2. Generación Simultánea de Columnas y Restricciones . . . . .	24
<b>5. Resultados Computacionales</b>	<b>31</b>
<b>6. Conclusiones</b>	<b>35</b>



# Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecer a mi asesor Andrés Medaglia por su apoyo y dedicación en el desarrollo de este proyecto. A Jose Luis Walteros, por sus consejos y valiosa retroalimentación. Quiero agradecer a mi familia y a todos los integrantes del grupo de investigación COPA. A Sandra, por su paciencia y apoyo. Finalmente, agradezco a Fair Isaac Corporation (FICO) por proveernos las licencias de Xpress-MP bajo el Academic Partner Program suscrito con la Universidad de los Andes.



# Resumen

Los sistemas de Buses de Tránsito Rápido (BRT, por sus siglas en inglés), han demostrado ser una de las alternativas con costo-beneficio favorable para que las ciudades desarrollen rápidamente un sistema de transporte público de gran cobertura, rápido servicio y alta calidad. El sistema BRT esencialmente emula las características de desempeño de un sistema de transporte masivo moderno sobre rieles como el metro pero, a un menor costo. El éxito en la operación de los sistemas BRT depende de decisiones estratégicas tales como la selección de las rutas que ofrece el operador del sistema. Este problema consiste en encontrar un conjunto de rutas y respectivas frecuencias que minimicen el tiempo total de los pasajeros en el sistema. En este trabajo se propone un modelo entero mixto y una metodología para encontrar una buena solución al problema de diseño de rutas. La estrategia de solución consiste en resolver a optimalidad la relajación lineal por medio de un esquema de generación simultánea de columnas y restricciones. Posteriormente, utilizar las rutas obtenidas de la solución del modelo relajado para resolver el problema entero mixto. La metodología propuesta es probada en 15 instancias de sistemas BRT hasta con 9 corredores y 17 estaciones.

Palabras Claves: sistemas BRT, diseño de rutas, generación simultanea de columnas y restricciones.





# Capítulo 1

## Introducción

Los sistemas de buses de tránsito rápido (BRT, por sus siglas en inglés) son soluciones de transporte que combinan buses, estaciones, vías exclusivas y sistemas inteligentes de transporte. El propósito de estos sistemas es proveer una infraestructura que permita transportar una gran cantidad de pasajeros con un rápido tiempo de desplazamiento, a un menor costo en comparación con sistemas ferroviarios de transporte como el metro. Puntualmente, Wright y Hook (2007) definen a los sistemas BRT como sistemas basados en buses de alta calidad que minimizando tiempos, proporcionan movilidad urbana rápida, cómoda y con un costo-beneficio favorable a través de la provisión de infraestructura segregada de uso exclusivo, operaciones rápidas y frecuentes, y excelencia en mercadeo y servicio al usuario.

La implementación de sistemas BRT en el mundo ha tenido gran acogida en los últimos años. Ciudades de todos los tamaños en todos los continentes han adoptado dichos sistemas. Para nombrar algunos ejemplos, en América del Norte, hay sistemas BRT en Los Angeles (EEUU), Boston (EEUU) y Ottawa (Canadá); en Europa, en Leeds (Reino Unido) y Rouen (Francia); en Oceanía, en Sydney y Adelaide (Australia); en África, en Lagos (Nigeria) y Johannesburgo (Sudáfrica); en Asia, en Beijing (China) y Pune (India); y en Sur América, en Quito (Ecuador), Sao Paulo (Brasil) y Bogotá (Colombia). De hecho, un estudio reciente patrocinado por el Institute for Transportation & Development Policy, en los Estados Unidos, reporta 48 sistemas BRT en operación, 16 en construcción y 98 sistemas en la fase de planeación a lo largo del mundo (Wright y Hook, 2007).

Algunas implementaciones exitosas han convertido a los sistemas BRT en una opción real como medio de transporte masivo y competitivo frente a sistemas ferroviarios como el metro. De hecho, uno de los sistemas BRT más reconocidos en el mundo es TransMilenio (TransMilenioS.A., 2010), el cual opera en Bogotá (Colombia), una ciudad con más de 7 millones de habitantes (citymayors.com, 2010). En Noviembre de 2010, el sistema comprendía una red de 84 kilómetros de líneas exclusivas, 114 estaciones, 1.254 buses articulados y bi-articulados (con capacidades de 160 y 260 pasajeros, respectivamente) y 93 rutas. Con una utilización de más de 1 millón de pasajeros por día a principios de 2006, TransMilenio transporta a más de 190.000 pasajeros por hora pico en 2010, el cual es un volumen comúnmente asociado a sistemas de transporte masivo sobre rieles. Adicionalmente, Trans-

Milenio ha aumentado las velocidades promedio del tránsito público de 15km/h a 27km/h (TransMilenioS.A., 2010; Cain, Darido, Baltés, Rodríguez y Barrios, 2006). El gran éxito de este sistema BRT ha inspirado a otras ciudades en Colombia y el mundo a replicar el modelo TransMilenio (Cain et al., 2006). Sólo en Colombia, el mismo modelo ha sido emulado por sistemas BRT de menor escala en Barranquilla (TransMetro), Bucaramanga (MetroLínea), Cali (Mío), Cartagena (TransCaribe), Medellín (MetroPlus), y Pereira (MegaBus).

Sin embargo, pese al gran éxito de sistemas BRT como TransMilenio, una vez en operación, éstos están sujetos a quejas públicas tales como sobrecupo y los largos tiempos de espera (Cain et al., 2006; Cámara de Comercio de Bogotá, 2008). De hecho, un ex-gerente de operaciones de TransMilenio afirmó en 2003 que tanto la demanda como el comportamiento esperado de los pasajeros de cualquier sistema BRT en periodo de planeación, comúnmente difieren del sistema cuando éste entra en funcionamiento. Esta diferencia entre las fases de planeación y operación requiere una revisión exhaustiva de los diferentes elementos del sistema usando una matriz de distribución de viajes origen-destino (OD). En consecuencia, la planeación y operación de cualquier sistema de transporte público trae consigo una secuencia de problemas interrelacionados que deben ser resueltos (Ceder y Wilson, 1986).

La planeación de un sistema BRT incluye entonces el diseño de la red, el diseño de las rutas, la determinación de las frecuencias, la asignación de la flota y la programación del personal. Dichas etapas comprenden la solución de problemas que van desde un nivel estratégico a uno operativo. Dentro de los problemas estratégicos se tienen la selección de las vías que utilizará el sistema, la definición de los corredores, la localización de las estaciones y el diseño de las rutas para cada corredor. Por otro lado, en los problemas operativos se encuentran la determinación de las frecuencias, la asignación de la flota de buses a las rutas y la programación de personal a los buses. Éste trabajo se enfoca exclusivamente en el diseño de las rutas y la determinación de sus frecuencias.

Para resolver el problema del diseño de rutas se debe diseñar primero la red del sistema, es decir, la estructura física del sistema. Laporte, Mesa y Ortega (2002) resuelven el problema seleccionando las mejores locaciones para las estaciones en una estructura prediseñada de un sistema de tránsito rápido mediante un algoritmo de ruta más larga. De igual forma, Bruno, Gendreau y Laporte (2002) modelan el problema de ubicar las estaciones maximizando la población cubierta sujeta a restricciones de espacio entre estaciones, resolviéndolo mediante un algoritmo de construcción y mejora. Como metodología para integrar el problema de localización de estaciones con el de conectar las estaciones a través de un pequeño número de líneas, Laporte, Marín, Mesa y Ortega (2004) proponen un programa entero que incluye el costo de construcción como una restricción, la cual ilustraron usando redes pequeñas de seis y nueve nodos. Más recientemente, Marín y Jaramillo (2008) incorporan una técnica acelerada de descomposición de Benders con la cual resuelven instancias de hasta 24 nodos.

Una vez se ha diseñado la red física para un sistema BRT, la selección de las vías y la localización de las estaciones, el problema con mayor impacto es el diseño de las rutas que operará el sistema, el cual consiste en determinar en qué estaciones debe detenerse el bus que está asignado a una ruta. La literatura sobre diseño de rutas para sistemas con otros

modos de transporte ofrece información relevante y técnicas de solución. Según Kepaptsoglou y Karlaftis (2009) se pueden identificar dos grandes clases de aproximaciones a la solución del problema de diseño de rutas: métodos heurísticos y métodos convencionales. Los métodos convencionales incluyen modelos analíticos y programación matemática, mientras los métodos heurísticos involucran procedimientos iterativos y métodos de búsqueda local o modelos de programación matemática para determinar las rutas finales y las frecuencias.

Los estudios que utilizan métodos heurísticos para encontrar solución al problema son extensos. Silman, Barzily y Passy (1974) y Dubois, Bell y Llibre (1979) utilizan modelos que seleccionan (y mejoran) secuencialmente las rutas y sus respectivas frecuencias, basados en métodos iterativos combinados con algoritmos de búsqueda local. Otros investigadores resuelven el problema de diseño de rutas de buses siguiendo una aproximación de dos fases que primero construye un conjunto de rutas que están en capacidad de operar el sistema y luego selecciona las rutas finales usando diferentes heurísticas. Por ejemplo, Ceder y Israeli (1996) resuelven el problema encontrando primero un conjunto de rutas candidatas y luego, en un segundo paso, seleccionan las mejores. Similarmente, Mandl (1980) construye un conjunto de rutas candidatas resolviendo un problema de ruta más corta para cada par de nodos y posteriormente crea nuevas rutas mejoradas fusionando las rutas teniendo en cuenta el costo de transporte promedio calculado. La solución a este problema tiene un gran impacto en los problemas tácticos subsecuentes como la determinación de las frecuencias de los buses, la creación de horarios y la distribución de buses y personal.

Baaj y Mahmassani (1991) presentan un método de tres componentes que resuelve simultáneamente los problemas de diseño de las rutas de buses y de las frecuencias de despacho. El primer componente genera un conjunto de rutas; el segundo, utiliza una herramienta denominada TRUST (Baaj y Mahmassani, 1990) para computar las frecuencias de las rutas; y el tercer y último componente, utiliza TRUST para mejorar rutas generadas previamente. Un trabajo posterior de Baaj y Mahmassani (1995) revisa el primer componente del método, integrando una heurística híbrida que se enfoca en generar el conjunto de rutas iniciales. El algoritmo híbrido construye *esqueletos* seleccionando pares de nodos de alta demanda y conectándolos mediante un algoritmo de ruta más corta con diferentes composiciones de nodos. Finalmente, los esqueletos son expandidos a rutas basadas en estrategias de inserción de cuatro nodos que tienen en cuenta diferentes medidas de desempeño.

Algunos investigadores han explorado el uso de metaheurísticas para el problema de diseño de rutas. Pattnaik, Mohan y Tom (1998) usan un algoritmo genético para resolver el problema de rutas y frecuencias. Primero utilizan soluciones de problemas de ruta más corta para generar las rutas candidatas, y luego, mediante un algoritmo genético, encuentran la mejor colección de rutas posibles para operar el sistema. En contraste, Chakroborty (2003) utiliza algoritmos genéticos para maximizar el número de pasajeros que transporta el sistema.

Recientemente, algunos estudios han usado recocido simulado (SA, por sus siglas en inglés) para resolver el problema de diseño de rutas. Por ejemplo, Fan y Machemehl (2006) usan SA con un objetivo que combina tanto el costo operacional como el costo de los pasajeros. Zhao y Zeng (2006) proponen un método que minimiza el tiempo de transbordos. Pese a lo que se

podría pensar, el objetivo parece razonable, dado que las soluciones propuestas tienden a crear rutas con muchas paradas que se traducen en demoras. Sin embargo, es posible demostrar que en algunos casos es útil usar transbordos para minimizar el tiempo total de los pasajeros en el sistema. Finalmente, Fan y Mumford (2008) utilizan SA para sistemas de buses ordinarios, creando rutas iniciales resolviendo problemas de ruta más corta y luego mejorando el conjunto de rutas con búsqueda local. Walteros, Riaño y Medaglia (2007) solucionan el problema del diseño de rutas de un sistema BRT mediante una estrategia de descomposición que dado un conjunto de rutas, las evalúa, separando así la decisión de la selección de las rutas de la evaluación de desempeño de dichas rutas en el sistema BRT. La evaluación es realizada resolviendo un problema de optimización lineal bajo un esquema de generación de columnas. La estrategia de descomposición es incluida en un algoritmo genético híbrido y probada en instancias de 5 a 40 estaciones con diferentes topologías.

En un menor volumen, el problema también ha sido atacado con métodos convencionales como programación matemática. Borndörfer, Grötschel y Pfetsch (2007) proponen un método basado en generación de columnas en el cual se definen simultáneamente las rutas y las frecuencias. El problema se resuelve para un sistema de transporte multimodal, sin embargo, un supuesto del estudio es que los transbordos entre los modos son ignorados debido a que aumenta en gran manera la complejidad del modelo. Schöbel y Scholl (2010) formularon un modelo entero mixto que minimiza el tiempo de viaje de los pasajeros incluyendo los transbordos. Sugieren una aproximación utilizando una estrategia de descomposición de Dantzig-Wolfe para resolver la relajación lineal. Sin embargo, las instancias resueltas corresponden a un sistema ferroviario de una sola línea. Recientemente Feillet, Gendreau, Medaglia y Walteros (2010) presentaron una formulación para el problema de rutas de un sistema BRT donde se permiten transbordos entre rutas. Ellos proponen un esquema de generación simultánea de columnas y restricciones, donde las rutas son generadas sistemáticamente en cada iteración. Los autores pudieron resolver el problema de diseño de rutas para sistemas de solo un corredor hasta 19 estaciones. Sin embargo, los sistemas BRT reales, en su mayoría, comprenden estructuras viales formadas por varios corredores, por lo tanto es necesario extender esas ideas para diseñar rutas en sistemas BRT con múltiples corredores.

La mayoría de los trabajos en la literatura sobre diseño de rutas en sistemas urbanos de transporte no se formularon originalmente para sistemas BRT sino para buses que se desplazan sobre una malla vial (Ceder y Israeli, 1996; Silman et al., 1974; Mandl, 1980; Baaj y Mahmassani, 1990; Baaj y Mahmassani, 1995; Pattnaik et al., 1998; Fan y Machemehl, 2006). Desafortunadamente, no es evidente cómo extender las metodologías para que funcionen en sistemas BRT debido a las diferencias entre el ruteo de buses clásico y el diseño de rutas para sistemas BRT. Por lo tanto, el problema de diseño de las rutas de un sistema BRT con múltiples corredores es un problema aún abierto.

Para resolver el problema de diseño de rutas en sistemas BRT con múltiples corredores, se propone un programa entero mixto (MIP, por sus siglas en inglés), con una estructura de red subyacente. Debido a la gran cantidad de rutas posibles, encontrar una solución exacta a través del método de ramificación y acotamiento (B&B, por sus siglas en inglés) es difícil

para instancias de tamaño real. Por lo tanto, se plantea resolver la relajación del modelo utilizando un método exacto; esto es, generar las rutas estratégicamente en cada iteración utilizando un esquema de generación de columnas y restricciones, similar al propuesto por Feillet et al. (2010), lo que permite resolver a optimalidad la relajación. Luego, es posible resolver el modelo entero mixto con las rutas obtenidas. Finalmente, esta metodología es utilizada para resolver 16 instancias realistas de sistemas BRT hasta con 37 estaciones y diferentes topologías.

Este documento está organizado de la siguiente forma. El Capítulo 2 presenta una descripción del problema de diseño de rutas para un sistema BRT y se enuncian los supuestos e información importante para el desarrollo de este estudio. En el Capítulo 3 se presenta la formulación matemática que modela el problema de diseño de redes para sistemas BRT y el grafo en el que está basado la construcción del modelo. El Capítulo 4 describe la estrategia de solución propuesta. El Capítulo 5 ilustra computacionalmente la aproximación en un conjunto de instancias reales y adaptadas de la literatura. Finalmente, el Capítulo 6 presenta las conclusiones y perspectivas de la investigación actualmente en proceso.



## Capítulo 2

# El Problema de Diseño de Rutas para un Sistema BRT

El sistema BRT que se considera en este trabajo está compuesto por corredores, estaciones y vías exclusivas para buses de alta capacidad. Los pasajeros pagan una tarifa única en la puerta de la estación. Al igual que en los sistemas basados en rieles los pasajeros caminan por una rampa hacia la puerta en la que esperan una ruta determinada (bus). Una vez dentro del sistema, los pasajeros pueden viajar entre cualquier par de estaciones sin salir de la red del sistema, sin embargo, para llegar a su destino, puede ser necesario realizar uno o más transbordos a rutas diferentes. Los transbordos se producen en estaciones intermedias, donde los pasajeros esperan por el próximo bus.

Las estaciones, cada una asociada con al menos un corredor, son los únicos lugares en el sistema BRT en donde los buses se detienen y los pasajeros pueden entrar y salir. Conceptualmente, un corredor es un conjunto de estaciones adyacentes que pueden ser conectadas directamente por una misma ruta. Las rutas son diseñadas para cada corredor, y consecuentemente, cada corredor es asignado a un grupo de rutas. Una característica muy importante de los sistemas BRT es que existen rutas regulares, es decir, rutas que se detienen en todas las estaciones de un corredor. Además, se consideran rutas expresas (rutas que se detienen en pocas estaciones) ya que cuando un bus se detiene en una estación, otros buses pueden sobrepasarlo y seguir con su recorrido.

El problema a tratar en este trabajo es el del diseño de rutas y frecuencias para sistemas BRT, (al que denominaremos BRTRDP, por sus siglas en inglés). En este problema, se asume que ya se ha resuelto el problema de localización de las estaciones y definición de los corredores del sistema. En resumen, se deben encontrar un conjunto manejable de rutas y respectivas frecuencias que minimicen el tiempo de los pasajeros en el sistema mientras se satisfacen condiciones técnicas como: las demandas de cada estación dadas en la matriz OD, el tamaño de la flota (número de buses), capacidad de los buses y las vías, de forma tal que el conjunto de rutas pueda satisfacer la demanda sin sobresaturar la red (estaciones, buses y vías). Por eficiencia gerencial, es deseable operar el sistema con un número limitado de rutas.

Como ejemplo, considere un sistema BRT de dos corredores y cuatro estaciones. El primer

corredor está conformado por las estaciones 1, 2 y 3; mientras el segundo corredor lo conforman las estaciones 4, 2 y 3. En la Figura 2.1 encontramos todas las rutas posibles que pueden operar el sistema. Por ejemplo, la ruta 1 para en las estaciones 1, 2 y 3; mientras la ruta 7 se detiene en las estaciones 4 y 3. Note que, si un pasajero desea viajar desde la estación 1 a la estación 4, debe realizar transbordo puesto que no existe un corredor al que pertenezcan ambas estaciones. Una posible opción sería tomar en la estación 1 la ruta 1, bajarse en la estación 2 y tomar allí la ruta 6 para llegar finalmente a la estación 4.

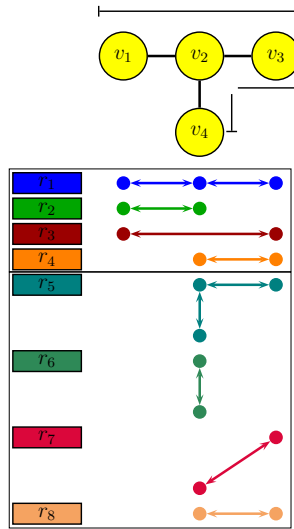


Figura 2.1: Ejemplo de corredores y rutas en un sistema BRT con cuatro estaciones y dos corredores

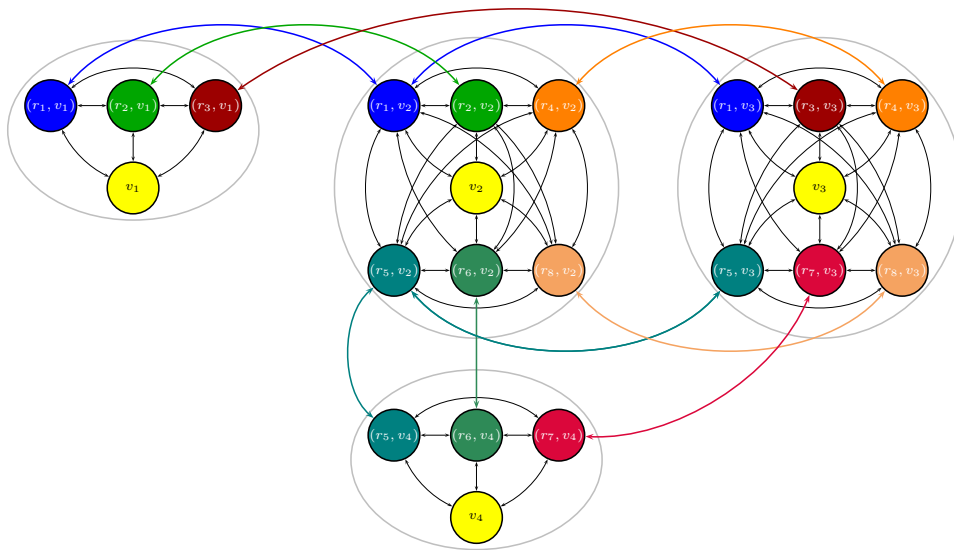


Figura 2.2: Representación como grafo del sistema con cuatro estaciones y dos corredores



La presentación formal del BRTRDP requiere un mayor entendimiento de las siguientes consideraciones, requisitos de información y supuestos relacionados con diferentes aspectos del sistema BRT.

1. **Diseño de la solución.** Los pasajeros se acostumbran al sistema, por lo que no es recomendable que las rutas se modifiquen constantemente. Las rutas son rediseñadas únicamente cuando se incluyen nuevas estaciones, nuevos corredores o cuando la demanda ha sufrido un cambio significativo. Por ende, no es crucial que el método de solución sea rápido.
2. **Horizonte de tiempo.** El horizonte de tiempo ideal debe ser decidido con base en que tanto varía la demanda a lo largo del día. Dadas las amplias variaciones, el problema debe ser resuelto para las horas pico porque representan el cuello de botella durante el cual el desempeño del sistema influencia de manera directa la opinión del público. El conjunto de rutas encontrado para horas pico debe entonces ser válido para horas valle, pero con frecuencias menores.
3. **Matriz Origen-Destino (OD).** De las tantas diferentes técnicas de recolección y predicciones de demandas de viaje entre estaciones, este trabajo se basa en las dos propuestas realizadas por Balcombe, Mackett, Paulley, Preston, Shires, Titheridge, Wardman y White (n.d.): encuestar usuarios del sistema y recolectar información de las ventas de tiquetes (la segunda es particularmente aplicable para el rediseño de rutas). Esta información se traduce en la demanda del sistema de transporte público y puede ser representada por una matriz OD en la cual cada elemento contiene el número de pasajeros que desean viajar de una estación a otra dado un horizonte de tiempo. De acuerdo con Borndörfer et al. (2007), la matriz OD es la forma más sencilla, estándar y conveniente para estimar la demanda en el estudio de un sistema de transporte público. De cualquier forma, la calidad de la solución de cualquier modelo, que se basa en matrices OD, depende significativamente de la precisión de los datos.
4. **Simetría de las rutas.** Con el fin de mantener la simplicidad, este trabajo asume que todas las rutas son simétricas, lo que significa que una ruta se detiene en las mismas estaciones en ambas direcciones. En la práctica, algunos sistemas BRT como TransMilenio prefieren esta estructura de rutas simétricas, ya que hace que el uso del sistema sea fácil para el usuario.
5. **Asignación de pasajeros.** Un aspecto crítico durante la medición del desempeño de un sistema BRT es la estimación de las rutas preferidas por los pasajeros y el flujo a través de esos caminos (Desaulniers y Hickman, 2007). Encontrar esas rutas y flujos es particularmente problemático durante la fase de planeación porque no hay forma de validar utilizando datos históricos. Por lo tanto, es común basarse en que todos los pasajeros hacen sus viajes basados en una función objetivo común (Desaulniers y Hickman, 2007). Esta función objetivo es frecuentemente referenciada en la literatura como

la minimización del tiempo total de viaje (Silman et al., 1974), (Ceder y Wilson, 1986), (Borndörfer et al., 2007) o como la minimización de la función de costos generalizados, es decir, la suma ponderada de diferentes componentes como el tiempo de viaje, el tiempo de espera, el tiempo de transbordo y el número de transbordos (Ceder y Israeli, 1996), (Baaaj y Mahmassani, 1995), (Fan y Machemehl, 2006).

Trabajos más recientes en asignación de pasajeros asigna libremente los usuarios sin rutas predefinidas (Borndörfer et al., 2007). Siguiendo esta aproximación, usamos la formulación matemática que determina simultáneamente el flujo y las frecuencias. La ventaja de esta aproximación es que no solo los pasajeros son asignados de forma óptima de acuerdo a la función objetivo, sino que también el modelo puede ser ajustado a las frecuencias a favor de rutas más congestionadas. Sin embargo, para evitar no linealidades en la función objetivo, no se considera el efecto de la congestión de las estaciones, colas de pasajeros o acumulación de buses en las decisiones de viajes de los pasajeros.

6. **Transbordos entre rutas.** No solo los transbordos entre rutas son permitidos, sino que algunas veces es la única manera posible en la que los pasajeros pueden viajar entre un par de estaciones. Por lo tanto, permitir transbordos en un sistema BRT ayuda a disminuir el número de paradas en una ruta y a disminuir el número de rutas necesarias para operar el sistema. Estos transbordos no son instantáneos y toman un tiempo en ser realizados. Esto es, incluyen el tiempo que el pasajero necesita para caminar dentro de la estación en la que va a realizar la transferencia (entre puertas en una rampa dada) y el tiempo de espera del siguiente bus.

# Capítulo 3

## Modelo de Redes para el problema BRTRDP

Considere un grafo  $G = (\mathcal{V}, \mathcal{A})$ , donde  $\mathcal{V}$  es el conjunto de vértices (nodos) y  $\mathcal{A}$  es el conjunto de arcos dirigidos. Antes de detallar los vértices y arcos de  $G$ , es necesario definir los conjuntos:  $\mathcal{C}$  de corredores,  $\mathcal{S}$  de estaciones y  $\Omega$  de posibles rutas. Un vértice  $v_s \in \mathcal{S}$  (llamado *vértice puerta*) está definido en  $\mathcal{V}$  para todas las estaciones, es decir, representa la puerta de la estación, y un vértice  $v_i$  (*vértice de parada*) está definido para todos los pares  $(r_k, v_s)$ , donde  $r_k$  es una ruta y  $v_s$  una estación donde la ruta  $r_k$  se detiene. Además, se define  $s(v_i)$  como la estación asociada al vértice de parada  $v_i$  y  $z(r_k)$  como el corredor al que pertenece la ruta  $r_k$ . El conjunto  $\Omega(n_w)$  está formado por todas las rutas que pertenecen al corredor  $n_w$ . Es decir,  $\Omega = \bigcup_{n_w \in \mathcal{C}} \Omega(n_w)$ . El conjunto  $\mathcal{V}(r_k)$  está compuesto por los vértices de parada de la ruta  $r_k$ . Por lo tanto,  $\mathcal{V} = (\bigcup_{r_k \in \Omega} \mathcal{V}(r_k)) \cup \mathcal{S}$ . Dentro de cada estación  $v_s$ , los arcos están definidos desde (hasta) el vértice puerta hasta (desde) cada vértice de parada y entre cada par de vértices de parada. Estos arcos son denominados *arcos de estación*, se denotan  $\mathcal{A}(v_s)$  para la estación  $v_s$  y modelan el movimiento de pasajeros dentro de la estación. El conjunto de *arcos de ruta*, denotado  $\mathcal{A}(r_k)$ , comprende aquellos arcos que conectan los vértices del conjunto  $\mathcal{V}(r_k)$ . Este conjunto solamente incluye los arcos que conectan sucesivamente vértices de parada, es decir, son los arcos que modelan el movimiento físico de un bus entre las paradas de la ruta de un corredor. Por lo tanto,  $\mathcal{A} = (\bigcup_{r_k \in \Omega} \mathcal{A}(r_k)) \cup (\bigcup_{s \in \mathcal{S}} \mathcal{A}(v_s))$ .

Otros parámetros son considerados en el modelo. Sea  $c_{ij}$  el costo (por ejemplo tiempo) en el que incurre un pasajero cuando viaja por el arco  $(v_i, v_j)$ . Si el arco  $(v_i, v_j)$  es un arco de estación, entonces  $c_{ij}$  representa el tiempo que le toma al pasajero ir de la puerta de la estación a la puerta de abordaje (lugar donde se detiene la ruta), desde la puerta de abordaje a la puerta de la estación, o el tiempo de transbordo (tiempo caminando entre puertas de abordaje más el tiempo de espera) a la siguiente ruta. Si el arco  $(v_i, v_j)$  es un arco de ruta,  $c_{ij}$  representa el tiempo que toma al bus viajar entre dos vértices de parada sucesivos, este tiempo se asume independiente de la ruta y solo depende de la estación de origen  $s(v_i)$  y destino  $s(v_j)$ , es decir,  $c_{ij} \triangleq c_{s(v_i)s(v_j)}$ . Sea  $b^{od}$  el número de pasajeros que desean viajar desde la estación  $v_o$  a la estación  $v_d$ . A partir de este valor,  $b_i^{od}$  está definido para todos los vértices

$v_i$ , donde  $b_o^{od} = b^{od}$ ,  $b_d^{od} = -b^{od}$ , y  $b_i^{od} = 0$  en cualquier otro caso. Cabe anotar que los vértices de paradas son vértices de transbordo, es decir,  $b_i^{od} = 0$ . Se define  $Q$  como el número máximo de buses a operar y  $u$  la capacidad de pasajeros de cada bus. Se asume también que la flota de buses es homogénea, es decir, todos los buses tienen la misma capacidad. El parámetro  $q_{kw}$  está definido como el número máximo de buses que pueden ser asignados a la ruta  $r_k$  en el corredor  $n_w$ , y  $m$  el número máximo de rutas que el operador del sistema BRT puede operar.

Como ejemplo, tenga en cuenta el sistema de dos corredores y cuatro estaciones presentado en la Figura 2.2. Luego,  $\mathcal{C} = \{n_1, n_2\}$  contiene los dos corredores del sistema,  $\Omega(n_1) = \{r_1, r_2, r_3, r_4\}$  contiene las rutas del corredor  $n_1$ ,  $\Omega(n_2) = \{r_5, r_6, r_7, r_8\}$  contiene las rutas del corredor  $n_2$ ,  $\Omega = \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8\}$  representa el conjunto de todas las rutas posibles que pueden servir el sistema y el conjunto  $\mathcal{S} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  contiene todos los vértices puerta. Por ejemplo,  $\mathcal{V}(r_2) = \{v_{(r_2, v_1)}, v_{(r_2, v_2)}\}$ ,  $\mathcal{A}(r_2) = \{(v_{(r_2, v_1)}, v_{(r_2, v_2)}), (v_{(r_2, v_2)}, v_{(r_2, v_1)})\}$ ,  $\mathcal{A}(v_1) = \{(v_1, v_{(r_1, v_1)}), (v_{(r_1, v_1)}, v_1), (v_1, v_{(r_2, v_1)}), (v_{(r_2, v_1)}, v_1), (v_1, v_{(r_3, v_1)}), (v_{(r_3, v_1)}, v_1), (v_{(r_1, v_1)}, v_{(r_2, v_1)}), (v_{(r_1, v_1)}, v_{(r_3, v_1)}), (v_{(r_2, v_1)}, v_{(r_1, v_1)}), (v_{(r_2, v_1)}, v_{(r_3, v_1)}), (v_{(r_3, v_1)}, v_{(r_2, v_1)}), (v_{(r_3, v_1)}, v_{(r_1, v_1)})\}$ ,  $s(v_{(r_1, v_2)}) = v_2$  y por último  $z(r_1) = n_1$ .

Las variables de decisión  $x_{ij}^{od}$  determinan el flujo de pasajeros a través del arco  $(v_i, v_j)$  que desean ir de la estación  $v_o$  a la estación  $v_d$ ;  $f_{kw}$  es el número de buses asignados a la ruta  $r_k$  en el corredor  $n_w$ ; y  $y_{kw}$  es una variable binaria que toma el valor de 1 si se opera la ruta  $r_k$  en el corredor  $n_w$ , 0 de lo contrario. El modelo BRTRDP resultante, denominado  $(MP(\Omega))$  es:

$$\text{minimize } \sum_{n_w \in \mathcal{C}} \sum_{r_k \in \Omega(n_w)} \sum_{(v_i, v_j) \in \mathcal{A}(r_k)} \sum_{v_o \in \mathcal{S}} \sum_{v_d \in \mathcal{S}} c_{ij} x_{ij}^{od} + \sum_{v_s \in \mathcal{S}} \sum_{(v_i, v_j) \in \mathcal{A}(v_s)} \sum_{v_o \in \mathcal{S}} \sum_{v_d \in \mathcal{S}} c_s x_{ij}^{od} \quad (3.1)$$

sujeto a

$$\sum_{\{v_j: (v_i, v_j) \in \mathcal{A}\}} x_{ij}^{od} - \sum_{\{v_j: (v_j, v_i) \in \mathcal{A}\}} x_{ji}^{od} = b_i^{od} \quad (v_i \in \mathcal{V}, v_o \in \mathcal{S}, v_d \in \mathcal{S}), \quad (3.2)$$

$$\sum_{v_o \in \mathcal{S}} \sum_{v_d \in \mathcal{S}} x_{ij}^{od} \leq u f_{kw} \quad (n_w \in \mathcal{C}, r_k \in \Omega(n_w), (v_i, v_j) \in \mathcal{A}(r_k)), \quad (3.3)$$

$$f_{kw} \leq q_{kw} y_{kw} \quad (n_w \in \mathcal{C}, r_k \in \Omega(n_w)), \quad (3.4)$$

$$\sum_{n_w \in \mathcal{C}} \sum_{r_k \in \Omega(n_w)} f_{kw} \leq Q \quad (3.5)$$

$$\sum_{n_w \in \mathcal{C}} \sum_{r_k \in \Omega(n_w)} y_{kw} \leq m \quad (3.6)$$

$$x_{ij}^{od} \geq 0 \quad (r_k \in \Omega, (v_i, v_j) \in \mathcal{A}(r_k), v_o \in \mathcal{S}, v_d \in \mathcal{S}), \quad (3.7)$$

$$x_{ij}^{od} \geq 0 \quad (v_s \in \mathcal{S}, (v_i, v_j) \in \mathcal{A}(v_s), v_o \in \mathcal{S}, v_d \in \mathcal{S}), \quad (3.8)$$

$$f_{kw} \geq 0 \quad (n_w \in \mathcal{C}, r_k \in \Omega(n_w)), \quad (3.9)$$

$$y_{kw} \in \{0, 1\} \quad (n_w \in \mathcal{C}, r_k \in \Omega(n_w)), \quad (3.10)$$

El objetivo (3.1) es minimizar el tiempo total de los pasajeros en el sistema. El balance de flujo y transporte de los pasajeros se garantiza con las restricciones (3.2). Las restricciones

(3.3) limitan el número de pasajeros en las rutas de cada corredor. Las restricciones (3.4) aseguran que si una ruta es seleccionada para operar el sistema, los buses asignados para servir dicha ruta no pueden superar el máximo permitido. La restricción (3.5) acota el número de buses mientras que la restricción (3.6) limita el número de rutas a operar en el sistema. Finalmente, las restricciones (3.7)-(3.10) definen la naturaleza de las variables.

Aunque el modelo definido por (3.1)-(3.10) describe completamente el BRTRDP, obtener la solución es una tarea difícil. El BRTRDP cae en una categoría más amplia de problemas complejos ya que combina el problema de diseño de la red, el problema de diseño de una red capacitada y el diseño de una red multiartículo capacitada, problemas que son todos NP-duros dando como resultado que el BRTRDP sea también NP-duro. Hay que tener en cuenta también que la naturaleza binaria de las variables  $y_{kw}$  vuelven el problema altamente combinatorio.

El conjunto de rutas  $\Omega$  está relacionado estrechamente con el número de variables y restricciones. Debido a la estructura del problema, el número total de rutas es  $O(2^{|S|})$ . Dado que para cada ruta  $r_k$  en la red del problema existe un conjunto de vértices de parada  $\mathcal{V}(r_k)$  y un conjunto de arcos de ruta  $\mathcal{A}(r_k)$ , el número de restricciones (3.2)-(3.4) y variables aumenta exponencialmente de acuerdo al número de estaciones ( $|S|$ ) en el sistema. Luego, debido al gran tamaño del modelo propuesto por (3.1)-(3.10), resolverlo no es trivial y resulta necesario encontrar una metodología que permita solucionar el problema.



# Capítulo 4

## Metodología de solución para el BRTRDP

La estrategia de solución propuesta para encontrar una buena aproximación de  $MP(\Omega)$  consta de dos partes. Primero, se resolverá de manera exacta la relajación del modelo entero denominado desde ahora  $RMP(\Omega)$ . Para resolver el modelo relajado se utilizará un método exacto denominado generación simultánea de columnas y restricciones, garantizando la solución óptima de  $RMP(\Omega)$ . Luego, se resuelve el  $MP(\Omega)$  con las rutas resultantes de la solución de la relajación. Esta aproximación aunque no asegura la solución óptima del modelo entero mixto, sí puede producir una buena solución.

### 4.1. Modelo Relajado

El modelo relajado  $RMP(\Omega)$  no tiene en cuenta las variables  $y_{kw}$ , es decir, supone que el número de rutas a operar es ilimitado (se elimina la restricción (3.6)). Además, se asume que el número de buses que se pueden asignar a cada ruta no tiene cota (se elimina la restricción (3.4)).

Se desea minimizar el tiempo total de los pasajeros en el sistema (la suma del tiempo de transbordo y el tiempo de desplazamiento), teniendo en cuenta que se puede usar como máximo  $Q$  buses para servir la demanda, mientras se satisfacen las restricciones de capacidad de cada una de las rutas. El modelo resultante  $RMP(\Omega)$  es:

$$\text{minimize } \sum_{n_w \in \mathcal{C}} \sum_{r_k \in \Omega(n_w)} \sum_{(v_i, v_j) \in \mathcal{A}(r_k)} \sum_{v_o \in \mathcal{S}} \sum_{v_d \in \mathcal{S}} c_{ij} x_{ij}^{od} + \sum_{v_s \in \mathcal{S}} \sum_{(v_i, v_j) \in \mathcal{A}(v_s)} \sum_{v_o \in \mathcal{S}} \sum_{v_d \in \mathcal{S}} c_s x_{ij}^{od} \quad (4.1)$$

sujeto a

$$\sum_{\{v_j:(v_i,v_j)\in\mathcal{A}\}} x_{ij}^{od} - \sum_{\{v_j:(v_j,v_i)\in\mathcal{A}\}} x_{ji}^{od} = b_i^{od} \quad (v_i \in \mathcal{V}, v_o \in \mathcal{S}, v_d \in \mathcal{S}), \quad (4.2)$$

$$\sum_{v_o \in \mathcal{S}} \sum_{v_d \in \mathcal{S}} x_{ij}^{od} \leq u f_{kw} \quad (n_w \in \mathcal{C}, r_k \in \Omega(n_w), (v_i, v_j) \in \mathcal{A}(r_k)), \quad (4.3)$$

$$\sum_{n_w \in \mathcal{C}} \sum_{r_k \in \Omega(n_w)} f_{kw} \leq Q \quad (4.4)$$

$$x_{ij}^{od} \geq 0 \quad (r_k \in \Omega, (v_i, v_j) \in \mathcal{A}(r_k), v_o \in \mathcal{S}, v_d \in \mathcal{S}), \quad (4.5)$$

$$x_{ij}^{od} \geq 0 \quad (v_s \in \mathcal{S}, (v_i, v_j) \in \mathcal{A}(v_s), v_o \in \mathcal{S}, v_d \in \mathcal{S}), \quad (4.6)$$

$$f_{kw} \geq 0 \quad (n_w \in \mathcal{C}, r_k \in \Omega(n_w)). \quad (4.7)$$

De forma análoga al modelo BRTRDP definido por (3.1)-(3.10), el objetivo (4.1) es minimizar el tiempo total que gastan los pasajeros en el sistema. El balance de flujo y transporte de los pasajeros es garantizado con las restricciones (4.2). Las restricciones (4.3) limitan el número de pasajeros en las rutas y por último, la restricción (4.4) acota el número de buses que se pueden operar en el sistema.

## 4.2. Generación Simultánea de Columnas y Restricciones

Dada la gran cantidad de variables del problema se podría pensar en resolver el mismo con una técnica de generación de columnas. Sin embargo, el problema tiene una característica particular: cuando se intenta generar sistemáticamente una variable (ruta), deben adicionarse también restricciones al problema. Por cada nueva ruta, por lo menos, debe agregarse una restricción (4.2) por cada vértice de parada de la nueva ruta que ingresará al modelo  $RMP(\Omega)$  y una restricción (4.3) por cada nuevo arco de ruta. Por lo tanto, el criterio de optimalidad y la técnica clásica de generación de columnas no se puede aplicar de forma directa ((Feillet et al., 2010)).

Siguiendo el procedimiento propuesto en Feillet et al. (2010) se propone adaptar el criterio de optimalidad para el caso de la generación simultánea de columnas y restricciones de la siguiente manera: sea  $D(\Omega)$  el problema dual asociado del  $RMP(\Omega)$ . En alguna iteración  $t$  del algoritmo sea  $\Omega_t$  el conjunto de rutas generadas hasta la iteración  $t$ . Una vez es resuelto el  $RMP(\Omega_t)$ , se construye una solución  $X$  para el  $RMP(\Omega)$  y una solución  $\Pi$  para el  $D(\Omega)$ , utilizando las rutas disponibles en  $\Omega_t$ , con costos  $z_{RMP}$  y  $z_D$ , respectivamente, de tal forma que  $z_{RMP} = z_D$ . Entonces, se podría asegurar por dualidad fuerte que  $X$  y  $\Pi$  son óptimas. El procedimiento es el siguiente:

1. De una solución  $X_t^*$  de  $RMP(\Omega_t)$ , construir una solución factible  $X$  de  $RMP(\Omega)$ , con costo  $z_{RMP} = z_{RMP(\Omega_t)}^*$ ;



2. De una solución  $\Pi_t^*$  de  $D(\Omega_t)$ , construir una solución (no necesariamente factible)  $\Pi$  de  $D(\Omega)$ , con costo  $z_D = z_{D(\Omega_t)}^*$ , *i.e.*,  $z_D = z_{RMP}$ ;
3. Si  $\Pi$  es factible, el criterio de optimalidad se cumple y se debe parar el algoritmo. De lo contrario, al menos una restricción  $D(\Omega)$  es violada; se agrega a  $\Omega_t$  una ruta de  $\Omega \setminus \Omega_t$  para la cual una restricción es violada y se pasa a la siguiente iteración  $t + 1$ .

Note que en el modelo, cada ruta  $r_k$  adicionada al problema maestro restringido, implica la introducción en el grafo  $G$  de: nuevos vértices de parada  $\mathcal{V}(r_k)$ , nuevos arcos  $\mathcal{A}(r_k)$ , nuevos arcos de estación en las estaciones donde  $r_k$  se detiene. En el modelo, esto implica: una nueva variable  $f_{kw}$ , nuevas variables  $x_{ij}^{od}$  para los arcos  $(v_i, v_j) \in A(r_k)$ , nuevas variables  $x_{ij}^{od}$  para los nuevos arcos de estación  $(v_i, v_j)$ , una nueva restricción del tipo (4.2) para cada vértice  $\mathcal{V}(r_k)$  y una nueva restricción (4.3) para cada arco en  $\mathcal{A}(r_k)$ .

Para el ejemplo de la Figura 4.1 al introducir la ruta 1, es necesario, introducir los vertices de parada de la ruta  $\mathcal{V}(r_1) = \{v_{(r_1, v_1)}, v_{(r_1, v_2)}, v_{(r_1, v_3)}\}$ , los arcos de ruta  $\mathcal{A}(r_1) = \{(v_{(r_1, v_1)}, v_{(r_1, v_2)}), (v_{(r_1, v_2)}, v_{(r_1, v_1)}), (v_{(r_1, v_2)}, v_{(r_1, v_3)}), (v_{(r_1, v_3)}, v_{(r_1, v_2)})\}$ , además de los arcos de estación para las tres estaciones donde la ruta se detiene. Por ejemplo, si la ruta 1 es la unica ruta en el sistema en la iteración  $t$ , los arcos de estación que se deben agregar para la estación 1 son:  $\mathcal{A}(v_1) = \{(v_1, v_{(r_1, v_1)}), (v_{(r_1, v_1)}, v_1)\}$ .

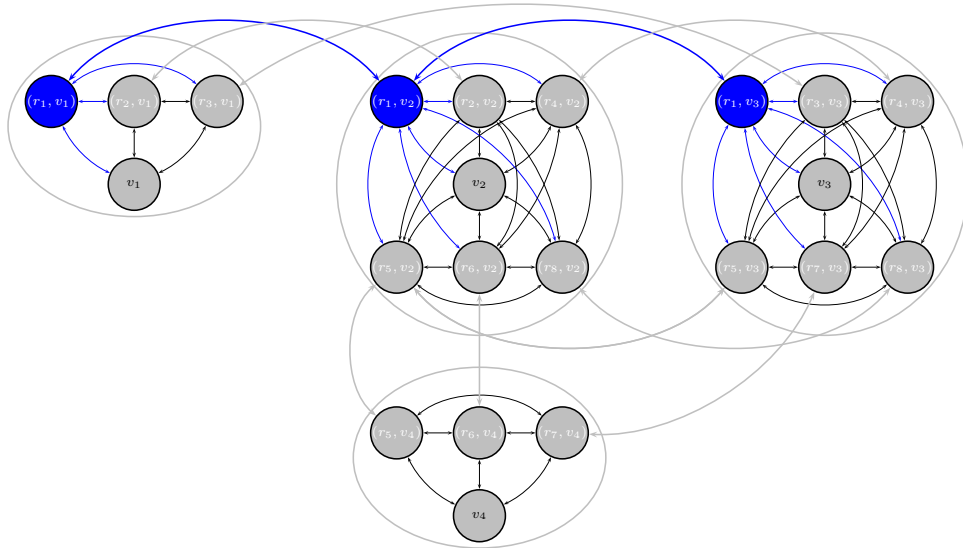


Figura 4.1: Nuevos elementos en el grafo incluidos con la ruta  $r_1$

El primer paso del algoritmo consiste en construir una solución factible para  $RMP(\Omega)$  a partir de una solución  $X_t^*$  de  $RMP(\Omega_t)$ . Para esto se propone mantener simplemente los valores definidos en  $X_t^*$  para las variables asociadas con las rutas en  $\Omega_t$  y fijar en 0 las variables restantes, es decir, para las variables  $x_{ij}^{od}$  y  $y_{kw}$  de las rutas  $r_k \in \Omega \setminus \Omega_t$ ,  $n_w \in \mathcal{C}$ . Se puede

demostrar que la solución  $X$  para  $RMP(\Omega)$  encontrada a partir de  $X_t^*$  es factible y tiene costo igual a  $z_{RMP(\Omega_t)}^*$ .

El segundo paso es construir una solución (no necesariamente factible)  $\Pi$  para el problema dual  $D(\Omega)$  de  $RMP(\Omega)$ . El modelo dual ( $D(\Omega)$ ) se presenta a continuación:

$$\text{maximize } \sum_{v_i \in \mathcal{V}} \sum_{v_o \in \mathcal{S}} \sum_{v_d \in \mathcal{S}} b_i^{od} \alpha_i^{od} - Q\gamma \quad (4.8)$$

sujeto a

$$\alpha_i^{od} - \alpha_j^{od} - \beta_{kw}^{ij} \leq c_{ij} \quad (n_w \in \mathcal{C}, r_k \in \Omega(n_w), (v_i, v_j) \in \mathcal{A}(r_k), v_o \in \mathcal{S}, v_d \in \mathcal{S}), \quad (4.9)$$

$$\alpha_i^{od} - \alpha_j^{od} \leq c_s \quad (v_s \in \mathcal{S}, (v_i, v_j) \in \mathcal{A}(v_s), v_o \in \mathcal{S}, v_d \in \mathcal{S}), \quad (4.10)$$

$$\sum_{(v_i, v_j) \in \mathcal{A}(r_k)} u \beta_{kw}^{ij} - \gamma \leq 0 \quad (n_w \in \mathcal{C}, r_k \in \Omega(n_w)), \quad (4.11)$$

$$\alpha_i^{od} \text{ free} \quad (v_i \in \mathcal{V}, v_o \in \mathcal{S}, v_d \in \mathcal{S}), \quad (4.12)$$

$$\beta_{kw}^{ij} \geq 0 \quad (n_w \in \mathcal{C}, r_k \in \Omega, (v_i, v_j) \in \mathcal{A}(r_k)), \quad (4.13)$$

$$\gamma \geq 0, \quad (4.14)$$

las variables duales  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  están relacionadas con las restricciones (4.2), (4.3) y (4.4), respectivamente.

La construcción de la solución dual  $\Pi = (\alpha, \beta, \gamma)$  se presenta a continuación. Los valores de las variables  $\alpha_i^{od}$  para  $v_i \in (\cup_{r_k \in \Omega_t} \mathcal{V}(r_k)) \cup \mathcal{S}$  son mantenidos como están definidos en  $\Pi_t^*$ , del mismo modo se mantienen los valores de las variables  $\beta_{kw}^{ij}$  para  $r_k \in \Omega_t$ ,  $n_w \in \mathcal{C}$  y el valor de la variable  $\gamma$ . Por lo tanto, se necesita determinar los valores de las nuevas variables:  $\alpha_i^{od}$  para  $v_i \in \mathcal{V}(r_k)$ ,  $r_k \in \Omega \setminus \Omega_t$  y  $\beta_{kw}^{ij}$  para  $(v_i, v_j) \in \mathcal{A}(r_k)$ ,  $n_w \in \mathcal{C}$ ,  $r_k \in \Omega \setminus \Omega_t$ .

Sea  $\tilde{r}_w$  una ruta denominada *dummy* que se detiene en todas las estaciones del corredor  $n_w \in \mathcal{C}$  y conecta directamente todos los pares de estaciones del corredor, esto es la fusión de todas las rutas en  $\Omega(n_w)$ . La adición de la ruta  $\tilde{r}_w$  en cada corredor  $n_w$  exige la definición del conjunto de vértices de parada  $\mathcal{V}(\tilde{r}_w)$  para  $n_w \in \mathcal{C}$ , el conjunto de arcos  $\mathcal{A}(\tilde{r}_w)$  para  $n_w \in \mathcal{C}$  y los arcos de estación que conectan los vértices  $v(\tilde{r}_w, v_s)$  al resto de vértices en la estación  $s \in \mathcal{S}$  para  $n_w \in \mathcal{C}$ . Los últimos arcos se añaden a  $\mathcal{A}(v_s)$ .

Por ejemplo, considere de nuevo el sistema de cuatro estaciones y dos corredores descrito en la Figura 2.2. Suponga que en un paso intermedio del procedimiento de generación simultánea de columnas y restricciones, la única ruta disponible para cada corredor es aquella que para en todas las estaciones del corredor  $\Omega_t(n_1) = \{r_1\}$  y  $\Omega_t(n_2) = \{r_5\}$ . Dichas rutas se muestran en la Figura 4.2, la ruta azul asociada al corredor 1 y la ruta verde asociada al corredor 2.

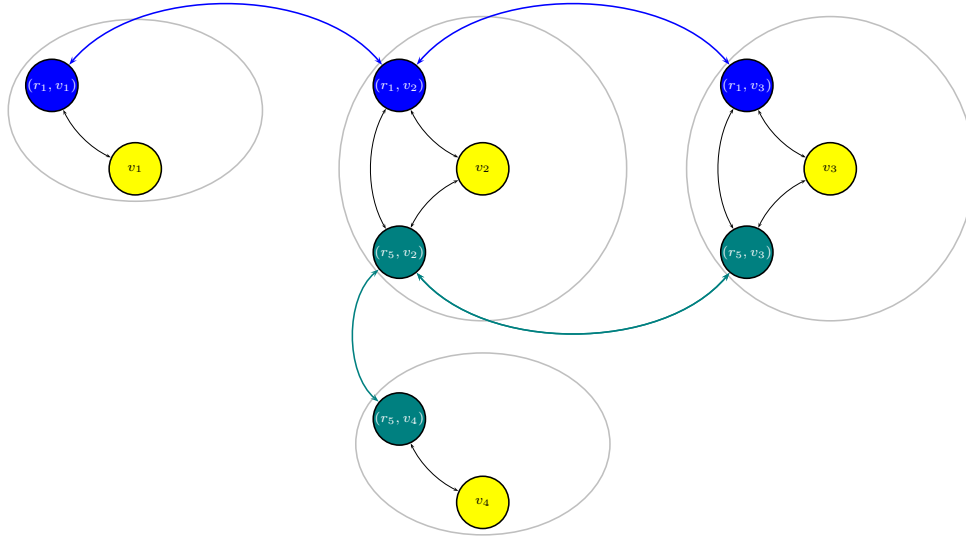


Figura 4.2: Rutas en una iteración  $t$  del procedimiento de generación de columnas y restricciones para un problema de dos corredores y cuatro estaciones

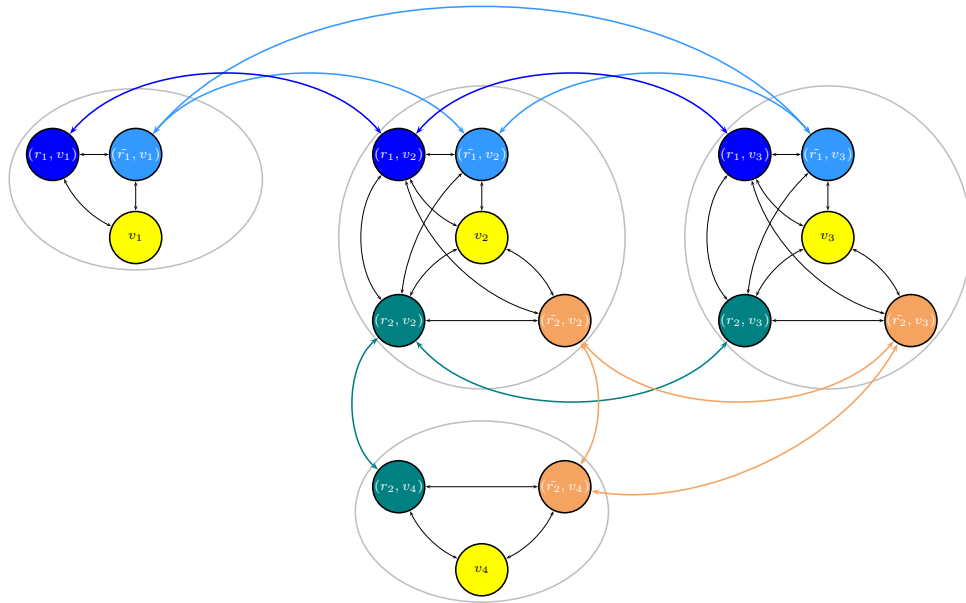


Figura 4.3: Rutas *dummy* para un problema de dos corredores y cuatro estaciones

Como se puede observar en la Figura 4.3 la ruta *dummy* de cada corredor incluye todos los arcos de todas las rutas que pueden servir al corredor. Por lo tanto, la ruta *dummy* del corredor  $n_1$  implica la adición a la red del conjunto de vértices  $\mathcal{V}(\tilde{r}_1) = \{v(\tilde{r}_1, v_1), v(\tilde{r}_1, v_2), v(\tilde{r}_1, v_3)\}$ ; el conjunto de arcos  $\mathcal{A}(\tilde{r}_1) = \{(v(\tilde{r}_1, v_1), v(\tilde{r}_1, v_2)), (v(\tilde{r}_1, v_2), v(\tilde{r}_1, v_1)), (v(\tilde{r}_1, v_1), v(\tilde{r}_1, v_3)), (v(\tilde{r}_1, v_3), v(\tilde{r}_1, v_1)), (v(\tilde{r}_1, v_2), v(\tilde{r}_1, v_3)), (v(\tilde{r}_1, v_3), v(\tilde{r}_1, v_2))\}$ ; y los correspondientes arcos de estación en cada una de las estaciones que pertenecen al corredor  $n_1$ . La ruta *dummy* del corredor  $n_2$  implica la adición a la red del conjunto de vértices  $\mathcal{V}(\tilde{r}_2) = \{v(\tilde{r}_2, v_4), v(\tilde{r}_2, v_2), v(\tilde{r}_2, v_3)\}$ ; el conjunto de arcos  $\mathcal{A}(\tilde{r}_2) =$

$\{(v_{(\tilde{r}_2, v_4)}, v_{(\tilde{r}_2, v_2)}), (v_{(\tilde{r}_2, v_2)}, v_{(\tilde{r}_2, v_4)}), (v_{(\tilde{r}_2, v_4)}, v_{(\tilde{r}_2, v_3)}), (v_{(\tilde{r}_2, v_3)}, v_{(\tilde{r}_2, v_4)}), (v_{(\tilde{r}_2, v_2)}, v_{(\tilde{r}_2, v_3)}), (v_{(\tilde{r}_2, v_3)}, v_{(\tilde{r}_2, v_2)})\}$ ; y los correspondientes arcos de estación en las estaciones 4, 2 y 3, las cuales pertenecen al corredor  $n_2$ .

Sean  $\tilde{\alpha}_i^{od}$  y  $\tilde{\beta}_w^{ij}$  las variables duales asociadas con las restricciones de balance de flujo (4.2) y capacidad (4.3) para los vértices  $v_i \in \mathcal{V}(\tilde{r}_w)$  y los arcos  $(v_i, v_j) \in \mathcal{A}(\tilde{r}_w)$  de la ruta *dummy*  $\tilde{r}_w$  para  $n_w \in \mathcal{C}$ . Dado que la ruta *dummy*  $\tilde{r}_w$  contiene los arcos que conectan todos los pares de estaciones en cada corredor  $n_w$ , cualquier ruta  $r_k \in \Omega \setminus \Omega_t$  para dicho corredor  $n_w$  puede ser construida a partir de la ruta *dummy*. Es más, los valores  $\tilde{\alpha}_i^{od}$  y  $\tilde{\beta}_w^{ij}$  pueden ser usados para obtener los valores de las variables duales  $\alpha_i^{od}$  para  $v_i \in \mathcal{V}(r_k)$  y  $\beta_{kw}^{ij}$  para  $(v_i, v_j) \in \mathcal{A}(r_k)$  para todas las rutas  $r_k \in \Omega \setminus \Omega_t$  del corredor  $n_w \in \mathcal{C}$ . Se propone entonces fijar  $\alpha_i^{od} = \tilde{\alpha}_i^{od}$  para todos los pares origen-destino  $(v_o, v_d) \in \mathcal{S} \times \mathcal{S}$  y  $v_i \in \mathcal{V}(r_k)$ ; y  $\beta_{kw}^{ij} = \tilde{\beta}_w^{ij}$  para todos los arcos  $(v_i, v_j) \in \mathcal{A}(r_k)$  del corredor  $n_w$ .

Por ejemplo, si se quiere construir la ruta 3 (en rojo en la Figura 2.2) de la ruta *dummy*  $\tilde{r}_1$ , se puede extraer la información de las variables duales asociadas con las restricciones de balance de flujo de los vértices  $v_{(\tilde{r}_1, v_1)}$  y  $v_{(\tilde{r}_1, v_3)}$  y asignarles su valor a las variables duales asociadas con los vértices  $v_{(r_3, v_1)}$  y  $v_{(r_3, v_3)}$ , respectivamente. Similarmente, se puede tomar el valor de las variables duales asociadas a la capacidad de los arcos  $(v_{(\tilde{r}_1, v_1)}, v_{(\tilde{r}_1, v_3)})$  y asignarles su valor a las variables duales asociadas a la capacidad de los arcos  $(v_{(r_3, v_1)}, v_{(r_3, v_3)})$ . Siguiendo el mismo procedimiento, se pueden obtener los valores de las variables duales  $\alpha_i^{od}$  para  $v_i \in \mathcal{V}(r_k)$ ,  $r_k \in \Omega \setminus \Omega_t$  y  $\beta_{kw}^{ij}$  para  $(v_i, v_j) \in \mathcal{A}(r_k)$ ,  $r_k \in \Omega \setminus \Omega_t$ ,  $n_w \in \mathcal{C}$  para cualquier otra ruta que no se encuentre en la iteración  $t$ .

Ya que es posible encontrar toda la información que se necesita con la ruta *dummy*, solo es necesario encontrar los valores de las variables  $\tilde{\alpha}$  y  $\tilde{\beta}$  tal que, en el programa dual, las restricciones (4.9) a (4.14) se satisfagan. Si es posible encontrar una solución factible, no se debe crear ninguna ruta adicional para mejorar la solución del problema. Para encontrar dicha solución factible se soluciona el siguiente programa lineal:

$$\text{minimize } \sum_{n_w \in \mathcal{C}} \sum_{(v_i, v_j) \in \mathcal{A}(\tilde{r}_w)} \sum_{v_o \in \mathcal{S}} \sum_{v_d \in \mathcal{S}} \delta_{ij}^{+od} \quad (4.15)$$

sujeto a

$$\tilde{\alpha}_i^{od} - \tilde{\alpha}_j^{od} - \tilde{\beta}_w^{ij} + \delta_{ij}^{-od} - \delta_{ij}^{+od} = c_{ij} \quad n_w \in \mathcal{C}, (v_i, v_j) \in \mathcal{A}(\tilde{r}_w), v_o \in \mathcal{S}, v_d \in \mathcal{S}, \quad (4.16)$$

$$\tilde{\alpha}_i^{od} - \alpha_j^{od} \leq c_s \quad (n_w \in \mathcal{C}, v_s \in \mathcal{S}, v_i \in \mathcal{V}(\tilde{r}_w), (v_i, v_j) \in \mathcal{A}(v_s), v_o \in \mathcal{S}, v_d \in \mathcal{S}), \quad (4.17)$$

$$\alpha_j^{od} - \tilde{\alpha}_i^{od} \leq c_s \quad (n_w \in \mathcal{C}, v_s \in \mathcal{S}, v_i \in \mathcal{V}(\tilde{r}_w), (v_j, v_i) \in \mathcal{A}(v_s), v_o \in \mathcal{S}, v_d \in \mathcal{S}), \quad (4.18)$$

$$\sum_{(v_i, v_j) \in \mathcal{A}(\tilde{r}_w)} u \tilde{\beta}_w^{ij} - \gamma \leq 0 \quad n_w \in \mathcal{C}, \quad (4.19)$$

$$\tilde{\alpha}_i^{od} \text{ free} \quad n_w \in \mathcal{C}, (v_i \in \mathcal{V}(\tilde{r}_w), v_o \in \mathcal{S}, v_d \in \mathcal{S}), \quad (4.20)$$

$$\tilde{\beta}_w^{ij} \geq 0 \quad n_w \in \mathcal{C}, (v_i, v_j) \in \mathcal{A}(\tilde{r}_w), \quad (4.21)$$

$$\delta_{ij}^{+od} \geq 0 \quad n_w \in \mathcal{C}, (v_i, v_j) \in \mathcal{A}(\tilde{r}_w), v_o \in \mathcal{S}, v_d \in \mathcal{S}, \quad (4.22)$$

$$\delta_{ij}^{-od} \geq 0 \quad n_w \in \mathcal{C}, (v_i, v_j) \in \mathcal{A}(\tilde{r}_w), v_o \in \mathcal{S}, v_d \in \mathcal{S} \quad (4.23)$$

En este modelo, los valores de  $\alpha_i^{od}$  para  $v_i \in (\bigcup_{r_k \in \Omega_t} \mathcal{V}(r_k)) \cup \mathcal{S}$ , y  $\gamma$  son fijados como parámetros de la solución del problema dual  $D(\Omega_t)$ . Tenga en cuenta que aparte de las variables  $\tilde{\alpha}$  y  $\tilde{\beta}$ , se introduce un nuevo conjunto de variables  $\delta_{ij}^{+od}$  y  $\delta_{ij}^{-od}$ , las cuales cuentan en (4.16) como la desviación por arriba y por debajo  $c_{ij}$  en las restricciones (4.9), respectivamente. Las restricciones (4.17) y (4.18) hacen cumplir las restricciones duales (4.10), mientras la restricción (4.19) asegura la satisfacción de las restricciones (4.11). La función objetivo (4.15) es minimizar la suma de las violaciones de las restricciones (4.9), buscando una solución dual factible.

Si después de resolver el problema (4.15)–(4.23) la función objetivo es cero, el algoritmo ha encontrado una solución factible  $\Pi$  para  $D(\Omega)$ . Es más, se puede demostrar que el costo de cada solución  $\Pi$  es igual a  $z_{D(\Omega_t)}^*$ . Considere la función objetivo del problema dual (4.8), teniendo en cuenta que las variables duales  $\beta_{kw}^{ij}$  para  $(v_i, v_j) \in \mathcal{A}(r_k), r_k \in \Omega \setminus \Omega_t, n_w \in \mathcal{C}$  no están presentes en la función, y que  $b_i^{od} = 0$  para los vértices de parada  $v_i \in \mathcal{V} \setminus \mathcal{S}$ , se puede ver que el valor de la función objetivo del problema dual depende solamente de las variables  $\alpha_i^{od}$  para  $v_i \in \mathcal{S}$  y la variable  $\gamma$ . Esto implica que independientemente de los valores utilizados para definir las variables  $\alpha_i^{od}$  para  $v_i \in \mathcal{V}(r_k), r_k \in \Omega \setminus \Omega_t$  y  $\beta_{kw}^{ij}$  para  $(v_i, v_j) \in \mathcal{A}(r_k), r_k \in \Omega \setminus \Omega_t, n_w \in \mathcal{C}$  el costo de  $\Pi$  sigue siendo  $z_{D(\Omega_t)}^*$ . Por lo tanto, se ha probado optimalidad por dualidad fuerte, debido a que  $z_{RMP(\Omega_t)}^* = z_{D(\Omega_t)}^*$ .

Si al resolver el problema la función objetivo toma valor positivo significa que al menos una restricción (4.9) no se satisface, es decir, con las rutas que se tienen en la iteración  $t$

no es posible todavía encontrar una solución factible para el programa dual. Por lo tanto, al menos una ruta puede ser extraída a partir de la ruta *dummy* del corredor  $n_w \in \mathcal{C}$ . Note que el problema (4.15)–(4.23) siempre tiene solución factible; por lo tanto, la función objetivo tomará un valor positivo o cero. Por ejemplo, si se fijan las variables  $\tilde{\alpha}_i^{od} = \alpha_{s(i)}^{od}$  para  $n_w \in \mathcal{C}$ ,  $v_i \in \mathcal{V}(\tilde{r}_w)$ , las variables  $\beta_{kw}^{ij} = 0$  para  $(v_i, v_j) \in \mathcal{A}(r_k)$ ,  $r_k \in \Omega \setminus \Omega_t$ ,  $n_w \in \mathcal{C}$  y las variables  $\delta_{ij}^{od}$  a un valor lo suficientemente grande, se estará garantizando que se satisfacen las restricciones (4.16)–(4.23).

La expresión  $(\delta_{ij}^{-od} - \delta_{ij}^{+od})$  puede ser interpretada como el costo reducido de las variables  $x_{ij}^{od}$  para  $n_w \in \mathcal{C}$ ,  $(v_i, v_j) \in \mathcal{A}(\tilde{r}_w)$ ,  $v_o \in \mathcal{S}$ ,  $v_d \in \mathcal{S}$ . Por lo tanto, un valor positivo de la variable desviación  $\delta_{ij}^{+od}$  implica que la correspondiente variable primal  $x_{ij}^{od}$  es una variable candidata para el  $RMP(\Omega_t)$ . Sin embargo, antes de ingresar la variable  $x_{ij}^{od}$ , se debe definir primero una ruta  $r$  tal que  $(v_i, v_j) \in \mathcal{A}(r)$ .

La nueva ruta se crea encontrando un camino con costo negativo para al menos un par  $(v_o, v_d) \in \mathcal{S} \times \mathcal{S}$  en un grafo  $G'_{od} = (\mathcal{S}, \mathcal{S} \times \mathcal{S})$ , donde los costos sobre los arcos  $(v_i, v_j)$  son  $(\delta_{ij}^{-od} - \delta_{ij}^{+od})$ , obtenidos a partir de la solución de (4.15)–(4.23). La creación de la nueva ruta se realiza resolviendo un problema de ruta más corta para cada par  $(v_o, v_d) \in \mathcal{S} \times \mathcal{S}$  en un grafo que tiene en cuenta todos los nodos de las rutas dummies de los diferentes corredores.

Cada vez que se encuentra una ruta con costo negativo, ésta se agrega al problema  $RMP$  y se continua a la iteración  $t+1$ . Note que cada ruta encontrada con costo negativo es una ruta candidata para ser incluida en  $RMP(\Omega_{t+1})$ , por lo tanto, en cada iteración del algoritmo se podrían encontrar varias rutas con costo negativo para los pares  $(v_o, v_d) \in \mathcal{S} \times \mathcal{S}$ , ingresarlas al conjunto de rutas y volver a resolver  $RMP$ .

Luego de resolver a optimalidad  $RMP(\Omega)$  se obtienen rutas que pueden generar una buena solución del  $MP(\Omega)$ . De esta forma, el siguiente paso es resolver el problema entero mixto utilizando solo las rutas obtenidas en  $RMP(\Omega)$ . No se puede garantizar la solución óptima de  $MP(\Omega)$  pero si una buena aproximación.

# Capítulo 5

## Resultados Computacionales

En este capítulo se presentan algunos resultados que muestran la convergencia de la metodología propuesta. Las pruebas computacionales se llevaron a cabo con el optimizador Xpress-MP (versión 1.19.01) en un Dell Precision T7400 con dos procesadores Intel Xeon X5450 de 3.0GHz y 8 GB de RAM bajo Windows Vista Ultimate x64.

Se realizaron experimentos computacionales con 16 instancias de sistemas BRT con diferentes topologías. Las instancias están codificadas desde **BRT-C1-S3** (sistema de un corredor y 3 estaciones) hasta **BRT-C3-S37** (sistema de 3 corredores y 37 estaciones). Con el fin de comparar resultados se resolvió, de ser posible, el problema entero mixto  $MP(\Omega)$  definido por (3.1)-(3.10) incluyendo todas las rutas posibles. Luego, fue resuelta la relajación del problema  $RMP(\Omega)$  también de ser posible, incluyendo todas las potenciales rutas. Posteriormente, se presentan los resultados del problema relajado  $RMP(\Omega)$  definido por (4.1)-(4.7) generando sistemáticamente las rutas. Finalmente, se muestran los resultados del modelo entero mixto  $MP(\Omega)$  utilizando solo las rutas obtenidas de la generación simultánea de columnas y restricciones.

La Tabla 5.1 reporta para cada instancia el tamaño del problema en términos del número de corredores, estaciones y potenciales rutas; el tamaño del problema en términos del número de variables y restricciones del problema (3.1)-(3.10); la mejor solución entera y el tiempo computacional en segundos usado por el optimizador. Como se observa, encontrar la solución óptima a través del método de Ramificación y Acotamiento (B&B) es difícil, inclusive para instancias pequeñas, ya que sólo fue posible obtener la solución óptima para 7 de las 16 instancias. Note que las variables, restricciones y rutas crecen exponencialmente de acuerdo al número de estaciones. También se observa que en 9 instancias no fue posible encontrar por lo menos una solución entera en el tiempo límite de ejecución.

La Tabla 5.2 muestra los resultados del problema relajado  $RMP(\Omega)$  si se ejecuta el modelo con todas las rutas posibles. Solo se obtuvo la solución óptima para 7 instancias, para las otras 10 instancias el optimizador comercial no logró encontrar la solución óptima, esto a pesar que el problema es una relajación y no se tiene en cuenta la naturaleza binaria de las variables  $y_{kw}$ . Ya que el tamaño del problema depende del número de estaciones en el sistema y cada parada de una ruta involucra un vértice de parada, arcos de ruta y arcos de

Tabla 5.1: Tamaño del problema y mejor solución entera obtenida para el MIP por el optimizador de Xpress-MP con tiempo límite de 36,000 segundos.

Instancias		Tamaño del Problema					Problema con todas las rutas	
No	Etiqueta	C	S	\Omega	Variables	Restricciones	Mejor Solución Entera	Tiempo CPU (s)
1	BRT-C1-S3	1	3	4	284	88	123,900	0.734
2	BRT-C1-S7	1	7	120	1,212,612	19,580	-	36,000.000
3	BRT-C1-S9	1	9	502	42,560,636	169,978	-	36,000.000
4	BRT-C1-S15	1	15	32,752	845,609,599,364	52,068,340	-	36,000.000
5	BRT-C2-S4	2	4	8	568	176	268,800	0.856
6	BRT-C2-S7	2	7	83	212,426	7,803	929,400	36,000.000
7	BRT-C2-S15	2	15	3,049	1,505,778,018	1,729,521	-	36,000.000
8	BRT-C3-S6	3	6	12	852	264	768,700	2.203
9	BRT-C3-S7	3	7	63	55,142	3,883	966,000	468.355
10	BRT-C3-S9	3	9	72	189,816	6,596	1,828,500	36,000.000
11	BRT-C3-S15	3	15	171	559,242	18,231	-	36,000.000
12	BRT-C3-S20	3	20	1,127	236,581,114	482,163	-	36,000.000
13	BRT-C4-S12	4	12	113	238,722	9,617	-	36,000.000
14	BRT-C4-S20	4	20	1,216	237,633,324	497,392	-	36,000.000
15	BRT-C9-S17	9	17	735	9,725,418	116,899	-	36,000.000
16	BRT-C3-S37	3	37	$\approx 1 \times 10^{11}$	$\approx 7 \times 10^{21}$	$\approx 1 \times 10^{13}$	-	36,000.000

estación que conectan esos vértices con el resto de la red, el número de variables y restricciones del problema será alto inclusive en instancias pequeñas como lo es un sistema de un único corredor y siete estaciones (BRT-C1-S7). Para sistemas con más de un corredor, el tamaño del problema en términos de variables y restricciones depende principalmente del corredor con el mayor número de estaciones. Note, por ejemplo, que el número de variables y restricciones del sistema BRT-C1-S15 es mucho mayor que para un sistema con el mismo número de estaciones y dos corredores BRT-C2-S15. Esto se debe a que en el segundo sistema, el mayor número de estaciones en un corredor es 11.

Tabla 5.2: Tamaño del problema y solución óptima del modelo relajado (*RMP*) para 15 instancias de sistemas BRT incluyendo todas las rutas posibles.

Instancias		Tamaño del problema					Problema con todas las rutas	
No	Etiqueta	C	S	\Omega	Variables	Restricciones	Solución Óptima	Tiempo CPU (s)
1	BRT-C1-S3	1	3	4	280	83	123,900	0.015
2	BRT-C1-S7	1	7	120	1,212,492	19,459	892,500	26.342
3	BRT-C1-S9	1	9	502	42,560,134	169,475	-	-
4	BRT-C1-S15	1	15	32,752	845,609,566,612	52,035,587	-	-
5	BRT-C2-S4	2	4	8	560	166	268,800	0.047
6	BRT-C2-S7	2	7	83	212,343	7,718	927,300	8.265
7	BRT-C2-S15	2	15	3,049	1,505,774,969	1,726,470	-	-
8	BRT-C3-S6	3	6	12	840	249	768,300	0.562
9	BRT-C3-S7	3	7	63	55,079	3,817	963,900	3.766
10	BRT-C3-S9	3	9	72	189,744	6,521	1,827,900	9.312
11	BRT-C3-S15	3	15	171	559,071	18,057	-	-
12	BRT-C3-S20	3	20	1,127	236,579,987	481,033	-	-
13	BRT-C4-S12	4	12	113	238,609	9,500	-	-
14	BRT-C4-S20	4	20	1,216	237,632,108	496,172	-	-
15	BRT-C9-S17	9	17	735	9,725,683	116,155	-	-
16	BRT-C3-S37	3	37	$\approx 1 \times 10^{11}$	$\approx 7 \times 10^{21}$	$\approx 1 \times 10^{13}$	-	-

La Tabla 5.3 muestra las rutas generadas, la solución óptima y el tiempo computacional bajo un esquema de generación simultánea de columnas y restricciones. Note que en todas las instancias fue posible encontrar la solución óptima y para tal fin el algoritmo solo genera un pequeño subconjunto de rutas en comparación con el número total de rutas posibles. Para una instancia con un número potencial de rutas alto como BRT-C1-S15 el algoritmo solo genera 97 de las 32.752 rutas posibles (0.3% de  $|\Omega|$ ).

La Tabla 5.4 presenta la solución óptima al resolver el problema entero mixto  $MP(\Omega)$  con



Tabla 5.3: Solución del *RMP* a partir de la generación de columnas y restricciones para 15 instancias de Sistemas BRT

Instancias		Generación de Columnas y Restricciones		
No	Etiqueta	Rutas Generadas	Solución Óptima	Tiempo CPU (s)
1	BRT-C1-S3	2	123,900	0.047
2	BRT-C1-S7	16	892,500	2.014
3	BRT-C1-S9	29	1,551,600	12.703
4	BRT-C1-S15	97	4,714,500	2566.296
5	BRT-C2-S4	4	268,800	0.109
6	BRT-C2-S7	15	927,300	2.453
7	BRT-C2-S15	73	5,116,500	456.641
8	BRT-C3-S6	6	768,300	0.328
9	BRT-C3-S7	14	963,900	2.172
10	BRT-C3-S9	16	1,827,900	4.078
11	BRT-C3-S15	33	5,763,900	51.234
12	BRT-C3-S20	59	11,414,000	451.375
13	BRT-C4-S12	28	3,463,500	24.937
14	BRT-C4-S20	70	10,778,900	886.015
15	BRT-C9-S17	76	6,844,400	1066.082
16	BRT-C3-S37	18	349,761,000	776.039

solo las rutas obtenidas de la solución del problema relajado  $RMP(\Omega)$ ; el tiempo computacional en segundos; el Gap-1, definido como la brecha entre la solución y la mejor solución entera obtenida por el MIP con todas las rutas y el Gap-2, que se define como la brecha entre la solución obtenida y la solución óptima de la relajación. Note que a pesar de utilizar sólo un subconjunto de rutas, el óptimo del MIP y la relajación difieren en promedio sólo en un 0.116 %. Luego, la metodología propuesta es capaz de encontrar una muy buena solución del modelo entero mixto y en algunas instancias la solución óptima.

Tabla 5.4: Solución del MIP con solo las rutas obtenidas de la solución del problema relajado

Instancias		MIP con solo las rutas generadas			
No	Etiqueta	Solución Óptima	Tiempo CPU (s)	Gap-1	Gap-2
1	BRT-C1-S3	123,900	0.094	0.000 %	0.000 %
2	BRT-C1-S7	894,700	0.234	-	0.246 %
3	BRT-C1-S9	1,556,200	2.369	-	0.296 %
4	BRT-C1-S15	4,798,000	120.132	-	0.286 %
5	BRT-C2-S4	268,800	0.022	0.000 %	0.000 %
6	BRT-C2-S7	928,700	0.218	0.075 %	0.151 %
7	BRT-C2-S15	5,122,600	41.435	-	0.119 %
8	BRT-C3-S6	768,700	0.047	0.000 %	0.052 %
9	BRT-C3-S7	966,000	0.204	0.000 %	0.218 %
10	BRT-C3-S9	1,828,400	0.368	0.005 %	0.027 %
11	BRT-C3-S15	5,765,100	3.369	-	0.021 %
12	BRT-C3-S20	11,417,400	20.284	-	0.030 %
13	BRT-C4-S12	3,468,800	7.394	-	0.153 %
14	BRT-C4-S20	10,785,700	333.387	-	0.063 %
15	BRT-C9-S17	6,847,400	23.732	-	0.044 %
16	BRT-C3-S37	350,256,000	86.391	-	0.142 %

La Figura 5.1 presenta la topología de BRT-C3-S37, instancia que corresponde al sistema BRT que opera en la ciudad de Cali (Colombia) y es denominado *MIO*. El primer corredor está conformado por 30 estaciones que van desde la estación 1 hasta la estación 30; el segundo corredor tiene 24 estaciones que incluyen desde la estación 1 hasta la estación 17 y desde la estación 31 hasta la estación 37; y el tercer corredor lo conforman 11 estaciones que incluyen la estación 17 hasta la estación 20 y desde la estación 31 hasta la 37.

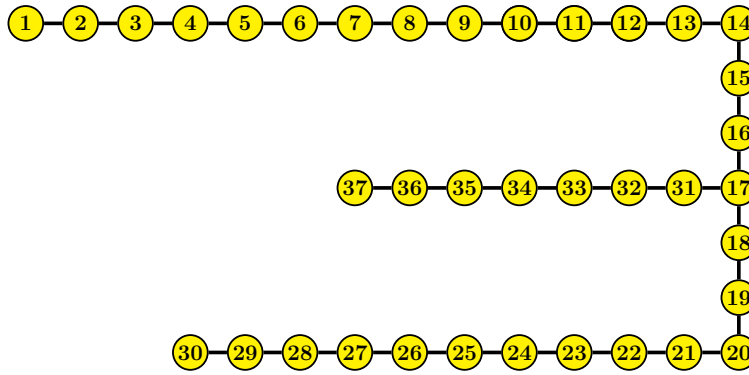


Figura 5.1: Instancia BRT-C3-S37 correspondiente al sistema MIO

Utilizando la metodología propuesta, se resolvió el problema y se generaron 18 rutas; sin embargo, la solución utiliza finalmente 9 de ellas, tal como se observa en la Figura 5.2. Cuatro rutas deben ser asignadas al corredor 1, cuatro al corredor 2 y una ruta debe quedar asignada en el corredor 3.

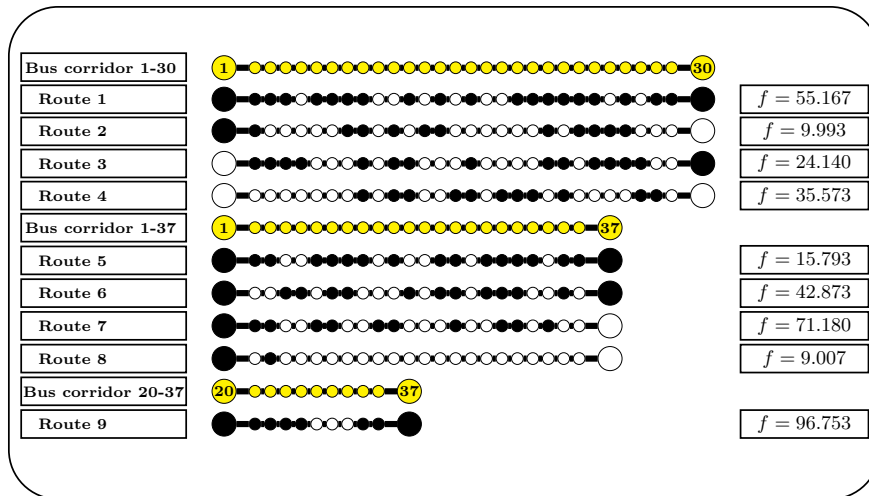


Figura 5.2: Rutas propuestas y respectivas frecuencias para el sistema MIO

En términos de la frecuencia, el número de buses asignados a las rutas propuestas fueron 55.160, 9.993, 24.140, 35.573, 15.793, 42.873, 71.180, 9.007 y 96.753, respectivamente; utilizando 360 buses de los 400 disponibles. Ya que la matriz OD fue construida utilizando la demanda de 3 horas pico, los buses que sirven esas rutas deberían ser despachados aproximadamente cada 18, 3, 4, 3, 11, 7, 5, 2 y 20 minutos, respectivamente.

# Capítulo 6

## Conclusiones

El crecimiento de las ciudades y la alta demanda de pasajeros en sistemas de transporte, hacen necesario crear sistemas que permitan realizar el traslado de manera rápida y eficiente. Por esto, en las grandes ciudades del mundo, ha aumentado la inversión en el diseño e implementación de sistemas BRT que contemplan múltiples corredores, estaciones y buses de alta capacidad de pasajeros.

Este trabajo se enfocó en el diseño de rutas de sistemas BRT con múltiples corredores, el cual se modeló mediante un programa entero mixto. Sin embargo, hasta en instancias pequeñas, la solución de la relajación del modelo no fue fácilmente alcanzada cuando todas las rutas son contempladas en la solución. Luego, se planteó utilizar un esquema de generación simultánea de columnas y restricciones para generar estratégicamente las rutas y encontrar la solución óptima del modelo relajado. Por último, se propuso resolver el modelo entero mixto utilizando sólo las rutas generadas en la solución de la relajación.

La metodología propuesta se probó en 16 instancias de sistemas BRT con diferentes topologías. Entre las instancias más grandes encontramos BRT-C9-S17 (versión a escala del sistema TransMilenio) y BRT-C3-S37 (instancia real del sistema MIO). Para 10 de las 16 instancias testeadas no fue posible encontrar la solución óptima del modelo entero mixto. No obstante, solamente encontrar el óptimo de la relajación utilizando todo el conjunto de posibles rutas, no es un problema sencillo y solo fue posible llegar a optimalidad en 7 de ellas. Sin embargo, mediante una técnica de generación simultánea de columnas y restricciones en la que se generan estratégicamente las rutas, se logró encontrar la solución óptima de la relajación para todas las instancias. Posteriormente, se resolvió el modelo entero mixto teniendo en cuenta solo las rutas obtenidas en la solución de la relajación en bajos tiempos computacionales. La solución obtenida se encuentra en promedio a solo 0.116% de la relajación indicando que es una muy buena solución y demostrando que la metodología es una alternativa viable para resolver instancias de tamaño real de sistemas BRT.

Note que el MIP se resolvió solo con las rutas obtenidas de la generación; sin embargo, ya que es posible resolver la relajación del modelo entero mixto, sería interesante incluir una fase de ramificación. Otro camino de investigación a explorar, sería combinar la técnica de solución de *RMP* con un método heurístico que logre encontrar de manera rápida un buen

conjunto de rutas para inicializar la generación sistemática de rutas.

# Nota al lector

El presente trabajo hace parte de un proyecto conjunto de investigación enfocado a resolver el problema del diseño de rutas para sistemas BRT mediante el uso de diferentes técnicas. Por lo tanto, los capítulos de introducción y descripción del problema son similares a los encontradas en la tesis de maestría desarrollada por Andrés González titulada "Problema de Diseño de Rutas para un Sistema de Buses de Tránsito Rápido mediante una Aproximación Heurística", la cual también fue asesorada por el profesor Andrés L. Medaglia.



# Referencias

- Baaaj, M. y Mahmassani, H. (1990). Trust: A LISP program for the analysis of transit route configurations., *Transportation Research Record* **1283**: 125–135.
- Baaaj, M. y Mahmassani, H. (1991). An AI-based approach for transit route system planning and design, *Journal of Advanced Transportation* **25**(2): 187–209.
- Baaaj, M. y Mahmassani, H. (1995). Hybrid route generation heuristic algorithm for the design of transit networks., *Transportation Research Part C* **3**(1): 31–50.
- Balcombe, R., Mackett, R., Paulley, N., Preston, J., Shires, J., Titheridge, H., Wardman, M. y White, P. (n.d.). The demand for public transport: a practical guide, *TRL* .
- Borndörfer, R., Grötschel, M. y Pfetsch, M. (2007). A column-generation approach to line planning in public transport, *Transportation Science* **41**(1): 123–132.
- Bruno, G., Gendreau, M. y Laporte, G. (2002). A heuristic for the location of a rapid transit line, *Computers & Operations Research* **29**(1): 1–12.
- Cain, A., Darido, G., Baltes, M., Rodriguez, P. y Barrios, J. (2006). Applicability of Bogotá's TransMilenio BRT system to the United States.
- Ceder, A. y Israeli, Y. (1996). Scheduling considerations in designing transit routes at the network level, in M. Desrochers y J. M. Rousseau (eds), *Fifth International Workshop on Computer-Aided Scheduling of Public Transport (CASPT)*, pp. 113–136.
- Ceder, A. y Wilson, N. (1986). Bus network design, *Transportation Research Part B* **20**(4): 331–344.
- Chakroborty, P. (2003). Genetic algorithms for optimal urban transit network design, *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering* **18**: 184–200.
- citymayors.com (2010). The largest cities in the world by land area, population and density. <http://www.citymayors.com/statistics/largest-cities-population-125.html>. Última visita Diciembre 16, 2010,.
- Cámara de Comercio de Bogotá (2008). Observatorio de movilidad de Bogotá y la región, **1**(1).

- Desaulniers, G. y Hickman, M. (2007). Chapter 2 public transit, *in* C. Barnhart y G. Laporte (eds), *Transportation*, Vol. 14 of *Handbooks in Operations Research and Management Science*, Elsevier, pp. 69 – 127.
- Dubois, D., Bell, G. y Llibre, M. (1979). A set of methods in transportation network synthesis and analysis, *Journal of the Operational Research Society* **30**(9): 797–808.
- Fan, L. y Mumford, L. (2008). A metaheuristic approach to the urban transit routing problem, *Journal of Heuristics* **16**(3): 353–372.
- Fan, W. y Machemehl, R. (2006). Using a simulated annealing algorithm to solve the transit route network design problem, *Journal of Transportation Engineering* **132**(2): 122–132.
- Feillet, D., Gendreau, M., Medaglia, A. y Walteros, J. (2010). A note on branch-and-cut-and-price, *Operations Research Letters* **38**(5): 346–353.
- Kepaptsoglou, K. y Karlaftis, M. (2009). Transit route network design problem: Review, *Journal of Transportation Engineering* **135**(8): 491–505.
- Laporte, G., Marín, A., Mesa, J. y Ortega, F. (2004). An integrated methodology for the rapid transit network design problem, *in* F. Geraets, L. G. Kroon, A. Schöbel, D. Wagner y C. D. Zaroliagis (eds), *Algorithmic Methods for Railway Optimization*, Vol. 4359 of *Lecture Notes in Computer Science*, Springer, pp. 187–199.
- Laporte, G., Mesa, J. y Ortega, F. (2002). Locating stations on rapid transit lines, *Computers & Operations Research* **29**(6): 741–759.
- Mandl, C. (1980). Evaluation and optimization of urban public transportation networks, *European Journal of Operational Research* **5**(6): 396–404.
- Marín, A. y Jaramillo, P. (2008). Urban rapid transit network design: accelerated Benders decomposition, *Annals of Operations Research* **169**(1): 35–53.
- Pattnaik, S., Mohan, S. y Tom, V. (1998). Urban bus transit route network design using genetic algorithm, *Journal of Transportation Engineering* **124**(4): 368–375.
- Schöbel, A. y Scholl, S. (2010). Line planning with minimal transfers, *5th Workshop on Algorithmic Methods and Models for Optimization of Railways ATMOS 2005*, Liverpool, United Kingdom.
- Silman, L., Barzily, Z. y Passy, U. (1974). Planning the route system for urban buses, *Computers & Operations Research* **1**(2): 201–211.
- TransMilenioS.A. (2010). Transmilenio official website. <http://www.transmilenio.gov.co>. Última visita Noviembre 2, 2010.



- Walteros, J., Riaño, G. y Medaglia, A. (2007). A hybrid genetic algorithm for route design in a bus rapid transit system, *Proceedings of the 7th Metaheuristics International Conference (MIC)*, Montréal, Canada.
- Wright, L. y Hook, W. (2007). ITDP (3ra edición): Bus rapid transit planning guide, *Technical report*. Disponible en <http://www.itdp.org/documents/BusRapidTransitGuide-completegguide.pdf>. Última visita Noviembre 15, 2010.
- Zhao, F. y Zeng, X. (2006). Simulated annealing-genetic algorithm for transit network optimization, *Journal of Computing in Civil Engineering* **20**(1): 57–68.