UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
Departamento de Matemáticas

Trabajo de grado de maestría

FORZAMIENTO A LO LARGO DE PLANTILLAS Y CONSISTENCIA DE $\mathfrak{d} < \mathfrak{a}$

Presentado por:

ESTEBAN VARGAS BERNAL

Dirigido por:

DR. RAMIRO HERNANDO DE LA VEGA SINISTERRA

Bogotá, 2013

Índice general

Capítulo 1

Introducción

Una familia infinita de conjuntos infinitos $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ se denomina *casi disjunta* si para cada $X, Y \in \mathcal{A}$ tenemos $|X \cap Y| < \omega$. Una familia casi disjunta $\mathcal{A}$ se denomina maximal casi disjunta (o *mad* por sus iniciales en inglés) si para cada $B \subseteq \omega$ infinito, existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $A \cap B$ es infinito. Un subconjunto $\mathcal{F} \subseteq \omega^\omega$ es cofinal en el orden $\leq^*$ (ver Definición 1) si para cada $g \in \omega^\omega$ existe $f \in \mathcal{F}$ tal que $f \geq^* g$. A partir de las familias mad y las familias cofinales definimos los cardinales $\mathfrak{a} = min\{|\mathcal{F}| : \mathcal{F} \text{ es familia } mad\}$ y $\mathfrak{d} = min\{|\mathcal{F}| : \mathcal{F} \text{ es cofinal en } (\omega^\omega, \leq^*)\}$. Como veremos en este trabajo (ver Teorema 43) tenemos que $\mathfrak{a} < \mathfrak{d}$ es consistente, lo cual se demostró antes de 1980 ([7]). Sin embargo, la consistencia de $\mathfrak{d} < \mathfrak{a}$ tardó casi 20 años más en ser demostrada (por Saharon Shelah en 1999 en [3]). Los dos anteriores resultados se pueden interpretar como la incapacidad de ZFC de poder asociar a una familia mad una familia cofinal del mismo tamaño y viceversa.

En este trabajo estudiamos la innovadora técnica que ideó Saharon Shelah para probar $CON(\mathfrak{d} < \mathfrak{a})$. Shelah generaliza las iteraciones sobre ordinales a iteraciones sobre conjuntos más generales, denominados plantillas. Él logra con esta técnica mostrar que en presencia de un cardinal medible κ (esta hipótesis se puede omitir usando plantillas también), cardinales regulares λ, μ, con $\kappa < \mu < \lambda$ y una adecuada plantilla, podemos construir un forcing $\mathbb{P}$ tal que $\Vdash_{\mathbb{P}} \mu = \mathfrak{d} = \mathfrak{b}$ y $\Vdash_{\mathbb{P}} \lambda = \mathfrak{a}$. Además del uso de las plantillas, la idea básica detrás de la construcción es que la ultrapotencia (por medio de un ultrafiltro κ completo $\mathcal{D}$) de un orden parcial *ccc* $\mathbb{Q}$ hace que las antiguas familias *mad* en la extensión por $\mathbb{Q}$ se destruyan en la extensión por $\mathbb{Q}^\kappa/\mathcal{D}$. Adicionalmente, la ultrapotencia preserva cierto testigo (una escala) de una familia cofinal de cardinal μ en la extensión por $\mathbb{Q}$, el cual seguirá siendo una de las familias cofinales más pequeñas en la extensión por $\mathbb{Q}^\kappa/\mathcal{D}$.

Más que el estudio de los mismos cardinales $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{d}$, el trabajo intenta exponer la técnica del forzamiento a lo largo de plantillas, la cual tiene importancia en si misma por su innovador enfoque y por la variedad de aplicaciones que puede tener, como por ejemplo $CON(cf(\mathfrak{a}) = \omega)$.

El objetivo del Capítulo 2 es presentar los conceptos básicos de forcing para poder entender el contenido de los capítulos posteriores. Otro objetivo del contenido en el Capítulo 2 es poner cada concepto de forcing en el contexto del problema de $CON(\mathfrak{d} < \mathfrak{a})$ a través de ejemplos. Uno de estos ejemplos es el forcing de Hechler, el cual permite añadir reales dominantes (en el orden $\leq^*$). Las plantillas que construiremos en las Secciones 3.2.2 y 4.1 tienen como objetivo definir iteraciones del forcing de Hechler.

En la Sección 3.1 se estudian las primeras aproximaciones a $CON(\mathfrak{d} < \mathfrak{a})$ y por que fallan en resolver el problema. Por ejemplo, usar una iteración de soporte finito de forcing *ccc* no funciona porque se daña la escala al añadirse reales de Cohen en los pasos de cofinalidad enumerable. Usar una iteración de soporte contable de forcing *ccc* tampoco es útil, debido a que se colapsaría el continuo. Otra posibilidad sería iterar sobre otros ordenes (no necesariamente un ordinal). Hjorth muestra que el conjunto base de una iteración del forcing de Hechler no puede tener cadenas descendentes infinitas, por lo cual tendremos que pensar en iteraciones bien fundamentadas, pero que nos permitan preservar la escala. El objetivo de la Sección 3.1 es motivar el concepto de iteración sobre plantillas a través de ejemplos como los anteriores. En la Sección 3.2.1 se establecen los conceptos básicos de plantillas y se define la iteración de soporte finito del forcing de Hechler $\mathbb{P}{\restriction}L$ sobre una plantilla $(L, \mathcal{I})$. Además se establecen propiedades para la iteración sobre plantillas análogas a las presentadas en la Sección 3.1 para iteraciones de soporte finito, como ser *ccc*. En la Sección 3.2.2 se muestra cómo construir, usando ultrapotencias de ordenes parciales, una plantilla $(L, \mathcal{I})$ para tener $\Vdash_{\mathbb{P}{\restriction}L} \mu = \mathfrak{d} < \mathfrak{a} = \lambda$, con λ, μ cardinales regulares, κ medible y $\kappa < \mu < \lambda$ (este es el Teorema 82). Otro objetivo de la Sección 3.2.2 es mostrar por qué la construcción presentada en el Teorema 82 es natural una vez se entiende por qué las iteraciones presentadas en la Sección 3.1 no solucionan el problema, y por qué cada una de las propiedades establecidas en la Sección 3.2.1 apunta a que las plantillas arreglen los problemas que tienen las iteraciones expuestas en las Sección 3.1. Aunque se use la existencia de un cardinal medible, el estudio de la consistencia de $\mathfrak{d} < \mathfrak{a}$ usando cadenas de plantillas tiene interés en sí mismo por los conceptos que se involucran, como ultrapotencia de ordenes parciales y extensiones inofensivas.

En la Sección 4.1 se construye una plantilla $(L(\mu, \lambda), \mathcal{I}(\mu, \lambda))$ para probar $CON(\mathfrak{d} < \mathfrak{a})$, sin suponer la existencia de un cardinal medible. En esta sección se expone la técnica de isomorfismo de nombres, la cual juega un papel análogo al de la ultrapotencia en la iteracción expuesta en la Sección 3.2.2 en el sentido de que permite construir nombres que dañen la maximalidad de familias casi disjuntas pequeñas. Al final de la Sección 4.1 se señala cómo el uso de las plantillas es insuficiente para resolver el problema $CON(\omega_1 = \mathfrak{d} < \mathfrak{a})$ (el cual está abierto). Otro objetivo de esta sección es señalar la naturalidad de la idea del isomorfismo de nombres una vez se entiende cómo se aplica en otros resultados (ver Teorema 85). Además, en la Sección 4.1 se señalan los puntos fundamentales en la prueba de $CON(\mathfrak{d} < \mathfrak{a})$. El objetivo de la Sección 4.2 es mencionar como se modifica la plantilla $(L(\mu, \lambda), \mathcal{I}(\mu, \lambda))$ y la definición de plantilla para construir una plantilla $(L(\lambda), \mathcal{I}(\lambda))$ la cual lleve a resolver el problema de $CON(cf(\mathfrak{a}) = \omega)$.

Capítulo 2

Preliminares

2.1. Cardinales pequeños

A continuación presentamos las definiciones y hechos básicos sobre los cardinales $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}$.

Definición 1 *Si $f, g \in \omega^\omega$, definimos $f \leq^* g$ si y sólo si $\{n \in \omega : f(n) > g(n)\}$ es finito. Definimos los siguientes cardinales:*

- $\mathfrak{d} = min\{|\mathcal{F}| : \mathcal{F}$ *es cofinal en* $(\omega^\omega, \leq^*)\}$ *el cual es conocido como* dominating number.
- $\mathfrak{b} = min\{|\mathcal{F}| : \mathcal{F}$ *no es acotada en* $(\omega^\omega, \leq^*)\}$ *el cual es conocido como* unbounding number.
- $\mathfrak{a} = min\{|\mathcal{F}| : \mathcal{F}$ *es una familia mad*$\}$ *el cual es conocido como* almost disjointness number.

En ZFC podemos probar solamente las siguientes desigualdades.

Lema 2 $\mathfrak{a}, \mathfrak{d} \geq \mathfrak{b} \geq \omega_1$.

Demostración. En primer lugar tenemos que $\mathfrak{b} \geq \omega_1$. En efecto, si $\{f_n\}_{n\in\omega} \subseteq \omega^\omega$ definamos $f \in \omega^\omega$ por $f(m) = \sum_{i\leq m} f_i(m) + 1$ para $m \in \omega$. Claramente $f_n(m) < f(m)$ para $m \geq n$ y $n \in \omega$, por lo cual f acota superiormente a $\{f_n\}_{n\in\omega}$.
Además $\mathfrak{d} \geq \mathfrak{b}$, pues toda familia cofinal es no acotada.
Veamos ahora $\mathfrak{a} \geq \mathfrak{b}$. Sea $\{A_\delta : \delta < \mathfrak{a}\}$ una familia mad. Definimos

$$f_\delta(n) = \begin{cases} n+1 & si \quad n \notin A_\delta \\ \\ n & si \quad n \in A_\delta \end{cases}$$

Para $g \in \omega^\omega$, sea $X_g = \{n \in \omega : g(n) \leq n\}$. Claramente $X_{f_\delta} = A_\delta$. Veamos que $\{f_\delta\}_{\delta<\mathfrak{a}}$ no es acotada. Supongamos que existe $f \in \omega^\omega$ con $f >^* f_\delta, \forall\delta < \mathfrak{a}$.

Entonces, para $\delta < \mathfrak{a}$, $A_\delta \cap X_f = \{n \in \omega : f_\delta(n) = n \wedge f(n) \leq n\} \subseteq \{n \in \omega : f(n) \leq f_\delta(n)\}$ el cual es finito. Entonces $\{A_\delta : \delta < \mathfrak{a}\} \cup \{X_f\}$ sería casi disjunta, contradiciendo la maximalidad de $\{A_\delta : \delta < \mathfrak{a}\}$. ■

El siguiente principio permite codificar una familia *mad* a partir de una familia cofinal de $(\omega^\omega, \leq^*)$. Claramente este principio es independiente de ZFC.

Definición 3 *El principio $\diamondsuit_{\mathfrak{d}}$ afirma que existe una sucesión $\{f_\alpha : f_\alpha : \alpha \longrightarrow \omega, \alpha < \omega_1\}$ (llamada una sucesión $\diamondsuit_{\mathfrak{d}}$) tal que si $g : \omega_1 \longrightarrow \omega$ entonces existe $\alpha \geq \omega$ satisfaciendo $g \restriction \alpha \leq^* f_\alpha$.*

Claramente si $\{f_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$ es una sucesión $\diamondsuit_{\mathfrak{d}}$ entonces $\mathcal{F} = \{f_\alpha \restriction \omega\}_{\alpha<\omega_1}$ es una sucesión cofinal en $(\omega^\omega, \leq^*)$. En efecto, si $f \in \omega^\omega$ entonces podemos definir $\bar{f} : \omega_1 \longrightarrow \omega$ por $\bar{f} \restriction \omega = f$ y $\bar{f}(\alpha) = 0$ para $\alpha \geq \omega$. Tomemos entonces $\beta \geq \omega$ tal que $\bar{f} \restriction \beta \leq^* f_\beta$. Entonces $f_\beta \restriction \omega \geq^* \bar{f} \restriction \omega = f$ y así $\mathfrak{b} = \mathfrak{d} = \omega_1$.

El siguiente teorema establece algo más fuerte de lo que acabamos de mencionar.

Teorema 4 *$\diamondsuit_{\mathfrak{d}}$ implica $\mathfrak{a} = \omega_1$.*

Demostración. Fijemos $\{f_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$ una sucesión $\diamondsuit_{\mathfrak{d}}$ y construyamos $\{A_\beta\}_{\beta<\omega_1}$ una familia mad. Definimos $\{A_n\}_{n<\omega}$ como una partición en conjuntos infinitos de ω. Supongamos que hemos construido una familia casi disjunta de conjuntos infinitos $\{A_\alpha\}_{\alpha<\beta}$ donde $\beta \geq \omega$. Tomemos una enumeración $\{A_\alpha\}_{\alpha<\beta} = \{A_{\alpha_n}\}_{n<\omega}$ y definamos $\bar{g} : \omega \longrightarrow \omega$ como sigue. Sea $\bar{g}(0)$ tal que $\bar{g}(0) \notin A_{\alpha_0}$ y $\bar{g}(0) > f_\beta(\alpha_0)$. Si hemos definido $\bar{g}(n)$ para $n \leq m$ sea $\bar{g}(m+1) \notin (A_{\alpha_0} \cup \ldots \cup A_{\alpha_m})$ (el cual existe por que si $l > m$ entonces A_{α_l} es casi disjunto a A_{α_n} para $n \leq m$) tal que $\bar{g}(m+1) > \bar{g}(n)$ para $n \leq m$ y $\bar{g}(m+1) > f_\beta(\alpha_{m+1})$. Veamos que $ran(\bar{g}) \subseteq \omega \backslash \bigcup_{i\in\omega}(A_{\alpha_i} \backslash (\bar{g}+1))$. Para $m \in \omega$ y $n \geq m$ tenemos que $\bar{g}(m) < \bar{g}(n) + 1$ y así $\bar{g}(m) \notin A_{\alpha_n} \backslash (\bar{g}(n)+1)$. Para $n < m$ tenemos que $\bar{g}(m) \notin A_{\alpha_n}$. En consecuencia $\bar{g}(m) \in \omega \backslash \bigcup_{i\in\omega}(A_{\alpha_i} \backslash (\bar{g}+1))$ y de esta manera $\omega \backslash \bigcup_{i\in\omega}(A_{\alpha_i} \backslash (\bar{g}+1))$ es infinito. Ahora definimos $g_\beta : \beta \longrightarrow \omega$ por $g_\beta(\alpha) = \bar{g}(n) + 1$ donde $A_\alpha = A_{\alpha_n}$. Tomemos $A_\beta = \omega \backslash \bigcup_{\alpha<\beta}(A_\alpha \backslash g_\beta(\alpha)) = \bigcup_{i\in\omega}(A_{\alpha_i} \backslash (\bar{g}+1))$. Por construcción $g_\beta(\alpha) > f_\beta(\alpha)$ para $\alpha < \beta$ y A_β es casi disjunto de los elementos en $\{A_\alpha\}_{\alpha<\beta}$. En efecto, si $\alpha < \beta$ y $x \in A_\alpha \cap A_\beta$ entonces $x \notin A_\alpha \backslash g_\beta(\alpha)$ y $x \in A_\alpha$, lo cual lleva a que $x \in g_\beta(\alpha)$. Como resultado tenemos que $A_\alpha \cap A_\beta \subseteq g_\beta(\alpha)$ es finito. Resta ver que $\{A_\beta\}_{\beta<\omega_1}$ es maximal. Por contradicción, supongamos que existe $B \subseteq \omega$ infinito tal que $B \cap A_\alpha$ es finito para cada $\alpha < \omega_1$. Definimos $g : \omega_1 \longrightarrow \omega$ por $g(\alpha) = max(B \cap A_\alpha) + 1$ si $B \cap A_\alpha \neq \emptyset$ y $g(\alpha) = 0$ si $B \cap A_\alpha = \emptyset$. Por construcción tenemos que $\{g_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$ es una sucesión $\diamondsuit_{\mathfrak{d}}$ y por lo tanto podemos tomar $\theta \geq \omega$ tal que $g \restriction \theta \leq^* g_\theta$. Si retiramos los puntos de B que hacen $max(B \cap A_\alpha) + 1 > g_\theta(\alpha)$ (los cuales son finitos) podemos suponer que $(g \restriction \theta)(\alpha) \leq g_\theta(\alpha)$ para cada $\alpha < \theta$. Además, por definición tenemos que si $n \in B \backslash A_\theta$ entonces existe $\beta < \theta$ tal que $n \in A_\beta \backslash g_\theta(\beta) \subseteq A_\beta \backslash g(\beta)$ (pues $g_\theta(\beta) \geq g(\beta)$). Lo anterior implica que $n \in B \cap A_\beta$ y $n > g(\beta) = max(B \cap A_\beta) + 1$, lo cual es una contradicción. De esta manera tenemos que $B \subseteq A_\theta$, lo que contradice que A_θ y B son casi disjuntos. ■

Definiremos un tipo se sucesión de ω^ω que nos permite controlar el cardinal $\mathfrak{d}$ (ver [5, Cap 6, teorema 2.6] para el lema 6).

Definición 5 *Sea μ cardinal. A $\{f_\alpha\}_{\alpha<\mu} \subseteq \omega^\omega$ le llamamos una μ-escala si es cofinal en $(\omega^\omega, \leq^*)$ y $f_\alpha <^* f_\beta$ para $\alpha < \beta < \mu$.*

Lema 6 *Sea μ un cardinal regular. Entonces hay una μ-escala si y sólo si $\mathfrak{b} = \mathfrak{d} = \mu$.*

Los modelos de $\mathfrak{d} < \mathfrak{a}$ que estudiaremos en los teoremas 89 y 82 contendrán una μ-escala con $\mu \geq \omega_2$. En consecuencia en tales modelos se tiene $\mathfrak{d} \geq \omega_2$. Sin embargo, Judith Roitman formuló en los 90 el siguiente problema, el cual sigue abierto.

Problema 7 *¿Es consistente $\mathfrak{d} = \omega_1 < \mathfrak{a}$?*

2.2. Hechos básicos de Forcing

En el estudio del forcing los ordenes parciales tienen como papel aproximar objetos que deseamos añadir en una extensión. A continuación se definen los conceptos que nos permitirán ver a un orden como dicha aproximación.

Definición 8 *Sea $(\mathbb{P}, \leq, 1_\mathbb{P})$ un orden parcial. Para nuestros propósitos sólo necesitamos que la relación binaria $\leq$ sea reflexiva y transitiva. Además todos los ordenes que consideraremos tienen un elemento máximo $1_\mathbb{P}$. Por simplicidad en la notación nos referimos al orden $(\mathbb{P}, \leq, 1_\mathbb{P})$ como $\mathbb{P}$. Definimos para $\mathbb{P}$ lo siguiente:*

- *Un conjunto $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{P}$ es llamado* denso *si para cada $p \in \mathbb{P}$ existe $q \in \mathcal{D}$ tal que $q \leq p$.*
- *Si $p, q \in \mathbb{P}$ decimos que p y q son* compatibles *($p \not\perp q$) si existe $r \in \mathbb{P}$ tal que $r \leq p$ y $r \leq q$. De lo contrario diremos que p y q son* incompatibles *($p \perp q$).*
- *Un conjunto $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{P}$ es llamado* filtro *si para cada $p, q \in \mathcal{F}$ existe $r \in \mathcal{F}$ tal que $r \leq p$ y $r \leq q$ y además para cada $p \in \mathcal{F}$ y $q \geq p$ se tiene que $q \in \mathcal{F}$.*
- *El orden $\mathbb{P}$ es* no atómico *si para cada $p \in \mathbb{P}$ existen $q, r \in \mathbb{P}$ tal que $q \leq p$, $r \leq p$ y $r \perp q$.*
- *El orden $\mathbb{P}$ es* separativo *si cuando $p \not\leq q$ para $p, q \in \mathbb{P}$, entonces existe $r \in \mathbb{P}$ tal que $r \leq p$ y $r \perp q$.*
- *Un conjunto $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{P}$ es llamado una* anticadena *si para cada $p, q \in \mathcal{A}$ tenemos $p \perp q$. Además $\mathcal{A}$ es una* anticadena maximal *si para cada $r \in \mathbb{P}$ existe $q \in \mathcal{A}$ tal que $r \not\perp q$.*

- *Un orden $\mathbb{P}$ tiene la propiedad $\kappa - cc$, con κ cardinal infinito, si cualquier anticadena tiene tamaño menor que κ. Si $\mathbb{P}$ tiene $\omega_1 - cc$, diremos que $\mathbb{P}$ tiene ccc (la condición de cadena contable).*

Ahora presentamos los hechos básicos que necesitamos de forcing.

Definición 9 *Sea $\mathbb{P}$ un orden parcial. Definimos $V^{\mathbb{P}}$, la clase de los $\mathbb{P}$-nombres, como la clase de los objetos τ que son relaciones binarias y tal que si $(\sigma, p) \in \tau$ entonces σ en un $\mathbb{P}$-nombre y $p \in \mathbb{P}$. Si M es un modelo transitivo de ZFC y $\mathbb{P} \in M$ definimos $M^{\mathbb{P}} = V^{\mathbb{P}} \cap M = \{\tau \in M : (\tau \text{ es un } \mathbb{P}\text{-nombre})^M\}$. La última igualdad se tiene gracias a que la noción "τ es un $\mathbb{P}$-nombre" es absoluta (ver [7, Definición 2,6-Cap. 3]).*

Definición 10 *Sea M un modelo transitivo contable de ZFC y $\mathbb{P} \in M$ un orden parcial. Decimos que un filtro $G \subseteq \mathbb{P}$ es* $\mathbb{P}$-genérico sobre *M si para cada denso $\mathcal{D} \subseteq P$ con $\mathcal{D} \in M$ se tiene $\mathcal{D} \cap G \neq \emptyset$.*

En [7, Lema 2.20-Cap 7] se muestra que si G es $\mathbb{P}$-genérico sobre M, $p \in G$ y $\mathcal{D} \in M$ es denso bajo p, entonces $\mathcal{D} \cap G \neq \emptyset$.

Definición 11 *Sea $\tau \in M^{\mathbb{P}}$ y G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M. Definimos $\tau_G = \{\sigma_G : \exists p \in G((\sigma, p) \in \tau)\}$ y $M[G] = \{\tau_G : \tau \in M^{\mathbb{P}}\}$.*

En este documento siempre que nos refiramos a M estaremos suponiendo que M es un modelo transitivo y contable de un fragmento lo suficientemente grande de ZFC. La razón de imponer la transitividad es que las fórmulas Δ_0 son absolutas para M, como por ejemplo la fórmula que expresa "τ es un $\mathbb{P}$-nombre" (ver [7, Sección 3-Cap 4]). El siguiente teorema evidencia la necesidad de que M sea contable (ver [7, Lema 2.3-Cap 7]).

Teorema 12 *Sea $\mathbb{P} \in M$ un orden parcial y $p \in \mathbb{P}$. Entonces existe G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M tal que $p \in G$.*

En consecuencia, si $\mathbb{P} \in M$, siempre tiene sentido hablar de $M[G]$ para algún filtro G $\mathbb{P}$-genérico sobre M. Entenderemos también a $M^{\mathbb{P}}$ como alguna extensión $M[G]$ sin referirnos a G. El siguiente teorema establece las propiedades más importantes de $M[G]$.

Teorema 13 *Para $M[G]$ se satisfacen las siguientes propiedades:*

- *Si N es un modelos transitivo de ZFC tal que $M \subseteq N$ y $G \in N$. Entonces $M \subseteq M[G] \subseteq N$.*
- $Ord(M) = Ord(M[G])$.
- $M[G] \models ZFC$.
- *Si $\mathbb{P}$ es no atómico entonces $G \notin M$.*

Definición 14 *Sea $\mathbb{P} \in M$ un orden parcial. Decimos que ψ es una sentencia del lenguaje del forcing si ψ es una $\mathcal{L}_{\mathbb{P}}$-sentencia, donde $\mathcal{L}_{\mathbb{P}} = \{\in, M^{\mathbb{P}}\}$ es el lenguaje que tiene a los $\mathbb{P}$-nombres $M^{\mathbb{P}}$ como constantes. Para $p \in \mathbb{P}$ decimos que $p \Vdash_{\mathbb{P}} \psi$ si y sólo si para cada G $\mathbb{P}$-genérico sobre M con $p \in G$ tenemos $M[G] \models \psi$, donde $\tau^{M[G]} = \tau_G$ para cada constante τ.*

El siguiente lema establece las propiedades más importantes de $\Vdash_{\mathbb{P}}$.

Lema 15 *Para $\mathbb{P} \in M$, $p, q \in \mathbb{P}$ y φ, ψ $\mathcal{L}_{\mathbb{P}}$-sentencias se tienen las siguientes propiedades:*

- *Si $p \Vdash_{\mathbb{P}} \varphi$ y $q \leq p$ entonces $q \Vdash_{\mathbb{P}} \varphi$.*
- *$p \Vdash_{\mathbb{P}} \varphi \wedge p \Vdash_{\mathbb{P}} \psi \Leftrightarrow p \Vdash_{\mathbb{P}} \varphi \wedge \psi$.*
- *$\{p \in \mathbb{P} : p \Vdash_{\mathbb{P}} \varphi \vee p \Vdash_{\mathbb{P}} \neg\varphi\}$ es denso.*
- *$p \Vdash_{\mathbb{P}} \neg\varphi \Leftrightarrow \neg\exists q \leq p(q \Vdash_{\mathbb{P}} \varphi)$.*
- *Si $p \Vdash_{\mathbb{P}} \exists x(x \in \sigma \wedge \varphi(x))$ entonces $\exists q \leq p \exists \pi \in dom(\sigma)(q \Vdash_{\mathbb{P}} \varphi(\pi))$.*

Los siguientes dos resultados son fundamentales para el desarrollo de la teoría del forcing. El primero es conocido como el lema de la definibilidad, y esencialmente establece que la relación $\Vdash_{\mathbb{P}}$ es definible en M. El segundo es conocido como el lema de la verdad (ver [7, Teorema 3.6-Cap 7]).

Teorema 16 *Sea $\mathbb{P} \in M$ un orden parcial y φ una $\mathcal{L}_{\mathbb{P}}$-sentencia. Entonces:*

- *Existe una relación definible $\Vdash^*_{\mathbb{P}}$ tal que para cada $p \in \mathbb{P}$,*

$$p \Vdash_{\mathbb{P}} \varphi \Leftrightarrow (p \Vdash^*_{\mathbb{P}} \varphi)^M$$

- *Para cada G filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M, $M[G] \models \varphi$ si y sólo si existe $p \in G$ tal que $p \Vdash_{\mathbb{P}} \varphi$.*

Con las anteriores definiciones y resultados tenemos las herramientas para dar ejemplos particulares de los conceptos de forcing.

Ejemplo 17 *Para $\mathbb{P} \in M$ orden parcial damos los siguientes ejemplos de $\mathbb{P}$-nombres:*

- *Para $x \in M$ definimos $\check{x} = \{(\check{y}, 1_{\mathbb{P}}) : y \in x\}$. Tenemos que $\check{x} \in M^{\mathbb{P}}$ y $\check{x}_G = x$ para cada G filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M.*
- *Definimos $\Gamma = \{(\check{p}, p) : p \in \mathbb{P}\}$. Entonces Γ es un $\mathbb{P}$-nombre canónico para un G $\mathbb{P}$-genérico sobre M, pues $\Gamma_G = G$.*

- *Suponga que $\mathbb{P}$ es ccc, $p \in \mathbb{P}$ y $\dot{f}$ es un $\mathbb{P}$-nombre tal que $p \Vdash_{\mathbb{P}} \dot{f} \in \omega^\omega$. Para cada $n \in \omega$ defina $A_n = \{q \leq p : \exists k \in \omega(q \Vdash_{\mathbb{P}} \dot{f}(n) = k)\}$. Sea $B_n = \{k : \exists q \in A_n(q \Vdash_{\mathbb{P}} \dot{f}(n) = k)\}$. Sobre A_n definimos $q \sim q'$ si y sólo si $q \Vdash_{\mathbb{P}} \dot{f}(n) = k$ y $q' \Vdash_{\mathbb{P}} \dot{f}(n) = k$ para algún $k \in B_n$. Sea C_n un conjunto de representantes de $\sim$. Como $p \Vdash_{\mathbb{P}} \dot{f} \in \omega^\omega$, $A_n \neq \emptyset$ y así $C_n \neq \emptyset$. Si $X = \{C : C_n \subseteq C \subseteq A_n$ y C es anticadena bajo $p\}$, por el lema de Zorn aplicado a $(X, \subseteq)$ existe $A_n \supseteq C_n^* \supseteq C_n$ anticadena maximal bajo p, la cual es contable porque $\mathbb{P}$ es ccc. Enumere $C_n^* = \{p_{n,i} : i \in \omega\}$ y sea $k_{n,i} \in \omega$ tal que $p_{n,i} \Vdash_{\mathbb{P}} \dot{f}(n) = k_{n,i}$. El anterior argumento sólo usa ZFC y parámetros en M ($\Vdash_{\mathbb{P}}$ es definible en M), luego $\bar{f} = \{((n, \check{k}_{n,i}), p_{n,i}) : n, i \in \omega\}$ es un $\mathbb{P}$-nombre en M. Además $p \Vdash_{\mathbb{P}} \dot{f} = \bar{f}$, pues si G es $\mathbb{P}$-genérico sobre M con $p \in G$ y $n \in \omega$, considere $\mathcal{D} = \{q : q \leq p_{n,i}$ para algún $p_{n,i}\}$. Entonces $\mathcal{D}$ es denso bajo p, pues si $r \leq p$ entonces existe $p_{n,i} \not\perp r$. En consecuencia $G \cap \mathcal{D} \neq \emptyset$ y si $q \in G \cap \mathcal{D}$ entonces $p_{n,i} \in G$ y así $\dot{f}_G(n) = \bar{f}_G(n)$. De esta manera hemos construido un $\mathbb{P}$-nombre para el real f. A $\bar{f}$ le llamamos un buen nombre para f.*

- *De nuevo, suponga que $\mathbb{P}$ es ccc y que $p \Vdash_{\mathbb{P}} \dot{A} \subseteq \check{\omega}$. Para cada $n \in \omega$ sea $C_n = \{p_{n,i} : p_{n,i} \Vdash_{\mathbb{P}} \check{n} \in \dot{A}$ o $p_{n,i} \Vdash_{\mathbb{P}} \check{n} \notin \dot{A}, i \in \omega\}$ una anticadena maximal bajo p. Defina $k_{n,i} = 1$ si $\check{n} \in \dot{A}$ o $k_{n,i} = 0$ si $\check{n} \notin \dot{A}$. Si tomamos $\bar{A} = \{(\check{n}, p_{n,i}) : n, i \in \omega, k_{n,i} = 1\}$ entonces $\bar{A} \in M^{\mathbb{P}}$ y $p \Vdash_{\mathbb{P}} \dot{A} = \bar{A}$. Le llamamos a $\bar{A}$ un buen nombre de A.*

- *Sean $\mathbb{P} \in M$ un orden parcial, G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M, $\mathbb{D}$ un orden parcial en $M[G]$ y $\ddot{\mathbb{D}}$ un $\mathbb{P}$-nombre para $\mathbb{D}$. En [6, Lema 3.2-Cap 5] se muestra que existe un $\mathbb{P}$-nombre para un orden parcial $\dot{\mathbb{D}}$ tal que $\Vdash_{\mathbb{P}} \dot{\mathbb{D}} = \ddot{\mathbb{D}}$ y $|\dot{\mathbb{D}}|^M = |\mathbb{D}|^{M[G]}$.*

Los siguientes son ejemplos de ordenes que nos van a interesar a lo largo del documento:

2.2.1. Forcing de Cohen

Sea $\kappa \in M$ cardinal infinito y tomemos $\mathbb{C}_\kappa = Fn(\kappa, 2) = \{p \subseteq \kappa \times 2 : p$ es función y $|p| < \omega\}$. Para $p_1, p_2 \in \mathbb{C}_\kappa$, definimos $p_1 \leq p_2 \Leftrightarrow p_1 \supseteq p_2$. Al orden $(\mathbb{C}_\kappa, \leq)$, κ infinito, lo llamamos el orden de Cohen. Gracias a un argumento de densidad, tenemos que si G es un filtro $\mathbb{C}_\kappa$-genérico sobre M entonces $M[G] \models 2^\omega \geq |\kappa|$. Usando $\mathbb{C}_\kappa$ queremos hacer el continuo de tamaño κ, pero el cardinal κ de M no necesariamente será cardinal en $M[G]$. Incluso, este κ en principio podría ser un ordinal enumerable en $M[G]$, y así el hecho de que $M[G] \models 2^\omega \geq |\kappa|$ no trae nada nuevo. Sin embargo $\mathbb{C}_\kappa$ es un orden *ccc* y los ordenes *ccc* no colapsan cardinales. Más precisamente, un orden $\mathbb{P}$ preserva cardinales si para cada G filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M y cada $\beta \in Ord(M)$

$$M \models \beta \text{ es cardinal } \Leftrightarrow M[G] \models \beta \text{ es cardinal}$$

El siguiente resultado sustenta el hecho de que $\mathbb{C}_\kappa$ preserve cardinales (ver [7, Teorema 5.10-Cap 7]).

Teorema 18 *Sea $\mathbb{P} \in M$ orden parcial tal que $M \models \mathbb{P}$ es ccc. Entonces $\mathbb{P}$ preserva cofinalidades y por tanto cardinales.*

En consecuencia $M[G] \models 2^\omega \geq \kappa$ para G filtro $\mathbb{C}_\kappa$-genérico sobre M. El siguiente resultado nos permite acotar por arriba el continuo en una extensión genérica (ver [7, Lema 5.13-Cap 7]).

Teorema 19 *Sea $\mathbb{P} \in M$ y suponga que (en M) $\mathbb{P}$ es un orden ccc, $|\mathbb{P}| = \kappa \geq \omega$ y λ, θ son cardinales infinitos tales que $\theta = \kappa^\lambda$. Si G es $\mathbb{P}$-genérico sobre M entonces $M[G] \models 2^\lambda \leq \theta$.*

Por lo tanto, si $M \models \kappa^\omega = \kappa$ (por ejemplo si $M \models GCH$), entonces para G filtro $\mathbb{C}_\kappa$-genérico tenemos que $M[G] \models 2^\omega = \kappa$.

Ahora supongamos que N es un modelo transitivo contable de ZFC tal que $M \subseteq N$. Un real $f \in (\omega^\omega)^N$ es de Cohen sobre M si existe $G \in N$ filtro $Fn(\omega, \omega)$-genérico tal que $f = \bigcup G$. Para cada real $h \in (\omega^\omega)^M$ y para cada $n \in \omega$ definimos

$$\mathcal{D}_{h,n} = \{p \in Fn(\omega, \omega) : \exists m > n(m \in dom(p) \wedge h(m) < p(m))\}$$

Tenemos que $\mathcal{D}_{h,n}$ es denso. En consecuencia, si f es un real de Cohen sobre M, para cada $n \in \omega$ existe $m > n$ tal que $h(m) < f(m)$. Esto equivale a que para cada $h \in (\omega^\omega)^M$ $\neg(h \geq^* f)$. Más adelante mostraremos que este hecho implica que en las extensiones de Cohen el cardinal $\mathfrak{d}$ es grande.

2.2.2. Forcing de Hechler

Tomemos $\mathbb{D} = \{(s, f) : s \in \omega^{<\omega}, f \in \omega^\omega, s \subseteq f\}$. Para $(s_0, f_0), (s_1, f_1) \in \mathbb{D}$ definimos

$$(s_0, f_0) \leq (s_1, f_1) \Leftrightarrow s_0 \supseteq s_1, f_0(n) \geq f_1(n) \forall n \in \omega.$$

Al orden $(\mathbb{D}, \leq)$ lo llamamos el forcing de Hechler. En primer lugar tenemos que $(\mathbb{D}, \leq)$ es *ccc*. En efecto, si $\{(s_i, f_i)\}_{i \in \omega_1} \subseteq \mathbb{D}$ entonces existen $i, j \in \omega_1$, $i \neq j$ tal que $s = s_i = s_j$ (pues $\{s_i\}_{i \in \omega_1}$ es enumerable). Por lo tanto si $f = max\{f_i, f_j\}$ entonces $(s, f) \leq (s_j, f_i), (s_j, f_j)$. La propiedad más importante de este orden la da el siguiente resultado.

Teorema 20 *El forcing de Hechler $\mathbb{D}$ añade un real que domina todos los reales del modelo base.*

Demostración. Sea G un filtro $\mathbb{D}$-genérico sobre M. Como $D_n = \{(s, f) \in \mathbb{D} : n \in dom(s)\} \in M$ es denso en $\mathbb{D}$ y las condiciones en G son compatibles, entonces $f = \bigcup dom(G) : \omega \to \omega$. Veamos que el real f domina a todos los reales del modelo base. Tome $h \in \omega^\omega \cap M$. Entonces

$$D_h = \{(s, f) \in \mathbb{D} : \exists n \in \omega \forall m \geq n(f(m) > h(m))\} \in M$$

es denso para $\mathbb{D}$, pues si $(t, g) \in \mathbb{D}$, tomamos $n > dom(t)$, y para $m \geq n$ definimos $f(m) = h(m) + g(m) + 1$. Para $m < n$, definimos $f(m) = g(m)$. De esta manera $(t, f) \leq (t, g)$, y $(t, f) \in D_h$. Luego, tomamos $(s, g) \in G \cap D_h$. Sea n tal que $g(m) > h(m), \forall m \geq n$. Para $k \geq n$, tome $(s', g') \in G \cap D_k$, y $(s'', g'') \in G$ con $(s'', g'') \leq (s', g'), (s, g)$. De lo anterior se sigue que $f(k) = s''(k) = g''(k) \geq g(k) > h(k)$. Por tanto $f \geq^* h$. ■

2.2.3. Ultrapotencia de un orden

Sea $\mathbb{P} \in M$ un orden parcial. Supongamos que $\kappa \in M$ es cardinal medible y $\mathcal{D}$ es ultrafiltro κ-completo no principal atestiguando la medibilidad de κ. Consideremos $\mathbb{P}^\kappa/\mathcal{D} = \{[f] : f \in \mathbb{P}^\kappa\}$ donde $[f] = \{g \in \mathbb{P}^\kappa : \{\alpha < \kappa : f(\alpha) = g(\alpha)\} \in \mathcal{D}\}$. Para $[f], [g] \in \mathbb{P}^\kappa/\mathcal{D}$ definimos $[f] \leq [g] \Leftrightarrow \{\alpha < \kappa : f(\alpha) \leq g(\alpha)\} \in \mathcal{D}$. Claramente $(\mathbb{P}^\kappa/\mathcal{D}, \leq)$ es la ultrapotencia de la estructura $(\mathbb{P}, \leq)$. Supongamos que $\mathbb{P}$ es *ccc*. Entonces $\mathbb{P}^\kappa/\mathcal{D}$ también es *ccc*. En efecto, si $\{[f_\alpha] : \alpha < \omega_1 < \kappa\} \subseteq \mathbb{P}^\kappa/\mathcal{D}$ es una anticadena, por el Teorema de Łoś (ver [8, Teorema 3.2.11]) si $\alpha \neq \beta$, $\alpha, \beta < \omega_1$ entonces $\{\gamma : f_\alpha(\gamma) \perp f_\beta(\gamma)\} \in \mathcal{D}$ (pues $[f_\alpha] \perp [f_\beta]$). En consecuencia, por ω_2-completitud, $\bigcap_{\alpha,\beta<\omega_1,\alpha\neq\beta}\{\gamma : f_\alpha(\gamma) \perp f_\beta(\gamma)\} \in \mathcal{D}$. En particular el conjunto anterior es no vacío y así existe $\gamma < \kappa$ tal que $\{f_\alpha(\gamma)\}_{\alpha<\omega_1}$ es una anticadena en $\mathbb{P}$, contradiciendo que $\mathbb{P}$ es *ccc*. En el anterior argumento sólo usamos ω_2-completitud. Aunque solo pidiéramos ω_1-completitud, el cardinal más pequeño sobre el cual un ultrafiltro contablemente completo está definido debe ser medible. Además, para preservar la propiedad *ccc* en la ultrapotencia la medibilidad es necesaria. Por ejemplo, supongamos que $\mathbb{P} = (\omega, \emptyset)$. Por cardinalidad $\mathbb{P}$ es *ccc*. Sin embargo si tomamos $\mathcal{D}$ ultrafiltro no principal sobre ω entonces $\mathbb{P}^\omega/\mathcal{D}$ no es *ccc*. En efecto, si $[f], [g] \in \mathbb{P}^\omega/\mathcal{D}$ entonces $[f] \perp [g]$ (por el Teorema de Łoś). Además $|\mathbb{P}^\omega/\mathcal{D}| \geq \omega_1$. Esto último se debe a que si $\{[f_n]\}_{n\in\omega} \subseteq \mathbb{P}^\omega/\mathcal{D}$ y definimos f por $f(m) = \sum_{i\leq m} f_i(m) + 1$ entonces $[f] \neq [f_n]$ para cada $n \in \omega$ ($f(m) \neq f_n(m)$ para cada $m \geq n$).

El siguiente lema establece que tenemos un análogo al Teorema de Łoś para la relación de forcing.

Lema 21 *Sea $[r] \in \mathbb{P}^\kappa/\mathcal{D}$ y φ una Δ_0-fórmula con parámetros en $M^\mathbb{P}$. Entonces $[r] \Vdash_{\mathbb{P}^\kappa/\mathcal{D}} \varphi$ si y sólo si $\{\alpha : r(\alpha) \Vdash_\mathbb{P} \varphi\} \in \mathcal{D}$.*

Demostración. Suponga primero que $[r] \Vdash_{\mathbb{P}^\kappa/\mathcal{D}} \varphi$ y $X = \{\alpha : r(\alpha) \nVdash_\mathbb{P} \varphi\} \in \mathcal{D}$. Por el Lema 15 tomemos $s(\alpha) \in \mathbb{P}$ tal que $s(\alpha) \leq r(\alpha)$ y $s(\alpha) \Vdash_\mathbb{P} \neg\varphi$ para $\alpha \in X$. Entonces $\{\alpha : s(\alpha) \Vdash_\mathbb{P} \neg\varphi\} \in \mathcal{D}$. Si definimos $s \in \mathbb{P}^\kappa$ por $s(\alpha)$ para $\alpha \in X$ y por cualquier cosa si $\alpha \notin X$, entonces $[s] \leq [r]$. Esto a la vez implica que $[s] \Vdash_{\mathbb{P}^\kappa/\mathcal{D}} \varphi$. Ahora tomemos G un filtro $\mathbb{P}^\kappa/\mathcal{D}$-genérico sobre M con $[s] \in G$. Por el Teorema 24 y el Ejemplo 25 que mostraremos más adelante, tenemos que $\mathbb{P} \cap G$ es $\mathbb{P}$-genérico sobre M y además $M[G] \models \varphi$ implica $M[\mathbb{P} \cap G] \models \varphi$. Por el Lema de la verdad podemos tomar $t \in \mathbb{P} \cap G$ tal que $t \Vdash_\mathbb{P} \varphi$. Como $[t], [s] \in G$ tenemos que $[t] \not\perp [s]$, y así $\{\alpha : t \not\perp s(\alpha)\} \in \mathcal{D}$. En particular existe $\alpha < \kappa$ tal que $t \not\perp s(\alpha)$ y $s(\alpha) \Vdash_\mathbb{P} \neg\varphi$, lo cual contradice que $t \Vdash_\mathbb{P} \varphi$. Ahora supongamos que $[r] \nVdash_{\mathbb{P}^\kappa/\mathcal{D}} \varphi$ y $\{\alpha : r(\alpha) \Vdash_\mathbb{P} \varphi\} \in \mathcal{D}$. Tomemos $[s] \leq [r]$ tal que $[s] \Vdash_{\mathbb{P}^\kappa/\mathcal{D}} \neg\varphi$. Por lo que acabamos de mostrar arriba $\{\alpha : s(\alpha) \Vdash_\mathbb{P} \neg\varphi\} \in \mathcal{D}$ y además $\{\alpha : s(\alpha) \leq r(\alpha)\} \in \mathcal{D}$. Luego existe $\alpha < \kappa$ tal que $s(\alpha) \leq r(\alpha)$, $s(\alpha) \Vdash_\mathbb{P} \neg\varphi$ y $r(\alpha) \Vdash_\mathbb{P} \varphi$ lo cual es una contradicción. ■

Usando el lema anterior probamos que la ultrapotencia nos permite destruir familias *mad*.

Teorema 22 *Sea κ cardinal medible. Suponga que $\mathbb{P}$ es un orden ccc tal que $\Vdash_{\mathbb{P}} \dot{\mathcal{A}}$ es casi disjunta y $|\dot{\mathcal{A}}| \geq \kappa$. Entonces $\Vdash_{\mathbb{P}^\kappa/\mathcal{D}} \dot{\mathcal{A}}$ no es mad.*

Demostración. Suponga que $\mathcal{A} = \{A^\alpha : \alpha < |\mathcal{A}|^{M^{\mathbb{P}}}\}$ y $|\mathcal{A}|^{M^{\mathbb{P}}} \geq \kappa$. Para $\alpha < \kappa$ y $n \in \omega$ tomamos $p^\alpha_{n,i} \in \mathbb{P}$ y $k^\alpha_{n,i} \in 2$ tal que $p^\alpha_{n,i} \Vdash_{\mathbb{P}} \check{n} \in \dot{A}^\alpha$ si y sólo si $k^\alpha_{n,i} = 1$, $p^\alpha_{n,i} \Vdash_{\mathbb{P}} \check{n} \notin \dot{A}^\alpha$ si y sólo si $k^\alpha_{n,i} = 0$ y $\{p^\alpha_{n,i} : i \in \omega\}$ es anticadena maximal. Definimos $p_{n,i} \in \mathbb{P}^\kappa$ por $p_{n,i}(\alpha) = p^\alpha_{n,i}$ para cada $\alpha < \kappa$, $n, i \in \omega$. Por el Teorema de Łoś tenemos que $\{[p_{n,i}] : i \in \omega\}$ es una anticadena maximal en $\mathbb{P}^\kappa/\mathcal{D}$ para cada $n \in \omega$. Como $\mathcal{D}$ es ultrafiltro sea $k_{n,i} \in 2$ tal que $\{\alpha : k^\alpha_{n,i} = k_{n,i}\} \in \mathcal{D}$. Defina $\bar{A} = \{(\check{n}, [p_{n,i}]) : k_{n,i} = 1\} \in M^{\mathbb{P}^\kappa/\mathcal{D}}$. Veamos que $\Vdash_{\mathbb{P}^\kappa/\mathcal{D}}$ "$\bar{A} \cap A^\beta$ es finito para cada $\beta < |\mathcal{A}|$". Fijemos $\beta < |\mathcal{A}|$. Desde que $\Vdash_{\mathbb{P}} |A^\alpha \cap A^\beta| < \omega$ para cada $\alpha < \kappa$, podemos tomar anticadenas maximales $\{q^\alpha_i : i \in \omega\}$ en $\mathbb{P}$ y conjuntos $\{n^\alpha_i\}_{i \in \omega} \subseteq \omega$ tal que $q^\alpha_i \Vdash_{\mathbb{P}} A^\alpha \cap A^\beta \subseteq n^\alpha_i$ para $\alpha < \kappa$. Ahora definimos $q_i \in \mathbb{P}^\kappa$ por $q_i(\alpha) = q^\alpha_i$ para cada $\alpha < \kappa$. Por el Teorema de Łoś tenemos que $\{[q_i] : i \in \omega\}$ es una anticadena maximal en $\mathbb{P}^\kappa/\mathcal{D}$. Por la completitud contable de $\mathcal{D}$ sea $n_i \in \omega$ tal que $\{\alpha : n^\alpha_i = n_i\} \in \mathcal{D}$. Si tenemos que $[q_i] \Vdash_{\mathbb{P}^\kappa/\mathcal{D}} \bar{A} \cap A^\beta \subseteq n_i$ para cada $i \in \omega$ entonces por la maximalidad de $\{[q_i] : i \in \omega\}$ ningún $[s] \in \mathbb{P}^\kappa/\mathcal{D}$ puede satisfacer $[s] \Vdash_{\mathbb{P}^\kappa/\mathcal{D}} |\bar{A} \cap A^\beta| = \omega$ (pues existe $[q_i] \not\perp [s]$). En consecuencia tendríamos $\Vdash_{\mathbb{P}^\kappa/\mathcal{D}} |\bar{A} \cap A^\beta| < \omega$. Por contradicción, supongamos que existe $i \in \omega$ tal que $[q_i] \nVdash_{\mathbb{P}^\kappa/\mathcal{D}} \bar{A} \cap A^\beta \subseteq n_i$. Entonces por el Lema 15 existen $m > n_i$ y $[q'] \leq [q_i]$ tal que $[q'] \Vdash_{\mathbb{P}^\kappa/\mathcal{D}} \check{m} \in \bar{A} \cap A^\beta$. Como $\{[p_{m,i}] : i \in \omega\}$ es anticadena maximal debe existir j tal que $[q'] \not\perp [p_{m,j}]$. Sin perdida de generalidad podemos suponer que $[q'] \leq [p_{m,j}]$. Desde que $[q'] \Vdash_{\mathbb{P}^\kappa/\mathcal{D}} \check{m} \in \bar{A} \cap A^\beta$, debemos tener que $k_{m,j} = 1$. De lo contrario, por la definición de $\bar{A}$ tendríamos que $[p_{m,j}] \Vdash_{\mathbb{P}^\kappa/\mathcal{D}} \check{m} \notin \bar{A}$ y así se contradice $[q'] \Vdash_{\mathbb{P}^\kappa/\mathcal{D}} \check{m} \in \bar{A}$. De esta manera

$$\{\alpha : q'(\alpha) \leq q^\alpha_i, q'(\alpha) \leq p^\alpha_{m,j}, k^\alpha_{m,j} = 1, n^\alpha_i = n_i, q'(\alpha) \Vdash_{\mathbb{P}} \check{m} \in A^\beta\} \in \mathcal{D}$$

Esto se debe a que este conjunto es intersección de finitos elementos de $\mathcal{D}$ y $\mathcal{D}$ es filtro. El hecho de que $\{\alpha : q'(\alpha) \Vdash_{\mathbb{P}} \check{m} \in A^\beta\} \in \mathcal{D}$ se debe al lema 2.2.3 aplicado a la hipótesis $[q'] \Vdash_{\mathbb{P}^\kappa/\mathcal{D}} \check{m} \in A^\beta$ (Note que la fórmula "$\check{m} \in A^\beta$" es una Δ_0-fórmula con parámetros en $M^{\mathbb{P}}$). En consecuencia existe $\alpha < \kappa$ tal que $q'(\alpha) \Vdash_{\mathbb{P}} \check{m} \in A^\alpha \cap A^\beta$ pues $q'(\alpha) \leq p^\alpha_{m,j}$ y $k^\alpha_{m,j} = 1$. Además $q^\alpha_i \Vdash_{\mathbb{P}} A^\alpha \cap A^\beta \subseteq n^\alpha_i$, pero $m > n_i = n^\alpha_i$ y $q'(\alpha) \leq q^\alpha_i$, lo cual es una contradicción. ■

Note que el anterior argumento es llevado a cabo dentro de M porque usamos la medibilidad de κ (el cual en una extensión podría dejar de ser medible).

2.2.4. Añadiendo una familia mad

Para κ regular no contable tomemos

$$\mathbb{M}_\kappa = \{p \in Fn(\kappa, 2^{<\omega}) : \forall \alpha \in dom(p)(p(\alpha) \in 2^{n^p}), n^p \in \omega\}$$

Para $p_1, p_2 \in \mathbb{M}_\kappa$ definimos $p_1 \leq p_2$ si y sólo si $dom(p_1) \supseteq dom(p_2), n^{p_1} \geq n^{p_2}, p_1(\alpha) \supseteq p_2(\alpha)$ para cada $\alpha \in dom(p_2)$ y $|\{\alpha \in dom(p_2) : p_1(\alpha)(n) = 1\}| \leq 1$ para cada $n \in n^{p_1} \backslash n^{p_2}$. Usando el Lema del delta sistema obtenemos que $\mathbb{M}_\kappa$ es *ccc*. La propiedad más importante de $\mathbb{M}_\kappa$ es que añade una familia *mad* de tamaño κ, lo cual es útil para hacer el cardinal $\mathfrak{a}$ pequeño como se ve más adelante. Para ver lo anterior tomemos G un filtro $\mathbb{M}_\kappa$-genérico sobre M. Para cada $\alpha \in \kappa$ sea $A_\alpha = \{n \in \omega : \exists p \in G(p(\alpha)(n) = 1)\}$. Tomemos $\alpha, \beta < \kappa$, $\alpha \neq \beta$. Por densidad existe $p \in G$ tal que $\alpha, \beta \in dom(p)$. Veamos que $A_\alpha \cap A_\beta = \{n \in \omega : p(\alpha)(n) = p(\beta)(n) = 1\}$. Suponga que $m \in A_\alpha \cap A_\beta$ y $m \geq n^p$. Por definición existe $q \in G$ tal que $q(\alpha)(m) = q(\beta)(m) = 1$, y así $n^q > m \geq n^p$. Como $p, q \in G$, tomemos $r \in G$ tal que $r \leq p, q$. Desde que $m \in n^r \backslash n^p$ deberíamos tener que $|\{\theta \in \{\alpha, \beta\} : r(\theta)(m) = 1\}| \leq 1$, pero como $r \leq q$ entonces $r(\theta)(m) = q(\theta)(m) = 1$ para $\theta \in \{\alpha, \beta\}$, lo cual es una contradicción.

Ahora veamos la maximalidad de $\mathcal{A} = \{A_\beta : \beta < \kappa\}$. Por contradicción, supongamos que existe $p \in \mathbb{M}_\kappa$ y $\dot{A}$ un $\mathbb{M}_\kappa$-nombre de un subconjunto de ω (el cual podemos suponer un buen nombre) tal que $p \Vdash_{\mathbb{M}_\kappa} \forall \alpha < \kappa(|\dot{A} \cap A_\alpha| < \omega) \wedge |\dot{A}| = \omega$. Como κ es regular no contable existe $\theta < \kappa$ tal que p y todas las condiciones que definen el nombre $\dot{A}$ están contenidas en $\mathbb{M}_\theta$, y por tanto $\dot{A}$ es un $\mathbb{M}_\theta$-nombre. Desde que $p \Vdash_{\mathbb{M}_\kappa} |\dot{A} \cap A_\theta| < \omega$ podemos tomar $p_0 \in \mathbb{M}_\kappa$ y $k_0 \in \omega$ tal que $p_0 \leq p$ y $p_0 \Vdash_{\mathbb{M}_\kappa} \dot{A} \cap A_\theta \subseteq k_0$. Ahora, notemos que si $\alpha \in dom(p_0) \cap \theta$ entonces para construir un nombre del conjunto A_α basta considerar condiciones que tengan a α en su dominio. Por tanto, es suficiente solo tomar condiciones en $\mathbb{M}_\theta$ para construir un buen nombre de A_α. Además $\mathbb{M}_\theta \lessdot \mathbb{M}_\kappa$ y $p_0 \restriction \theta$ es una reducción de p_0 a $\mathbb{M}_\theta$ (aplicar la Definición 23), por tanto existe $\bar{p}_0 \in \mathbb{M}_\theta$ tal que $\bar{p}_0 \leq p_0 \restriction \theta$ y $\bar{p}_0 \Vdash_{\mathbb{M}_\theta} \forall \alpha \in dom(p_0 \restriction \theta)(|A_\alpha \cap \dot{A}| < \omega) \wedge |\dot{A}| = \omega$. En consecuencia podemos tomar $\bar{p}_1 \in \mathbb{M}_\theta$ y $k_1 \geq k_0$ tal que $\bar{p}_1 \leq \bar{p}_0$ y $\bar{p}_1 \Vdash_{\mathbb{M}_\theta} \forall \alpha \in dom(p_0 \restriction \theta)(A_\alpha \cap \dot{A} \subseteq k_1)$ y luego tomamos $\bar{p}_2 \in \mathbb{M}_\theta$ e $i_0 > k_1$ tal que $n^{\bar{p}_2} > i_0$, $\bar{p}_2 \leq \bar{p}_1$ y $\bar{p}_2 \Vdash_{\mathbb{M}_\theta} i_0 \in \dot{A}$. Finalmente definimos $p_2 \in \mathbb{M}_\kappa$ por lo siguiente:

- $dom(p_2) = dom(\bar{p}_2) \cup dom(p_0)$ y $n^{p_2} = n^{\bar{p}_2}$.
- Si $\alpha < \theta$ y $\alpha \in dom(\bar{p}_2)$, $p_2(\alpha) = \bar{p}_2(\alpha)$.
- Si $\alpha > \theta$ y $\alpha \in dom(p_0)$, $p_2(\alpha) \supseteq p_0(\alpha)$ y $p_2(\alpha)(n) = 0$ para cada n con $n^{p_2} > n \geq n^{p_0}$.
- Si $\alpha = \theta$, $p_2(\alpha) \supseteq p_0(\alpha)$, $p_2(\alpha)(n) = 0$ para cada $n \neq i_0$ con $n^{p_2} > n \geq n^{p_0}$ y $p_2(\alpha)(i_0) = 1$.

Tenemos que $p_2 \leq \bar{p}_2$ y $p_2(\theta)(i_0) = 1$ por lo cual $p_2 \Vdash_{\mathbb{M}_\kappa} i_0 \in \dot{A} \cap A_\theta$. Sin embargo $p_2 \leq p_0$ y $p_0 \Vdash_{\mathbb{M}_\kappa} \dot{A} \cap A_\theta \subseteq k_0 < i_0$, lo cual es una contradicción.

2.2.5. Embebimientos entre ordenes parciales

Ahora consideremos dos ordenes parciales $\mathbb{P}, \mathbb{Q} \in M$ tales que $\mathbb{P} \subseteq \mathbb{Q}$. Quisiéramos que dado H un filtro $\mathbb{Q}$-genérico sobre M pudiésemos producir G filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M tal que $M[G] \subseteq M[H]$. La idea más natural es tomar $G = \mathbb{P} \cap H$. De este modo tendríamos $\mathbb{P} \cap H \in M[H]$, y si $\mathbb{P} \cap H$ fuese $\mathbb{P}$-genérico sobre M, entonces por el Teorema 13 también tendríamos $M[G] \subseteq M[H]$. A continuación damos condiciones suficientes para que $\mathbb{P} \cap H$ sea $\mathbb{P}$-genérico en un contexto más general (ver [7, Cap 7, teorema 7.5]).

Definición 23 *Sean $\mathbb{P}, \mathbb{Q} \in M$ ordenes parciales. Una función $i : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{Q}$ en M es un embebimiento completo si se tienen:*

- *Para cada $p, p' \in \mathbb{P}$, si $p \leq p'$ entonces $i(p) \leq i(p')$.*
- *Para cada $p, p' \in \mathbb{P}$, $p \perp p'$ si y sólo si $i(p) \perp i(p')$.*
- *Para cada $q \in \mathbb{Q}$ existe $p \in \mathbb{P}$ tal que si $p' \leq p$, $p' \in \mathbb{P}$, entonces $i(p') \not\perp q$. Equivalentemente, para cada $q \in \mathbb{Q}$, el conjunto $\{p \in \mathbb{P} : i(p) \perp q\}$ no es denso en $\mathbb{P}$. Al elemento p lo llamamos una reducción de q a $\mathbb{P}$.*

Si para $\mathbb{P}, \mathbb{Q} \in M$ ordenes parciales existe un embebimiento completo $i : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{Q}$, entonces escribimos $\mathbb{P} \lessdot \mathbb{Q}$.

Teorema 24 *Sean $i, \mathbb{P}, \mathbb{Q} \in M$ tales que $i : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{Q}$ es un embebimiento completo. Sea H un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M. Entonces $i^{-1}(H)$ es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M y $M[i^{-1}(H)] \subseteq M[H]$.*

Ejemplo 25 *Los siguientes son ejemplos de embebimientos completos.*

- *Un embebimiento completo i no necesariamente es inyectivo. Por ejemplo, cualquier orden lineal se embebe completamente en un punto. Se puede verificar fácilmente que si $\mathbb{P}$ y $\mathbb{Q}$ son separativos entonces un embebimiento completo entre ellos tiene que ser inyectivo.*
- *Suponga que $I \subseteq J$. Entonces es fácil ver que $Fn(I, 2) \lessdot Fn(J, 2)$. Una reducción canónica de $q \in Fn(J, 2)$ a $Fn(I, 2)$ es $q \restriction I$.*
- *Sean $\theta < \kappa$ cardinales. Entonces para $q \in \mathbb{M}_\kappa$, $q \restriction \theta$ es una reducción de q a $\mathbb{M}_\theta$. Es fácil terminar de comprobar que $\mathbb{M}_\theta \lessdot \mathbb{M}_\kappa$.*
- *Sea $\mathbb{P}$ un orden ccc y κ medible. Entonces el embebimiento $i : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{P}^\kappa/\mathcal{D}$ definido por $i(p) = [p]$ (donde $[p]$ es la clase de la función de valor constante p) es completo. Para $[f] \in \mathbb{P}^\kappa/\mathcal{D}$ debe existir una reducción. De lo contrario $X = \{q \in \mathbb{P} : i(q) \perp [f]\}$ es denso en $\mathbb{P}$. Entonces tome una anticadena maximal $C \subseteq X$. Como X es denso, entonces C es una anticadena maximal en $\mathbb{P}$. Por lo tanto $\kappa = \bigcup_{x \in C}\{\alpha : f(\alpha) \not\perp x\}$. Desde que C es contable y $\mathcal{D}$ es contablemente completo, tenemos que existe $[p] \in C$ tal que $\{\alpha : f(\alpha) \not\perp p\} \in \mathcal{D}$. Sin embargo, como $[p] \in X$ entonces $\{\alpha : f(\alpha) \perp p\} \in \mathcal{D}$, lo cual contradice que $\mathcal{D}$ es filtro. Además de la anterior propiedad, tenemos que elementos incompatibles en $\mathbb{P}$ lo serán en*

$\mathbb{P}^\kappa/\mathcal{D}$. *Aún más, si* $\{p_n : n \in \omega\}$ *es una anticadena maximal en* $\mathbb{P}$ *entonces la estructura* $(\mathbb{P}, \leq) \models \neg\exists x(\bigwedge_{n\in\omega}(p_n \perp x))$. *Como* $\neg\exists x(\bigwedge_{n\in\omega}(p_n \perp x))$ *es una fórmula de* $L_{\kappa\kappa}$ *y* $\mathbb{P} \prec_{\kappa\kappa} \mathbb{P}^\kappa/\mathcal{D}$ [1], *entonces la anticadena maximal se preserva.*

- *Si* $i : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{Q}$ *es un isomorfismo, entonces* i, i^{-1} *son embebimientos completos. En consecuencia, si* G *es un filtro* $\mathbb{P}$*-genérico sobre* M *entonces* $M[G] = M[i(G)]$.

Aunque entre $Fn(\omega,\omega)$ y $Fn(\omega,2)$ no exista un isomorfismo (los inmediatos predecesores del máximo $\emptyset$ en $Fn(\omega,\omega)$ forman una anticadena infinita, mientras que en $Fn(\omega,2)$ no) abajo damos una condición suficiente para probar que dos ordenes como los anteriores producen una misma extensión (ver [7, Cap 7, teorema 7.11]).

Definición 26 *Sean* $\mathbb{P}, \mathbb{Q} \in M$ *ordenes parciales. Una función* $i : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{Q}$ *en* M *es un embebimiento denso si se tienen:*

- *Para cada* $p, p' \in \mathbb{P}$, *si* $p \leq p'$ *entonces* $i(p) \leq i(p')$.
- *Para cada* $p, p' \in \mathbb{P}$, *si* $p \perp p'$ *entonces* $i(p) \perp i(p')$.
- $i(\mathbb{P})$ *es denso en* $\mathbb{Q}$.

Si existe i *tal que* $i : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{Q}$ *es un embebimiento denso, entonces diremos que* $\mathbb{P}$ *y* $\mathbb{Q}$ *son forcing equivalentes* ($\mathbb{P} \equiv \mathbb{Q}$).

Teorema 27 *Suponga* $i, \mathbb{P}, \mathbb{Q} \in M$ *tal que* $i : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{Q}$ *es un embebimiento denso. Para* $G \subseteq \mathbb{P}$ *definimos* $\tilde{i}(G) = \{q \in \mathbb{Q} : \exists p \in G(i(p) \leq q)\}$. *Entonces se tienen:*

- *Si* $H \subseteq \mathbb{Q}$ *es un filtro* $\mathbb{Q}$*-genérico sobre* M *entonces* $G = i^{-1}(H)$ *es un filtro* $\mathbb{P}$*-genérico sobre* M *y además* $M[G] = M[H]$.
- *Si* $G \subseteq \mathbb{P}$ *es un filtro* $\mathbb{P}$*-genérico sobre* M *entonces* $H = \tilde{i}(G)$ *es un filtro* $\mathbb{Q}$*-genérico sobre* M *y además* $M[G] = M[H]$.

No es difícil ver que si $\mathbb{P}$ y $\mathbb{Q}$ son ordenes parciales contables no atómicos (en M) entonces existe una inclusión densa de $\mathbb{P}$ en $\mathbb{Q}$ (ver [7, Cap 7, C4] para indicaciones). En consecuencia ordenes como $Fn(\omega,2)$ y $Fn(\omega,\omega)$ producen las mismas extensiones para ciertos genéricos. A continuación vemos como se induce una transformación en los nombres a partir de un embebimiento completo (ver [7, Cap 7,lema 7.13]).

Definición 28 *Sean* $i, \mathbb{P}, \mathbb{Q} \in M$ *tales que* $i : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{Q}$ *es un embebimiento completo y tomemos* $\tau \in M^{\mathbb{P}}$. *Definimos* $i_*(\tau) \in M^{\mathbb{Q}}$ *por* $i_*(\tau) = \{(i_*(\sigma), i(p)) : (\sigma, p) \in \tau\}$.

[1] $\mathbb{P} \prec_{\kappa,\kappa} \mathbb{P}^\kappa/\mathcal{D}$ quiere decir que $\mathbb{P} \models \varphi$ si y sólo si $\mathbb{P}^\kappa/\mathcal{D} \models \varphi$, donde φ tiene parámetros en $\mathbb{P}$ y perteneces a la lógica $L_{\kappa,\kappa}$ (se permiten sucesiones de menos de κ conjunciones y sucesiones de menos de κ cuantificadores existenciales).

Note que si $\mathbb{P} \subseteq \mathbb{Q}$ completamente (es decir, la inclusión es completa), entonces $i_*(\tau) = \tau$ para cada $\tau \in M^{\mathbb{P}}$. A continuación presentamos las propiedades que nos interesan de i_*.

Lema 29 *Suponga que $i : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{Q}$ es un embebimiento completo en M. Entonces se tiene:*

- *Si H es un filtro $\mathbb{Q}$-genérico sobre M entonces $\tau_{i^{-1}(H)} = i_*(\tau)_H$ para cada $\tau \in M^{\mathbb{P}}$.*
- *Si $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ es Δ_0 (o en general, absoluta para modelos transitivos de ZFC) y $\tau_1, \ldots, \tau_n \in M^{\mathbb{P}}$, entonces $p \Vdash_{\mathbb{P}} \varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ si y sólo si $i(p) \Vdash_{\mathbb{Q}} \varphi(i_*(\tau_1), \ldots, i_*(\tau_n))$.*
- *Si además i es un embebimiento denso, $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ es cualquier fórmula y $\tau_1, \ldots, \tau_n \in M^{\mathbb{P}}$, entonces $p \Vdash_{\mathbb{P}} \varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ si y sólo si $i(p) \Vdash_{\mathbb{Q}} \varphi(i_*(\tau_1), \ldots, i_*(\tau_n))$.*

2.2.6. Álgebras Booleanas y Forcing

Las álgebras Booleanas proveen un enfoque alternativo al estudio del forcing. El interés de usarlas radica en que simplifican algunos objetos, como los nombres, y otros objetos tienen una traducción más natural en el álgebra Booleana, como embebimientos completos y conectivos lógicos.

Definición 30 *Un álgebra Booleana $\mathbb{B} = (B, \wedge, \vee, ', 0, 1)$ es completa si para cada $S \subseteq B$ existe un supremo $\bigvee S$ y un ínfimo $\bigwedge S$.*

Las operaciones $\wedge$ y $\vee$ las denotaremos también por $\cdot$ y $+$ respectivamente. De igual manera $\bigwedge S$ y $\bigvee S$ los denotaremos por $\prod S$ y $\sum S$ respectivamente. Para $a, b \in \mathbb{B}$ definimos $a \leq b$ si y sólo si $a = a \cdot b$, con lo cual $(B, \leq)$ es un orden parcial. Forzar sobre un álgebra Booleana se entiende como forzar sobre el orden $\mathbb{P} = \mathbb{B} \backslash \{0\}$. El siguiente resultado muestra que forzar sobre un orden cualquiera $\mathbb{P}$ se puede ver como forzar sobre un álgebra Booleana completa $B(\mathbb{P})$.

Lema 31 *Sea $\mathbb{P}$ un orden parcial. Entonces existe una única (salvo isomorfismo) álgebra Booleana completa $B(\mathbb{P})$ tal que hay un embebimiento denso $i : \mathbb{P} \longrightarrow B(\mathbb{P}) \backslash \{0\}$.*

La anterior asociación respeta embebimientos completos en el sentido del siguiente lema (ver indicaciones en [7, Cap 7, C8]).

Lema 32 *Si $\mathbb{P} \lessdot \mathbb{Q}$ entonces $B(\mathbb{P}) \lessdot B(\mathbb{Q})$.*

Cuando forzamos con un álgebra Booleana completa $\mathbb{B}$ pedimos $M \models$ "$\mathbb{B}$ es un álgebra Booleana completa". A diferencia de ser orden parcial (la cual es una noción absoluta), la noción "$\mathbb{B}$ es un álgebra Booleana completa" no es absoluta. Al ser M contable, las álgebras Booleanas completas (en el sentido de V) dentro de M deben ser finitas (ver [7, Cap 7, F6]).

El siguiente concepto nos permite reescribir la relación $\Vdash$ en el álgebra Booleana.

Definición 33 *Si* ($\mathbb{B}$ *es un álgebra Booleana completa*)^M *y* $\tau_1, \ldots, \tau_n \in M^{\mathbb{B}}$ *definimos el valor de verdad de una fórmula* $\varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ *por* $[[\varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n)]] = \bigvee\{p \in \mathbb{B} : p \Vdash_{\mathbb{B}} \varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n)\}$.

Las siguientes propiedades muestran que los conectivos lógicos se interpretan como las operaciones en el álgebra Booleana en la relación definida arriba. Además se muestra que la noción $\Vdash$ se puede escribir en términos de la noción $[[\cdot]]$ (ver [7, Cap 7, Lema 7.15]).

Lema 34 *Suponga que* ($\mathbb{B}$ *es un álgebra Booleana completa*)^M *y* $\tau_1, \ldots, \tau_n \in M^{\mathbb{B}}$.

- $[[\varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n) \wedge \psi(\tau_1, \ldots, \tau_n)]] = [[\varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n)]] \wedge [[\psi(\tau_1, \ldots, \tau_n)]]$.
- $[[\neg\varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n)]] = [[\varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n)]]'$.
- $[[\exists x \varphi(x, \tau_1, \ldots, \tau_n)]] = \bigvee\{[[\varphi(\sigma, \tau_1, \ldots, \tau_n)]] : \sigma \in M^{\mathbb{B}}\}$.
- *Para cada* $p \in \mathbb{B}$ *se tiene* $p \Vdash \varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ *si y sólo si* $p \leq [[\varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n)]]$.

Otro concepto que tiene una contraparte algebraica son los embebimientos completos. En efecto, si $\mathbb{B}, \mathbb{B}'$ son álgebras Booleanas completas e $i : \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{B}'$, entonces i es un embebimiento completo si y sólo si i es un homomorfismo inyectivo (ver indicaciones en [7, Cap 7, C7]). La inyectividad de i se debe a que las álgebras Booleanas son ordenes separativos. En efecto, tomemos $a, b \in \mathbb{B}$ tal que $a \not\leq b$. Entonces si $c = a \cdot b'$ tenemos $c \leq a$ y $c \cdot b = 0$ (lo cual equivale a que $c \perp b$).

Una ventaja de las álgebras Booleanas completas es que nos permiten tomar elementos canónicos para una cierta propiedad usando supremos e ínfimos. En la Definición 33 se establece que $[[\varphi]]$ es un elemento canónico para $\{p : p \Vdash \varphi\}$. El siguiente objeto es un elemento canónico para la reducción de un punto.

Definición 35 *Suponga que* $\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2$ *son álgebras Booleanas completas tales que* $\mathbb{B}_1 \lessdot \mathbb{B}_2$. *Para* $b \in \mathbb{B}_2$, *definimos su proyección* $\pi_{\mathbb{B}_1}(b) = \prod\{c \in \mathbb{B}_1 : c \geq b\}$.

Lema 36 *Con las mismas condiciones de la definición anterior,* $\pi_{\mathbb{B}_1}(b)$ *es una reducción de* b. *Si* c *es reducción de* b, *entonces* $c \leq \pi_{\mathbb{B}_1}(b)$. *Además, si* $\{x_i\}_{i \in I} \subseteq \mathbb{B}_2$, *entonces* $\pi_{\mathbb{B}_1}(\sum_{i \in I} x_i) = \sum_{i \in I} \pi_{\mathbb{B}_1}(x_i)$.

En este documento usamos las álgebras Booleanas porque nos permiten simplificar la construcción de nombres. Por ejemplo, supongamos que $\bar{A} = \{(\check{n}, p_{n,i}) : k_{n,i} = 1, n, i \in \omega\}$ donde $\{p_{n,i} : i \in \omega\}$ es anticadena maximal en $\mathbb{B}$ y $k_{n,i} \in 2$, y definamos el $\mathbb{B}$-nombre $\bar{\bar{A}} = \{(\check{n}, \bigvee\{p_{n,i} : k_{n,i} = 1\}) : n \in \omega\}$. Es fácil ver que $\Vdash_{\mathbb{B}} \bar{\bar{A}} = \bar{A}$, por lo cual hemos conseguido un $\mathbb{B}$-nombre más sencillo para el subconjunto de ω que codificaba $\bar{A}$.

2.3. Ultrapotencia del universo

Más adelante construiremos la ultrapotencia de una plantilla en M. Tal ultrapotencia será un elemento del objeto que definimos a continuación (ver [11, Cap 17]).

Definición 37 *Sea $\mathcal{D}$ un ultrafiltro κ-completo no principal sobre κ en M. Definimos $(\overline{M^\kappa/\mathcal{D}}, \in)$ como el colapso transitivo de la ultrapotencia $(M^\kappa/\mathcal{D}, \in^*)$ del modelo $(M, \in))$ (esta construcción se lleva a cabo en M).*

La existencia del colapso transitivo $(\overline{M^\kappa/\mathcal{D}}, \in)$ se debe a que el modelo $(M^\kappa/\mathcal{D}, \in^*)$ es bien fundamentado con la relación $\in^*$ y así podemos aplicar el teorema del colapso de Mostowski (ver [11, Teorema 6.15]). Por el teorema de Łoś, si $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ es una $\in$-fórmula y $[f]_1, \ldots, [f]_n \in M^\kappa/\mathcal{D}$ entonces $\{\alpha < \kappa : M \models \varphi(f_1(\alpha), \ldots, f_n(\alpha))\} \in \mathcal{D}$ si y sólo si $M^\kappa/\mathcal{D} \models \varphi([f]_1, \ldots, [f]_n)$ si y sólo si $\overline{M^\kappa/\mathcal{D}} \models \varphi(\pi([f]_1), \ldots, \pi([f]_n))$, donde π es el isomorfismo que colapsa $M^\kappa/\mathcal{D}$ a $\overline{M^\kappa/\mathcal{D}}$. El siguiente lema establece las propiedades que necesitamos de la ultrapotencia (ver [11, Lema 17.9]).

Lema 38 *Definimos $j_\mathcal{D} : M \longrightarrow \overline{M^\kappa/\mathcal{D}}$ por $j_\mathcal{D}(x) = \pi([c_x])$, donde $x \in M$, $c_x \in M^\kappa/\mathcal{D}$ y $c_x(\alpha) = x$ para cada $\alpha < \kappa$. Entonces se tiene:*

- $\overline{M^\kappa/\mathcal{D}} \subseteq M$.
- *$j_\mathcal{D}$ es una inmersión elemental.*

Capítulo 3

Iteraciones de Forcing

3.1. Iteraciones de soporte finito y contable

De ahora en adelante fijemos (en M) κ cardinal medible y λ, μ cardinales regulares tales que $\lambda > \mu > \kappa$. El primer objetivo de nuestra construcción es forzar $\mathfrak{d} = \mu$ para lo cual añadiremos una μ escala (ver Lema 6). Como hemos visto, el forcing de Hechler $\mathbb{D}$ añade un real que domina a los reales del modelo base (ver Teorema 20). Quisiéramos de alguna manera repetir esta construcción μ veces para obtener una μ escala, pero en comienzo no es claro que hacer en los pasos límite. Más precisamente, partimos del modelo $M_0 = M$ y producimos una extensión $M_1 = M^{\mathbb{D}_0}$, donde $\mathbb{D}_0$ es el forcing de Hechler de M_0. En M_1 se ha añadido un real f_0 que domina los reales de M_0. Ahora tomamos $\mathbb{D}_1$ el forcing de Hechler de M_1 y obtenemos una nueva extensión $M_2 = M_1^{\mathbb{D}_1}$ donde hay un real f_1 que domina todos los reales de M_1. Si continuamos este proceso, podemos obtener una cadena creciente $\{M_i\}_{i\in\omega}$ de modelos contables transitivos de ZFC donde para cada $i \in \omega$ existe un real $f_i \in M_{i+1}$ que domina todos los reales de M_i. Quisiéramos definir un modelo M_ω que contenga a $\{f_i\}_{i\in\omega}$ para continuar el proceso. Posteriormente, para cada δ límite, si hemos definido $\{M_i\}_{i\in\delta}$ cadena creciente de modelos de ZFC y $\{f_i\}_{i\in\delta}$ una familia de reales tal que $f_i \in M_{i+1}$ domina todos los reales de M_i para $i < \delta$, queremos definir un modelo M_δ más grande que los anteriores que contenga a $\{f_i\}_{i\in\delta}$. Si tal construcción fuera posible, en M_μ tendríamos una familia $\{f_i\}_{i\in\mu}$ de reales de tipo de orden μ (con el orden $\leq^*$). La solución más simple para definir M_δ, δ límite, sería tomar $M_\delta = \bigcup_{\alpha<\delta} M_\alpha$. De este modo, si f es un real en M_μ, existiría f_α con $\alpha < \delta$ tal que f_α domina a f y así $\{f_i\}_{i\in\mu}$ sería una μ-escala. El siguiente resultado muestra que necesitamos un modelo más grande que la unión en los pasos límite (ver [6, Cap 4, ejercicio 7.20] para indicaciones).

Teorema 39 *Sea $\{M_i\}_{i\in\omega}$ una cadena creciente de modelos transitivos contables de ZFC. Además suponga que existe $A \in M_0$ tal que $\mathcal{P}(A) \cap M_n \neq \mathcal{P}(A) \cap M_{n+1}$. Entonces $M_\omega = \bigcup\{M_i\}_{i\in\omega}$ no satisface el axioma de partes y por tanto no es un modelo de ZFC.*

La idea de la siguiente construcción sugiere que al menos en los pasos finitos de una iteración no es necesario preocuparnos por los modelos, sino solamente por los ordenes (ver [6, Teorema 5.3.6]).

Definición 40 *Si $\mathbb{P}$ es un orden parcial y $\dot{\mathbb{Q}}$ es un $\mathbb{P}$-nombre para un orden parcial, entonces $\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}} \subseteq \mathbb{P} \times dom(\dot{\mathbb{Q}})$ se define de la siguiente manera:*

- $(p, \dot{q}) \in \mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$ *si y sólo si* $(p, \dot{q}) \in \mathbb{P} \times dom(\dot{\mathbb{Q}})$ *y* $p \Vdash_{\mathbb{P}} \dot{q} \in \dot{\mathbb{Q}}$.
- $(p_0, \dot{q}_0) \leq_{\mathbb{P}*\dot{\mathbb{Q}}} (p_1, \dot{q}_1)$ *si y sólo si* $p_0 \leq_{\mathbb{P}} p_1$ *y* $p_0 \Vdash_{\mathbb{P}} \dot{q}_0 \leq_{\mathbb{Q}} \dot{q}_1$.

Teorema 41 *Si $\mathbb{P} \in M$ es un orden parcial y $\dot{\mathbb{Q}}$ es un $\mathbb{P}$-nombre para un orden parcial entonces se tiene que:*

1. $\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$ *es un orden parcial.*
2. $i : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$, $i(p) = (p, 1_{\mathbb{Q}})$ *es un embebimiento completo.*
3. *Sea K un filtro $\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$-genérico sobre M. Entonces $G := i^{-1}(K)$ es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M y $H := \{\dot{q}_G : \exists p \in \mathbb{P}((p, \dot{q}) \in K)\}$ es un filtro $\dot{\mathbb{Q}}_G$-genérico sobre $M[G]$. Además $M[K] = M[G][H]$.*
4. *Sea G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M y H un filtro $\dot{\mathbb{Q}}_G$-genérico sobre $M[G]$. Entonces $K = \{(p, \dot{q}) \in \mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}} : p \in G, \dot{q}_G \in H\}$ es un filtro $\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$-genérico sobre M. Además $M[K] = M[G][H]$.*

Suponga que $\mathbb{P}, \mathbb{Q}$ son ordenes parciales en M. Entonces $(\check{\mathbb{Q}}, \check{\leq}, \check{1}_{\mathbb{Q}})$ es un $\mathbb{P}$-nombre para el orden $\mathbb{Q}$, y $\mathbb{P} \times \mathbb{Q}$ es isomorfo a $\mathbb{P} * \check{\mathbb{Q}}$.
Ahora tomemos $I, I_0, I_1 \in M$ tal que $I = I_0 \cup I_1$ y $\emptyset = I_0 \cap I_1$. Entonces es fácil ver que $Fn(I, 2) \cong Fn(I_0, 2) \times Fn(I_1, 2)$. Además $Fn(I_j, 2) \lessdot Fn(I, 2)$, para $j \in \{0, 1\}$. Por tanto $Fn(I, 2)$ es un ejemplo de la definición 40. Usando esta observación y el siguiente resultado mostraremos que si CH vale en M, entonces las extensiones $M^{\mathbb{C}_\kappa}$ satisfacen $\mathfrak{a} < \mathfrak{d}$ (ver sección *Forcing de Cohen* en el capítulo 2 y [7, Cap 8, Teorema 2.3]).

Lema 42 *Suponga que $I, S \in M$. Sea G un filtro $Fn(I, 2)$-genérico sobre M, y tome $X \subseteq S$ con $X \in M[G]$. Entonces $X \in M[G \cap Fn(I_0, 2)]$ para algún $I_0 \subseteq I$ tal que $I_0 \in M$ y $(|I_0| \leq |S|)^M$.*

Teorema 43 *Suponga que $M \models CH$. Si $\kappa \geq \omega_2$ entonces $\Vdash_{\mathbb{C}_\kappa} \mathfrak{a} < \mathfrak{d}$.*

Demostración. Primero veamos que $\Vdash_{\mathbb{C}_\kappa} \mathfrak{d} \geq \kappa$. Tomemos G un filtro $\mathbb{C}_\kappa$-genérico sobre M. Supongamos que $\{h_\alpha : \alpha < \theta\}$ es una familia de reales (elementos de ω^ω), con $\theta < \kappa$. Esta familia se puede codificar mediante una función $\bar{h} : \theta \times \omega \to \omega$ tal que $\bar{h}(\alpha, n) = h_\alpha(n)$ para cada $\alpha < \theta$ y $n < \omega$. Como $S = (\theta \times \omega) \times \omega \in M$, $\bar{h} \subseteq S$ y $\bar{h} \in M[G]$, por el Lema 42 existe $I_0' \subseteq \kappa$ tal que $I_0' \in M$, $(|I_0'| \leq \theta)^M$ y $\bar{h} \in M[K']$, donde $K' = Fn(I_0', 2) \cap G$ es un filtro $Fn(I_0', 2)$-genérico sobre M. Tome $I_0 \in M$ tal que $\kappa \supseteq I_0 \supseteq I_0'$ y $|\kappa \backslash I_0| = \omega$. El conjunto I_0 existe porque $(|I_0'| \leq \theta < \kappa)^M$. Por el Teorema 41 tenemos que

$K = Fn(I_0, 2) \cap G$ es un filtro $Fn(I_0, 2)$-genérico sobre M, $H = Fn(\kappa \backslash I_0, 2) \cap G$ es un filtro $Fn(\kappa \backslash I_0, 2)$-genérico sobre $M[K]$ y $M[G] = M[K][H]$. Desde que $\bar{h} \in M[K'] \subseteq M[K]$ y $Fn(\kappa \backslash I_0, 2)$ es isomorfo a $Fn(\omega, \omega)$, el genérico H codifica una función $h \in M[G]$ que no es dominada por ninguna función en $M[K]$ (ver sección *Forcing de Cohen* en el capítulo 2). Además $\{h_\alpha : \alpha < \theta\} \subseteq M[K]$, por lo cual $\{h_\alpha : \alpha < \theta\}$ no es una familia dominante en $M[G]$, y así $M[G] \models \mathfrak{d} \geq \kappa$.

Ahora veamos que $\Vdash_{\mathbb{C}_\kappa} \mathfrak{a} = \omega_1$. Una familia *mad* $\mathcal{A} \in M$ es *Cohen indestructible* si sigue siendo maximal en $M^{\mathbb{C}_\kappa}$ para cualquier κ cardinal infinito. Construiremos una familia $\mathcal{A}$ con tal propiedad. Es necesario notar que $\mathcal{A} \in M$ es *mad* en $M^{\mathbb{C}_\kappa}$ si y sólo si $\mathcal{A}$ es *mad* en $M^{Fn(I,2)}$ para cada $I \subseteq \kappa$ contable (en M). Esto se tiene porque si $x \in M^{\mathbb{C}_\kappa}$ es casi disjunto de todo los elementos de $\mathcal{A}$, entonces por el Lema 42 existe $I_0 \in M$ con $|I_0| \leq \omega$ tal que $x \in M^{Fn(I_0,2)}$. De esta manera $\mathcal{A}$ no sería maximal en $M^{Fn(I_0,2)}$. Además $\mathcal{A}$ es *mad* en cada extensión $M^{Fn(I,2)}$, para $I \in M$ contable, si y sólo si $\mathcal{A}$ es *mad* en $M^{\mathbb{C}_\omega}$. Esto se tiene porque $Fn(I, 2)$ es isomorfo a $Fn(\omega, 2)$ para cada I contable. Por lo anterior, es suficiente construir una familia $\mathcal{A}$ que sea *mad* en $M^{\mathbb{C}_\omega}$. El siguiente argumento es aplicable a cualquier orden parcial contable.

Trabajando dentro de M, como $Fn(\omega, 2)$ es contable, tiene a lo sumo 2^ω anticadenas maximales, y por tanto hay $(2^\omega)^\omega = 2^\omega = \omega_1$ buenos nombres de subconjuntos de ω (ver Ejemplo 17). Entonces el conjunto $Z = Fn(\omega, 2) \times \{\tau : \tau \text{ es un buen nombre de un subconjunto de } \omega\}$ está en M y tiene cardinal ω_1. Enumerando, tenemos $Z = \{(p_\zeta, \tau_\zeta)\}_{\zeta < \omega_1}$. Definimos inductivamente $\mathcal{A} = \{A_\zeta\}_{\zeta < \omega_1}$ tal que para cada $\theta < \omega_1$ se tenga:

- La familia $\{A_\zeta\}_{\zeta \leq \theta}$ es casi disjunta.
- Definimos $\varphi(\theta)$ como la propiedad "$|\tau_\theta| = \omega$ y para cada $\zeta < \theta$ se tiene $|A_\zeta \cap \tau_\theta| < \omega$ ". Queremos que si $p_\theta \Vdash \varphi(\theta)$ entonces $p_\theta \Vdash |A_\theta \cap \tau_\theta| = \omega$.

Sea $\psi(\theta)$ la propiedad "Para cada $n \in \omega$ y $q \leq p_\theta$, existen $m \geq n$ y $r \leq q$ tal que $r \Vdash \check{m} \in \tau_\theta \cap A_\theta$". Notemos que $\psi(\theta)$ implica $p_\theta \Vdash |A_\theta \cap \tau_\theta| = \omega$ (es fácil ver que realmente son equivalentes). Esto se tiene porque si no vale $\psi(\theta)$, por el lema 15, existiría $q \leq p_\theta$ y $n \in \omega$ tal que $q \Vdash A_\theta \cap \tau_\theta \subseteq n$, pero a la vez existiría $r \leq q$ y $m \geq n$ tal que $r \Vdash \check{m} \in A_\theta \cap \tau_\theta$, lo cual es una contradicción. Además, si hemos definido $\mathcal{A}$ con las propiedades de arriba, entonces $\mathcal{A}$ es *mad* en $M^{\mathbb{C}_\omega}$. De lo contrario, suponga que G es un filtro $\mathbb{C}_\omega$-genérico sobre M tal que existe $T \in M[G]$, con $T \subseteq \omega$ infinito y T casi disjunto a todos los elementos de $\mathcal{A}$. Por el Lema de la verdad existe $p \in G$ tal que $p \Vdash \varphi(\theta)$ para cada $\theta < \omega_1$. Además existe un buen nombre τ para T (es decir, $\tau_G = T$). Sin embargo, existiría $\alpha < \omega_1$ tal que $(p, \tau) = (p_\alpha, \tau_\alpha)$ y por tanto $p \Vdash |A_\alpha \cap \tau_\theta| = \omega$, lo cual es una contradicción.
Finalmente definimos $\mathcal{A}$ por inducción en β. La construcción que realizamos a continuación necesita que hayamos definido infinitos elementos de $\mathcal{A}$. Por lo tanto tomamos $\{A_n\}_{n<\omega}$ como una partición en conjuntos infinitos de ω. Supongamos ahora que $\{A_\zeta\}_{\zeta<\beta}$ ha sido definida para $\beta \geq \omega$. Si $p_\beta \not\Vdash \varphi(\beta)$

escogemos A_β casi disjunto a todos los elementos de $\{A_\zeta\}_{\zeta<\beta}$, el cual existe porque $\{A_\zeta\}_{\zeta<\beta}$ es contable (ver lema 2). Si $p_\beta \Vdash \varphi(\beta)$, tomemos primero las enumeraciones $\{(n_i, q_i)\}_{i\in\omega} = \omega \times \{q : q \leq p_\beta\}$ y $\{B_i : i \in \omega\} = \{A_\zeta\}_{\zeta<\beta}$. Para $k \in \omega$, como $q_k \leq p_\beta$ y $p_\beta \Vdash \varphi(\beta)$ entonces $q_k \Vdash |\tau_\beta \setminus \bigcup_{i=0}^k B_i| = \omega$. Luego existe $r_k \leq q_k$ y $m_k \geq n_k$ tal que $r_k \Vdash \check{m}_k \in \tau_\beta \setminus \bigcup_{i=0}^k B_i$. Definimos $A_\beta = \{m_i : i \in \omega\}$. Claramente vale $\psi(\beta)$. Además, si $\alpha < \beta$ y $A_\alpha = B_k$, entonces $A_\alpha \cap A_\beta \subseteq \{m_0, \ldots, m_{k-1}\}$. Por lo tanto $\{A_\zeta\}_{\zeta\leq\beta}$ es una familia casi disjunta. ■

El hecho de que en el modelo base valga CH es indispensable para la construcción de una familia Cohen indestructible en el teorema anterior. La construcción de una familia mad Cohen indestructible sin el uso de CH es un interrogante sin resolver (ver [10, Pag. 182]).

Problema 44 *¿Hay una familia mad Cohen indestructible en ZFC?*

La parte 4 del Teorema 41 nos da una forma de extender dos veces en un solo paso. Por ejemplo, el modelo $M_2 = (M^{\mathbb{D}_0})^{\mathbb{D}_1}$ se puede obtener como $M_2 = M^{\mathbb{D}_0 * \dot{\mathbb{D}}_1}$ donde $\dot{\mathbb{D}}_1$ es un $\mathbb{D}_0$-nombre para $\mathbb{D}_1$ (ver el último item del Ejemplo 17). De esta manera, si definimos $\mathbb{P}_0 = \{\emptyset\}$ y $\mathbb{P}_{n+1} = \mathbb{P}_n * \dot{\mathbb{D}}_n$, donde $\mathbb{D}_n$ es el forcing de Hechler de $M^{\mathbb{P}_n}$, obtenemos una cadena de ordenes $\{\mathbb{P}_n\}_{n\in\omega}$ donde $\mathbb{P}_n \lessdot \mathbb{P}_{n+1}$ para cada $n \in \omega$. El objetivo de la siguiente construcción es definir una clase de "límite" $\mathbb{P}_\omega$ de la sucesión $\{\mathbb{P}_n\}_{n\in\omega}$.

Definición 45 *Sea α un ordinal. Definimos inductivamente una α-iteración $(\mathbb{P}_\xi, \dot{\mathbb{Q}}_\xi)_{\xi\in\alpha}$ a través de lo siguiente:*

1. $\mathbb{P}_0 = \{\emptyset\}$.

2. *Sea $\alpha = \xi + 1$. Suponga que $\dot{\mathbb{Q}}_\xi$ es un $\mathbb{P}_\xi$-nombre para un orden parcial. Decimos que $p \in \mathbb{P}_{\xi+1}$ si y sólo si $p = (\dot{q}_\beta)_{\beta\leq\xi}$ tal que $p{\restriction}\xi = (\dot{q}_\beta)_{\beta<\xi} \in \mathbb{P}_\xi$, $\dot{q}_\xi \in dom(\dot{\mathbb{Q}}_\xi)$ y $p{\restriction}\xi \Vdash_{\mathbb{P}_\xi} \dot{q}_\xi \in \dot{\mathbb{Q}}_\xi$. Además, si $p_1 = (\dot{q}^1_\beta)_{\beta\leq\xi}, p_2 = (\dot{q}^2_\beta)_{\beta\leq\xi} \in \mathbb{P}_{\xi+1}$, decimos que $p_1 \leq_{\mathbb{P}_{\xi+1}} p_2$ si y sólo si $p_1{\restriction}\xi \leq_{\mathbb{P}_\xi} p_2{\restriction}\xi$ y $p_1{\restriction}\xi \Vdash_{\mathbb{P}_\xi} q^1_\xi \leq_{\dot{\mathbb{Q}}_\xi} q^2_\xi$.*

3. *Sea α ordinal límite. Suponga que $\dot{\mathbb{Q}}_\xi$ es un $\mathbb{P}_\xi$-nombre para un orden parcial para cada $\xi < \alpha$. Decimos que $p \in \mathbb{P}_\alpha$ si y sólo si $p = (\dot{q}_\xi)_{\xi<\alpha}$ tal que $p{\restriction}\xi = (\dot{q}_\beta)_{\beta<\xi} \in \mathbb{P}_\xi$ y $\dot{q}_\xi \in dom(\dot{\mathbb{Q}}_\xi)$ para cada $\xi < \alpha$. Además, si $p_1, p_2 \in \mathbb{P}_\alpha$, decimos que $p_1 \leq_{\mathbb{P}_\alpha} p_2$ si y sólo si $p_1{\restriction}\xi \leq_{\mathbb{P}_\xi} p_2{\restriction}\xi$ para cada $\xi < \alpha$.*

Si $\mathcal{J}$ es un ideal sobre α, decimos que $(\mathbb{P}_\xi, \dot{\mathbb{Q}}_\xi)_{\xi\in\alpha}$ es una α-iteración con soporte $\mathcal{J}$ si para cada $p = (\dot{q}_\beta)_{\beta<\alpha} \in \mathbb{P}_\alpha$, su soporte $Supp(p) := \{\beta \in \alpha : \dot{q}_\beta \neq 1_{\dot{\mathbb{Q}}_\beta}\}$ está contenido en $\mathcal{J}$. Si $\mathcal{J} = \{X \subseteq \alpha : |X| < \omega\}$, a $(\mathbb{P}_\xi, \dot{\mathbb{Q}}_\xi)_{\xi\in\alpha}$ le llamamos una α-iteración de soporte finito. Si $\mathcal{J} = \{X \subseteq \alpha : (|X| \leq \omega)^M\}$, a $(\mathbb{P}_\xi, \dot{\mathbb{Q}}_\xi)_{\xi\in\alpha}$ le llamamos una α-iteración de soporte contable.

Ejemplo 46 *Los siguientes son ejemplos de iteraciones de soporte finito.*

- *El orden de Cohen $\mathbb{C}_\kappa$ es isomorfo a una κ-iteración de soporte finito del orden $Fn(1,2)$.*
- *Sea $\mathcal{H}(\mu)$ la μ-iteración de soporte finito $(\mathbb{P}_\xi, \dot{\mathbb{D}}_\xi)_{\xi\in\mu}$ donde $\mathbb{D}_\xi$ es el forcing de Hechler de $M^{\mathbb{P}_\xi}$. Más adelante veremos que si $\mu > \kappa$, κ es medible y μ es regular entonces $\mathcal{H}^\kappa/\mathcal{D}$ es isomorfo a $\mathcal{H}(\mu^\kappa/\mathcal{D})$ (ver Teorema 64).*

El siguiente teorema muestra que en cada paso de la iteración definida en 45 estamos produciendo un orden que contiene completamente a los anteriores ordenes de la iteración (ver [7, Cap 8, Lema 5.11]).

Teorema 47 *Sean $\alpha < \beta \leq \eta$. Defina la aplicación $i_\alpha^\beta : \mathbb{P}_\alpha \longrightarrow \mathbb{P}_\beta$ por $i_\alpha^\beta(p) = (\dot{q}_\theta)_{\theta<\beta}$ tal que $p = (\dot{q}_\theta)_{\theta<\alpha}$ y $\dot{q}_{\mathbb{Q}_\theta} = 1_\theta$ para $\alpha \leq \theta < \beta$. Entonces i_α^β es un embebimiento completo.*

Volviendo a nuestro problema de añadir una μ-escala (ver Definición 5), para definir la iteración en los pasos límite tenemos en comienzo dos opciones, las iteraciones de soporte finito y las iteraciones de soporte contable. ¿Será que ambas sirven?. Sea $(\mathbb{P}_\xi, \dot{\mathbb{D}}_\xi)_{\xi<\mu}$ una μ-iteración de soporte finito o contable, donde $\dot{\mathbb{D}}_\xi$ en un $\mathbb{P}_\xi$-nombre para el forcing de Hechler de $M^{\mathbb{P}_\xi}$. Tenemos que ambas iteraciones añaden una familia $\{f_\alpha\}_{\alpha<\mu}$ de ω^ω con tipo de orden μ. Sin embargo, en comienzo en $M^{\mathbb{P}_\mu}$ el cardinal μ pudo haber colapsado. Por ejemplo podríamos tener que $M^{\mathbb{P}_\mu} \models |\mu| = \omega$ y así $\{f_\alpha\}_{\alpha<\mu}$ no podría ser cofinal. El siguiente teorema muestra que una iteración de soporte finito de ordenes *ccc* es también *ccc*, y por tanto preserva cardinales. Más adelante mostramos que una iteración de soporte contable puede colapsar cardinales.

Teorema 48 *Sea $(\mathbb{P}_\xi, \dot{\mathbb{Q}}_\xi)_{\xi\in\eta}$ una η-iteración de soporte finito y $\theta > \omega$ un cardinal regular en M. Suponga que para cada $\xi < \eta$ se tiene $\Vdash_{\mathbb{P}_\xi}$ "$\dot{\mathbb{Q}}_\xi$ es $\check{\theta}-cc$". Entonces $\mathbb{P}_\eta$ es $\theta - cc$ en M.*

Sea G un filtro $\mathcal{H}(\mu)$-genérico sobre M. $M[G]$ añade μ reales $\{f_\alpha\}_{\alpha<\mu}$ que forman una cadena bien ordenada de tipo μ en $(\omega^\omega, \leq^*)^{M[G]}$, y además $\mu^M = \mu^{M[G]}$. Lo que falta ver es que $\{f_\alpha\}_{\alpha<\mu}$ es cofinal en $(\omega^\omega, \leq^*)^{M[G]}$. El problema es que en el paso μ de la iteración se pueden añadir nuevos reales que no se dejen dominar por ningún real $\{f_\alpha\}_{\alpha<\mu}$. Lo anterior se podría tener en una ω-iteración, pues como veremos adelante, en el último paso se añaden reales de Cohen. En cambio, en una μ-iteración con $\mu > \omega$ regular, un real es un objeto "pequeño" que debió aparecer en un paso anterior a μ de la iteración, y que por tanto es dominado por los reales de $\{f_\alpha\}_{\alpha<\mu}$ que se añaden posteriormente. El siguiente teorema precisa que tan "pequeño" debe ser el objeto (ver [7, Cap 8, Lema 5.14]).

Teorema 49 *Sea η un ordinal límite en M y $(\mathbb{P}_\xi, \dot{\mathbb{Q}}_\xi)_{\xi\in\eta}$ una η-iteración con soporte $\mathcal{J}$. Suponga que cada elemento del ideal $\mathcal{J}$ es acotado en η. Suponga que G es un filtro $\mathbb{P}_\eta$-genérico sobre M, $S \in M$, $X \in M[G]$, $X \subseteq S$ y $M[G] \models |S| < cf(\eta)$. Entonces existe $\alpha < \eta$ tal que $X \in M[(i_\alpha^\eta)^{-1}[G]]$.*

Aunque el anterior teorema da una cota sobre el tamaño de X, es importante que X este acotado como subconjunto por un elemento $S \in M$. Por ejemplo, si G es un filtro $\mathbb{P}_\mu$-genérico sobre M, tenemos que $X = \{G\}$ no puede estar en ninguna extensión intermedia, aunque sea un conjunto con tan solo un elemento.

El Teorema 42 es la version de este teorema para el forcing de Cohen $Fn(\kappa, 2)$, pues $Fn(\kappa, 2)$ es isomorfo a la κ-iteración de soporte finito del orden $Fn(1, 2)$. En el Teorema 43, para mostrar que si $\mathbb{P} = Fn(\kappa, 2)$ entonces $\Vdash_{\mathbb{P}} \mathfrak{d} = \kappa = \mathfrak{c}$, codificamos una familia de reales $\{h_\alpha\}_{\alpha<\theta}, \theta < \kappa$ por una sola función $\bar{h} : \theta \times \omega \longrightarrow \omega$. Si aplicamos el resultado anterior a $X = \bar{h} \subseteq (\theta \times \omega) \times \omega = S$ podemos justificar que la familia $\{h_\alpha\}_{\alpha<\theta}$, $\theta < \kappa$ haya aparecido en un paso anterior de la iteración. También vale la pena notar que en el anterior resultado nos importa la cofinalidad de μ en $M[G]$. En el caso de iteraciones con soporte finito la cofinalidad de μ se preserva, sin embargo en una iteración de soporte contable $cf(\mu)$ podría colapsar. Por esta razón se debe tener cuidado al aplicar argumentos como los mencionados anteriormente para el forcing $\mathbb{C}_\kappa$ (donde no había inconveniente porque el soporte es finito). Volviendo al forcing de Hechler, si f es un real en $M^{\mathcal{H}(\mu)}$, por el Teorema 49 el real f aparece en $M^{\mathcal{H}(\alpha)}$ para algún $\alpha < \mu$. En consecuencia $\mathcal{H}(\mu)$ no añade reales en el último paso límite y el siguiente resultado se tiene.

Teorema 50 *Sea $\mu > \omega$ y $\eta \geq \mu$ tal que $cf(\eta) = \mu$. Entonces $\Vdash_{\mathcal{H}(\eta)} \mathfrak{b} = \mathfrak{d} = \mu$.*

Demostración. Tomemos $\{\theta_\alpha\}_{\alpha<\mu}$ una sucesión creciente y cofinal en η. Sea $f_\alpha \in M^{\mathbb{P}_{\theta_\alpha+1}}$ el real añadido por $\mathbb{D}_{\theta_\alpha+1}$. Entonces la sucesión $\{f_\alpha\}_{\alpha<\mu}$ es una μ-escala en $M^{\mathbb{P}_\eta}$. ■

Si $j : \mu \to \mu^\kappa/\mathcal{D}$ es la inyección canónica, j induce un embebimiento completo $\bar{j} : \mathcal{H}(\mu) \to \mathcal{H}(\mu^\kappa/\mathcal{D})$ definido por $\bar{j}(p)(j(\alpha)) = p(\alpha)$, para $p \in \mathcal{H}(\mu)$ y $\alpha < \mu$. Además, si $f_\alpha \in M^{\mathcal{H}(\alpha+1)}$ es el real añadido por $\mathbb{D}_\alpha$, por ser $\bar{j}$ completa, $f_\alpha \in M^{\mathcal{H}(j(\alpha)+1)}$ es el real añadido por $\mathbb{D}_{j(\alpha)}$. El hecho de que j sea cofinal en $\mu^\kappa/\mathcal{D}$ nos garantiza que la μ-escala $\{f_\alpha\}_{\alpha<\mu}$ añadida en $M^{\mathcal{H}(\mu)}$ siga siendo escala en $M^{\mathcal{H}(\mu^\kappa/\mathcal{D})}$. Esta ideas se precisan en los comentarios posteriores a la prueba del Teorema 82. En [1] se muestra que el hecho anterior (la preservación de la escala) se tiene para la ultrapotencia de cualquier orden *ccc*.

Teorema 51 *Sea $\mathbb{P}$ un orden ccc, κ medible y $\mu > \kappa$ regular. Si $\Vdash_{\mathbb{P}}$ "$\{f_\beta\}_{\beta<\mu}$ es una escala" entonces $\Vdash_{\mathbb{P}^\kappa/\mathcal{D}}$ "$\{f_\beta\}_{\beta<\mu}$ es una escala".*

El siguiente resultado muestra que bajo una hipótesis suave el continuo en $\mathcal{H}(\mu)$ toma el mínimo valor posible.

Teorema 52 *Si $M \models \mu^\omega = \mu$ entonces $\Vdash_{\mathcal{H}(\mu)} \mathfrak{c} = \mu$.*

Demostración. Sea G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M. Llamamos $G_\alpha = \mathbb{P}_\alpha \cap G$ y $M_\alpha = M[G_\alpha]$. Probemos por inducción sobre θ que $(2^\omega \leq \mu)^{M_\theta}, \forall \theta \leq \mu$. Supongamos que para cada $\alpha < \theta$, $(2^\omega \leq \mu)^{M_\alpha}$. Por el último item del Ejemplo 17 podemos elegir el $\mathbb{P}_\alpha$-nombre $\dot{\mathbb{Q}}_\alpha$ de tal manera que $|\dot{\mathbb{Q}}_\alpha|^M = |\mathbb{D}|^{M_\alpha} = (2^\omega)^{M_\alpha}$. Usando la hipótesis de inducción, tenemos que para cada $\alpha < \theta$ $(|\dot{\mathbb{Q}}_\alpha| \leq$

$\mu)^M$, y por tanto (en M) $|\mathbb{P}_\theta| \leq |\theta||Sup_{\alpha<\theta}(2^\omega)^{M_\alpha}| \leq |\theta|\mu = \mu$. La anterior desigualdad se debe a que los elementos de $\mathbb{P}_\theta$ son θ-tuplas con finitas entradas distintas de 1, luego hay tantas como subconjuntos finitos de θ (es decir, $|\theta|$) por los posibles valores en cada entrada no trivial, lo cual se acota por la segunda parte de la desigualdad. Como el forcing de Hechler es *ccc*, entonces la iteración $\mathbb{P}_\theta$ también lo es (ver Teorema 48). Desde que $M \vDash \mu^\omega = \mu$, por el Teorema 19 $M_\theta \vDash 2^\omega \leq \mu$. ∎

En general en una iteración queremos añadir ciertos objetos, como por ejemplo reales dominantes. Sin embargo queremos que no se añadan otros conjuntos. En nuestro caso, si deseamos construir una iteración que fuerce $\mathfrak{d} < \mathfrak{a}$ quisiéramos que no se añadan familias *mad* pequeñas en el último paso. Además quisiéramos que no se añadan reales de Cohen, los cuales no se dejan dominar por los reales añadidos anteriormente. A manera de ejemplo, consideremos la ω-iteración de soporte finito $(\mathbb{P}_n, \dot{\mathbb{Q}}_n)_{n\in\omega}$ donde $\mathbb{Q}_n = Fn(\omega_n, 2)$ (como $\mathbb{P}_n$ preserva cardinales, $Fn(\omega_n,2)^{M^{\mathbb{P}_n}} = Fn(\omega_n,2)^M$). Como $\bigcup_{n\in\omega} M^{\mathbb{P}_n} \subseteq M^{\mathbb{P}_\omega}$ entonces se han añadido al menos ω_ω reales, y así $M^{\mathbb{P}_\omega} \models \mathfrak{c} > \omega_\omega$. En consecuencia debemos haber añadido en el paso ω al menos $\omega_{\omega+1}$ reales, es decir, la mayoría de reales en $M^{\mathbb{P}_\omega}$. Este ejemplo evidencia que en ciertas iteraciones no tenemos un control absoluto de lo que agregamos. El siguiente resultado es otro ejemplo de esta falta de control. Aquí también se establece que la condición de cofinalidad no enumerable en el Teorema 50 es necesaria.

Teorema 53 *Sea $(\mathbb{P}_\xi, \dot{\mathbb{Q}}_\xi)_{\xi\in\beta}$ una β-iteración de soporte finito donde $\Vdash_{\mathbb{P}_\xi}$ "$\exists q^0_\xi, q^1_\xi \in \dot{\mathbb{Q}}_\xi(q^0_\xi \perp q^1_\xi)$", para $\xi < \beta$. Suponga que $M^{\mathbb{P}_\beta} \models cf(\beta) = \omega$. Si G es un filtro $\mathbb{P}_\beta$-genérico, entonces existe $f \in M[G]$ real de Cohen sobre M.*

Demostración. Definimos

$$\bar{\mathbb{C}}_\omega = \{p \in \mathbb{P}_\omega : \forall n \in Supp(p)(p{\restriction}n \Vdash p(n) \leq q^0_n \vee p{\restriction}n \Vdash p(n) \perp q_n)\}$$

Veamos que $\bar{\mathbb{C}}_\omega$ es denso en $\mathbb{P}_\omega$. Sea $p \in \mathbb{P}_\omega$. Construimos inductivamente $p_n \in \bar{\mathbb{C}}_\omega$ tal que $Supp(p_n) \subseteq n$ y $p_n \leq p{\restriction}n$ para $n \geq 1$. Para $n = 1$ tenemos dos casos. Si $p(0) \perp q^0_n$ definimos $p_1(0) = p(0)$. De lo contrario debe existir $r_0 \in \mathbb{Q}_0$ tal que $r_0 \leq p(0), q^0_n$ y entonces definimos $p_1(0) = r_0$. En los dos casos anteriores tomamos $p_1(n) = 1$ para $n > 0$. Supongamos que hemos definido p_n. Si $p{\restriction}n \Vdash p(n) \perp q^0_n$ definimos $p_{n+1}(n) = p(n)$. De lo contrario debe existir $r_n \in dom(\dot{\mathbb{Q}}_0)$ y $p'_n \leq p{\restriction}n$ con $Supp(p'_n) \subseteq n$ tal que $p'_n \Vdash r_n \leq p(n), q^0_n$ y entonces definimos $p_{n+1}{\restriction}n = p'_n$ y $p_{n+1}(n) = r_n$. En los dos casos anteriores tomamos $p_{n+1}(m) = 1$ para $m > n$. Entonces tenemos que $p_{n+1} \in \bar{\mathbb{C}}_\omega$, $Supp(p_{n+1}) \subseteq n+1$ y $p_{n+1} \leq p{\restriction}(n+1)$ (ver definición 45). Para $m > Supp(p)$ tenemos entonces que $p_m \in \bar{\mathbb{C}}_\omega$ y $p_m \leq p$, y así $\bar{\mathbb{C}}_\omega$ es denso en $\mathbb{P}_\omega$. Sea G un filtro $\bar{\mathbb{C}}_\omega$-genérico sobre M. Definimos $f \in (\omega^\omega)^{M[G]}$ por $f(n) = 0$ si y sólo si $\exists p \in G$ tal que $p{\restriction}n \Vdash p(n) \leq q^0_n$. Tenemos que f es función por la compatibilidad de los elementos de G. Veamos que f es un real de Cohen sobre M. Sea $D \subseteq \mathbb{C}_\omega$ un conjunto denso en M. Defina $D^* = \{p' \in \bar{\mathbb{C}}_\omega : p'{\restriction}n \Vdash p'(n) \leq q^0_n \iff p(n) = 0,\ \text{para } p \in D\}$. Veamos que D^* es denso en $\bar{\mathbb{C}}_\omega$. Sea $q' \in \bar{\mathbb{C}}_\omega$ y $q \in \mathbb{C}_\omega$ tal que $q'{\restriction}n \Vdash q'(n) \leq q^0_n \iff q(n) = 0$. Como D es denso en $\mathbb{C}_\omega$, tomemos $p \leq q$, $p \in D$. Para $m \in dom(p) \backslash dom(q)$

definimos $p'(m) = q_m^0$ si $p(m) = 0$ y $p'(m) = q_m^1$ si $p(m) = 1$. Para $m \in dom(q)$ definimos $p'(m) = q'(m)$. Entonces $p' \leq q'$ y $p' \in D^*$. Tome $r' \in D^* \cap G$ y $n \in Supp(p')$. Entonces $r(n) = 0$ si y sólo si $r' \upharpoonright n \Vdash r(n) \leq q_n^0$ si y sólo si $f(n) = 0$. En consecuencia $r \subseteq f$, $r \in D$, y así f es un real de Cohen sobre M.
■

A pesar del anterior resultado, en iteraciones de soporte contable no es claro qué reales se añaden en los pasos límite de cofinalidad enumerable. Aún más, el siguiente problema está abierto (ver [9]).

Problema 54 *Sea $(\mathbb{P}_n, \dot{\mathbb{Q}}_n)_{n\in\omega}$ una iteración de soporte contable tal que*

$$\Vdash_{\mathbb{P}_n} \text{“ No hay reales de Cohen sobre } M\text{”}$$

Entonces, ¿$\Vdash_{\mathbb{P}_\omega}$ “ No hay reales de Cohen sobre M”?

Al contrario de las iteraciones de soporte finito, en las iteraciones de soporte contable no podemos tener un continuo arbitrariamente grande. Esto es una consecuencia del siguiente resultado. Antes definimos el orden $\mathbb{C}_{\omega_1}^{\omega_1} = Fn_{\omega_1}(\omega_1, 2) = \{p : p : X \subseteq \omega_1 \to 2, |X| \leq \omega\}$. La prueba de este resultado es similar a la prueba del Teorema 53 (ver [9]).

Teorema 55 *Sea $(\mathbb{P}_\xi, \dot{\mathbb{Q}}_\xi)_{\xi\in\omega_1}$ una ω_1-iteración de soporte contable donde $\Vdash_{\mathbb{P}_\xi}$ “$\exists q_\xi^0, q_\xi^1 \in \dot{\mathbb{Q}}_\xi(q_\xi^0 \perp q_\xi^1)$”, para $\xi < \omega_1$. Entonces existe $G \in M^{\mathbb{P}_{\omega_1}}$ filtro $\mathbb{C}_{\omega_1}^{\omega_1}$-genérico sobre M.*

Como $Fn_{\omega_1}(\omega_1, 2)$ es isomorfo a $Fn_{\omega_1}(\omega_1 \times \omega, 2)$, podemos suponer que G es $Fn_{\omega_1}(\omega_1 \times \omega, 2)$-genérico sobre M. Para $s \in (2^\omega)^M$, consideremos el denso

$$D_s = \{p \in Fn_{\omega_1}(\omega_1 \times \omega, 2) : \exists \alpha < \omega_1(\{\alpha\} \times \omega \subseteq dom(p) \text{ y } p(\alpha, n) = s(n), \forall n \in \omega)\}$$

Tenemos que $D_s \in M$. Sea $g = \bigcup G$. Considere la función $f : (2^\omega)^M \to (\omega_1)^M$ definida por $f(s) = min\{\alpha < (\omega_1)^M : \forall n \in \omega(g(\alpha, n) = s(n))\}$. Entonces $f \in M^{\mathbb{P}_{\omega_1}}$ y f es inyectiva. Por lo tanto $M^{\mathbb{P}_{\omega_1}} \models |(2^\omega)^M| \leq |(\omega_1)^M|$.
En nuestro caso nos interesan iteraciones de soporte contable de ordenes *ccc*. Veamos cómo lo anterior se refleja en dichas iteraciones. Algunas propiedades de iteraciones de soporte contable son estudiadas en el contexto de iteraciones de ordenes propios (ver [4]). Los ordenes propios son una clase mas extensa que los ordenes *ccc*, como se muestra en [4, Teorema 1.8-Cp 3]. Una de las primeras consecuencias de extender con un orden propio es que cofinalidades no enumerables siguen siendo no enumerables en la extensión. En particular ω_1 es preservado (ver [4, Lema 1.16-Cp 3]). Otra propiedad importante es que una iteración de soporte contable de ordenes propios sigue siendo propio (ver [5, Teorema 2.7-Cp 5]). En consecuencia una iteración de soporte contable $(\mathbb{P}_\xi, \dot{\mathbb{Q}}_\xi)_{\xi\in\beta}$ de ordenes *ccc* preserva ω_1. Además, si $M \models cf(\beta) > \omega$ entonces $M^{\mathbb{P}_\beta} \models cf(\beta) > \omega$, y por lo tanto resultados como el Teorema 49 son aplicables. Sin embargo, el mayor defecto de las iteraciones de soporte contable es que no fuerzan un continuo más grande que ω_2. En efecto, sea $(\mathbb{P}_\xi, \dot{\mathbb{Q}}_\xi)_{\xi\in\lambda}$ una iteración de soporte

contable de ordenes propios (o simplemente *ccc*) con $(cf(\lambda) > \omega)^M$. Por el Teorema 49 tenemos $(2^\omega)^{M^{\mathbb{P}_\lambda}} = \bigcup_{\alpha<\lambda}(2^\omega)^{M^{\mathbb{P}_\alpha}}$. Como $(cf(\lambda) > \omega)^{M^{\mathbb{P}_\lambda}}$, si $\alpha < \lambda$ entonces $\alpha + \omega_1 \leq \lambda$. Aplicando el argumento expuesto abajo del Teorema 55, tenemos $M^{\mathbb{P}_{\alpha+\omega_1}} \models |(2^\omega)^{M^{\mathbb{P}_\alpha}}| = \omega_1$. En consecuencia (como ω_1 es preservado) $M^{\mathbb{P}_\lambda} \models |(2^\omega)^{M^{\mathbb{P}_\alpha}}| = \omega_1$. Además si $\alpha < \beta < \lambda$ entonces $(2^\omega)^{M^{\mathbb{P}_\alpha}} \subseteq (2^\omega)^{M^{\mathbb{P}_\beta}}$ y así $M^{\mathbb{P}_\lambda} \models |\bigcup_{\alpha<\lambda}(2^\omega)^{M^{\mathbb{P}_\alpha}}| \leq \omega_2$. De aquí se deduce que si en cada paso sucesor de la iteración se añaden reales nuevos, entonces $M^{\mathbb{P}_\lambda} \models |\lambda| \leq \omega_2$ (pues al final se añadirán al menos $|\lambda|^{M^{\mathbb{P}_\lambda}}$ reales). De esta manera las iteraciones de soporte contable que son largas según M siempre colapsan cardinales. No obstante en iteraciones de tamaño ω_2 se podrían preservar cardinales. Suponga que en M vale CH y $(\mathbb{P}_\xi, \dot{\mathbb{Q}}_\xi)_{\xi\in\omega_2}$ es una iteración de ordenes propios de soporte contable tal que $\Vdash_{\mathbb{P}_\alpha} |\mathbb{Q}_\alpha| < \mathfrak{c}$ para cada $\alpha < \omega_2$. Entonces en [5, Teorema 2.10-Cp 5] se prueba que $\mathbb{P}_{\omega_2}$ preserva cardinales.

Observación 56 *Usando el Teorema 22, queremos partir de $\mathbb{P}_0 = \mathcal{H}(\mu)$ y empezar a tomar ultrapotencias dadas por $\mathbb{P}_{\alpha+1} = \mathbb{P}_\alpha^\kappa/\mathcal{D}$ con el fin de destruir familias mad intermedias. El problema de la construcción es definir $\mathbb{P}_\delta$ para δ límite de modo que iteremos hasta el paso λ y tengamos $\Vdash_{\mathbb{P}_\lambda} \mu = \mathfrak{d} < \lambda = \mathfrak{a}$.*

Para ello debemos dar una definición para la cual se satisfaga por lo menos lo siguiente:

1. *Queremos añadir lo que se ha añadido en pasos anteriores, por lo que pedimos $\mathbb{P}_\alpha \lessdot \mathbb{P}_\delta$, para cada $\alpha < \delta$.*

2. *Queremos que $\mathbb{P}_\delta$ preserve una μ-escala. Con $\mathbb{P}_0$ añadimos una μ-escala que por el Teorema 51 se preserva en $\mathbb{P}_n$, $n \in \omega$. Quisiéramos que tanto $\mathbb{P}_\omega$ como $\mathbb{P}_\delta$, con δ límite, sigan preservando la μ-escala añadida por $\mathbb{P}_0$.*

3. *Queremos que ciertos objetos más pequeños que λ aparezcan en extensiones intermedias. Por ejemplo, una familia de menos de λ reales debería aparecer en $M^{\mathbb{P}_\alpha}$ para algún $\alpha < \lambda$.*

4. *Queremos que $\mathbb{P}_\lambda$ preserve cardinales.*

Si tuviéramos las anteriores condiciones, intuitivamente es claro que $\Vdash_{\mathbb{P}_\lambda} \mu = \mathfrak{d} < \lambda = \mathfrak{a}$. En efecto, por un lado $\Vdash_{\mathbb{P}_\lambda} \mu = \mathfrak{d}$ porque se ha preservado la escala hasta el paso λ. Además, si $\mathcal{A}$ es una familia *mad* en $M^{\mathbb{P}_\lambda}$ y $\kappa < \mu \leq |\mathcal{A}| < \lambda$, entonces $\mathcal{A}$ debe aparecer en una extensión intermedia $M^{\mathbb{P}_\alpha}$, donde $\alpha < \lambda$. De esta manera $\mathcal{A}$ no es *mad* en $M^{\mathbb{P}_{\alpha+1}}$ por el Teorema 22 [1]. Como $\mathbb{P}_{\alpha+1} \lessdot \mathbb{P}_\delta$, $\mathcal{A}$ tampoco es *mad* en $M^{\mathbb{P}_\lambda}$ y así $\Vdash_{\mathbb{P}_\lambda} \lambda = \mathfrak{a}$. Por último $\Vdash_{\mathbb{P}_\lambda} |\mu| = \mu < \lambda = |\lambda|$ porque se preservan cardinales.

Observación 57 *A continuación damos algunas ideas para la definición en los pasos límite.*

[1] Aquí se usa la preservación de cardinales, pues el Teorema 22 no se puede aplicar para familias de tamaño menor que κ. Sin embargo en este caso μ es preservado.

1. *Usar una iteración de soporte finito. Hemos visto en los Teoremas 47, 49 y 51 que las condiciones* 1, 3 *y* 4 *de la Observación 56 se tienen en esta iteración. Sin embargo la segunda condición no se tiene. Supongamos que hemos construido $\mathbb{P}_\lambda$ como una λ-iteración de soporte finito. Si $\{f_\xi\}_{\xi<\mu}$ es una colección de $(\omega^\omega)^{M^{\mathbb{P}_\lambda}}$, por el teorema 49, $\{f_\xi\}_{\xi<\mu} \in M^{\mathbb{P}_\beta}$ para algún $\beta < \lambda$. Pero por el Teorema 53, en $M^{\mathbb{P}_{\beta+\omega}}$ se añade un real que no es dominado por ningún real en $M^{\mathbb{P}_\beta}$. Por lo tanto, si $\{f_\xi\}_{\xi<\mu}$ llegó a ser una escala en algún paso, en el paso λ ya no será cofinal.*

2. *Usar una iteración de soporte contable. Por el Teorema 47 la primera condición de la observación 56 se tiene. Sin embargo, si $\alpha \leq \lambda$ y $(cf(\alpha) > \omega)^M$, entonces $M^{\mathbb{P}_\alpha} \models |\alpha| \leq \omega_2$ y así $\mathbb{P}_\alpha$ no es ccc. En consecuencia el Teorema 22 no es aplicable y por lo tanto no podemos garantizar que $\mathbb{P}_{\alpha+1}$ destruye las familias mad añadidas por $\mathbb{P}_\alpha$.*
   Sin embargo tal vez podríamos encontrar otra iteración de soporte contable $(\mathbb{P}_\xi, \dot{\mathbb{Q}}_\xi)_{\xi\in\beta}$ donde en los pasos sucesores no tomamos ultrapotencias y donde $\Vdash_{\mathbb{P}_\beta} \mathfrak{d} = \omega_1 < \mathfrak{a} = \omega_2$ (así resolviendo el Problema 7). Esta posibilidad es una pregunta abierta.

   Problema 58 *¿ Existe una iteración de soporte contable $(\mathbb{P}_\xi, \dot{\mathbb{Q}}_\xi)_{\xi\in\beta}$ de ordenes propios tal que $\Vdash_{\mathbb{P}_\beta} \mathfrak{d} < \mathfrak{a}$?*

3. *Por el comentario preliminar al Teorema 51 se evidencia que el hecho de que μ sea cofinal en $\mu^\kappa/\mathcal{D}$ implica que se induce un embebimiento completo de $\mathcal{H}(\mu)$ a $\mathcal{H}(\mu^\kappa/\mathcal{D})$, el cual a la vez permite que la μ-escala añadida por $\mathcal{H}(\mu)$ se preserve. Definimos $\mu_0 = \mu$ y $\mu_{n+1} = \mu_n^\kappa/\mathcal{D}$. En el paso ω quisiéramos definir una iteración $\mathbb{P}_\omega$ sobre un conjunto L_ω. En L_ω cada μ_n debería estar inmerso de modo que se induzcan embebimientos completos entre $\mathbb{P}_n$ y $\mathbb{P}_\omega$, y además quisiéramos que μ_0 fuese cofinal en L_ω. De esta manera la μ-escala añadida por $\mathbb{P}_0$ se preservaría. Una idea natural es tomar como L_ω el límite directo del sistema formado por los ordenes μ_n y los embebimientos $j_n : \mu_n \longrightarrow \mu_{n+1}$ (las inyecciones canónicas), e iterar de alguna manera el forcing de Hechler sobre L_ω para obtener un orden $\mathbb{P}_\omega$. Iterar el forcing de Hechler sobre L_ω se entiende como la construcción de ordenes parciales $\mathbb{P}_{\{y\leq x\}} \cong \mathbb{P}_{\{y<x\}} * \mathbb{D}_x$, donde $\mathbb{D}_x$ es el forcing de Hechler de $M^{\mathbb{P}_{\{y<x\}}}$. Note que $L_\omega \neq Sup_n(\mu_n)$, pues las inyecciones canónicas $j_n : \mu_n \to \mu_{n+1}$ no son inclusiones. Aún más, L_ω no está bien ordenado pues $\{i_n(\kappa)\}_{n\in\omega}$ es una cadena descendente, donde $i_n : \mu_n \longrightarrow L_\omega$ es el embebimiento que se obtiene del límite directo para cada $n \in \omega$. Al no ser L_ω bien ordenado no podemos definir $\mathbb{P}_\omega$ inductivamente. Aún más, el siguiente resultado establece que una iteración no bien fundamentada de forcing de Hechler no puede existir (ver [1, Teorema 0.5]).*

   Teorema 59 *No puede existir una cadena decreciente de modelos $M_n, n \in \omega$ transitivos de ZFC y una familia de reales $\{f_n\}_{n\in\omega} \in M_0$ tal que $\{f_n\}_{n\geq i} \in M_i$ para cada $i \in \omega$ y f_k domine todos los reales de M_{k+1}, para $k \in \omega$.*

Sin embargo para otros ordenes las iteraciones que no son bien fundamentadas tienen sentido, como en el forcing de Cohen $\mathbb{C}_\omega$. En efecto, considere una partición $\{I_i\}_{i\in\omega}$ de conjuntos infinitos de ω (todos en M). Sea $\mathbb{C}_\omega^n = Fn(\bigcup_{k\geq n} I_k, 2)$. Debido a que $\mathbb{C}_\omega^{n+1} \times Fn(I_n, 2) \cong \mathbb{C}_\omega^n$, tenemos que $M_{n+1} = M^{\mathbb{C}_\omega^{n+1}} \supsetneq M^{\mathbb{C}_\omega^n} = M_n$, donde el real añadido por $Fn(I_n, 2)$ es un real de Cohen sobre M_{n+1}.

3.2. Iteración sobre plantillas

En la última idea de la sección anterior no nos preocupamos por el orden mismo, sino por las bases (o "plantillas") de las iteraciones que determinaban los ordenes que pretendemos iterar. Más precisamente, nos fijamos en los ordenes $\{\mu_n\}_{n\in\omega}$ e intentamos definir un nuevo orden L_ω el cual sea base de una nueva iteración. Con esta idea en mente, vamos a definir un nuevo tipo de iteración usando una plantilla $(L, \mathcal{I})$. Como veremos, L es es un orden lineal e $\mathcal{I}$ está formado por ciertos subconjuntos de L. Los puntos de la iteración no serán los de L sino los puntos de $\mathcal{I}$. Es decir, construimos ordenes parciales $\mathbb{B}_I, I \in \mathcal{I}$ tal que si $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$ y $I_1 \subseteq I_2$ entonces $\mathbb{B}_{I_1} \lessdot \mathbb{B}_{I_2}$.
Iterar sobre una plantilla será como iterar sobre un árbol, donde en la copa (el máximo) agregamos lo que hemos añadido en todas sus ramas. Además el tronco de ese árbol será μ.

Definición 60 *Una plantilla indexada es un par $(L, \mathcal{I})$ donde $(L, \leq)$ es un orden lineal e $\mathcal{I} = \bigcup_{x\in L} \mathcal{I}_x \cup \{L\}$, donde $\mathcal{I}_x \subseteq \mathcal{P}(L_x)$ y $L_x = \{y \in L : y < x\}$. Para $x \in L$, $\mathcal{I}_x$ satisface las siguientes condiciones:*

1. *$\emptyset \in \mathcal{I}_x$.*
2. *Si $A, B \in \mathcal{I}_x$, entonces $A \cup B, A \cap B \in \mathcal{I}_x$.*
3. *Si $x < y$, $x, y \in L$, entonces existe $A \in \mathcal{I}_y$ tal que $x \in A$.*
4. *Si $x < y$, $x, y \in L$, entonces $\mathcal{I}_x = \{A \subseteq L_x : A \in \mathcal{I}_y\}$.*
5. *El orden $(\mathcal{I}, \subseteq)$ está bien fundamentado. Defina la función $Dp_\mathcal{I} : \mathcal{I} \longrightarrow Ord$ (por simplicidad Dp), por $Dp(\emptyset) = 0$ y $Dp(A) = Sup\{Dp(B) + 1 : B \in \mathcal{I}, B \subsetneq A\}$ si $A \in \mathcal{I}, A \neq \emptyset$. La buena fundamentación implica que Dp está bien definida.*

Ejemplo 61 *A continuación presentamos algunas plantillas y algunas construcciones que vamos a utilizar más adelante:*

1. *Sea $A \subseteq L$. Definimos $(\mathcal{I}{\restriction}A)_x = \{B \cap A : A \in \mathcal{I}_x\}$ e $\mathcal{I}{\restriction}A = \bigcup_{x\in A}(\mathcal{I}{\restriction}A)_x \cup \{A\}$. Entonces $(A, \mathcal{I}{\restriction}A)$ es una plantilla indexada. Además, si $A \in \mathcal{I}$, entonces $(\mathcal{I}{\restriction}A)_x = \mathcal{I}_x{\restriction}A$.*
2. *Sea μ un ordinal. Tomemos $L = \mu$ e $\mathcal{I}_\alpha = \alpha$ para $\alpha \leq \mu$. Entonces $(\mu, \mu + 1)$ es una plantilla indexada.*

3. *Sea L un orden lineal. Tomemos $(\mathcal{I}_{fin})_x = [L_x]^{<\omega}$ e $\mathcal{I}_{fin} = \bigcup_{x\in L} \mathcal{I}_x \cup \{L\}$. Entonces $(L, \mathcal{I}_{fin})$ es una plantilla indexada.*

4. *Sea $(L, \mathcal{I}) \in M$ una plantilla, κ un cardinal medible y $\mathcal{D}$ un ultrafiltro κ-completo (en M). Tomemos*

$$L^* = L^\kappa/\mathcal{D} = \{[f] : f : \kappa \longrightarrow L\}$$

donde

$$[f] = \{g \in L^\kappa : \{\alpha < \kappa : f(\alpha) = g(\alpha)\} \in \mathcal{D}\}$$

Para $[f] \in L^*$ definamos

$$\mathcal{I}^*_{[f]} = \{[F] : dom(F) = \kappa \text{ y } \{\alpha < \kappa : F(\alpha) \in \mathcal{I}_{f(\alpha)}\} \in \mathcal{D}\}$$

$$\mathcal{I}^* = \bigcup_{[f]\in L^*} \mathcal{I}^*_{[f]} \cup \{L^*\} = \mathcal{I}^\kappa/\mathcal{D}$$

Por definición de ultrapotencia del universo (ver sección Ultrapotencia del Universo *en el capítulo 2) tenemos que $\mathcal{I}^* = \mathcal{I}^\kappa/\mathcal{D} \in M^\kappa/\mathcal{D}$. Usando el teorema de Łoś en $M^\kappa/\mathcal{D}$ para las propiedades de la definición de plantilla y los parámetros $L^*, \leq^*, \mathcal{I}^* \in M^\kappa/\mathcal{D}$, obtenemos que $(L^*, \mathcal{I}^*)$ es una $\in^*$ plantilla, donde $\in^*$ es la relación de pertenencia en $M^\kappa/\mathcal{D}$. Para tener la pertenencia genuina podemos construir la plantilla $(\pi(L^*), \pi(\mathcal{I}^*)) \in \overline{M^\kappa/\mathcal{D}} \subseteq M$, donde π es un isomorfismo entre $M^\kappa/\mathcal{D}$ y $\overline{M^\kappa/\mathcal{D}}$ (ver Lema 38). Ahora en adelante trabajaremos sobre la plantilla $(L^*, \mathcal{I}^*)$, aunque rigurosamente deberíamos trabajar con la plantilla $(\pi(L^*), \pi(\mathcal{I}^*)) \in M$ para tener la pertenencia genuina.*
Si consideramos la plantilla $(\mu, \mu+1)$ con $\kappa < \mu$, $(\mu^*, (\mu+1)^*)$ es una plantilla de la misma clase de $(\mu, \mu+1)$. En efecto, tenemos que μ^* sigue siendo un ordinal, y si $[f] \in \mu^*$ entonces $[f]$ es un ordinal de μ^*. Como $[g] \in \mathcal{I}^*_{[f]}$ si y sólo si $\{\alpha < \kappa : g(\alpha) \in \mathcal{I}_{f(\alpha)}\} \in \mathcal{D}$ si y sólo si $\{\alpha < \kappa : g(\alpha) < f(\alpha)\} \in \mathcal{D}$ si y sólo si $[g] \in [f]$, entonces $\mathcal{I}^*_{[f]} = [f]$. En consecuencia $\mathcal{I}^* = (\mu+1)^* = \mu^* + 1$.

Para una plantilla $(L, \mathcal{I})$ usamos la buena fundamentación de $\mathcal{I}$ para definir un orden $\mathbb{P}$ (que depende de la plantilla) el cual denotamos por $\mathbb{P}{\restriction}L$. Definimos $\mathbb{P}{\restriction}A$ para $A \in \mathcal{I}$ por recursión en $Dp(A)$.

Definición 62 *Sea $(L, \mathcal{I})$ una plantilla indexada. Para $A \in \mathcal{I}$ definimos:*

1. *Suponga $Dp(A) = 0$. Entonces $A = \emptyset$ y definimos $\mathbb{P}{\restriction}A = \{\emptyset\}$.*

2. *Suponga $Dp(A) > 0$. Entonces:*

   $p \in \mathbb{P}{\restriction}A$ si y sólo si satisface lo siguiente:

   - *$dom(p) \subseteq A$ es finito*
   - *Si $x = max(dom(p))$ entonces existe $B \subseteq A, B \in \mathcal{I}_x$ tal que $p{\restriction}L_x \in \mathbb{P}{\restriction}B$.*

- *$p(x) = (s^p_x, \dot{f}^p_x)$ para $s^p_x \in \omega^{<\omega}$. Además $\dot{f}^p_x$ un $\mathbb{P}{\restriction}B$-nombre para un real y $p{\restriction}L_x \Vdash_{\mathbb{P}\restriction B} s^p_x \subseteq \dot{f}^p_x$. Esto último no significa nada más que $p{\restriction}L_x \Vdash_{\mathbb{P}\restriction B} p(x) \in \mathbb{D}$.*

Para $p_1, p_2 \in \mathbb{P}{\restriction}A$ con $x = max(dom(p_1)), y = max(dom(p_2))$, definimos $p_1 \leq_{\mathbb{P}\restriction A} p_2$ si y sólo si $dom(p_2) \subseteq dom(p_1)$ y se tiene una de las siguientes condiciones:

- *$x > y$ y existe $B \in \mathcal{I}_x$ tal que $p_1{\restriction}L_x, p_2 \in \mathbb{P}{\restriction}B$ y $p_1{\restriction}L_x \leq_{\mathbb{P}\restriction B} p_2$.*
- *$x = y$ y existe $B \in \mathcal{I}_x$ tal que $p_1{\restriction}L_x, p_2{\restriction}L_x \in \mathbb{P}{\restriction}B$, $p_1{\restriction}L_x \leq_{\mathbb{P}\restriction B} p_2{\restriction}L_x$, $s^{p_2}_x \subseteq s^{p_1}_x$, $\dot{f}^{p_1}_x, \dot{f}^{p_2}_x$ son $\mathbb{P}{\restriction}B$-nombres para reales y por último $p_1{\restriction}L_x \Vdash_{\mathbb{P}\restriction B} \forall n \in \omega(\dot{f}^{p_2}_x(n) \leq \dot{f}^{p_1}_x(n))$. Esto último no significa nada más que $p_1{\restriction}L_x \Vdash_{\mathbb{P}\restriction B} p_1(x) \leq_{\mathbb{D}} p_2(x)$.*

Sea $(L, \mathcal{I})$ una plantilla y supongamos que para cada $x \in L$ y cada $A \in \mathcal{I}_x$ tenemos que $\dot{\mathbb{Q}}^x_A$ es un $\mathbb{P}{\restriction}A$-nombre para un orden parcial. Siguiendo la definición 45 podemos definir en general una iteración sobre $(L, \mathcal{I})$ de la forma $(\mathbb{P}{\restriction}A, \dot{\mathbb{Q}}^x_A : x \in L, A \in \mathcal{I}_x)$. Para nuestros propósitos nos interesa el caso en que $\dot{\mathbb{Q}}^x_A$ es un $\mathbb{P}{\restriction}A$-nombre para el forcing de Hechler $\mathbb{D}^x_A$ de $M^{\mathbb{P}\restriction A}$.

Es fácil ver que $\mathcal{I}_x{\restriction}A = (\mathcal{I}{\restriction}A)_x$ para $A \subseteq L$. Como consecuencia tenemos que $\mathbb{P}{\restriction}A = \mathbb{P}{\restriction}(A, \mathcal{I}{\restriction}A)$ para $A \in \mathcal{I}$. Por lo tanto, sin ambigüedad, podemos definir $\mathbb{P}{\restriction}A = \mathbb{P}{\restriction}(A, \mathcal{I}{\restriction}A)$ para cualquier $A \subseteq L$.

Ejemplo 63 *A continuación damos algunos ejemplos de $\mathbb{P}{\restriction}L$ para algunas plantillas $(L, \mathcal{I})$.*

1. *Para la plantilla $(\mu, \mu+1)$ con μ ordinal, $\mathbb{P}{\restriction}\mu$ no es más que la μ-iteración de soporte finito del forcing de Hechler $\mathcal{H}(\mu)$.*
2. *Para un orden lineal L consideremos la plantilla $(L, \mathcal{I}_{fin})$. Entonces $\mathbb{P}{\restriction}L$ es un orden que añade un subconjunto de ω^ω isomorfo a L.*
3. *Sea $\mu > \kappa$ regular. El teorema de intercambio que enunciamos a continuación (ver [1]) nos permite justificar que $\mathcal{H}(\mu)^\kappa/\mathcal{D}$ es isomorfo a $\mathcal{H}(\mu^*)$, hecho que habíamos mencionado en la sección anterior.*

Teorema 64 *Sea $(L, \mathcal{I})$ una plantilla indexada y $A \in \mathcal{I}$. Entonces $(\mathbb{P}{\restriction}A)^\kappa/\mathcal{D}$ es isomorfo a $\mathbb{P}{\restriction}(A^\kappa/\mathcal{D})$.*

Demostración. Por inducción sobre $\theta = Dp(\langle A_\alpha : \alpha < \kappa\rangle/\mathcal{D})$ para $A = \langle A_\alpha : \alpha < \kappa\rangle/\mathcal{D} \in \mathcal{I}^*$ definimos un isomorfismo

$$\varphi_A : \langle \mathbb{P}{\restriction}A_\alpha : \alpha < \kappa\rangle/\mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{P}{\restriction}(\langle A_\alpha : \alpha < \kappa\rangle/\mathcal{D})$$

Supongamos que tal isomorfismo ha sido definido para cada $B \in \mathcal{I}^*$ con $Dp(B) < \theta$ y sea $A = \langle A_\alpha : \alpha < \kappa\rangle/\mathcal{D} \in \mathcal{I}^*$ con $Dp(A) = \theta$. Tomemos $p = \langle p_\alpha : \alpha < \kappa\rangle/\mathcal{D} \in \langle \mathbb{P}{\restriction}A_\alpha : \alpha < \kappa\rangle/\mathcal{D}$, donde sin perdida de generalidad $p_\alpha \in \mathbb{P}{\restriction}A_\alpha$ para cada $\alpha < \kappa$. Sea $x_\alpha = max(dom(p_\alpha))$. Por la definición 62, tomemos $B_\alpha \in \mathcal{I}_{x_\alpha}{\restriction}A_\alpha$

tal que $\bar{p}_\alpha = p_\alpha \restriction L_{x_\alpha} \in \mathbb{P}\restriction B_\alpha$ y $p_\alpha(x_\alpha) = (s^{p_\alpha}_{x_\alpha}, \dot{f}^{p_\alpha}_{x_\alpha})$. Por el teorema de Łoś y la definición dada en el ejemplo 61 tenemos que $\langle B_\alpha : \alpha < \kappa\rangle/\mathcal{D} \in \mathcal{I}^*_x$ donde $x = \langle x_\alpha : \alpha < \kappa\rangle/\mathcal{D} \in L^*$. Además $Dp(\langle B_\alpha : \alpha < \kappa\rangle/\mathcal{D}) < Dp(\langle A_\alpha : \alpha < \kappa\rangle/\mathcal{D})$ pues $\{\alpha < \kappa : Dp(B_\alpha) < Dp(A_\alpha)\} \in \mathcal{D}$ y la función Dp es definible. Por lo tanto podemos aplicar la hipótesis de inducción a $B = \langle B_\alpha : \alpha < \kappa\rangle/\mathcal{D}$ y considerar el isomorfismo

$$\varphi_B : \langle \mathbb{P}\restriction B_\alpha : \alpha < \kappa\rangle/\mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{P}\restriction(\langle B_\alpha : \alpha < \kappa\rangle/\mathcal{D})$$

Sea $s \in \omega^{<\omega}$ tal que $\{\alpha < \kappa : s^{p_\alpha}_{x_\alpha} = s\} \in \mathcal{D}$. Además podemos suponer que cada $\dot{f}^{p_\alpha}_{x_\alpha}$ es un buen $\mathbb{P}\restriction B_\alpha$-nombre y tomar $\{p^\alpha_{n,i} : i \in \omega\}$ anticadenas maximales en $\mathbb{P}\restriction B_\alpha$ (para cada $n \in \omega$ y $\alpha < \kappa$) y naturales $\{k^\alpha_{n,i} : n, i \in \omega\}$ atestiguando que $\dot{f}^{p_\alpha}_{x_\alpha}$ es buen nombre. Entonces tenemos que $C_n = \{\langle p^\alpha_{n,i} : \alpha < \kappa\rangle/\mathcal{D} : i \in \omega\}$ es anticadena maximal para cada $n \in \omega$. Entonces, si tomamos $k_{n,i}$ tal que $\{\alpha < \kappa : k^\alpha_{n,i} = k_{n,i}\} \in \mathcal{D}$, podemos construir el buen $\langle \mathbb{P}\restriction B_\alpha : \alpha < \kappa\rangle/\mathcal{D}$-nombre $\dot{f}$ dado por $\{k_{n,i} : n, i \in \omega\}$ y las anticadenas C_n, $n \in \omega$ (el nombre "promedio"). Definimos $\varphi_A(p)\restriction L_x = \varphi_B(\bar{p})$ y $\varphi_A(p)(x) = (s, \dot{f})$. Entonces inductivamente se puede probar que φ_A es isomorfismo. Por ejemplo, la sobreyectividad se debe a que si $\dot{f}$ es un buen $\langle \mathbb{P}\restriction B_\alpha : \alpha < \kappa\rangle/\mathcal{D}$-nombre, entonces $\dot{f}$ se puede ver como un nombre promedio. Más precisamente, supongamos que $\dot{f}$ está determinado por anticadenas $\{[p_{n,i}] : i \in \omega\}$, $n \in \omega$, y naturales $\{k^\alpha_{n,i} : n, i \in \omega\}$. Si definimos $k^\alpha_{n,i} = k_{n,i}$ y $p^\alpha_{n,i} = p_{n,i}(\alpha)$ para $\alpha < \kappa$, entonces tenemos que $Y = \{\alpha < \kappa : \{p^\alpha_{n,i} : i \in \omega\}$ es anticadena maximal para cada $n \in \omega\} \in \mathcal{D}$ (por el teorema de Łoś). Cambiando los $\{p^\alpha_{n,i} : i \in \omega\}$, $n \in \omega$ por anticadenas maximales en $\mathbb{P}\restriction B_\alpha$, para $\alpha \in \kappa \backslash Y$, podemos suponer que los conjuntos $\{p^\alpha_{n,i} : i \in \omega\}$ forman anticadenas maximales para cada $n \in \omega$ y $\alpha < \kappa$ ($[p_{n,i}]$ no se altera, pues $Y \in \mathcal{D}$). De este modo $\dot{f}$ es el promedio de los nombres $\dot{f}_\alpha$ con $\alpha < \kappa$, donde cada $\dot{f}_\alpha$ es un buen $\mathbb{P}\restriction B_\alpha$-nombre determinado por las anticadenas $\{p^\alpha_{n,i} : i \in \omega\}$, $n \in \omega$, y los naturales $\{k^\alpha_{n,i} : n, i \in \omega\}$. ■

3.2.1. Propiedades de plantillas

Los siguientes resultados muestran que una plantilla se puede ver en si misma como una iteración, donde $\mathbb{P}\restriction L$ añade lo que habíamos añadido con $\mathbb{P}\restriction A$, $A \in \mathcal{I}$.

Lema 65 *Sea $(L, \mathcal{I})$ una plantilla indexada. Considere $C \subseteq L$ y suponga que $p, q \in \mathbb{P}\restriction C$ son tales que $p \leq_{\mathbb{P}\restriction C} q$. Digamos que $x = max(dom(p))$, $y = max(dom(q))$. Sea $z \in dom(p)$ tal que $x \geq z \geq y$. Entonces:*

1. *Si $z > y$ tenemos que existe $E \in \mathcal{I}_z\restriction C$ tal que $p\restriction L_z, q \in \mathbb{P}\restriction E$, $p\restriction L_z \leq_{\mathbb{P}\restriction E} q$ y $p\restriction L_z \Vdash_{\mathbb{P}\restriction E} p(z) \in \mathbb{D}$.*
2. *Si $z = y$ tenemos que existe $E \in \mathcal{I}_z\restriction C$ tal que $p\restriction L_z, q\restriction L_z \in \mathbb{P}\restriction E$, $p\restriction L_z \leq_{\mathbb{P}\restriction E} q\restriction L_z$, $p\restriction L_z \Vdash_{\mathbb{P}\restriction E} p(z) \in \mathbb{D}$, $q\restriction L_z \Vdash_{\mathbb{P}\restriction E} q(z) \in \mathbb{D}$ y $q\restriction L_z \Vdash_{\mathbb{P}\restriction E} q(z) \leq_{\mathbb{D}} p(z)$.*

Demostración. Probemos el primer numeral. El segundo es análogo. Vamos a demostrar la siguiente propiedad por inducción sobre $n \in \omega$. Suponga que $p, q \in$

$\mathbb{P}{\restriction}C$, $p \leq_{\mathbb{P}\restriction C} q$, $y = max(dom(q)) < z \leq max(dom(p)) = x$ y $dom(p)\backslash L_z = \{x_0, \ldots x_n\}$ donde $z = x_0 < \ldots < x_n = x$. Entonces existe $E \in \mathcal{I}_z{\restriction}C$ tal que $p{\restriction}L_z, q \in \mathbb{P}{\restriction}E$, $p{\restriction}L_z \leq_{\mathbb{P}\restriction E} q$ y $p{\restriction}L_z \Vdash_{\mathbb{P}\restriction E} p(z) \in \mathbb{D}$.

Suponga $n = 0$. Por la primera parte de la definición 62 tomemos $E_1 \in \mathcal{I}_z{\restriction}C$ tal que $p{\restriction}L_z \Vdash_{\mathbb{P}\restriction E} p(z) \in \mathbb{D}$ (E_1 atestigua $p \in \mathbb{P}{\restriction}C$). Por la misma definición, tome $E_2 \in \mathcal{I}_z{\restriction}C$ tal que $p{\restriction}L_z, q \in \mathbb{P}{\restriction}E_2$, $p{\restriction}L_z \leq_{\mathbb{P}\restriction E_2} q$ (E_2 atestigua $p \leq_{\mathbb{P}\restriction C} q$). Entonces $E = E_1 \cup E_2$ satisface el enunciado del lema.

Supongamos que la propiedad vale para $n \in \omega$ y tenemos $p, q \in \mathbb{P}{\restriction}C$, $p \leq_{\mathbb{P}\restriction C} q$, $y = max(dom(q)) < z \leq max(dom(p)) = x$ y $dom(p)\backslash L_z = \{x_0, \ldots x_{n+1}\}$ donde $z = x_0 < \ldots < x_{n+1} = x$. Por definición, tome $E' \in \mathcal{I}_x{\restriction}C$ tal que $p{\restriction}L_x, q \in \mathbb{P}{\restriction}E'$ y $p{\restriction}L_x \leq_{\mathbb{P}\restriction E'} q$. Aplicando la hipótesis de inducción a $p{\restriction}L_x, q \in \mathbb{P}{\restriction}E'$, tomemos $E \in \mathcal{I}_z{\restriction}E'$ tal que $(p{\restriction}L_x){\restriction}L_z = p{\restriction}L_z, q \in \mathbb{P}{\restriction}E$, $p{\restriction}L_z \leq_{\mathbb{P}\restriction E} q$ y $p{\restriction}L_z \Vdash_{\mathbb{P}\restriction E} p(z) \in \mathbb{D}$. Entonces $E \in \mathcal{I}_z{\restriction}C$. En efecto, tomemos $H_1 \in \mathcal{I}_x$ tal que $E' = H_1 \cap C$ y $H_2 \in \mathcal{I}_z$ tal que $E = H_2 \cap E' = H_1 \cap H_2 \cap C$. Como $\mathcal{I}_x$ es cerrado bajo intersección y $H_1 \cap H_2 \subseteq L_z$, entonces $H_1 \cap H_2 \in \mathcal{I}_z$ y así $E \in \mathcal{I}_z{\restriction}C$.

■

Teorema 66 *Sea $(L, \mathcal{I})$ una plantilla indexada, $B \in \mathcal{I}$ y $A \subseteq B$. Entonces $\mathbb{P}{\restriction}B$ es un orden parcial y $\mathbb{P}{\restriction}A \lessdot \mathbb{P}{\restriction}B$. Aún más, si $p \in \mathbb{P}{\restriction}B$, p tiene una reducción canónica $(p_0)^B_A$ (aquí por simplicidad llamémosla p_0) tal que:*

1. *$dom(p_0) = dom(p) \cap A$.*
2. *$s^{p_0}_x = s^p_x$, para cada x en $dom(p_0)$.*
3. *Si $B, D \in \mathcal{I}$, $B, C \subseteq D$, $A = B \cap C$ y $q_o \leq_{\mathbb{P}\restriction C} p_0$, $q_o \in \mathbb{P}{\restriction}C$, entonces existe $q \in \mathbb{P}{\restriction}D$ tal que $q \leq_{\mathbb{P}\restriction D} q_0, p$.*

Demostración. Probamos por inducción en α la conjunción de los siguientes dos enunciados:

- Si $B \in \mathcal{I}$, $Dp(B) = \alpha$ y $A \subseteq B$, entonces $\mathbb{P}{\restriction}B$ es un orden parcial, $\mathbb{P}{\restriction}A \subseteq \mathbb{P}{\restriction}B$ y existe p_0 cumpliendo 1 y 2 en el enunciado del teorema.
- Si $B, D \in \mathcal{I}$, $B, C \subseteq D$, $Dp(D) = \alpha$, $A = B \cap C$ y $p \in \mathbb{P}{\restriction}B$, entonces para p_0 existe $q \in \mathbb{P}{\restriction}D$ cumpliendo 3 en el enunciado del teorema.

Suponga que $\alpha \leq Dp(\mathcal{I})$, y que los dos anteriores enunciados se mantienen para cada $\beta < \alpha$. Para mostrar que $\mathbb{P}{\restriction}B$ es un orden parcial solo basta mostrar que es transitivo. Tome $p, q, r \in \mathbb{P}{\restriction}B$ tal que $p \leq_{\mathbb{P}\restriction B} q \leq_{\mathbb{P}\restriction B} r$. Digamos que $x = max(dom(p)), y = max(dom(q)), z = max(dom(r))$.

Primero supongamos que $x = y = z$. Tome $A_0, A_1 \in \mathcal{I}_x{\restriction}B$ tal que:

- $dom(q) \subseteq dom(p)$ y $dom(r) \subseteq dom(q)$.
- $p{\restriction}(B \cap L_x), q{\restriction}(B \cap L_x) \in \mathbb{P}{\restriction}A_0$, $q{\restriction}(B \cap L_x), r{\restriction}(B \cap L_x) \in \mathbb{P}{\restriction}A_1$.
- $p{\restriction}(B \cap L_x) \leq_{\mathbb{P}\restriction A_0} q{\restriction}(B \cap L_x)$, $q{\restriction}(B \cap L_x) \leq_{\mathbb{P}\restriction A_1} r{\restriction}(B \cap L_x)$.

- $\dot{f}^p_x, \dot{f}^q_y$ son $\mathbb{P}\restriction A_0$ nombres, y $\dot{f}^q_y, \dot{f}^r_z$ son $\mathbb{P}\restriction A_1$ nombres.
- $s^r_z \subseteq s^q_y \subseteq s^p_x$.
- $p\restriction(B \cap L_x) \Vdash_{\mathbb{P}\restriction A_0} \forall n \in \omega(\dot{f}^p_x(n) \geq \dot{f}^q_y(n))$, $q\restriction(B \cap L_y) \Vdash_{\mathbb{P}\restriction A_1} \forall n \in \omega(\dot{f}^q_y(n) \geq \dot{f}^r_z(n))$.

Si $A = A_0 \cup A_1 \in \mathcal{I}_x\restriction B$, como $x \notin A \subseteq B$ y $x \in B$, entonces $Dp(A) < \alpha$ y así podemos aplicar la hipótesis de inducción a A, A_0, A_1. Entonces tenemos:

- $dom(r) \subseteq dom(p)$.
- Como $\mathbb{P}\restriction A_i \subseteq \mathbb{P}\restriction A$ para $i = 0, 1$, entonces $p\restriction(B \cap L_x), r\restriction(B \cap L_x) \in \mathbb{P}\restriction A$.
- Como $\mathbb{P}\restriction A_i \lessdot \mathbb{P}\restriction A$ para $i = 0, 1$ y $\mathbb{P}\restriction A$ es transitivo, entonces $p\restriction(B \cap L_x) \leq_{\mathbb{P}\restriction A} r\restriction(B \cap L_x)$.
- Como $\mathbb{P}\restriction A_i \lessdot \mathbb{P}\restriction A$ para $i = 0, 1$, entonces $\dot{f}^p_x, \dot{f}^r_z$ son $\mathbb{P}\restriction A$ nombres.
- $s^r_z \subseteq s^p_x$.
- Como $\forall n \in \omega(\dot{f}^p_x(n) \geq \dot{f}^q_y(n))$ y $\forall n \in \omega(\dot{f}^q_y(n) \geq \dot{f}^r_z(n))$ son fórmulas Δ_0 y $\mathbb{P}\restriction A_i \lessdot \mathbb{P}\restriction A$ para $i = 0, 1$, entonces $p\restriction(B \cap L_x)$ fuerza ambas fórmulas en $\mathbb{P}\restriction A$ (ver Lema 29), y por tanto $p\restriction(B \cap L_x) \Vdash_{\mathbb{P}\restriction A} \forall n \in \omega(\dot{f}^p_x(n) \geq \dot{f}^r_z(n))$.

Por lo anterior A atestigua $p \leq_{\mathbb{P}\restriction B} r$. Ahora supongamos que $x > y \geq z$. Tome $A_0 \in \mathcal{I}_x\restriction B$ con $p\restriction(B \cap L_x), q \in \mathbb{P}\restriction A_0$ y $p\restriction(B \cap L_x) \leq_{\mathbb{P}\restriction A_0} q$. Tome $A_1 \in \mathcal{I}_y\restriction B$ atestiguando $q \leq_{\mathbb{P}\restriction B} r$. Sea $A = A_0 \cup A_1$. Como $A_1 \in \mathcal{I}_y\restriction A$, A_1 sirve de testigo también para $q \leq_{\mathbb{P}\restriction A} r$. Por la transitividad de $\mathbb{P}\restriction A$ se tiene $p\restriction(B \cap L_x) \leq_{\mathbb{P}\restriction A} r$, y así $p \leq_{\mathbb{P}\restriction B} r$. Para el caso $x \geq y > z$ procedemos de manera similar.

Ahora probemos que si $A \subseteq B$ entonces $\mathbb{P}\restriction A \subseteq \mathbb{P}\restriction B$. Si $r \in \mathbb{P}\restriction A$ y $x = max(dom(r))$, tome $\overline{A} \in \mathcal{I}_x\restriction B$ tal que:

- $r\restriction(A \cap L_x) \in \mathbb{P}\restriction\overline{A}$.
- $r(x) = (s^r_x, \dot{f}^r_x)$ donde $\dot{f}^r_x$ es un $\mathbb{P}\restriction\overline{A}$ nombre de un real y $r\restriction(A \cap L_x) \Vdash_{\mathbb{P}\restriction\overline{A}} s^r_x \subseteq \dot{f}^r_x$.

Como $\overline{A} \in \mathcal{I}_x\restriction B$, tome $C \in \mathcal{I}_x$ tal que $\overline{A} = C \cap A$. Sea $\overline{B} = B \cap C \in \mathcal{I}_x\restriction B$. Entonces $\overline{B} \cap A = C \cap A = \overline{A}$. Como $\overline{B} \in \mathcal{I}_x\restriction B$, $Dp(\overline{B}) < \alpha$. Luego, por la hipótesis de inducción $\mathbb{P}\restriction\overline{A} \subseteq \mathbb{P}\restriction\overline{B}$ y $\mathbb{P}\restriction\overline{A} \lessdot \mathbb{P}\restriction\overline{B}$. Además

- $r\restriction(B \cap L_x) \in \mathbb{P}\restriction\overline{A} \subseteq \mathbb{P}\restriction\overline{B}$.
- Como $\mathbb{P}\restriction\overline{A} \subseteq \mathbb{P}\restriction\overline{B}$ entonces $\dot{f}^r_x$ es un $\mathbb{P}\restriction\overline{B}$ nombre. Además, como $\mathbb{P}\restriction\overline{A} \lessdot \mathbb{P}\restriction\overline{B}$ y la fórmula $s^r_x \subseteq \dot{f}^r_x$ es Δ_0, entonces $r\restriction(A \cap L_x) \Vdash_{\mathbb{P}\restriction\overline{B}} s^r_x \subseteq \dot{f}^r_x$ (ver Lema 29).

Por lo anterior, $r \in \mathbb{P}\restriction B$.

Ahora definimos p_0 para un $p \in \mathbb{P}\restriction B$, con $x = max(dom(p))$. Tome $\overline{B} \in \mathcal{I}_x\restriction B$ tal que $\overline{p} = p\restriction(B \cap L_x) \in \mathbb{P}\restriction\overline{B}$, $\dot{f}_x^p$ es un $\mathbb{P}\restriction\overline{B}$ nombre y $p\restriction(B \cap L_x) \Vdash_{\mathbb{P}\restriction\overline{B}} s_x^p \subseteq \dot{f}_x^p$. Defina $\overline{A} = A \cap \overline{B} \in \mathcal{I}_x\restriction A$. Por hipótesis de inducción $\overline{p}$ tiene una reducción $(\overline{p}_0)_{\overline{A}}^{\overline{B}} \in \mathbb{P}\restriction\overline{A}$ (por simplicidad $\overline{p}_0$) satisfaciendo 1 y 2 del enunciado del teorema.

Si $x \notin A$, definimos $p_0 = \overline{p}_0$. Entonces $dom(p_0) = dom(\overline{p}_0) = dom(\overline{p}) \cap \overline{A} = dom(\overline{p}) \cap \overline{B} \cap A = dom(\overline{p}) \cap A = dom(p) \cap A$. Por tanto p_0 satisface 1. Además, si $y \in dom(p_0) = dom(\overline{p}_0)$ entonces $s_y^{p_0} = s_y^{\overline{p}_0} = s_y^{\overline{p}} = s_y^p$, pues $y \neq x$ ($dom(p_0) \subseteq A$). Así p_0 cumple 2.

Ahora supongamos que $x \in A$. Defina $dom(p_0) = dom(\overline{p}_0) \cup \{x\} = (dom(\overline{p}) \cap \overline{B} \cap A) \cup \{x\} = (dom(\overline{p}) \cap A) \cup \{x\} = (dom(\overline{p}) \cup \{x\}) \cap A = dom(p) \cap A$, así cumpliendo 1. Defina $p_0\restriction(A \cap L_x) = \overline{p}_0$ y $p_0(x) = (s_x^p, \dot{f}_x^{p_0})$, donde $\dot{f}_x^{p_0}$ es un $\mathbb{P}\restriction\overline{B}$-nombre que definiremos abajo. Obviamente p_0 también cumple 2.

Con esto se completa la prueba de la primera parte de la conjunción que deseamos demostrar.

Ahora probemos la segunda parte. Tome $B, D \in \mathcal{I}$, $C \subseteq D$ tal que $Dp(D) = \alpha$. Defina $A = B \cap C$ y sea $p \in \mathbb{P}\restriction B$.

Supongamos que $x = max(dom(p)) \notin A$ y p_0 se define como arriba (cuando $x \notin A$). Tome $q_0 \in \mathbb{P}\restriction C$ tal que $q_0 \leq_{\mathbb{P}\restriction C} p_0$. Construyamos $q \in \mathbb{P}\restriction D$ tal que $q \leq_{\mathbb{P}\restriction D} q_0, p$. Sea $\overline{q}_0 = q_0\restriction(C \cap L_x)$. Por el Lema 65, podemos tomar $E \in \mathcal{I}_x\restriction C$ con $\overline{q}_0, \overline{p}_0 \in \mathbb{P}\restriction E$ y $\overline{q}_0 \leq_{\mathbb{P}\restriction E} \overline{p}_0$ [2]. Definimos $\overline{C} = \overline{A} \cup E \in \mathcal{I}_x\restriction C$. Sea $F \in \mathcal{I}_x\restriction D$ tal que $\overline{C} = F \cap C$. Si definimos $\overline{D} = (D \cap (L \cup \overline{B})) \in \mathcal{I}_x\restriction D$, entonces $\overline{B}, \overline{C} \subseteq \overline{D}$, y por la hipótesis de inducción existe $\overline{q} \in \mathbb{P}\restriction\overline{D}$ tal que $\overline{q} \leq_{\mathbb{P}\restriction\overline{D}} \overline{q}_0, \overline{p}$. La definición de q está determinada por lo siguiente:

- $dom(q) = dom(\overline{q}) \cup \{x\} \cup dom(q_0)$.
- $q(y) = \overline{q}(y)$ si $y \in dom(\overline{q})$.
- $q(x) = p(x)$.
- $q(y) = q_0(y)$ si $y \in dom(q_0), y > x$.

De esta definición resulta que $q \in \mathbb{P}\restriction D$ y $q \leq_{\mathbb{P}\restriction D} q_0, p_0$. En efecto, $\overline{D}$ es testigo de la desigualdad para puntos menores a x. Para puntos superiores tomamos subconjuntos que contengan a $\overline{D}$ y a dichos puntos como testigos, hasta llegar al máximo de q. Con esto se prueba la segunda parte de la conjunción en el caso que $x \notin A$.

Ahora supongamos que $x = max(dom(p)) \in A$. Para la definición de p_0 aún resta definir el $\mathbb{P}\restriction A$-nombre $\dot{f}_x^{p_0}$. Para facilitar la definición de este nombre no trabajaremos con los ordenes $\mathbb{P}\restriction\overline{A}$ y $\mathbb{P}\restriction\overline{B}$, sino con sus respectivas algebras

[2] E no necesariamente está contenido en $\overline{A}$, lo cual evidencia la necesidad de introducir los conjuntos C y D en el teorema, pues si quisiéramos hacer una prueba directa, $\overline{A}$ podría no ser suficiente.

Booleanas completas (ver Lema 31) $\mathbb{B}_{\overline{A}}$ y $\mathbb{B}_{\overline{B}}$. Por la hipótesis de inducción $\mathbb{P}\restriction\overline{A} \lessdot \mathbb{P}\restriction\overline{B}$, y por tanto $\mathbb{B}_{\overline{A}} \lessdot \mathbb{B}_{\overline{B}}$ (ver Lema 32).

Para $s \in \omega^{<\omega}$, con $s_x^p \subseteq s$, definimos $b_s = [[s \subseteq \dot{f}_x^p]] \cdot \overline{p}$ (dentro de $\mathbb{B}_{\overline{B}}$). Tenemos que si $n > |s_x^p|$, $C_n = \{b_s : |s| = n\}$ es una anticadena maximal bajo $\overline{p}$ y así $\sum C_n = \overline{p}$. En efecto, si $d \leq \overline{p}$, como $\dot{f}_x^p$ es un nombre de un real, existe $s \in \omega^{<\omega}$ y un elemento e compatible a d tal que $e \Vdash_{\mathbb{B}_{\overline{B}}} s \subseteq \dot{f}_x^p$, y por lo tanto d y b_s son compatibles. Además, por definición, los elementos de $\{b_s : |s| = n\}$ son incompatibles. Defina $a_s^* = \overline{p}_0 \cdot \pi_{\overline{A}}(b_s)$ (ver Definición 35). Aunque se ve fácilmente que $\overline{p}_0 = \sum\{a_s^* : |s| = n\}$ con $n \geq |s_x^p|$ fijo (ver Lema 36), los elementos a_s^* no son disjuntos, y buscamos una anticadena maximal para definir un nombre adecuado. Ahora definimos los a_s (que van a disjuntar a los a_s^*) por inducción sobre $|s|$. Defina $a_{s_x^p} = \overline{p}_0$. Suponga que ha definido a_t para $|t| < |s|$, $|t| \geq |s_x^p|$. Definimos entonces $a_s = a_{s\restriction(n-1)} \cdot (a_s^* \setminus \sum_{j<s(n-1)} a^*_{s\restriction(n-1)\frown\langle j\rangle})$. Ahora mostremos que $\{a_s : |s| = n\}$, $n > |s_x^p|$, en una anticadena maximal bajo $\overline{p}_0$. En efecto, tenemos que si $|s| \geq |s_x^p|$, $a_s = \sum_{j\in\omega} a^*_{s\frown\langle j\rangle}$ (pues si $q \leq a_s$, y $k = min\{j : q \not\perp a^*_{s\frown\langle j\rangle}\}$, $q \not\perp a_{s\frown\langle k\rangle}$). Por tanto $\sum\{a_s : |s| = n\} = \sum\{a_s : |s| = n+1\}$. Desde que $\sum\{a_s : |s| = |s_x^p|\} = \overline{p}_0$, tenemos $\sum\{a_s : |s| = n\} = \overline{p}_0$. Por construcción, es claro que los elementos de $\{a_s : |s| = n\}$ son incompatibles. Ahora definimos el $\mathbb{P}\restriction\overline{A}$-nombre $\dot{f}_x^{p_0}$ de un real. En comienzo consideremos el $\mathbb{P}\restriction\overline{A}$-nombre $\overline{f}_x^{p_0} = \{(\check{s}, a_s) : |s| \geq |s_x^p|\}$. Defina $\dot{f}_x^{p_0}$ como un $\mathbb{P}\restriction\overline{A}$-nombre tal que $\Vdash_{\mathbb{P}\restriction\overline{A}} \dot{f}_x^{p_0} = \cup\overline{f}_x^{p_0}$. De esta manera $\overline{p}_0 \Vdash_{\mathbb{P}\restriction\overline{A}} \dot{f}_x^{p_0} \in \omega^\omega$. De la anterior definición también resulta que $a_s = [[s \subseteq \dot{f}_x^{p_0}]] \cdot \overline{p}_0$. En efecto, si $l \Vdash_{\mathbb{P}\restriction\overline{A}} s \subseteq \dot{f}_x^{p_0}$, $l \leq \overline{p}_0$, $l \not\perp a_{s'}$ y $|s| = |s'|$, entonces $s = s'$ y por tanto $l \leq a_s$. Por otro lado tenemos que $a'_s = \sum\{a_{s'} : s' \leq s, s_x^p \subseteq s, |s| = |s'| = m\} = [[\dot{f}_x^{p_0}\restriction m \leq s]] \cdot \overline{p}_0 = [[\dot{f}_x^{p_0}\restriction m \leq s]]$ y $b'_s = \sum\{b_{s'} : s' \leq s, s_x^p \subseteq s, |s| = |s'| = m\} = [[\dot{f}_x^p\restriction m \leq s]]$ (ver Lema 34). La propiedad más importante de estos elementos es que a'_s es reducción de b'_s de $\mathbb{B}_{\overline{B}}$ a $\mathbb{B}_{\overline{A}}$. Para verlo, tome $r \leq a'_s$. Por la definición de a'_s, sea s' tal que $r \leq a_{s'} \leq a^*_{s'} = \overline{p}_0 \cdot \pi_{\overline{A}}(b_{s'}) \leq \pi_{\overline{A}}(b_{s'})$. Entonces r es compatible con $b'_s \geq b_{s'}$.

Habiendo definido $\dot{f}_x^{p_0}$, seguimos con la segunda parte de la conjunción. Por el lema 65 tomemos $\overline{C} \in \mathcal{I}_x\restriction C$ con $\overline{q}_0 = q_0\restriction(C \cap L_x), \overline{p}_0 \in \mathbb{P}\restriction\overline{C}$, $\dot{f}_x^{q_0}$ es un $\mathbb{P}\restriction\overline{C}$ nombre, $\overline{q}_0 \leq_{\mathbb{P}\restriction\overline{C}} \overline{p}_0$, $s_x^{p_0} \subseteq s_x^{q_0}$, $\overline{q}_0 \Vdash_{\mathbb{P}\restriction\overline{C}} s_x^{q_0} \subseteq \dot{f}_x^{q_0}$, $\overline{q}_0 \Vdash_{\mathbb{P}\restriction\overline{C}} \dot{f}_x^{q_0} \geq \dot{f}_x^{p_0}$ y además $\overline{A} \subseteq \overline{C}$ (en este punto se vuelve a evidenciar la necesidad de C, D en el enunciado del teorema). Como $A = C \cap B$, $\overline{C} \subseteq C$ y $\overline{B} \subseteq B$, entonces $\overline{A} = \overline{C} \cap \overline{B}$. Tomemos ahora $\overline{D} \in \mathcal{I}_x\restriction D$ tal que $\overline{B}, \overline{C} \subseteq \overline{D}$. Entonces $Dp(\overline{D}) < \alpha$ y así podemos aplicar la hipótesis de inducción a $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \overline{D}$ cuando sea necesario.

Inductivamente podemos mostrar que el orden parcial $\mathbb{P}\restriction J$ es separativo para $J \subseteq L$. Además, si $F \subseteq G \in \mathcal{I}$, $a \in \mathbb{P}\restriction F$ es una reducción de $b \in \mathbb{P}\restriction G$ y $b \leq c$ con $c \in \mathbb{P}\restriction F$, entonces por definición de orden separativo $a \leq c$. Este hecho será usado algunas veces en lo que sigue.

Como $\overline{q}_0 \Vdash_{\mathbb{P}\restriction\overline{C}} s_x^{q_0} \subseteq \dot{f}_x^{q_0}$ y $\overline{q}_0 \Vdash_{\mathbb{P}\restriction\overline{C}} \dot{f}_x^{q_0} \geq \dot{f}_x^{p_0}$, entonces $\overline{q}_0 \Vdash_{\mathbb{P}\restriction\overline{C}} \dot{f}_x^{p_0}\restriction m \leq s_x^{q_0}$, donde $m = |s_x^{q_0}|$ Por tanto $\overline{q}_0 \leq_{\mathbb{P}\restriction\overline{C}} a = a'_{s_x^{q_0}}$ (ver Lema 31), y usando el hecho del párrafo de arriba entonces $\overline{q}_0^* = ((\overline{q}_0)_0)_{\overline{A}}^{\overline{B}} \leq_{\mathbb{P}\restriction\overline{A}} a$. Desde que a es una reducción de $b = b'_{s_x^{q_0}}$ de $\overline{B}$ a $\overline{A}$, existe $\overline{p}^+ \in \mathbb{P}\restriction\overline{A}$ tal que $\overline{p}^+ \leq_{\mathbb{P}\restriction\overline{A}} \overline{q}_0^*, b$. Defina $\overline{p}_0^+ = ((\overline{p}^+)_0)_{\overline{A}}^{\overline{B}}$. Entonces, por el mismo hecho del párrafo de arriba $\overline{p}_0^+ \leq_{\mathbb{P}\restriction\overline{A}} \overline{q}_0^*$.

Como $\overline{q}_0^* = ((\overline{q}_0)_0)_{\overline{A}}^{\overline{B}}$, entonces $\overline{p}_0^+$ y $\overline{q}_0$ tienen una extensión común $\overline{q}_0^+$ en $\mathbb{P}{\restriction}\overline{C}$. Usando la hipótesis de inducción aplicada a $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \overline{D}$ y $\overline{p}_0^+$, sea $\overline{q}^+ \in \mathbb{P}{\restriction}\overline{D}$ extensión común entre $\overline{p}^+$ y $\overline{q}_0^+$. La construcción se resume en el figura 3.2.1. Por último, la definición de q está determinada por lo siguiente:

- $dom(q) = dom(\overline{q}^+) \cup dom(q_0)$.
- $q(y) = \overline{q}^+(y)$ si $y \in dom(\overline{q}^+)$.
- $q(x) = (s_x^{q_0}, \dot{f}_x^q)$, donde $\dot{f}_x^q$ es un $\mathbb{P}{\restriction}\overline{D}$-nombre tal que $\overline{q}^+ \Vdash_{\mathbb{P}{\restriction}\overline{D}} \dot{f}_x^q = max\{\dot{f}_x^{q_0}, \dot{f}_x^p\}$.
- $q(y) = q_0(y)$ si $y \in dom(q_0), y > x$.

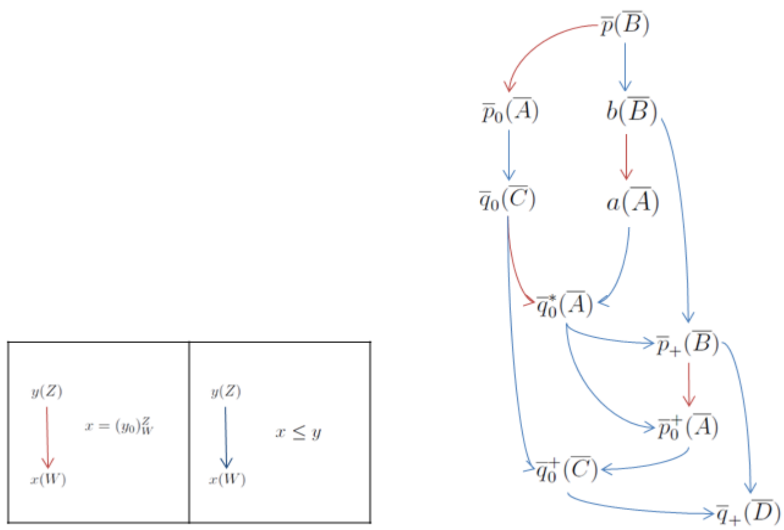

Figura 3.1: Esquema de reducciones

Desde que $\overline{q}^+ \leq_{\mathbb{P}{\restriction}\overline{D}} b$, entonces $\overline{q}^+ \Vdash_{\mathbb{P}{\restriction}\overline{D}} \dot{f}_x^p \leq s_x^{q_0}$, y de este modo $\overline{q}^+ \Vdash_{\mathbb{P}{\restriction}\overline{D}} s_x^{q_0} \subseteq \dot{f}_x^q$. El anterior es el punto clave de la construcción, para que la definición de $q(x)$ tenga sentido. Como en el caso en que $x \notin A$, $q \in \mathbb{P}{\restriction}D$ y $q \leq_{\mathbb{P}{\restriction}D} q_0, p_0$ siendo $\overline{D}$ testigo de la desigualdad para puntos menores a x. Para puntos superiores tomamos subconjuntos que contengan a $\overline{D}$ y a dichos puntos como testigos, hasta llegar al máximo de q. Con esto se prueba la segunda parte de la conjunción en el caso que $x \in A$, y también se termina la demostración del teorema.

■

El siguiente ejemplo da una idea explícita de la reducción de un elemento en la plantilla $(L, \mathcal{I}_{fin})$.

Ejemplo 67 *Consideremos la plantilla* $(L, \mathcal{I}_{fin})$*, donde* $\mathcal{I}_{fin} = \{s \subseteq L : |s| < \omega\} \cup \{L\}$*. Supongamos que tenemos dos elementos distintos* $a, b \in L$ *tal que* $a < b$*. El Teorema 66 afirma que* $\mathbb{P}{\restriction}\{b\} \lessdot \mathbb{P}{\restriction}\{a, b\}$*. En este caso* $\mathbb{P}{\restriction}\{a, b\}$ *contiene 4 clases de elementos:*

- *La función parcial* $\emptyset$*.*
- *Las funciones* $p = \{(a, (s_a^p, f_a^p))\}$*, donde* f_a^p *es* $\mathbb{P}{\restriction}\emptyset = \{\emptyset\}$*-nombre de un real (es decir, un* check *del real* f_a^p*, abusando de notación),* $s_a^p \in \omega^{<\omega}$ *y* $\emptyset \Vdash_{\mathbb{P}\restriction\emptyset} s_a^p \subseteq f_a^p$ *(o simplemente* $s_a^p \subseteq f_a^p$ *en el universo).*
- *Las funciones* $p = \{(b, (s_b^p, f_b^p))\}$*, que pueden ser similares a las anteriores (*f_b^p *es* $\mathbb{P}{\restriction}\emptyset$ *nombre), o donde* f_b^p *es* $\mathbb{P}{\restriction}\{a\}$*-nombre y* $\Vdash_{\mathbb{P}\restriction\{a\}} s_b^p \subseteq f_b^p$*.*
- *Por último las funciones* $p = \{(a, (s_a^p, f_a^p)), (b, (s_b^p, f_b^p))\}$*, donde* f_a^p *y* f_b^p *son ambos* $\mathbb{P}{\restriction}\emptyset$ *nombres, o donde* f_b^p *es* $\mathbb{P}{\restriction}\{a\}$ *nombre y* $(a, (s_a^p, f_a^p)) \Vdash_{\mathbb{P}\restriction\{a\}} s_b^p \subseteq f_b^p$*.*

Centremos nuestra atención en la función $p = \{(b, (s_b^p, f_b^p))\}$ *donde* f_b^p *es* $\mathbb{P}{\restriction}\{a\}$ *nombre y* $\Vdash_{\mathbb{P}\restriction\{a\}} s_b^p \subseteq f_b^p$*. Como* $\mathbb{P}{\restriction}\{b\} \lessdot \mathbb{P}{\restriction}\{a, b\}$*, debemos tener que* p *tiene una reducción* $\overline{p} \in \mathbb{P}{\restriction}\{b\}$*. Cuando hacemos una iteración de Hechler de soporte finito en un ordinal (es decir, forzamos sobre la plantilla* $(\alpha, \alpha + 1)$*) y queremos reducir un elemento* $q \in \mathbb{P}{\restriction}\xi$ *a* $\mathbb{P}{\restriction}\beta$ *para* $\beta < \xi < \alpha$*, simplemente tomamos la restricción* $q{\restriction}\beta$ *como una reducción canónica. Quisiéramos que la reducción de una función en una plantilla arbitraria fuese la restricción de la función al dominio más pequeño, pero en general esa restricción carece de sentido. En nuestro ejemplo, si restringimos* p *al dominio* $\{b\}$ *la función no se altera, pero quisiéramos que esta restricción estuviese en* $\mathbb{P}{\restriction}\{b\}$*. El problema es que entonces* f_a^p *debería ser un* $\mathbb{P}{\restriction}\emptyset$*-nombre, contrario a lo que estamos suponiendo. La manera canónica de buscar esta reducción es cambiar* f_b^p*, el cual es un* $\mathbb{P}{\restriction}\{a\}$*-nombre, por* $\overline{f_b^p}$*, el cual debe ser un* $\mathbb{P}{\restriction}\emptyset$*-nombre. Para ilustrar, tomemos* $f_b^p = \{((n, \check{k}_i^n), p_i^n) : i, n, k_i^n \in \omega\}$*, donde para cada* $n \in \omega$ *el conjunto* $C_n = \{p_i^n : i \in \omega\}$ *es una anticadena maximal en* $\mathbb{P}{\restriction}\{a\}$*. Construimos inductivamente elementos* $p_n, q_n \in \mathbb{P}{\restriction}\{a\}$ *tales que* $p_m \in C_m$ *para cada* $m \in \omega$*, y* $q_n \leq_{\mathbb{P}\restriction\{a\}} p_i$ *para* $i \leq n$ *y* $n > 0$*. Definamos* $p_0 = p_0^0$ *y sea* $p_1 \in C_1$ *tal que* $p_1 \not\perp p_0$*. Por definición, entonces tomemos* $q_1 \leq_{\mathbb{P}\restriction\{a\}} p_0, p_1$*. Supongamos que hemos definido* p_n, q_n *para* $n \leq k$*. Sea* $p_{k+1} \in C_{k+1}$ *tal que* $p_{k+1} \not\perp q_k$ *y* $q_{k+1} \leq_{\mathbb{P}\restriction\{a\}} p_{k+1}, q_k$ *(*p_{k+1} *existe por la maximalidad de* C_{k+1}*). Supongamos que* $k_n \in \omega$ *es tal que* $((n, \check{k}_n), p_n) \in f_b^p$ *para cada* $n \in \omega$*, y definamos* $\overline{f_b^p} = \{((n, \check{k}_n), \emptyset) : n \in \omega\}$*. Entonces tenemos que ver que* $\overline{p} = \{(b, (s_b^p, \overline{f_b^p}))\}$ *es una reducción de* p*. Tome* $r_0 = \{(b, (s_b^{r_0}, \check{f}_b^{r_0}))\} \in \mathbb{P}{\restriction}\{b\}$ *tal que* $r_0 \leq_{\mathbb{P}\restriction\{b\}} \overline{p}$ *(así* $\overline{f_b^p}(n) \leq f_b^{r_0}(n), \forall n \in \omega, s_b^{r_0} \subseteq f_b^{r_0}$ *y* $s_b^p \subseteq s_b^{r_0}$*). Queremos construir* $q \in \mathbb{P}{\restriction}\{a, b\}$ *tal que* $q \leq_{\mathbb{P}\restriction\{a,b\}} p, r_0$*. Para ello definimos como* f_b^q *un* $\mathbb{P}{\restriction}\{a\}$*-nombre tal que* $\Vdash_{\mathbb{P}\restriction\{a\}} f_b^q = max\{f_b^{r_0}, f_b^p\}$*. Tomamos* $s_b^q = s_b^{r_0}$*, y denotamos* $n = |s_b^{r_0}|$*. Por construcción, sabemos que si* $q(a) = q_n$*, entonces* $q(a) \leq_{\mathbb{P}\restriction\{a\}} p_0, \ldots, p_{n-1}$*. Como* $p_i \Vdash_{\mathbb{P}\restriction\{a\}} f_b^p(i) = k_i = \overline{f_b^p}(i), \forall i \in \{0, \ldots, n-1\}$*, entonces*

$q(a) \Vdash_{\mathbb{P}\restriction\{a\}} f_b^p\restriction n \leq s_b^{r_0}$. *De allí* $q(a) \Vdash_{\mathbb{P}\restriction\{a\}} s_b^q \subseteq f_b^q$, $q(a) \Vdash_{\mathbb{P}\restriction\{a\}} f_b^{r_0}, f_b^p \leq f_b^q$ *y además* $s_b^q = s_b^{r_0} \supseteq s_b^p$. *En consecuencia, si* $q = \{((a, q_n)), (b, (s_b^q, \check{f}_b^q))\}$ *entonces* $q \leq_{\mathbb{P}\restriction\{a,b\}} p, q_0$.

El siguiente resultado nos garantiza que una iteración de Hechler a lo largo de una plantilla preserva cardinales.

Teorema 68 *Sea* $(L, \mathcal{I})$ *una plantilla indexada y* $A \in \mathcal{I}$. *Entonces* $\mathbb{P}\restriction A$ *es ccc.*

Demostración. Probamos por inducción en la profundidad α de $\mathcal{I}$ que si $p, q \in \mathbb{P}\restriction A$, con $s_x^p = s_x^q$ para $x \in dom(p) \cap dom(q)$, entonces existe una extensión común r tal que $dom(r) = dom(p) \cup dom(q)$ y $s_x^r = s_x^p$ si $x \in dom(p)$, o $s_x^r = s_x^q$ si $x \in dom(q)$. Para $Dp(A) = 0$ no hay nada que mostrar. Suponga que la anterior propiedad se tiene para cada $B \in \mathcal{I}$ con $Dp(B) < \alpha$, para $\alpha > 0$. Sea $A \in \mathcal{I}$ con $Dp(A) = \alpha$ y tomemos $p, q \in \mathbb{P}\restriction A$ tal que $x = max(dom(p)) \leq max(dom(q)) = y$. Primero supongamos que $x < y$. Por el mismo argumento del lema 65 existe $B_1 \in \mathcal{I}_y\restriction A$ tal que $p \in \mathbb{P}\restriction B_1$. Por definición existe $B_2 \in \mathcal{I}_y\restriction A$ tal que $q\restriction L_y \in \mathbb{P}\restriction B_2$ y $\dot{f}_y^q$ es un $\mathbb{P}\restriction B_2$-nombre. Definamos $B = B_1 \cup B_2$. Aplicando la hipótesis de inducción, tomemos $r' \in \mathbb{P}\restriction B$ tal que $r' \leq_{\mathbb{P}\restriction B} q\restriction L_y, p$ y se cumple el resto del enunciado del teorema. Defina $r\restriction L_y = r'$ y $r(y) = q(y)$. B atestigua que $r \in \mathbb{P}\restriction A$ y $r \leq_{\mathbb{P}\restriction A} q, p$. Además s_z^r cumple la condición del enunciado del teorema para $z \in dom(r)$. Ahora supongamos que $x = y$. Por definición tomemos $B \in \mathcal{I}_x\restriction A$ tal que $q\restriction L_x, p\restriction L_x \in \mathbb{P}\restriction B$ y $\dot{f}_x^q, \dot{f}_x^q$ son $\mathbb{P}\restriction B_2$-nombres. Aplicando la hipótesis de inducción, tomemos $r' \in \mathbb{P}\restriction B$ tal que $r' \leq_{\mathbb{P}\restriction B} q\restriction L_x, p\restriction L_x$ y se cumple el resto del enunciado del teorema. Sea $\dot{f}_x^r$ un $\mathbb{P}\restriction B$-nombre tal que $\Vdash_{\mathbb{P}\restriction B}$ $\dot{f}_x^r = max\{\dot{f}_x^p, \dot{f}_x^q\}$. Defina $r\restriction L_x = r'$ y $r(x) = (s_x^p, \dot{f}_x^r)$. Entonces B atestigua que $r \in \mathbb{P}\restriction A$ y $r \leq_{\mathbb{P}\restriction A} q, p$. Además s_z^r cumple la condición del enunciado del teorema para $z \in dom(r)$. Ahora mostremos que $\mathbb{P}\restriction A$ tiene *ccc*. Sea $K \subseteq \mathbb{P}\restriction A$ no contable. Apliquemos el lema del delta sistema a $X = \{dom(p) : p \in K\}$. Sea $X' \subseteq X$ un delta sistema no contable con raíz $R = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Tomemos $s_{x_1}, \ldots, s_{x_n} \in \omega^{<\omega}$ tal que $K' = \{p \in K : \forall x \in R(s_x^p = s_x)\}$ es no contable, el cual existe porque $(\omega^{<\omega})^n$ es contable y K no lo es. Entonces, aplicando la afirmación del comienzo de la prueba, tenemos que $p_1, p_2 \in K'$ si $p_1 \not\perp p_2$. ■

El siguiente resultado muestra que un objeto "pequeño", como un real, se añade en un paso intermedio en una plantilla lo suficientemente grande.

Teorema 69 *Sea* $(L, \mathcal{I})$ *una plantilla indexada,* $\dot{f}$ *es un* $\mathbb{P}\restriction L$*-nombre de un real y* $p \in \mathbb{P}\restriction L$. *Entonces tenemos:*

- *Existe* $A_1 \subseteq L$ *contable tal que* $\dot{f}$ *es un* $\mathbb{P}\restriction A_1$*-nombre de un real.*
- *Existe* $A_2 \subseteq L$ *contable tal que* $p \in \mathbb{P}\restriction A_2$.

Demostración. Probamos la conjunción de los dos enunciados establecidos en el teorema por inducción en $Dp(A)$ para $A \in \mathcal{I}$. Si $Dp(A) = 0$ no hay nada que probar. Suponga que $A \in \mathcal{I}$ con $Dp(A) > 0$ y que el teorema vale para $B \in \mathcal{I}$ con $Dp(B) < Dp(A)$.

Sea $p \in \mathbb{P}\upharpoonright A$ con $x = max(dom(p))$. Por definición, tomemos $B \in \mathcal{I}_x$ tal que $p\upharpoonright L_x \in \mathbb{P}\upharpoonright B$ y $\dot{f}^p_x$ es un $\mathbb{P}\upharpoonright B$-nombre. Como $Dp(B) < Dp(A)$, aplicando la hipótesis de inducción a $p\upharpoonright L_x$ y $\dot{f}^p_x$, consideremos $A_0 \subseteq B$ contable tal que $p\upharpoonright L_x \in \mathbb{P}\upharpoonright A_0$ y $\dot{f}^p_x$ es un $\mathbb{P}\upharpoonright A_0$-nombre. En consecuencia $p \in \mathbb{P}\upharpoonright(A_0 \cup \{x\})$ y $A_0 \cup \{x\}$ es contable.

Ahora sea $\dot{f}$ un $\mathbb{P}\upharpoonright A$-nombre. Supongamos que $\dot{f}$ es un buen nombre determinado por anticadenas maximales $\{p_{n,i} : n, i \in \omega\} \subseteq \mathbb{P}\upharpoonright A$, para $n \in \omega$, y naturales $\{k_{n,i} : n, i \in \omega\}$. Hemos visto que para cada $p_{n,i} \in \mathbb{P}\upharpoonright A$ existe $A_{n,i} \subseteq A$ contable tal que $p_{n,i} \in \mathbb{P}\upharpoonright A_{n,i}$. Si definimos $C = \bigcup_{n,i\in\omega} A_{n,i}$, entonces obtenemos que C es contable y $\dot{f}$ es un $\mathbb{P}\upharpoonright C$-nombre. ■

En la siguiente sección vamos a construir una cadena de plantillas e iteraremos sobre ellas. Queremos añadir una μ-escala en la primera plantilla y luego preservarla en los siguientes pasos. A continuación presentamos las propiedades que nos permitirán preservar dicha escala. El siguiente resultado asegura que se están añadiendo reales de Hechler en cada paso de la extensión (ver[1, Corolario 1.5]).

Teorema 70 *Sea $(L, \mathcal{I})$ una plantilla indexada y $A \in \mathcal{I}_x$. Entonces $\mathbb{P}\upharpoonright A * \mathbb{D}_x \cong \mathbb{P}\upharpoonright(A \cup \{x\})$.*

En el teorema anterior es indispensable que $A \in \mathcal{I}_x$. Por ejemplo, tomemos la plantilla $(L, \mathcal{I}_{fin})$ donde $L = \{m \in \mathbb{Z} : m \leq 0\}$. Para $n \in L$, tenemos que $L_n \notin \mathcal{I}_n$ y además no podemos tener que $\mathbb{P}\upharpoonright L_n * \mathbb{D}_n \cong \mathbb{P}\upharpoonright(L_n \cup \{n\})$. En efecto, si tuviéramos este isomorfismo para un n, podríamos inducir $\mathbb{P}\upharpoonright L_m * \mathbb{D}_m \cong \mathbb{P}\upharpoonright(L_m \cup \{m\})$ para cualquier otro $m \in L$. En consecuencia los modelos $\{M^{\mathbb{P}\upharpoonright(L_m\cup\{m\})}\}_{m\in L}$ formarían una cadena decreciente, y además cada real f_m añadido por $\mathbb{D}_m$ estaría en $M^{\mathbb{P}\upharpoonright(L_m\cup\{m\})}$ y dominaría a los reales de $M^{\mathbb{P}\upharpoonright L_m}$. Lo anterior contradice el Teorema 59.

El siguiente resultado provee una condición suficiente para que una plantilla añada una μ-escala. En la sección anterior habíamos establecido esta condición en caso de que la plantilla fuese un ordinal.

Teorema 71 *Sea $(L, \mathcal{I})$ una plantilla indexada. Suponga que $\mu \subseteq L$ es un cardinal regular no contable y cofinal en L. Si además $L_\alpha \in \mathcal{I}_\alpha$ para cada $\alpha \in \mu$, entonces $\Vdash_{\mathbb{P}\upharpoonright L} \mu = \mathfrak{d} = \mathfrak{b}$.*

Demostración. Si $\alpha < \mu$ podemos tomar el $\mathbb{P}\upharpoonright L_\alpha$-nombre $\dot{f}_\alpha$ del real añadido por $\mathbb{D}_\alpha \in M^{\mathbb{P}\upharpoonright L_\alpha}$, el cual domina los reales de $M^{\mathbb{P}\upharpoonright L_\alpha}$. Ahora, si $\dot{g}$ es un $\mathbb{P}\upharpoonright L$-nombre de un real, usando el Teorema 69 existe $\beta < \mu$ tal que $\dot{g} \in M^{\mathbb{P}\upharpoonright L_\beta}$. En consecuencia $\Vdash_{\mathbb{P}\upharpoonright L_\beta}$ "$\dot{f}_\alpha \leq^* \dot{g}$" (ver Teorema 20), y así $\Vdash_{\mathbb{P}\upharpoonright L}$ "$\{\dot{f}_\alpha\}_{\alpha<\mu}$ es un $\mu -$ escala". ■

3.2.2. Modificaciones y cadenas de plantillas

Para la construcción que llevaremos a cabo al final de esta sección necesitaremos que las plantillas involucradas contengan ciertos conjuntos que en comienzo no poseen. Abajo damos una condición suficiente para agregar conjuntos a la componente $\mathcal{I}$ de una plantilla $(L,\mathcal{I})$ sin alterar la extensión producida por el orden $\mathbb{P}{\restriction}L$ (ver [1, Lema 1.7]).

Definición 72 *Sean $(L,\mathcal{I}),(L,\mathcal{I}')$ plantillas indexadas sobre un mismo orden. Decimos que $\mathcal{I}'$ es una* extensión inofensiva *de $\mathcal{I}$ si:*

- *$\mathcal{I}_x \subseteq \mathcal{I}'_x$, $\forall x \in L$.*
- *Si $x \in L$, $A \subseteq L$ es contable y $A \subseteq B \in \mathcal{I}'_x$, entonces existe $C \in \mathcal{I}_x$ tal que $A \subseteq C$.*

La extensión es fuertemente inofensiva *si arriba tenemos $A \subseteq C \subseteq B$.*

Teorema 73 *Sean $(L,\mathcal{I}),(L,\mathcal{I}')$ plantillas indexadas tal que $\mathcal{I}'$ es una extensión inofensiva de $\mathcal{I}$. Entonces $\mathbb{P}{\restriction}(L,\mathcal{I}') \equiv \mathbb{P}{\restriction}(L,\mathcal{I})$ (son forcing equivalentes).*

Sean $(L,\mathcal{I})$, $(L',\mathcal{I}')$ plantillas indexadas tal que $L \subseteq L'$ e $\mathcal{I}_x \subseteq \mathcal{I}'_x{\restriction}L$ para cada $x \in L$. Decimos que $(L',\mathcal{I}')$ es una extensión (fuertemente) inofensiva de $(L,\mathcal{I})$ si $\mathcal{I}'{\restriction}L$ es una extensión (fuertemente) inofensiva de $\mathcal{I}$. Por los Teoremas 66 y 73 tenemos que si $(L',\mathcal{I}')$ es una extensión inofensiva de $(L,\mathcal{I})$ entonces $\mathbb{P}{\restriction}(L,\mathcal{I}) \lessdot \mathbb{P}{\restriction}(L',\mathcal{I}')$.

Ejemplo 74 *Para κ medible y una plantilla indexada $(L,\mathcal{I})$ consideremos la plantilla ultrapotencia $(L^*,\mathcal{I}^*)$ (ver ejemplo 61). Veamos que $\mathcal{I}^*{\restriction}L$ es una extensión fuertemente inofensiva de $\mathcal{I}$. Para $x \in L$ tomemos $B \in \mathcal{I}^*_x{\restriction}L$ y $A \subseteq B$ contable. Por definición existe $[F] \in \mathcal{I}^*_x$ tal que $B = [F] \cap L$. En consecuencia, si $z \in A \subseteq [F]$ entonces $\{\alpha < \kappa : z \in F(\alpha)\} \in \mathcal{D}$ (ver ejemplo 61). Por la completitud contable de $\mathcal{D}$ tenemos $X = \bigcap_{z \in A}\{\alpha < \kappa : z \in F(\alpha) \in \mathcal{I}_x\} \in \mathcal{D}$. Tomemos $C = \bigcap\{F(\alpha) : \alpha \in X\}$. Por un lado, como $\{F(\alpha) : \alpha \in X\} \subseteq \mathcal{I}_x$ deben existir $\beta_1 \ldots, \beta_n \in X$ tales que $C = \bigcap_{i=1}^n F(\beta_i) \in \mathcal{I}_x$. De lo contrario podemos construir una cadena descendente en $\mathcal{I}$. Por otro lado $A \subseteq C \subseteq B$. En efecto, si $z \in A$ y $\alpha \in X$, por definición $z \in F(\alpha)$ y así $z \in C$. Ahora sea $y \in C \subseteq L_x$. Como $X \subseteq \{\alpha < \kappa : y \in F(\alpha)\}$ y $X \in \mathcal{D}$ entonces $y \in [F]$, por lo cual $y \in B = [F] \cap L$.*

Cuando tengamos ciertas cadenas de plantillas queremos tomar su unión y que esta siga siendo una plantilla. Más precisamente, dada una plantilla $(L,\mathcal{I})$ y cualquier $L' \subseteq L$, no necesariamente tenemos que $\mathcal{I}{\restriction}L' \subseteq \mathcal{I}$. Lo que haremos en primer lugar es añadir los conjuntos necesarios a $\mathcal{I}$ para formar una plantilla $\mathcal{I}(L')$ tal que $\mathcal{I}(L'){\restriction}L' \subseteq \mathcal{I}(L')$ (ver [1, Lema 1.3]).

Definición 75 *Sea $(L,\mathcal{I})$ una plantilla indexada y $L' \subseteq L$. Definimos para cada $x \in L$, $\mathcal{I}(L')_x = \{A \cup B : A \in \mathcal{I}_x, B \in \mathcal{I}_x{\restriction}L'\}$.*

Teorema 76 *Si $(L,\mathcal{I})$ es una plantilla indexada y $L' \subseteq L$, entonces $(L,\mathcal{I}(L'))$ es una plantilla indexada e $\mathcal{I}(L')$ es una extensión inofensiva de $\mathcal{I}$.*

Por la definición es fácil ver que efectivamente $\mathcal{I}(L')_x{\restriction}L' \subseteq \mathcal{I}(L')_x$ para cada $x \in L'$.

Ejemplo 77 *Sea $(L,\mathcal{I})$ una plantilla indexada. Notemos que $\mathcal{I}_x \subseteq \mathcal{I}^*_x{\restriction}L$ (identificando los elementos de L con las funciones constantes). Sin embargo en general $\mathcal{I}_x \nsubseteq \mathcal{I}^*_x$. Por ejemplo, si consideramos la plantilla $(\mu,\mu{+}1) = (L,\mathcal{I})$ tenemos $\kappa+1 \in \mathcal{I}_{\kappa+1}$, pero $j[\kappa+1]$ (la imagen directa de j) no es un ordinal de μ^* porque si $\kappa \leq \alpha < j(\kappa)$ entonces $\alpha \notin j[\kappa+1]$. No obstante $\mathcal{I}_x \subseteq \mathcal{I}^*_x{\restriction}L \subseteq \mathcal{I}^*(L)_x$ y $\mathbb{P}{\restriction}(L,\mathcal{I}) \lessdot \mathbb{P}{\restriction}(L^*,\mathcal{I}^*) \equiv \mathbb{P}{\restriction}(L^*,\mathcal{I}^*(L))$.*

En las plantillas que usemos, queremos añadir cofinalmente reales de Hechler. Para ello, si $\mu \subseteq L$, quisiéramos incluir en la plantilla $(L,\mathcal{I}(+\mu))$ (la cual definiremos a continuación) los conjuntos L_α, $\alpha \in \mu$. La siguiente operación nos garantiza que podemos hacerlo sin dañar la buena fundamentación (ver [1, Lema 1.4]).

Definición 78 *Sea $(L,\mathcal{I})$ una plantilla indexada y $\mu \subseteq L$. Definimos para cada $x \in L$, $\mathcal{I}(+\mu)_x = \{A \cup L_\alpha : A \in \mathcal{I}_x, \alpha \leq x, \alpha \in \mu\}$.*

Teorema 79 *Sea $(L,\mathcal{I})$ una plantilla indexada y $\mu \subseteq L$. Supongamos que para cada $x \in L$ y $\alpha \in \mu$ con $\alpha \leq x$ tenemos que si $A \in \mathcal{I}_x$ entonces $A \cap L_\alpha \in \mathcal{I}_x$. Entonces $(L,\mathcal{I}(+\mu))$ es una plantilla indexada.*

Note que en este caso no hay una extensión inofensiva. Tome como ejemplo $(L,\mathcal{I}_{fin})$ (no podemos cubrir conjuntos infinitos con elementos de $\mathcal{I}_{fin}$).

Hemos visto que iterar el forcing de Hechler en una plantilla se puede ver como una iteración (hacia arriba). Quisiéramos a partir de varias plantillas, como por ejemplo la cadena de plantillas $\{(\mu^n,\mu^n+1)\}_{n\in\omega}$ donde $\mu^0 = \mu$ y $\mu^{n+1} = (\mu^n)^*$, hacer una iteración "horizontal". El próximo teorema nos dice que es suficiente tomar la unión de las plantillas en los pasos límites para ciertas cadenas.

Definición 80 *Sea γ un ordinal límite y $\{(L^\alpha,\mathcal{I}^\alpha)\}_{\alpha<\gamma}$ una familia de plantillas indexadas. A $\{(L^\alpha,\mathcal{I}^\alpha)\}_{\alpha<\gamma}$ le llamamos una cadena fuerte si para $\alpha < \beta < \gamma$ tenemos que $\mathcal{I}^\alpha_x \subseteq \mathcal{I}^\beta_x$ para cada $x \in L^\alpha$ y $(L^\beta,\mathcal{I}^\beta)$ es extensión fuertemente inofensiva de $(L^\alpha,\mathcal{I}^\alpha)$.*

Teorema 81 *Sea $\{(L^\alpha,\mathcal{I}^\alpha)\}_{\alpha<\gamma}$ una cadena fuerte. Entonces tenemos:*

1. *Sean $L^\gamma = \bigcup_{\alpha<\gamma} L^\alpha$ e $\mathcal{I}^\gamma_x = \bigcup_{\alpha<\gamma} \mathcal{I}^\alpha_x$ para cada $x \in L^\gamma$. Entonces $(L^\gamma,\mathcal{I}^\gamma)$ es extensión fuertemente inofensiva de $(L^\alpha,\mathcal{I}^\alpha)$ para cada $\alpha < \gamma$.*

2. *Además supongamos que $\mu \subseteq L^0$ es tal que $L^\alpha_\beta \in \mathcal{I}^\alpha_\beta$ para cada $\alpha < \gamma$ y $\beta < \mu$. Entonces $(L^\gamma,\mathcal{I}^\gamma(+\mu))$ es extensión fuertemente inofensiva de $(L^\alpha,\mathcal{I}^\alpha)$ para cada $\alpha < \gamma$.*

Demostración.

1. Pedimos $\mathcal{I}^\alpha_x \subseteq \mathcal{I}^\beta_x$ para cada $x \in L^\alpha$ en la definición de cadena fuerte para que $\mathcal{I}^\gamma_x = \bigcup_{\alpha<\gamma} \mathcal{I}^\gamma_x$ sea cerrado bajo uniones e intersecciones si

$x \in L^\gamma$. Las otras propiedades son fáciles de ver, excepto la buena fundamentación. Para verificar esta propiedad, por contradicción, supongamos que $\{B_n\}_{n\in\omega} \subseteq \mathcal{I}^\gamma$ es tal que $B_{k+1} \subsetneq B_k$. Tomemos $x_k \in B_k \backslash B_{k+1}$ y sea $\alpha(k) < \gamma$ tal que $B_k \in \mathcal{I}^{\alpha(k)}$ para cada $k \in \omega$. Sea $\alpha(k_0) = min\{\alpha(k) : k \in \omega\}$. Además, para $k > k_0$ tenemos $B_k \subsetneq B_{k_0} \subseteq L^{\alpha(k_0)}$ y así $B_k \in \mathcal{I}^{\alpha(k)} \restriction L^{\alpha(k_0)}$. Ahora definamos $A_k = \{x_n : n \geq k\}$. Entonces $A_k \subseteq B_k$ y A_k es contable. Como $\mathcal{I}^{\alpha(k)} \restriction L^{\alpha(k_0)}$ es extensión fuertemente inofensiva de $\mathcal{I}^{\alpha(k_0)}$, existe $C_k \in \mathcal{I}^{\alpha(k_0)}$ tal que $A_k \subseteq C_k \subseteq B_k$, para $k > k_0$. Tomemos $D_k = \bigcap_{k_0<n\leq k} C_n \in \mathcal{I}^{\alpha(k_0)}$. Por tanto, para $k_0 < n \leq k$ tenemos $x_k \in A_n \subseteq C_n$, y así $x_k \in D_k = \bigcap_{k_0<n\leq k} C_n$. Sin embargo $x_k \notin B_{k+1}$, y desde que $C_{k+1} \subseteq B_{k+1}$, entonces obtenemos $x_k \notin C_{k+1}$ y así $x_k \notin D_{k+1} \subseteq C_{k+1}$.

En consecuencia $D_{k+1} \subsetneq D_k$ y $\{D_k\}_{k>k_0} \subseteq \mathcal{I}^{\alpha(k_0)}$, contradiciendo la buena fundamentación de $\mathcal{I}^{\alpha(k_0)}$.

2. Es suficiente ver que se satisfacen las hipótesis del teorema 79. En efecto, tomemos $x \in L^\gamma$, $\alpha < \mu$ con $\alpha \leq x$ y $A \in \mathcal{I}^\gamma_x$. Como $\mathcal{I}^\gamma_x = \bigcup_{\alpha<\gamma} \mathcal{I}^\alpha_x$, tomemos $\theta < \gamma$ tal que $A \in \mathcal{I}^\theta_x$. Por hipótesis $L^\theta_\alpha \in \mathcal{I}^\theta_\alpha \subseteq \mathcal{I}^\theta_x$, luego $L^\theta_\alpha \cap A \in \mathcal{I}^\theta_x$. Como $A \in \mathcal{I}^\theta_x$ entonces $A \subseteq L^\theta_x$, y además $L^\gamma_\alpha \cap L^\theta_x = L^\theta_\alpha$. En consecuencia $A \cap L^\gamma_\alpha = A \cap L^\theta_x \cap L^\gamma_\alpha = A \cap L^\theta_\alpha \in \mathcal{I}^\theta_x \subseteq \mathcal{I}^\gamma_x$, como queríamos probar. Además, en esta construcción tenemos que $(\mathcal{I}^\gamma)^{+\mu}$ es una extensión inofensiva de $\mathcal{I}^\gamma$. En efecto, tomemos $B \subseteq A \cup L^\gamma_\alpha$, con $A \in \mathcal{I}^\gamma_\alpha$, $\alpha \leq x$, $\alpha < \mu$ y B contable. Entonces $B \backslash A \subseteq L^\theta_\alpha \in \mathcal{I}^\theta_\alpha \subseteq \mathcal{I}^\theta_x$ para algún $\theta < \gamma$. Sea $\theta' < \gamma$ tal que $A \in \mathcal{I}^{\theta'}_\alpha$ y tomemos $\eta = max\{\theta, \theta'\}$. Entonces $A \cup L^\theta_\alpha \in \mathcal{I}^\eta_x \subseteq \mathcal{I}^\gamma_x$ y $B \subseteq A \cup L^\theta_\alpha \subseteq A \cup L^\gamma_\alpha$.

■

La cadena $\{(\mu^n, \mu^n + 1)\}_{n\in\omega}$ no es una cadena fuerte porque falla en cumplir la condición $\mu^n_\beta \subseteq \mu^{n+1}_\beta$ (ver ejemplo 77). Note que si queremos definir L^ω para esta cadena tenemos que tomar realmente un límite directo de los ordenes μ_n y no la unión normal. Aunque esto no representa un problema, tenemos que $\mathcal{I}^\omega$ definido como la unión de las plantillas anteriores no satisface el axioma de ser cerrado bajo uniones. En efecto, sea j_n la inyección de μ_n en L^ω dada por el límite directo. Tenemos $L^0_{j_0(\kappa)+1}, L^1_{j_1(\kappa)+1} \in \mathcal{I}^\omega_{j_0(\kappa)+1}$. Sin embargo $L^0_{j_0(\kappa)+1} \cup L^1_{j_1(\kappa)+1} \notin \mathcal{I}^\omega_{j_0(\kappa)+1}$. Por lo tanto, si queremos aplicar el Teorema 81 a $\{(\mu^n, \mu^n + 1)\}_{n\in\omega}$ debemos modificar las plantillas un "poco". Esta modificación justifica la operación de la Definición 75 (ver también Ejemplo 77).

Finalmente hemos desarrollado la maquinaria para probar la consistencia de $\mathfrak{d} < \mathfrak{a}$ bajo la existencia de un cardinal medible.

Teorema 82 *Supongamos que κ es medible y $\lambda > \mu > \kappa$ son cardinales regulares tales que $\lambda = \lambda^\omega$ y $\theta^\kappa < \lambda$ para cada $\theta < \lambda$. Entonces existe una extensión genérica que satisface $\mu = \mathfrak{d} = \mathfrak{b} < \mathfrak{a} = \mathfrak{c} = \lambda$.*

Demostración. Definimos recursivamente la siguiente cadena de plantillas:

- $L^0 = \mu$, $\mathcal{I}^0 = (\mu + 1)$.

- $L^{\alpha+1} = (L^\alpha)^*$, $\mathcal{I}^{\alpha+1} = (\mathcal{I}^\alpha)^*(L^\alpha)$, $\alpha < \lambda$.
- Si hemos definido la familia $\{(L^\alpha, \mathcal{I}^\alpha)\}_{\alpha<\theta}$, para $\theta \leq \lambda$ ordinal límite. Tomemos $L^\theta = \bigcup_{\alpha<\theta} L^\alpha$, $\mathcal{J}^\theta = \bigcup_{\alpha<\theta} \mathcal{I}^\alpha$ y definamos $\mathcal{I}^\theta = \mathcal{J}^\theta(+\mu)$.

Por el Ejemplo 74 y los Teoremas 76 y 81, podemos mostrar inductivamente que $\{(L^\alpha, \mathcal{I}^\alpha)\}_{\alpha<\beta}$ es una cadena fuerte para $\beta \leq \theta$.

Denotemos al orden $\mathbb{P}\restriction L^\alpha$ como $\mathbb{P}_\alpha$ para $\alpha \leq \lambda$ y a $\mathbb{P}\restriction L^\lambda_\alpha$ como $\mathbb{P}^\alpha$ para $\alpha < \mu$. Veamos entonces que $\Vdash_{\mathbb{P}_\lambda} \mathfrak{b} = \mathfrak{d} = \mu, \mathfrak{a} = \mathfrak{c} = \lambda$. Como μ sigue siendo cofinal en L^λ, por el Teorema 71 tenemos que $\Vdash_{\mathbb{P}_\lambda} \mu = \mathfrak{d} = \mathfrak{b}$. Aún más, la μ-escala añadida por $\mathbb{P}_0$ sigue siendo μ-escala en $M^{\mathbb{P}_\lambda}$ (ver comentario abajo de esta prueba).

Sea G un filtro $\mathbb{P}_\lambda$-genérico sobre M y definamos $M_\alpha = M[G\cap\mathbb{P}_\alpha]$ para $\alpha < \lambda$ y $M^\beta = M[G\cap\mathbb{P}^\beta]$ para $\beta < \mu$. Por inducción se puede mostrar que $(2^\omega)^{M^\beta} \leq \lambda$ si $\beta \leq \mu$ (ver prueba del Teorema 52). Para ello usamos el hecho de que $|L^\alpha| < \lambda$ para cada $\alpha < \lambda$, lo cual implica que $|L^\lambda| = \lambda$. Este último hecho se prueba inductivamente. En lo pasos límite se tiene trivialmente por la regularidad de λ ($L^\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} L^\beta$). En los pasos sucesores tenemos que $|L^{\alpha+1}| \leq |L^\alpha|^\kappa < \lambda$, pues $\alpha^\kappa < \lambda$ para $\alpha < \lambda$.

Ahora tomemos en M_λ una familia casi disjunta $\mathcal{A}$ con $\kappa < \mu \leq |\mathcal{A}| < \lambda$. Sea $\dot{s}$ un $\mathbb{P}_\lambda$-nombre para cada $s \in \mathcal{A}$. Por el Teorema 69 para cada $s \in \mathcal{A}$ existe un conjunto contable $A_s \subseteq L^\lambda$ tal que $\dot{s}$ es un $\mathbb{P}\restriction A_s$-nombre. Como $L^\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} L^\alpha$ y λ es regular, para cada $s \in \mathcal{A}$ existe $\alpha(s) < \lambda$ tal que $A_s \subseteq L^{\alpha(s)}$. Además $|\{\alpha(s) : s \in \mathcal{A}\}| < \lambda$, luego por la regularidad de λ podemos tomar $\beta < \lambda$ tal que $\alpha(s) < \beta$ para cada $s \in \mathcal{A}$ y así $\bigcup_{s\in\mathcal{A}} A_s \subseteq L^\beta$. En consecuencia $\mathcal{A} \in M_\beta$ y $\mathcal{A}$ no puede ser maximal en $M_{\beta+1}$. Por tanto $\mathcal{A}$ tampoco es maximal en M_λ (pues $M_{\beta+1} \subseteq M_\lambda$). Esto último se debe a que $\mathcal{A}$ no es mad en $M^{\mathbb{P}^\kappa_\beta/\mathcal{D}}$ (ver Teorema 22) y además $\mathbb{P}^\kappa_\beta/\mathcal{D} = (\mathbb{P}\restriction(L^\beta, \mathcal{I}^\beta))^\kappa/\mathcal{D} \equiv \mathbb{P}\restriction((L^\beta)^*, (\mathcal{I}^\beta)^*)) \equiv \mathbb{P}_{\beta+1}$ (ver Teorema 64). En consecuencia $M_\lambda \models \mathfrak{c} = \mathfrak{a} = \lambda$. ■

Analicemos un poco lo que ocurre en los primeros ω pasos de la construcción anterior. En $M^{\mathbb{P}_0}$ hemos añadido una μ-escala $\{f_\alpha\}_{\alpha<\mu}$. Veamos que $\{f_\alpha\}_{\alpha<\mu}$ sigue siendo una μ-escala en $M^{\mathbb{P}_\omega}$. Sea G un filtro $\mathbb{P}_\omega$-genérico sobre M. Si $\mathbb{D}^0_\alpha$ es el forcing de Hechler de $M[G \cap (\mathbb{P}_0\restriction\alpha)]$ entonces $\mathbb{P}_0\restriction\alpha * \mathbb{D}^0_\alpha \cong \mathbb{P}_0\restriction(\alpha+1)$ y $G_0(\alpha) = \{(s, \dot{f}_{G\cap(\mathbb{P}_0\restriction\alpha)}) :$ Existe $p \in G\cap(\mathbb{P}_0\restriction(\alpha+1))$ tal que $p(\alpha) = (s, \dot{f})\}$ es un filtro $\mathbb{D}^0_\alpha$-genérico sobre $M[G \cap (\mathbb{P}_0\restriction\alpha)]$ (ver Teorema 41). Definimos $f_\alpha = \bigcup dom(G_0(\alpha))$. Tenemos entonces que $\{f_\alpha\}_{\alpha<\mu}$ es una μ-escala en $M[G \cap \mathbb{P}_0]$. Por otro lado, Si $\mathbb{D}^\omega_\alpha$ es el forcing de Hechler de $M[G \cap (\mathbb{P}_\omega\restriction L^\omega_\alpha)]$ entonces $\mathbb{P}_\omega\restriction(L^\omega_\alpha) * \mathbb{D}^\omega_\alpha \cong \mathbb{P}_\omega\restriction(L^\omega_\alpha \cup \{\alpha\})$ y $\mathbb{P}_\omega\restriction(L^\omega_\alpha \cup \{\alpha\}) \lessdot \mathbb{P}_\omega$ (ver Teoremas 70 y 66). Además $G_\omega(\alpha) = \{(s, \dot{f}_{G\cap(\mathbb{P}_\omega\restriction L^\omega_\alpha)}) :$ Existe $p \in G \cap (\mathbb{P}_\omega\restriction(L^\omega_\alpha \cup \{\alpha\}))$ tal que $p(\alpha) = (s, \dot{f})\}$ es un filtro $\mathbb{D}^\omega_\alpha$-genérico sobre $M[G\cap(G\cap(\mathbb{P}_\omega\restriction L^\omega_\alpha))]$. Definimos $f'_\alpha = \bigcup dom(G_\omega(\alpha))$. Tenemos entonces también que $\{f'_\alpha\}_{\alpha<\mu}$ es una μ-escala en $M[G]$. Para $n \in \omega$ tomemos $(s, f) \in G_0(\alpha)$ y $(s', f') \in G_\omega(\alpha)$ tal que $n \in dom(s) \cap dom(s')$ y tomamos $p, p' \in G$ tal que $p(\alpha) = (s, f)$, $p'(\alpha) = (s', f')$ y $max(dom(p)) = max(dom(p')) = \alpha$. Al ser p y p' compatibles tenemos que $s(n) = s'(n)$ (ver la Definición 62) y así $f_\alpha(n) = f'_\alpha(n)$. En consecuencia $\{f_\alpha\}_{\alpha<\mu}$ sigue siendo una μ-escala en $M[G]$. El mismo argumento se puede llevar a cabo en todos los pasos de la iteración, y por tanto así se justifica la preservación de una μ-escala añadida por $\mathbb{P}_0$.

Notemos que $\mathbb{P}_n \subseteq \mathbb{P}_\omega$ para cada $n \in \omega$. En consecuencia $\bigcup \mathbb{P}_n \subseteq \mathbb{P}_\omega$, pero no se puede tener $\bigcup \mathbb{P}_n \lessdot \mathbb{P}_\omega$. De lo contrario tendríamos $\mathbb{P}_0 \lessdot \bigcup \mathbb{P}_n \lessdot \mathbb{P}_\omega$ y entonces $\bigcup_{n\geq 1} \mathbb{P}_n$ añadiría un real de Cohen sobre $M^{\mathbb{P}_0}$ en $M^{\mathbb{P}_\omega}$ que no se deja dominar por la escala añadida con $\mathbb{P}_0$. Sin embargo tenemos para cada $\alpha < \lambda$ que $\mathbb{P}{\restriction}L^\alpha = \bigcup_{\beta<\mu} \mathbb{P}{\restriction}L^\alpha_\beta$, lo cual quiere decir que $\mathbb{P}{\restriction}L^\alpha$ es un límite directo de la iteración dada por los ordenes $\mathbb{P}{\restriction}L^\alpha_\beta$ para $\beta < \mu$. Lo anterior establece que aunque horizontalmente no estamos tomando un límite directo, verticalmente sí.

En el capítulo anterior discutimos que una alternativa para probar la consistencia de $\mathfrak{d} < \mathfrak{a}$ es intentar definir una iteración sobre L^ω tal que $\mathbb{P}_{\{y\leq x\}} \cong \mathbb{P}_{\{y<x\}} * \dot{\mathbb{D}}_x$ donde $\mathbb{D}_x$ es el forcing de Hechler de $M^{\mathbb{P}_{\{y<x\}}}$. Por la carencia de buena fundamentación de L^ω vimos que es imposible definir tal iteración (ver Teorema 59). Demos un ejemplo de como la no linealidad de $\mathcal{I}^\omega$ permite añadir lo que agregábamos con cada $\mathbb{P}_n$. Sea $\kappa_n = i_n(\kappa)$ donde $i_n : L^n \longrightarrow L^\omega$ es la inmersión dada por el límite directo. Tenemos que $\kappa_n + 1 \in \mathcal{I}^n$ para cada $n \in \omega$, y así $\{\kappa_n + 1\}_{n\in\omega} \subseteq \mathcal{I}^\omega$. En L^ω el conjunto $\{\kappa_n + 1\}_{n\in\omega}$ forma una cadena descendente y hemos visto que no podemos definir sobre L^ω una cadena de ordenes $\{\mathbb{P}_{\{x\leq\kappa_n\}}\}_{n\in\omega}$. Por otra parte, en $\mathcal{I}^\omega$ tenemos que $\kappa_n + 1 \nsubseteq \kappa_m + 1$ si $n \neq m$, y por lo tanto $\mathbb{P}{\restriction}(\kappa_n + 1)$ y $\mathbb{P}{\restriction}(\kappa_m + 1)$ no forman extensiones encadenadas, es decir $M^{\mathbb{P}\restriction(\kappa_n+1)} \nsubseteq M^{\mathbb{P}\restriction(\kappa_m+1)}$ y $M^{\mathbb{P}\restriction(\kappa_m+1)} \nsubseteq M^{\mathbb{P}\restriction(\kappa_n+1)}$ y así no se contradice el Teorema 59. No obstante $M^{\mathbb{P}_\omega} \supseteq M^{\mathbb{P}\restriction(\kappa_n+1)}$ para cada $n \in \omega$, pero la no linealidad de $\mathcal{I}^\omega$ logra que no se produzcan cadenas descendentes de modelos. Se podría interpretar que en $M^{\mathbb{P}_\omega}$ se añaden los objetos de $M^{\mathbb{P}\restriction(\kappa_n+1)}$ para $m \in \omega$ por "ramas" diferentes de $\mathcal{I}^\omega$, lo cual está libre de contradicción.

Capítulo 4

Algunas aplicaciones de las plantillas sin usar un cardinal medible

4.1. CON($\mathfrak{d} < \mathfrak{a}$) sin usar un cardinal medible

En la Sección 3.2 definimos las plantillas indexadas y definimos una iteración de forcing de Hechler sobre estas plantillas. Para probar el Teorema 64 la indexación de la plantilla fue útil para poder asignar un elemento $p' \in \mathbb{P}{\restriction}(\langle A_\alpha : \alpha < \kappa\rangle/\mathcal{D})$ a un elemento $p \in \langle \mathbb{P}{\restriction}A_\alpha : \alpha < \kappa\rangle/\mathcal{D}$. En esta sección no va interesar la indexación de la plantilla y por lo tanto usamos la siguiente definición de plantilla.

Definición 83 *Una plantilla (sin indexar) es un par $(L, \mathcal{I})$ donde $(L, \leq)$ es un orden lineal e $\mathcal{I}$ es una familia de subconjuntos de L que satisface lo siguiente:*

1. *$\emptyset, L \in \mathcal{I}$.*
2. *Si $A, B \in \mathcal{I}$, entonces $A \cup B, A \cap B \in \mathcal{I}$.*
3. *Si $x < y$, $x, y \in L$, entonces existe $A \in \mathcal{I} \cap \mathcal{P}(L_y)$ tal que $x \in A$.*
4. *Si $A \in \mathcal{I}$ y $x \in L \backslash A$ entonces $A \cap L_x \in \mathcal{I}$.*
5. *El orden $(\mathcal{I}, \subseteq)$ está bien fundamentado.*

A partir de una plantilla $(L, \mathcal{I})$ podemos definir una plantilla indexada $(L, \bar{\mathcal{I}})$ por $\bar{\mathcal{I}}_x = \{A \in \mathcal{I} : A \subseteq L_x\}$ para cada $x \in L$. De esta manera los resultados de la Sección 2.2 son aplicables a $(L, \mathcal{I})$.

En el Teorema 22, a partir de una familia de $\mathbb{P}$-nombres $\{\dot{A}_\alpha : \alpha < |\mathcal{A}|\}$ de una familia casi disjunta $\mathcal{A}$ construimos un $\mathbb{P}^\kappa/\mathcal{D}$-nombre $\dot{A}_\kappa$ (el "promedio" de los nombres en $\{\dot{A}_\alpha : \alpha < \kappa\}$) que cumpliera $\Vdash_{\mathbb{P}^\kappa/\mathcal{D}} |\dot{A}_\alpha \cap \dot{A}_\kappa| < \omega$ para

$\alpha < |\mathcal{A}|$. El nombre $\dot{A}_\kappa$ es similar a los nombres en $\{\dot{A}_\alpha : \alpha < \kappa\}$ en el sentido de que la propiedad $\Vdash_{\mathbb{P}} |\dot{A}_\alpha \cap \dot{A}_\beta| < \omega$ para $\alpha < \beta < \kappa$ nos lleva a la propiedad $\Vdash_{\mathbb{P}^\kappa/\mathcal{D}} |\dot{A}_\alpha \cap \dot{A}_\kappa| < \omega$ para cada $\alpha < \kappa$ (este hecho vale para cualquier fórmula Δ_0 en el Teorema 22). A continuación presentamos la técnica de *isomorfismo de nombres*, la cual nos va llevar a construir un nombre $\dot{A}_\kappa$ similar a los nombres en $\{\dot{A}_\alpha : \alpha < |\mathcal{A}|\}$ en el sentido que acabamos de discutir sin la necesidad de un cardinal medible. Para ello, por razones de conteo (como por ejemplo el uso del delta sistema), es necesario suponer que $|\mathcal{A}| \geq \omega_2$ lo cual nos impide usar la técnica para el problema de $CON(\omega_1 = \mathfrak{d} < \mathfrak{a})$. A continuación mostramos un ejemplo de como usaremos los isomorfismos de nombres más adelante (ver [7, Cap 2, Teorema 1.6] y [1]).

Lema 84 *Sean $\kappa > \delta \geq \omega$ regulares. Suponga que $\forall\theta < \kappa(\theta^{<\delta} < \kappa)$. Sea $\mathcal{A}$ una familia de conjuntos con $|\mathcal{A}| = \kappa$, tal que $|A| < \delta$ para cada $A \in \mathcal{A}$. Entonces existe $\mathcal{B} \in [\mathcal{A}]^\kappa$ tal que $\mathcal{B}$ forma un delta sistema.*

Teorema 85 *Asumamos CH y tomemos un cardinal $\lambda = \lambda^\omega$. Si $\mathbb{C}_\lambda = Fn(\lambda, 2)$ y $\mathcal{A}$ es una familia mad en una extensión de este forcing, entonces $|\mathcal{A}| = \omega_1$ o $|\mathcal{A}| = \mathfrak{c}$.*

Demostración. En el Teorema 43 vimos que existe una familia mad de tamaño ω_1. Veamos que si $\dot{\mathcal{A}} = \{\dot{A}_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es una familia de $\mathbb{C}_\lambda$-nombres para una familia casi disjunta de tamaño κ, con $\lambda > \kappa \geq \omega_2$, entonces existe un $\mathbb{C}_\lambda$-nombre $\dot{A}_\kappa$ tal que $\Vdash_{\mathbb{C}_\lambda} |\dot{A}_\alpha \cap \dot{A}_\kappa| < \omega$ para cada $\alpha < \kappa$. Para $\alpha < \kappa$ podemos suponer que que $\dot{A}_\alpha$ es un buen nombre para un subconjunto de ω. Más precisamente, tomamos anticadenas maximales $\{p^\alpha_{n,i} : i \in \omega\} \subseteq \mathbb{C}_\lambda$ para $n \in \omega$ y $\{k^\alpha_{n,i} : n, i \in \omega\} \subseteq 2$ tal que $p^\alpha_{n,i} \Vdash n \in \dot{A}_\alpha$ si y sólo si $k^\alpha_{n,i} = 1$ y $p^\alpha_{n,i} \Vdash n \notin \dot{A}_\alpha$ si y sólo si $k^\alpha_{n,i} = 0$. Definimos $B^\alpha = \bigcup_{n,i\in\omega} dom(p^\alpha_{n,i})$ y $\mathbb{C}_{B^\alpha} = \{p \in \mathbb{C}_\lambda : dom(p) \subseteq B^\alpha\}$. Entonces $\dot{A}_\alpha$ es un $\mathbb{C}_{B^\alpha}$-nombre y además $|\bigcup_{\alpha<\kappa} B^\alpha| \leq \kappa < \lambda$. Desde que CH vale en M, tenemos que para cada $\theta < \omega_2$, $\theta^{<\omega_1} = \theta^\omega \leq \omega_1^\omega = 2^{\omega\cdot\omega} = \omega_1 < \omega_2$. Por lo tanto, si $\mathcal{B} = \{B^\alpha : \alpha < \omega_2\}$, tenemos que $|B^\alpha| < \omega_1$ para $\alpha < \omega_2$ por lo cual podemos aplicar el Lema 84 y podemos suponer (reindexando) que $\{B^\alpha : \alpha < \omega_2\}$ forma un delta sistema con raíz R. Sin perdida de generalidad podemos suponer que $|B^\alpha \backslash R| = \omega$ para $\alpha < \omega_2$ (si $|B^\alpha \backslash R| < \omega$ podemos añadir más elementos de $\lambda \backslash \bigcup_{\alpha<\omega_2} B^\alpha$ a B^α de modo que sigamos teniendo un delta sistema). Ahora definimos $B^\kappa = R \cup B'$, donde $B' \subseteq \lambda \backslash \bigcup_{\alpha<\kappa} B^\alpha$ es infinito. Además tomemos biyecciones $\varphi_\alpha : B^\alpha \longrightarrow B^\kappa$ que fijen R para $\alpha < \omega_2$. Entonces cada φ_α induce un isomorfismo $\varphi'_\alpha : \mathbb{C}_{B^\alpha} \longrightarrow \mathbb{C}_{B^\kappa}$ y los conjuntos $\{\varphi'_\alpha(p^\alpha_{n,i}) : i \in \omega\}$ para $n \in \omega$ y $\{k^\alpha_{n,i} : n, i \in \omega\} \subseteq 2$ para $\alpha < \omega_2$, determinan un buen $\mathbb{C}_{B^\kappa}$-nombre $\bar{\varphi}_\alpha(\dot{A}_\alpha)$. Sin embargo tan sólo puede haber ω_1 buenos $\mathbb{C}_{B^\kappa}$-nombres para subconjuntos de ω. Esto se debe a que a un tal nombre se le puede asociar una función $\psi : \omega \times \omega \longrightarrow 2 \times \mathbb{C}_{B^\kappa}$ definida por $\psi(n, m) = (k_{n,m}, p_{n,m})$ y sólo hay $\omega^\omega = 2^\omega = \omega_1$ de estas funciones. En consecuencia a ω_2 elementos de $\{\bar{\varphi}_\alpha(\dot{A}_\alpha) : \alpha < \omega_2\}$ se les asocia la misma función, por lo cual podemos asumir que para $\alpha < \omega_2$ se tiene $\bar{\varphi}_\alpha(\dot{A}_\alpha) = \dot{A}_\kappa$, el cual es un $\mathbb{C}_{B^\kappa}$-nombre. Al ser φ'_α un isomorfismo, en particular es un embebimiento denso, y aplicando la Definición 28 obtenemos $(\varphi'_\alpha)_*(\dot{A}_\alpha) = \{((\varphi'_\alpha)_*(\check{n}), \varphi'_\alpha(p^\alpha_{n,i})) : k^\alpha_{n,i} = 1\} = \{(\check{n}, \varphi'_\alpha(p^\alpha_{n,i})) : k^\alpha_{n,i} = 1\} = \bar{\varphi}_\alpha(\dot{A}_\alpha) = \dot{A}_\kappa$ para $\alpha < \omega_2$.

Ahora veamos que $\Vdash_{\mathbb{C}_\lambda} |\dot{A}_\alpha \cap \dot{A}_\kappa| < \omega$ para cada $\alpha < \kappa$. Sea $\theta < \kappa$ y tome $\beta < \omega_2$ tal que $B^\theta \cap B^\beta \subseteq R$. Tal β existe, pues de lo contrario podríamos tomar $x_\eta \in (B^\theta \cap B^\eta)\backslash R$ para $\eta < \omega_2$ y como B^θ es contable podemos tomar $x \in B^\theta$ y $\eta_1, \eta_2 < \omega_2$ tal que $x = x_{\eta_1} = x_{\eta_2}$. Por lo tanto $B^{\eta_1} \cap B^{\eta_2} \supseteq R \cup \{x\}$, contradiciendo que R es la raíz del delta sistema. Definimos entonces $\psi_\theta : B^\theta \cup B^\beta \longrightarrow B^\theta \cup B^\kappa$ por $\psi_\theta(\alpha) = \varphi_\beta(\alpha)$ si $\alpha \in B^\beta$ y $\psi_\theta(\alpha) = \alpha$ si $\alpha \in B^\theta$. La función ψ_θ está bien definida porque $B^\theta \cap B^\beta \subseteq R$, y además es biyectiva. Luego ψ_θ induce un isomorfismo $\psi'_\theta : \mathbb{C}_{B^\theta \cup B^\beta} \longrightarrow \mathbb{C}_{B^\theta \cup B^\kappa}$ tal que $\psi'_\theta \restriction B^\beta = \varphi'_\beta$ y $\psi'_\theta \restriction B^\theta = id_{B^\theta}$. Entonces $(\psi'_\theta)_*(\dot{A}_\beta) = \dot{A}_\kappa$ y $(\psi'_\theta)_*(\dot{A}_\theta) = \dot{A}_\theta$, y como "$|\dot{A}_\alpha \cap \dot{A}_\beta| < \omega$" es una fórmula Δ_0 y $\mathbb{C}_X \lessdot \mathbb{C}_\lambda$ para $X \subseteq \lambda$, entonces tenemos que $\Vdash_{\mathbb{C}_\lambda} |\dot{A}_\theta \cap \dot{A}_\beta| < \omega$ si y sólo si $\Vdash_{\mathbb{C}_{B^\theta \cup B^\beta}} |\dot{A}_\theta \cap \dot{A}_\beta| < \omega$ si y sólo si $\Vdash_{\mathbb{C}_{B^\theta \cup B^\kappa}} |\dot{A}_\theta \cap \dot{A}_\kappa| < \omega$ si y sólo si $\Vdash_{\mathbb{C}_\lambda} |\dot{A}_\theta \cap \dot{A}_\kappa| < \omega$ (ver Lema 29). Cambiando la fórmula "$|\dot{A}_\theta \cap \dot{A}_\beta| < \omega$" por "$\dot{A}_\theta \neq \dot{A}_\beta$" obtenemos también que $\Vdash_{\mathbb{C}_\lambda} \dot{A}_\theta \neq \dot{A}_\kappa$, y así $\Vdash_{\mathbb{C}_\lambda} \dot{\mathcal{A}}$ no es *mad*. ■

Observación 86 *El propósito de lo que sigue es construir una plantilla $(L, \mathcal{I})$ donde podamos aplicar la idea de la prueba anterior. Las siguientes son algunas propiedades que nos llevan a $\Vdash_{\mathbb{P}\restriction L} \mu = \mathfrak{d} < \mathfrak{a} = \lambda$ donde λ, μ son cardinales regulares. Suponga que $\dot{\mathcal{A}} = \{\dot{A}_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es una familia de $\mathbb{P}\restriction L$-nombres para una familia casi disjunta de tamaño κ con $\omega_2 \leq \mu \leq \kappa < \lambda$.*

1. *La técnica de isomorfismo de nombres es aplicable a familias casi disjuntas $\mathcal{A}$ con $|\mathcal{A}| \geq \omega_2$ (suponiendo CH en M). Por lo tanto necesitamos que $\Vdash_{\mathbb{P}\restriction L} \mathfrak{a} \geq \omega_2$. De este modo, si $\mu \subseteq L$ es cofinal y $L_\alpha \in \mathcal{I}$ para $\alpha < \mu$, por el Teorema 71 tenemos $\Vdash_{\mathbb{P}\restriction L} \mathfrak{b} = \mathfrak{d} = \mu \geq \omega_2$. Desde que $\mathfrak{a} \geq \mathfrak{b}$ es un teorema de ZFC (ver Lema 2) entonces $\Vdash_{\mathbb{P}\restriction L} \mathfrak{a} \geq \omega_2$. En consecuencia queremos construir $(L, \mathcal{I})$ de modo que μ sea cofinal en L y $L_\alpha \in \mathcal{I}$ para $\alpha < \mu$.*

2. *En la prueba del Teorema 85 teníamos que una biyección φ_α entre B^α y B^κ inducía un isomorfismo φ'_α entre $\mathbb{C}_{B^\alpha}$ y $\mathbb{C}_{B^\kappa}$. Sin embargo lo único que necesitamos de φ'_α es que fuese un embebimiento denso para poder transformar el $\mathbb{C}_{B^\alpha}$-nombre $\dot{A}_\alpha$ en el $\mathbb{C}_{B^\kappa}$-nombre $\dot{A}_\kappa$. En las plantillas las extensiones inofensivas son la manera de inducir embebimientos densos. En consecuencia, si $B^\alpha \subseteq L$ es tal que $\dot{A}_\alpha$ es un $\mathbb{P}\restriction B^\alpha$-nombre de un subconjunto de ω, para $\alpha < \omega_1$ (en la construcción que llevaremos a cabo ω_1 será suficiente), queremos construir $B^\kappa \subseteq L$ de modo que existan funciones $\varphi_\alpha : B^\alpha \longrightarrow B^\kappa$ tales que $\mathbb{P}\restriction B^\alpha$ sea isomorfo a $\mathbb{P}\restriction\varphi_\alpha(B^\alpha)$ y $(B^\kappa, \mathcal{I}\restriction B^\kappa)$ sea extensión inofensiva de $(\varphi_\alpha(B^\alpha), \mathcal{I}\restriction\varphi_\alpha(B^\alpha))$.*

3. *Antes de construir B^κ como en el numeral anterior,tenemos que identificar ω_2 nombres de $\{\dot{A}_\alpha : \alpha < \kappa\}$ a un mismo $\mathbb{P}\restriction L'$-nombre $\dot{A}$, donde $(L', \mathcal{I}')$ es una plantilla auxiliar que debemos construir.*

Construcción de la plantilla $(L(\mu,\lambda),\mathcal{I}(\mu,\lambda))$

Con las anteriores ideas en mente definimos a continuación la plantilla $(L,\mathcal{I})$ que es adecuada. Sean μ,λ cardinales regulares tales que $\lambda>\mu\geq\omega_2$. Para un ordinal α denotamos por α^- a una copia disjunta de α con el orden invertido. Sobre $\bar{\alpha}=\alpha\cup\alpha^-$ definimos (abusando de la notación) el orden $\leq$ que extiende a los ordenes de α y α^- y además pone los elementos de α^- por debajo de los elementos de α. Por ejemplo $(\bar{\omega},\leq)\cong(\mathbb{Z},\leq)$.

Definimos $L(\mu,\lambda):=\{x\in(\bar{\lambda})^{<\omega}:x(0)\in\mu\}$. Para $x_1,x_2\in L$, $x_1\neq x_2$, definimos $x_1<x_2$ usando un orden "semi-lexicográfico" dado por los siguientes casos:

- $x_1\subsetneq x_2$ y $x_2(|x_1|)\in\lambda$.
- $x_2\subsetneq x_1$ y $x_1(|x_2|)\in\lambda^-$.
- Si $n=min\{m:x_1(m)\neq x_2(m)\}$ entonces $x_1(n)<x_2(n)$.

Claramente tenemos que $(L(\mu,\lambda),\leq)$ es un orden lineal. Identificando μ con $\{x\in L:dom(x)=\{0\}\}$ tenemos que μ es cofinal en L, como se quiere en 1 de la observación 86. Para asegurar la buena fundamentación del $\mathcal{I}(\mu,\lambda)$ que vamos a definir a continuación fijamos una partición $\lambda^-=\bigcup_{\alpha<\omega_1}S^\alpha$ tal que S^α es coinicial en λ^-. Por ejemplo podemos tomar como $S^\alpha=\{\beta^-\in\lambda^-:\beta=\omega_1\cdot\eta+\alpha$ para algún $\eta\}$ lo cual genera una partición porque para cada $\beta<\lambda$ existen únicos η y $\alpha<\omega_1$ tal que $\beta=\omega_1\cdot\eta+\alpha$. Decimos que $x\in L$ es relevante si cumple lo siguiente:

- $|x|\geq 3$, $|x|$ es impar.
- $x(n)\in\lambda$ si y sólo si n es par.
- $x(|x|-1)<\omega_1$.
- Si $0<n<m$ son pares y $x(n),x(m)<\omega_1$ entonces existen $\beta<\alpha<\omega_1$ tales que $x(n-1)\in S^\alpha$ y $x(m-1)\in S^\beta$.

Para $x\in L$ relevante sea $\mathcal{J}_x$ el intervalo $[x\restriction(|x|-1),x)\subseteq L(\mu,\lambda)$. Por último tomamos $\mathcal{I}(\mu,\lambda)$ como la colección de todas las uniones finitas de elementos de la forma:

- Singletons de L y L mismo.
- L_α, $\alpha<\mu$.
- $\mathcal{J}_x$ para x relevante.

Los conjuntos $\mathcal{J}_x$ permitirán satisfacer la segunda condición de la observación 86. Más precisamente, permitirán mostrar que $\mathcal{I}\restriction B^\kappa$ es extensión inofensiva de $\mathcal{I}\restriction\varphi_\alpha(B^\alpha)$, donde B^α,B^κ son los conjuntos que queremos construir de manera análoga al Teorema 85. La inclusión de los conjuntos L_α, $\alpha<\mu$, responde a la primera condición de la observación 86.

Teorema 87 *El par* $(L(\mu,\lambda),\mathcal{I}(\mu,\lambda))$ *es una plantilla.*

Demostración. Verifiquemos que se satisfacen las condiciones de la Definición 83.

1. $\emptyset, L \in \mathcal{I}$ por definición.

2. El hecho de que $\mathcal{I}$ es cerrado bajo uniones finitas se tiene por definición. Además intersección finita de elementos de $\{L_\alpha : \alpha < \mu\}$ sigue perteneciendo a este conjunto. Es fácil ver que si $x < y$ entonces $\mathcal{J}_x \cap \mathcal{J}_y = \emptyset$ o $\mathcal{J}_x \subseteq \mathcal{J}_y$. Este último caso se tiene si y sólo si $|y| \leq |x|, x\restriction(|y|-1) = y\restriction(|y|-1)$ y $x(|y|-1) \leq y(|y|-1)$. Por lo tanto $\{\mathcal{J}_x : x \text{ es relevante}\}$ es cerrado bajo intersecciones finitas. Además, si $\alpha < \mu$ y x es relevante, $L_\alpha \cap \mathcal{J}_x = \mathcal{J}_x$ si $x(0) \leq \alpha$ o $L_\alpha \cap \mathcal{J}_x = \emptyset$ si $\alpha < x(0)$.

3. Si $x, y \in L$ y $x < y$ entonces $\{x\} \in \mathcal{I} \cap \mathcal{P}(L_y)$. Esta es la razón para incluir los singletons.

4. Sea $A = \bigcup_{i \leq n_1} \mathcal{J}_{x_i} \cup \bigcup_{i \leq n_2} L_{\alpha_i} \cup \bigcup_{i \leq n_3} \{z_i\}$ en $\mathcal{I}$ y tomemos $x \in L \backslash A$. Entonces $A \cap L_x = \bigcup\{\mathcal{J}_{x_i} : i \leq n_1, x_i < x\} \cup \bigcup\{\mathcal{L}_{\alpha_i} : i \leq n_2, \alpha_i < x\} \cup \bigcup\{z_i : i \leq n_3, z_i < x\}$ el cual también está en $\mathcal{I}$.

5. Suponga que $\{A_n\}_{n\in\omega} \subseteq \mathcal{I}$ y $A_{n+1} \subseteq A_n$. Tomemos $L_{\alpha_n} = \bigcup\{L_\beta : L_\beta \text{ es considerado en la definición de } A_n\}$ (Note que podríamos tener $L_{\alpha_n} = \emptyset = L_0$). Sea $\alpha_{n_0} = min\{\alpha_n : n \in \omega\}$. Entonces para $m \geq n_0$ tenemos $L_{\alpha_m} = L_{\alpha_{n_0}}$. Supongamos, por contradicción, que $\alpha_m > \alpha_{n_0}$. Notemos que si $y \in \mathcal{J}_x$, para x relevante, entonces $y(1) = x(1)$. Sea $t_1 < \lambda$ tal que $t_1 > x(1)$ para cualquier x relevantes donde $\mathcal{J}_x$ es considerado en la definición de A_{n_0}, y $t_1 > w$ si $\{w\}$ es considerado en la definición de A_{n_0}. Entonces, si definimos $t \in A_m$ por $t(0) = \alpha_{n_0}$ y $t(1) = t_1$ tenemos $t \in A_m \backslash A_{n_0}$, lo cual es una contradicción.

   Ahora ocupemos nuestra atención en las componentes $\mathcal{J}_x$ y los singletons que definen a cada A_n. Supongamos que A_0 (y por consiguiente cada A_n) no contiene en su definición ningún conjunto de la forma L_α, $\alpha < \mu$, pues ya sabemos que estas componentes se estabilizan. Tenemos que si $x < y$ entonces $\mathcal{J}_x \cap \mathcal{J}_y = \emptyset$ o $\mathcal{J}_x \subseteq \mathcal{J}_y$ (el último caso se tiene si y sólo si $|y| \leq |x|, x\restriction(|y|-1) = y\restriction(|y|-1)$ y $x(|y|-1) \leq y(|y|-1)$). Usando este hecho, vamos a organizar las componentes $\mathcal{J}_x$ que forman a cada A_n en el nivel n de un árbol que construiremos a continuación. El objetivo de tal construcción es ver que en el árbol hay un nivel n a partir del cual cada elemento tiene solamente un sucesor. De esta manera se probaría que las componentes $\mathcal{J}_x$ de A_m se estabilizan para $m \geq n$.

   Por simplicidad supongamos que $A_0 = \mathcal{J}_{x_0^{\langle\rangle}}$ (en caso de que A_0 tenga más componentes de este tipo hacemos el mismo proceso que sigue a continuación). Para formar A_1 usamos $\mathcal{J}_{x_1^{\langle 0\rangle}}, \ldots, \mathcal{J}_{x_1^{\langle n_1\rangle}}$ conjuntos disjuntos. Como $A_0 \supseteq A_1$ entonces $\mathcal{J}_{x_1^{\langle i\rangle}} \subseteq \mathcal{J}_{x_0^{\langle\rangle}}$ y así $x_1^{\langle i\rangle} \leq x_1^{\langle\rangle}$ para $i \leq n_1$. Para formar A_2 utilizamos $\{\mathcal{J}_{x_2^{\langle i,j\rangle}} : i \leq n_1, j \leq n_2^i\}$ conjuntos disjuntos tal que $\mathcal{J}_{x_2^{\langle i,j\rangle}} \subseteq \mathcal{J}_{x_1^{\langle i\rangle}}$ para $j \leq n_2^i$. De esta manera podemos construir un árbol $T \subseteq \omega^{<\omega}$ tal que $A_n = \bigcup_{\sigma\in T\cap\omega^n} \mathcal{J}_{x_n^\sigma} \cup F_n$ donde $\sigma \subseteq \tau$ implica $\mathcal{J}_{x_{|\tau|}^\tau} \subseteq \mathcal{J}_{x_{|\sigma|}^\sigma}$ y $\{\mathcal{J}_{x_n^\sigma} : \sigma \in T \cap \omega^n\}$ está formado por conjuntos disjuntos. Sea f una rama del árbol T. Veamos que existe $m \in \omega$ tal que $x_n^{f\restriction n} = x_m^{f\restriction m}$ para cada $n \geq m$. Desde que $\mathcal{J}_{x_{n+1}^{f\restriction(n+1)}} \subseteq \mathcal{J}_{x_n^{f\restriction n}}$, en comienzo $x_{n+1}^{f\restriction(n+1)} \leq x_n^{f\restriction n}$ y además $|x_{n+1}^{f\restriction(n+1)}| \geq |x_n^{f\restriction n}|$. Supongamos que $\{|x_n^{f\restriction n}|\}_{n\in\omega}$ no es acotado en ω y tomemos una cadena $\{|x_{n_k}^{f\restriction n_k}|\}_{k\in\omega}$ estrictamente creciente. Como cada $x_{n_k}^{f\restriction n_k}$ es relevante, aplicando la definición tenemos que $\{\alpha_k : x_{n_k}^{f\restriction n_k}(|x_{n_k}^{f\restriction n_k}| - 2) \in S^{\alpha_k}\}$ formaría una cadena descendente de ordinales. Por lo tanto $\{|x_n^{f\restriction n}|\}_{n\in\omega}$ se estabiliza, es decir, podemos tomar l tal que $|x_n^{f\restriction n}| = |x_l^{f\restriction l}|$ para cada $n \geq l$. Entonces $\{x_n^{f\restriction n}(|x_n^{f\restriction n}| - 1)\}_{n\geq l} \subseteq \lambda$ también se debe estabilizar a partir de $m \geq l$. En consecuencia $\{x_n^{f\restriction n}\}_{n\in\omega}$ se estabiliza en m. Lo anterior implica que $\{x_{|\sigma|}^\sigma : \sigma \in T\}$ es finito. De lo contrario tome $\{\sigma_n\}_{n\in\omega}$ tal que $x_{|\sigma_n|}^{\sigma_n} \neq x_{|\sigma_m|}^{\sigma_m}$ si $n \neq m$. Entonces podemos construir inductivamente una rama infinita σ de T tal que no se estabilice, lo cual contradice lo que acabamos de mostrar. Sea $n \in \omega$ tal que para cada $m \geq n$ tengamos $x_m^\theta = x_n^{\theta\restriction n}$ para $\theta \in T \cap \omega^m$ y además $F_n = F_m$. Entonces $A_m = A_n$, y así la sucesión $\{A_i\}_{i\in\omega}$ se estabiliza a partir de n.

■

Por simplicidad en lo que resta de esta sección nos referimos a $(L(\mu,\lambda), \mathcal{I}(\mu,\lambda))$ como $(L, \mathcal{I})$. La siguiente noción apunta a satisfacer 2 y 3 en la observación 86.

Definición 88 *Sean A, B subárboles de L (es decir, cerrados bajo segmentos iniciales vistos como funciones). Decimos que A es isomorfo a B ($A \cong B$) si existe una función $\varphi : A \longrightarrow B$ que satisface lo siguiente:*

- *φ es biyectiva.*
- *$|\varphi(x)| = |x|$ para cada $x \in A$.*
- *$\varphi(x)\restriction n = \varphi(x\restriction n)$.*
- *$x < y$ si y sólo si $\varphi(x) < \varphi(y)$.*
- *$x(n) \in \lambda$ si y sólo si $\varphi(x)(n) \in \lambda$.*
- *Para $x \in A$, si $C \in \mathcal{I}\restriction A \cap \mathcal{P}(L_x)$ entonces $\varphi(C) \in \mathcal{I}\restriction B \cap \mathcal{P}(L_{\varphi(x)})$.*
- *Para $y \in B$, si $D \in \mathcal{I}\restriction B \cap \mathcal{P}(L_y)$ entonces existe $C \in \mathcal{I}\restriction A \cap \mathcal{P}(L_{\varphi^{-1}(x)})$ tal que $D \subseteq \varphi(C)$.*

Es fácil ver que si $A \cong B$ entonces $\mathcal{I}^\varphi = \{\varphi(C) : C \in \mathcal{I}\restriction A\} \subseteq \mathcal{I}\restriction B$ es una plantilla sobre B y además $\mathcal{I}\restriction B$ es una extensión inofensiva de $\mathcal{I}^\varphi$. Por lo tanto $\mathbb{P}\restriction(B, \mathcal{I}^\varphi) \equiv \mathbb{P}\restriction(B, \mathcal{I}\restriction B)$. Además φ induce un isomorfismo canónico entre $\mathbb{P}\restriction(A, \mathcal{I}\restriction A)$ y $\mathbb{P}\restriction(B, \mathcal{I}^\varphi)$, y así φ también induce un embebimiento denso entre $\mathbb{P}\restriction(A, \mathcal{I}\restriction A)$ y $\mathbb{P}\restriction(B, \mathcal{I}\restriction B)$.

Ahora consideremos un subárbol contable B de L. Entonces, como un subconjunto contable de λ tiene tipo de orden contable, podemos tomar un subárbol B' de $\bar{\omega_1}^{<\omega}$ y una función $\varphi : B \longrightarrow B'$ que satisfaga las 5 primeras condiciones de la Definición 88. Además sobre B' podemos definir la plantilla $\mathcal{I}' = \mathcal{I}^{\varphi} = \{\varphi(C) : C \in \mathcal{I}{\restriction}B\}$, la cual es contable porque $\mathcal{I}{\restriction}B$ es contable. De esta manera podemos definir un isomorfismo canónico entre $\mathbb{P}{\restriction}(B,\mathcal{I}{\restriction}B)$ y $\mathbb{P}{\restriction}(B',\mathcal{I}')$. Ahora notemos que solamente existen 2^{ω} subárboles contables de $\bar{\omega_1}^{<\omega}$, y para cada uno de esos subárboles solo podemos definir 2^{ω} plantillas $(L',\mathcal{I}')$ donde $\mathcal{I}'$ es contable. Por lo tanto para cada subárbol B de L sólo tenemos 2^{ω} posibilidades para plantillas de la forma $(B',\mathcal{I}')$, con B' subárbol contable de $\bar{\omega_1}^{<\omega}$. Esto último se debe a que la traza $\mathcal{I}{\restriction}B$ es contable por ser B contable. En efecto, $|\{B \cap L_{\alpha} : \alpha < \mu\}| \leq \omega$, pues de lo contrario podríamos formar una cadena estrictamente creciente de conjuntos $\{L_{\alpha_\beta} \cap B\}_{\beta<\omega_1}$, lo que contradice que B es contable. Del mismo modo, no pueden existir cadenas estrictamente crecientes o decrecientes (por la buena fundamentación) de la forma $\{\mathcal{J}_{x_\beta} \cap B\}_{\beta<\omega_1}$. Tampoco pueden existir familias $\{\mathcal{J}_{x_\beta} \cap B\}_{\beta<\omega_1}$ de conjuntos disjuntos dos a dos, y así $|\{\mathcal{J}_x \cap B : x \text{ es relevante}\}| \leq \omega$.

Lo que acabamos de mencionar apunta hacia la tercera parte de la observación 86.

Teorema 89 *Asumamos CH. Sean $\lambda > \mu > \omega_1$ cardinales regulares con $\lambda = \lambda^{\omega}$. Entonces la plantilla $(L(\mu,\lambda),\mathcal{I}(\mu,\lambda))$ satisface $\Vdash_{\mathbb{P}{\restriction}L} \mathfrak{b} = \mathfrak{d} = \mu, \mathfrak{a} = \mathfrak{c} = \lambda$.*

Demostración. Como $\mu \subseteq L$ es cofinal y $L_{\alpha} \in \mathcal{I}$ para cada $\alpha < \mu$, por el Teorema 71 tenemos que $\Vdash_{\mathbb{P}{\restriction}L} \mathfrak{b} = \mathfrak{d} = \mu$. Desde que $|L| = |\bar{\lambda}^{<\omega}| = \lambda$ y $\lambda^{\omega} = \lambda$ podemos mostrar que $\Vdash_{\mathbb{P}{\restriction}L} \mathfrak{c} \leq \lambda$. Por lo tanto tenemos que $\Vdash_{\mathbb{P}{\restriction}L} \mu \leq \mathfrak{a} \leq \lambda$. Sea $\mathcal{A} = \{\dot{A}_{\alpha} : \alpha < \kappa\}$ un conjunto de $\mathbb{P}{\restriction}L$-nombres para una familia casi disjunta con $\omega_2 \leq \kappa < \lambda$. Suponemos que cada $\dot{A}_{\alpha}$ es un buen nombre tomando anticadenas maximales $\{p^{\alpha}_{n,i} : i \in \omega\} \subseteq L$ para $n \in \omega$ y $\{k^{\alpha}_{n,i} : n, i \in \omega\} \subseteq 2$ tal que $p^{\alpha}_{n,i} \Vdash n \in \dot{A}_{\alpha}$ si y sólo si $k^{\alpha}_{n,i} = 1$ y $p^{\alpha}_{n,i} \Vdash n \notin \dot{A}_{\alpha}$ si y sólo si $k^{\alpha}_{n,i} = 0$. Por el Teorema 69 existen conjuntos contables $C^{\alpha}_{n,i} \subseteq L$ tal que $p^{\alpha}_{n,i} \in \mathbb{P}{\restriction}C^{\alpha}_{n,i}$. Definimos $B^{\alpha} = \{x \in L : \text{Existen } n, i \in \omega \text{ tal que } x \subseteq c \text{ para algún } c \in C^{\alpha}_{n,i}\}$, el cual es un subárbol contable de L. Entonces tenemos que $\dot{A}_{\alpha}$ es un $\mathbb{P}{\restriction}B^{\alpha}$-nombre para $\alpha < \kappa$. Como CH vale en M, por el Lema 84 podemos tomar una subfamilia $\mathcal{B}^1$ de tamaño ω_2 de $\{B^{\alpha} : \alpha < \omega_2\}$ tal que $\mathcal{B}^1$ forme un delta sistema con raíz R. A cada $B^{\alpha} \in \mathcal{B}^1$ le asignamos una plantilla $(T^{\alpha},\mathcal{I}^{\psi_\alpha})$ donde T^{α} es un subárbol contable de $\bar{\omega_1}^{<\omega}$ y $\psi_{\alpha} : B^{\alpha} \longrightarrow T^{\alpha}$ cumple las 5 primeras condiciones de la Definición 88. Como sólo hay ω_1 plantillas del tipo $(T^{\alpha},\mathcal{I}^{\psi_\alpha})$, podemos tomar $\mathcal{B}^2 \subseteq \mathcal{B}^1$ de tamaño ω_2 tal que si $B^{\alpha}, B^{\beta} \in \mathcal{B}^2$ entonces $(T^{\alpha},\mathcal{I}^{\psi_\alpha}) = (T^{\beta},\mathcal{I}^{\psi_\beta}) := (T,\mathcal{I}')$ y $\psi_{\alpha}(R) = \psi_{\beta}(R) = S$. Ahora tomemos $\mathcal{B}^3 \subseteq \mathcal{B}^2$ de tamaño ω_2 tal que si $B^{\alpha}, B^{\beta} \in \mathcal{B}^3$ entonces $\bar{\psi}_{\alpha}(\dot{A}_{\alpha}) = \bar{\psi}_{\beta}(\dot{\beta}) = \dot{A}$ donde $\dot{A}$ es un $\mathbb{P}{\restriction}T$-nombre (esto se tiene de la misma manera que en el Teorema 85 por el conteo de anticadenas). Por último, para $B^{\alpha} \in \mathcal{B}^3$ podemos tomar $\theta_{\alpha} < \omega_1$ tal que si $x \in B^{\alpha}$, j es impar y $x(j) \in \lambda^{-}$ entonces $x(j) \in S^{\theta}$ para $\theta < \theta_{\alpha}$. Como $|\{\theta_{\alpha} : B^{\alpha} \in \mathcal{B}^3\}| \leq \omega_1$, podemos tomar $\mathcal{B}^4 \subseteq \mathcal{B}^3$ de tamaño ω_2 tal que si $B^{\alpha}, B^{\beta} \in \mathcal{B}^4$ entonces $\theta_{\alpha} = \theta_{\beta} = \theta$. Sin perdida de generalidad podemos suponer que $\mathcal{B}^4 = \{B^\alpha : \alpha < \omega_2\}$ haciendo un reindexación. Por tanto para $\alpha < \omega_2$ consideramos la indexación $B^\alpha = \{x_s^\alpha : s \in T\}$ tal que $\psi_\alpha(x_s^\alpha) = s$. Por construcción tenemos que $R = \{x_s^\alpha : s \in S\}$ para cada $\alpha < \omega_2$.

A continuación presentamos las ideas principales para la definición de $B^\kappa = \{x_s^\kappa : s \in T\}$. Como en la prueba del Teorema 85, queremos tomar $B^\kappa = R \cup B'$ con $B' \subseteq \bigcup_{\alpha<\kappa} B^\alpha$. Siguiendo esta idea, empezamos definiendo $x_s^\kappa = x_s^0$ para $s \in S$ y luego definimos $x_{s\hat{}\langle\zeta\rangle}$ para $s\hat{}\langle\zeta\rangle \notin S$ y $s \in S$. Consideremos la enumeración $\{t \in T\backslash S : t\restriction(|t|-1) \in S\} = \{t_n : n \geq 1\}$ y definimos una coloración F de los pares de ω_2 en ω colores por $F(\{\alpha,\beta\})$ como el mínimo $n \in \omega$ tal que $t_n(|t_n|-1) \in \omega_1$ y $x_{t_n}^\alpha(|t_n|-1) > x_{t_n}^\beta(|t_n|-1)$, o $t_n(|t_n|-1) \in \omega_1^-$ y $x_{t_n}^\alpha(|t_n|-1) < x_{t_n}^\beta(|t_n|-1)$, para $\alpha < \beta$ si tal mínimo existe. De lo contrario defina $F(\{\alpha,\beta\}) = 0$. Notemos que F no puede tener un conjunto homogéneo infinito de color $n > 0$, pues de lo contrario $\{x_{t_n}^\alpha(|t_n|-1) : \alpha < \omega_2\}$ contendría una cadena descendente de λ o ascendente de λ^-. El Teorema de Erdős-Rado (ver [11, Teorema 9.6]) establece que $(2^\omega)^+ \longrightarrow (\omega_1)^2_\omega$ y al valer CH entonces tenemos que $\omega_2 \longrightarrow (\omega_1)^2_\omega$. Aplicado este resultado a F y reindexando, podemos suponer que $\{B^\alpha : \alpha < \omega_1\}$ satisface lo siguiente para $s \in S$ y $s\hat{}\langle\zeta\rangle \notin S$:

- Si $\zeta \in \omega_1$ entonces para $\alpha < \beta < \omega_1$ tenemos $x_{s\hat{}\langle\zeta\rangle}^\alpha(|s|) < x_{s\hat{}\langle\zeta\rangle}^\beta(|s|)$. Además, si $\zeta < \xi$ y $s\hat{}\langle\zeta\rangle, s\hat{}\langle\xi\rangle \notin S$ tenemos que $x_{s\hat{}\langle\zeta\rangle}^\alpha(|s|) < x_{s\hat{}\langle\xi\rangle}^\beta(|s|)$ para cada $\alpha,\beta < \omega_1$ o $x_{s\hat{}\langle\xi\rangle}^\alpha(|s|) < x_{s\hat{}\langle\zeta\rangle}^\beta(|s|)$ para cada $\alpha < \beta < \omega_1$.

- Si $\zeta \in \omega_1^-$ entonces para $\alpha < \beta < \omega_1$ tenemos $x_{s\hat{}\langle\zeta\rangle}^\alpha(|s|) > x_{s\hat{}\langle\zeta\rangle}^\beta(|s|)$. Además, si $\zeta < \xi$ y $s\hat{}\langle\zeta\rangle, s\hat{}\langle\xi\rangle \notin S$ tenemos que $x_{s\hat{}\langle\zeta\rangle}^\alpha(|s|) > x_{s\hat{}\langle\xi\rangle}^\beta(|s|)$ para cada $\alpha,\beta < \omega_1$ o $x_{s\hat{}\langle\xi\rangle}^\alpha(|s|) > x_{s\hat{}\langle\zeta\rangle}^\beta(|s|)$ para cada $\alpha < \beta < \omega_1$.

Además tenemos que el conjunto $\{y(|s|+1) : y \in \bigcup_{\alpha<\kappa} B^\alpha, |y| > |s|+1\}$ está acotado por arriba y por abajo en $\bar{\lambda}$, pues $|\bigcup_{\alpha<\kappa} B^\alpha| < \lambda$ y λ es regular. Tome $\gamma, \gamma^- \in \bar{\lambda}$ cotas superiores e inferiores del anterior conjunto tal que $\gamma^- \in S^\theta$, lo cual es posible porque S^θ es coinicial. Para $s \in S$ y $s\hat{}\langle\zeta\rangle \notin S$ definimos $x_{s\hat{}\langle\zeta\rangle}^\kappa$ por lo siguiente:

- $|x_{s\hat{}\langle\zeta\rangle}^\kappa| = |s| + 3$.

- $x_{s\hat{}\langle\zeta\rangle}^\kappa \restriction |s| = x_s^\kappa$.

- $x_{s\hat{}\langle\zeta\rangle}^\kappa(|s|) = \begin{cases} Sup_{\alpha<\omega_1} x_{s\hat{}\langle\zeta\rangle}^\kappa & si \quad \zeta \in \omega_1 \\ Inf_{\alpha<\omega_1} x_{s\hat{}\langle\zeta\rangle}^\kappa & si \quad \zeta \in \omega_1^- \end{cases}$

- $x_{s\hat{}\langle\zeta\rangle}^\kappa(|s|+1) = \begin{cases} \gamma & si \quad n \notin \zeta \in \omega_1 \\ \gamma^- & si \quad n \in \zeta \in \omega_1^- \end{cases}$

- $x_{s\hat{}\langle\zeta\rangle}^\kappa(|s|+2) = \begin{cases} x_{s\hat{}\langle\zeta\rangle}^0(|s|) & si \quad |s| > 0 \\ \zeta & si \quad |s| = 0 \end{cases}$

Para los otros elementos $t \in T \backslash S$, tome $s \subseteq t$ maximal (en contenencia) tal que $s \in S$. Definimos $|x_t^\kappa| = |t| + 2$, $x_t^\kappa \restriction (|s|+3) = x^\kappa_{s\hat{}\langle t(|s|)\rangle}$ y $x_t^\kappa \restriction (j+2) = x_t^0(j)$ para $j > |s|$.

La construcción anterior implica las siguientes propiedades:

- Para cada $\alpha < \omega_1$ la función $\varphi_\alpha : B^\alpha \longrightarrow B^\kappa$ definida por $\varphi(x_s^\alpha) = x_s^\kappa$ preserva el orden. Además $B^\kappa \cap B^\alpha = R$.

- Para $\beta < \mu$ existe $x \in L$ relevante tal que $\varphi(L_\beta \cap B^\alpha) = (L_\beta \cup \mathcal{J}_x) \cap B^\kappa \in \mathcal{I} \restriction B^\kappa$.

- Para $\alpha < \omega_1$ y $x \in L$ relevante existe $y \geq x$ relevante tal que $\varphi(\mathcal{J}_x \cap B^\alpha) = \mathcal{J}_y \cap B^\kappa$.

Las anteriores condiciones implican que $\mathcal{I} \restriction B^\kappa$ es extensión inofensiva de $\mathcal{I}^{\varphi_\alpha}$. Por el teorema 73 tenemos que φ_α induce un embebimento denso φ'_α : $\mathbb{P} \restriction (B^\alpha, \mathcal{I} \restriction B^\alpha) \longrightarrow \mathbb{P} \restriction (B^\alpha, \mathcal{I} \restriction B^\alpha)$.

Sea $\varphi : T \longrightarrow B^\kappa$ definida por $\varphi(s) = x_s^\kappa$. Por la construcción se puede probar que φ preserva el orden y además $(\varphi'_\alpha)_*(\dot{A}_\alpha) = (\varphi')_*(\dot{A})$. Definimos $\dot{A}_\kappa = (\varphi')_*(\dot{A})$.

Ahora veamos que $\Vdash_{\mathbb{P}\restriction L} |\dot{A}_\theta \cap \dot{A}_\kappa| < \omega$ para cada $\theta < \kappa$. Sea $\theta < \kappa$ y tome $\beta < \omega_1$ tal que $B^\theta \cap B^\beta \subseteq R$. Tal β existe, pues de lo contrario podríamos tomar $x_\eta \in (B^\theta \cap B^\eta) \backslash R$ para $\eta < \omega_1$, y como B^θ es contable, podemos tomar $x \in B^\theta$ y $\eta_1, \eta_2 < \omega_1$ tal que $x = x_{\eta_1} = x_{\eta_2}$. Por lo tanto $B^{\eta_1} \cap B^{\eta_2} \supseteq R \cup \{x\}$, contradiciendo que R es la raíz del delta sistema. Usando Id_{B^θ} y φ_β (para crear las extensiones inofensivas) obtenemos que $\mathbb{P} \restriction (B^\theta \cup B^\beta, \mathcal{I} \restriction (B^\theta \cup B^\beta)) \equiv \mathbb{P} \restriction (B^\theta \cup B^\kappa, \mathcal{I} \restriction (B^\theta \cup B^\kappa))$ y el embebimiento entre estos ordenes envía $\dot{A}_\beta$ a $\dot{A}_\kappa$. Por tanto $\Vdash_{\mathbb{P}\restriction L} |\dot{A}_\theta \cap \dot{A}_\beta| < \omega$ si y sólo si $\Vdash_{\mathbb{P}\restriction (B^\theta \cup B^\beta)} |\dot{A}_\theta \cap \dot{A}_\beta| < \omega$ si y sólo si $\Vdash_{\mathbb{P}\restriction (B^\theta \cup B^\kappa)} |\dot{A}_\theta \cap \dot{A}_\kappa| < \omega$ si y sólo si $\Vdash_{\mathbb{P}\restriction L} |\dot{A}_\theta \cap \dot{A}_\kappa| < \omega$. Por este mismo argumento $\Vdash_{\mathbb{P}\restriction L} \dot{A}_\theta \neq \dot{A}_\kappa$ para cada $\theta < \kappa$. ■

En los modelos que construimos en los Teoremas 82 y 89 tenemos que $\mathfrak{d} \geq \omega_2$ y por lo tanto no resuelven el problema de Roitman (Problema 7). Según Shelah (ver [3]) la manera más natural de resolver este problema consiste en tomar una iteración de soporte contable de ordenes propios $(\mathbb{P}_\alpha, \dot{\mathbb{Q}}_\alpha)_{\alpha < \omega_2}$ donde $|\mathbb{P}_\alpha| = \omega_1$ y $\mathbb{Q}_\alpha$ añade un subconjunto infinito de ω casi disjunto a los elementos de $\mathcal{A}_\alpha$, donde $\mathcal{A}_\alpha$ es una familia casi disjunta en $M^{\mathbb{P}_\alpha}$. Para esta idea necesitamos que $M \models GCH$. Entonces $\mathbb{P}_{\omega_2}$ preservaría cardinales (ver [5, Teorema 2.10-Cp 5]) y $|\{\mathcal{A} : \mathcal{A} \in M^{\mathbb{P}_{\omega_2}} \text{ es casi disjunta }\}| \leq |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\omega))|^{M^{\mathbb{P}_{\omega_2}}} = \omega_2$. Por lo tanto se podría pensar en destruir todas las familias *mad* de tamaño ω_1 eligiendo adecuados $\mathbb{Q}_\alpha$, $\alpha < \omega_2$. Sin embargo, como se menciona en el Problema 58, no se conoce si tal elección es posible. A continuación mostramos que usando plantillas no tenemos esperanza de resolver el problema de Roitman. Para ello usamos el principio $\diamondsuit_\mathfrak{d}$ (ver la Definición 3) el cual implica en ZFC que $\mathfrak{a} = \omega_1$ (ver Teorema 4). Entonces mostramos que en una plantilla $(L, \mathcal{I})$ para la cual deseemos usar el Teorema 71 (para forzar $\Vdash_{\mathbb{P}\restriction L} \mathfrak{d} = \omega_1$), tenemos $\Vdash_{\mathbb{P}\restriction L} \diamondsuit_\mathfrak{d}$ y así $\Vdash_{\mathbb{P}\restriction L} \mathfrak{d} = \mathfrak{a} = \omega_1$. Una leve modificación en la prueba del Teorema 71 nos lleva al siguiente resultado.

Teorema 90 *Sea $(L, \mathcal{I})$ una plantilla indexada tal que $\omega_1 \subseteq L$ es cofinal y $L_\alpha \in \mathcal{I}_\alpha$ para cada $\alpha < \omega_1$. Entonces $\Vdash_{\mathbb{P}\restriction L} \diamondsuit_{\mathfrak{d}}$.*

Demostración. Sea G un filtro $\mathbb{P}\restriction L$-genérico y defina $M_\alpha = M[G \cap \mathbb{P}\restriction L_\alpha]$ para $\alpha < \omega_1$. En M_α el orden $\mathbb{D}'_\alpha = \{(s, f) : s \in Fn(\alpha, \omega), f \in \omega^\alpha, s \subseteq f\}$ (el orden se define igual que en el forcing de Hechler) añade una función $f_\alpha : \alpha \longrightarrow \omega$ que domina las funciones de $(\omega^\alpha)^{M_\alpha}$. Además, si $\psi : \alpha \longrightarrow \omega$ es una función biyectiva y $\Phi : \mathbb{D}_\alpha \longrightarrow \mathbb{D}'_\alpha$ está definida por $\Phi(s, f) = (s \circ (\Phi\restriction\Phi^{-1}(|s|)), f \circ \Phi)$, entonces es fácil ver que Φ es un embebimiento denso. Desde que $\mathbb{P}\restriction L_\alpha * \mathbb{D}_\alpha \cong \mathbb{P}\restriction(L_\alpha \cup \{\alpha\}) \lessdot \mathbb{P}\restriction L$, G induce un genérico G_α de $\mathbb{D}_\alpha$ y a la vez G_α induce un genérico H_α de $\mathbb{D}'_\alpha$. Definimos $f_\alpha = \bigcup dom(H_\alpha) \in M[G]$. Veamos que $\{f_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ es una sucesión $\diamondsuit_{\mathfrak{d}}$ en $M[G]$. Sea $g \in (\omega^{\omega_1})^{M[G]}$. Usando el Teorema 69 definimos $\beta_\alpha \geq \alpha$ tal que $\dot{g}\restriction\alpha$ es un $\mathbb{P}\restriction L_{\beta_\alpha}$-nombre para $g\restriction\alpha$, $\alpha < \omega_1$. Definimos $\alpha = Sup_{n\in\omega}\{\alpha_n\}$ donde $\alpha_0 = \omega$ y $\alpha_{n+1} = \beta_{\alpha_n}$. Entonces, a partir de los nombres $\dot{g}\restriction\alpha_n$, podemos construir un $\mathbb{P}\restriction L_\alpha$-nombre para $g\restriction\alpha$. En consecuencia $g\restriction\alpha \in M_\alpha$ y así $f_\alpha \geq^* g\restriction\alpha$. ■

4.2. CON$(cf(\mathfrak{a}) = \omega)$

En los modelos que hemos estudiado hasta ahora $\mathfrak{a}$ ha sido un cardinal regular no contable. Brendle en [2] modificó la plantilla usada para probar el Teorema 89 para añadir una familia con tamaño de cofinalidad contable, por ejemplo ω_ω, y poder destruir familias mad de tamaño más pequeño usando la técnica de isomorfismo de nombres. En el Capítulo 2 (ver *Añadiendo una familia mad*) definimos el orden $\mathbb{M}_\kappa$, el cual añade una familia mad de tamaño κ si κ es regular no contable. La idea de Brendle es incorporar el orden $\mathbb{M}_{\omega_\omega}$ en una plantilla, es decir, no solamente usar coordenadas del forcing de Hechler sino también coordenadas del forcing $\mathbb{M}_{\omega_\omega}$. Notemos que usando solamente $\mathbb{M}_{\omega_\omega}$ no necesariamente se añade una familia *mad* de tamaño ω_ω (pues ω_ω no es regular). Sin embargo más adelante veremos que el hecho de que el orden L de la plantilla tenga cofinalidad no enumerable garantiza que se añada una familia *mad* de tamaño ω_ω. [1] Para aplicar la técnica de isomorfismo de nombres necesitamos que no existan familias *mad* de tamaño ω_1. Brendle consigue esto haciendo que $\mathfrak{b} = \mathfrak{d} = \omega_2$ al añadir una ω_2-escala. A continuación presentamos el tipo de plantillas que nos interesan.

Definición 91 *Una plantilla (en este contexto) es una tripla $(L_{Hech}, L_{mad}, \mathcal{I})$ donde L_{Hech}, L_{mad} son disjuntos, $(L = L_{Hech} \cup L_{mad}, \leq)$ es un orden lineal e $\mathcal{I}$ es una familia de subconjuntos de L que satisface lo siguiente:*

1. *$\emptyset, L \in \mathcal{I}$.*

[1] En tal caso los nombres de reales se acotan similarmente a como se hace en $\mathbb{M}_\kappa$, para κ regular.

2. *Si $A, B \in \mathcal{I}$, entonces $A \cup B, A \cap B \in \mathcal{I}$.*

3. *Si $x \in L_{Hech}$ e $y \in L_x$, entonces existe $A \in \mathcal{I} \cap \mathcal{P}(L_x)$ tal que $y \in A$.*

4. *Si $A \in \mathcal{I}$ y $x \in L_{Hech} \setminus A$ entonces $A \cap L_x \in \mathcal{I}$.*

5. *El orden $(\mathcal{I} \restriction L_{Hech}, \subseteq)$ está bien fundamentado.*

6. *Si $A \in \mathcal{I}$ entonces A es cerrado, es decir, si $x \in A$ entonces $L_x \cap L_{mad} \subseteq A$.*

En el Capítulo 3 discutimos que definir una iteración de forcing de Hechler en algunos casos puede carecer de sentido (ver Teorema 59). Por ello en la definición que acabamos de dar aún nos interesa preservar la buena fundamentación en la parte que solamente involucra las coordenadas del forcing de Hechler. Gracias a la propiedad 5 de la anterior definición podemos definir una función de profundidad $Dp : \mathcal{I} \longrightarrow On$ por $Dp(A) = 0$ si y sólo si $A \subseteq L_{mad}$ y $Dp(A) = Sup\{Dp(B) + 1 : B \in \mathcal{I}, B \cap L_{Hech} \subsetneq A \cap L_{Hech}\}$ si $A \cap L_{Hech} \neq \emptyset$. Para $A \subseteq L$ definimos la operación clausura como $cl(A) = A \cup \bigcup_{x \in A}(L_x \cap L_{mad})$. Claramente $cl(A)$ es cerrado en el sentido de la propiedad 6.

Ejemplo 92 *A continuación damos ejemplos de la Definición 91.*

- *Tomemos $L = \mu$ cardinal infinito y sea $\mu = L_{mad} \cup L_{Hech}$ una partición en conjuntos cofinales de μ. Sea $\mathcal{I} = \mu + 1$. Entonces $(L, \mathcal{I})$ es una plantilla.*

- *Sea $(L, \leq)$ un orden total y $L = L_{mad} \cup L_{Hech}$ una partición de L. Defina $\mathcal{I} = \{cl(A) : A \subseteq L, |A| < \omega\}$. Entonces $(L, \mathcal{I})$ es una plantilla.*

Ahora definimos una iteración sobre una plantilla que satisface la Definición 91.

Definición 93 *Sea $(L, \mathcal{I})$ una plantilla con función de profundidad Dp. Definimos para cada $A \in \mathcal{I}$ el orden $\mathbb{P} \restriction (A, \mathcal{I})$ (por simplicidad $\mathbb{P} \restriction A$) haciendo recursión en $Dp(A)$.*

1. *Supongamos que $Dp(A) = 0$ (es decir, $A \subseteq L_{mad}$). Entonces $\mathbb{P} \restriction A = \{p \in Fn(A, 2^{<\omega}) : p(z) \in 2^{n^p}$ para cada $z \in dom(p)\}$. Para $q, p \in \mathbb{P} \restriction A$ definimos $q \leq_{\mathbb{P} \restriction A} p$ si:*

   - *$dom(q) \supseteq dom(p)$.*
   - *$n^q \geq n^p$, $p(z) \subseteq q(z)$ para $z \in dom(p)$ y $|\{z \in dom(p) : q(z)(i) = 1\}| \leq 1$ para $i \in n^q \setminus n^p$.*[2]

2. *Suponga que $Dp(A) \neq 0$ (es decir, $A \cap L_{Hech} \neq \emptyset$). Entonces el conjunto $\mathbb{P} \restriction A$ consiste de todas las funciones finitas p tales que:*

   - *$dom(p) \subseteq A$.*
   - *Existe $n^p \in \omega$ tal que $p(z) \in 2^{n^p}$ para cada $z \in dom(p) \cap L_{mad}$.*

[2]Notemos que $\mathbb{P} \restriction A \cong \mathbb{M}_{|A|}$.

- *Si* $x = max(dom(p) \cap L_{Hech})$ *entonces existe* $B \in \mathcal{I} \cap \mathcal{P}(A \cap L_x)$ *tal que* $p{\restriction}L_x \in \mathbb{P}{\restriction}B$, $p(x) = (s^p_x, \dot{f}^p_x)$ *para* $s^p_x \in \omega^{<\omega}$, $\dot{f}^p_x$ *es un* $\mathbb{P}{\restriction}B$-*nombre para un real y además* $p{\restriction}L_x \Vdash_{\mathbb{P}{\restriction}B} s^p_x \subseteq \dot{f}^p_x$.

Para $q, p \in \mathbb{P}{\restriction}A$ *definimos* $q \leq_{\mathbb{P}{\restriction}A} p$ *si:*

- $dom(q) \supseteq dom(p)$.
- $n^q \geq n^p$, $p(z) \subseteq q(z)$ *para* $z \in dom(p) \cap L_{mad}$ *y* $|\{z \in dom(p) \cap L_{mad} : q(z)(i) = 1\}| \leq 1$ *para* $i \in n^q \backslash n^p$.
- *Si* $y = max(dom(q) \cap L_{Hech}), x = max(dom(p) \cap L_{Hech})$ *entonces* $y \geq x$ *y existe* $B \in \mathcal{I} \cap \mathcal{P}(A \cap L_y)$ *tal que* $p{\restriction}L_y, q{\restriction}L_y \in \mathbb{P}{\restriction}B$, $q{\restriction}L_y \leq_{\mathbb{P}{\restriction}B} p{\restriction}L_y$ *y si* $x = y$ *entonces* $q{\restriction}L_y \Vdash_{\mathbb{P}{\restriction}B} q(x) \leq_{\mathbb{D}} p(x)$ *(ver Definición 62).*

A continuación enunciamos las principales propiedades de las plantillas en este contexto. Tales propiedades son análogas a las propiedades de las plantillas indexadas que enunciamos en el Capítulo 3 (para sus pruebas ver [2]).

Teorema 94 *Sea* $(L, \mathcal{I})$ *una plantilla. Entonces se tiene:*

1. *Si* $B \in \mathcal{I}$ *y* $A \subseteq B$ *es cerrado, entonces* $\mathbb{P}{\restriction}A \lessdot \mathbb{P}{\restriction}B$. *Aún más, cada* $p \in \mathbb{P}{\restriction}B$ *tiene una reducción canónica* $p_0 \in \mathbb{P}{\restriction}A$ *tal que:*
   - $dom(p_0) = dom(p) \cap A$.
   - $s^{p_0}_x = s^p_x$ *para cada* $x \in dom(p_0) \cap L_{Hech}$ *y* $p_0(x) = p(x)$ *para cada* $x \in dom(p_0) \cap L_{mad}$.
2. *Si* $A \in \mathcal{I}$ *entonces* $\mathbb{P}{\restriction}A$ *es ccc.*
3. *Sean* $p \in \mathbb{P}{\restriction}L$ *y* $\dot{f}$ *un* $\mathbb{P}{\restriction}L$-*nombre de un real. Entonces existe* $A \subseteq L$ *contable tal que* $p \in \mathbb{P}{\restriction}cl(A)$ *y* $\dot{f}$ *es un* $\mathbb{P}{\restriction}cl(A)$-*nombre.*
4. *Sea* $x \in L_{Hech}$ *y* $A \in \mathcal{I} \cap \mathcal{P}(L_x)$. *Entonces* $\mathbb{P}{\restriction}A * \dot{\mathbb{D}}_x \lessdot \mathbb{P}{\restriction}cl(A \cup \{x\})$, *donde* $\dot{\mathbb{D}}_x$ *es el forcing de Hechler de* $M^{\mathbb{P}{\restriction}A}$.
5. *Suponga que* $\mu \subseteq L_{Hech}$ *es regular no contable,* μ *es cofinal en* L *y* $L_\alpha \in \mathcal{I}$ *para cada* $\alpha < \mu$. *Entonces* $\Vdash_{\mathbb{P}{\restriction}L} \mathfrak{b} = \mathfrak{d} = \mu$.
6. *Suponga que* L *tiene cofinalidad no contable y* L_{mad} *es cofinal en* L. *Entonces* $\mathbb{P}{\restriction}L$ *añade una familia mad de tamaño* $|L_{mad}|$.

Las pruebas de las 5 primeras propiedades son análogas a las propiedades de las plantillas indexadas. La prueba de la última propiedad es análoga a la prueba de que $\mathbb{M}_\kappa$ añade una familia de tamaño κ (para κ regular no contable).

Ahora definimos la plantilla que nos permite mostrar $CON(cf(\mathfrak{a}) = \omega)$. Sea $\mu \geq \omega_2$ cardinal regular y $\lambda > \mu$ cardinal con $cf(\lambda) = \omega$. Supongamos que $\lambda = Sup\{\lambda_n : n \in \omega\}$ donde $\{\lambda_n : n \in \omega\}$ es una sucesión creciente de cardinales regulares tal que $\lambda_n^\omega = \lambda_n$ para cada $n \in \omega$, con $\lambda_0 = \mu$. También supongamos que $\kappa^\omega < \lambda_n$ para cada $\kappa < \lambda_n$. Tomemos particiones $\lambda_n^- = \bigcup_{\alpha<\omega_1} S^\alpha_n$ para cada $n \in \omega$ tales que S^α_n es coinicial en λ_n^- para $\alpha < \omega_1$ y $S^\alpha_n \cap \lambda_m^- = S^\alpha_m$ si $m < n$. Definimos $L(\lambda)$ como el conjunto de $x \in \bar{\lambda}^{<\omega}$ que satisfacen lo siguiente:

- $x(0) \in \mu$.
- $x(n) \in \bar{\lambda}_n$ para $0 < n < |x| - 1 = max(dom(x))$.
- Suponga que $|x| \geq 2$. Entonces si $x(|x|-2) \in \lambda_{|x|-2}$ tenemos $x(|x|-1) \in \lambda^-_{|x|-1} \cup \lambda$, o si $x(|x|-2) \in \lambda^-_{|x|-2}$ tenemos $x(|x|-1) \in \lambda_{|x|-1} \cup \lambda^-$.

Tomemos $L(\lambda)_{Hech} = \{x \in L : |x| = 1 \text{ o } x(|x|-1) \in \bar{\lambda}_{|x|-1}\}$ y $L(\lambda)_{mad} = L \backslash L_{Hech}$. Ordenamos $L(\lambda)$ por el orden semi-lexicográfico definido en la sección anterior. La definición de que $x \in L(\lambda)$ es relevante también es análoga a la definición de la sección anterior, y también definimos $\mathcal{J}_x$ como el intervalo $[x \restriction (|x|-1), x)$ para x relevante. Tomamos $\mathcal{I}(\lambda)$ como la colección de las uniones finitas de los siguientes elementos:

- L_α para $\alpha \leq \mu$.
- $cl(\mathcal{J}_x)$ para cada x relevante.
- $cl(\{x\})$ para $x \in L_{Hech}$.
- $L_x \cap L_{mad}$ para $x \in L_{Hech}$.

En [2] se muestra que $(L(\lambda), \mathcal{I}(\lambda))$ es una plantilla en el sentido de la Definición 91. Identificando μ con $\{x \in L : |x| = 1\}$, tenemos que μ es cofinal en L. Además, como hemos incluido L_α para $\alpha \leq \mu$, tenemos $\Vdash_{\mathbb{P} \restriction L} \mathfrak{a} \geq \mathfrak{b} = \mu \geq \omega_2$ (ver 5 en el Teorema 94). Por otra parte la cofinalidad de L no es enumerable porque la cofinalidad de cada λ_n tampoco lo es. También es fácil ver que L_{mad} es cofinal en L. Entonces, por 6 del Teorema 94 tenemos que $\Vdash_{\mathbb{P} \restriction L} \mathfrak{a} \leq \lambda$, pues se ha añadido una familia mad de tamaño $|L_{mad}| = \lambda$. Por la definición de la plantilla podemos aplicar la técnica de isomorfismo de nombre y ver que no hay familias mad de tamaño menor que λ. Lo anterior se expresa en el siguiente teorema.

Teorema 95 *Asuma CH y sea λ un cardinal con $cf(\lambda) = \omega$ satisfaciendo lo que require la construcción de $(L(\lambda), \mathcal{I}(\lambda))$. Entonces $\Vdash_{\mathbb{P} \restriction L} \mathfrak{a} = \lambda$.*

Bibliografía

[1] Jörg Brendle, “Mad families and iteration theory”, *Logic and Algebra* Vol. 302 (2002): 1-32.

[2] Jörg Brendle, “The almost disjointness number may have countable cofinality”, *Transactions of the American Mathematical Society* Vol. 355 (2003): 2633-2649.

[3] Saharon Shelah, “Two cardinal invariants of the continuum ($\mathfrak{d} < \mathfrak{a}$) and FS linearly ordered iterated Forcing ”, *Acta Mathematica* Vol. 192-2 (2004): 187-223.

[4] Saharon Shelah, *Proper and improper forcing*, Berlin: Springer, 1998.

[5] M. Foreman, A. Kanamori, *Handbook of Set Theory*, London: Springer, 2010.

[6] Kenneth Kunen, *Set Theory*, London: Studies in Logic, 2011.

[7] Kenneth Kunen, *Set Theory, an introduction to independence proofs*, Amsterdam: North-Holland, 1980.

[8] M. Godstern, H. Judah, *The Incompleteness Phenomenon*, Wellesley: A K Peters, 1995.

[9] Martin Goldstern, “Tools for your forcing construction”, *Israel Mathematical Conference Proceedings* Vol. 06 (1992): 307-362.

[10] Elliott Pearl, *Open problems in topology 2*, Toronto: Elsevier, 2007.

[11] Thomas Jech, *Set Theory*, San Diego: Academic Press, 1978.