Pensamiento algebraico: Una experiencia de aula, apoyada por TIC, sobre ecuaciones lineales con estudiantes de grado noveno.

Diana Marcela Rincón Hernández
Maestría en Educación
Ángela María Restrepo Santamaría, PhD
Directora de Tesis
Gary Alberto Cifuentes Álvarez
Codirector de Tesis
Universidad de los Andes
Centro de Investigación y Formación en Educación CIFE
Mayo 2013

Contenido

0. Resumen 7
1. El problema 8
1.1. Introducción 8
1.2. Justificación 10
1.3. Objetivos de la investigación 14
1.3.1. Objetivo General 14
1.3.2. Objetivos específicos 14
2. Revisión bibliográfica 15
2.1. Enseñanza del álgebra 15
2.1.1. Estándares para la enseñanza del álgebra 15
2.1.2.1. Resolución de problemas 18
2.1.2.2. Comunicación 18
2.1.3. Componentes del pensamiento algebraico 19
2.1.3.1. Niveles cognitivos del razonamiento algebraico 19
2.1.3.2. Generalización 21
2.1.3.3. Igualdad 21
2.1.3.4. Paso del lenguaje cotidiano al algebraico 22
2.1.4. Retroalimentación del aprendizaje en matemáticas 22
2.2. Recursos Virtuales en Álgebra 23
2.3. Recursos para apoyar una secuencia didáctica 25
2.3.1. Ambiente Virtual de Aprendizaje (AVA) 25
2.3.2. Objeto virtual de aprendizaje (OVA) 27
2.4. Educación matemática en situaciones de conflicto social y político 29
2.5. Preguntas de investigación 30
3. Diseño del estudio 32
3.1. Investigación – Acción (IA) 33
3.2. Fases de la investigación 35
3.3. Innovación 37
3.3.1. Diagnóstico 37

3.3.2. Descripción de la innovación/intervención 40
3.4. Contexto 43
3.4.1. Participantes 45
3.5. Instrumentos de recolección de datos 46
3.5.1. Matriz de análisis de recursos tecnológicos 46
3.5.2. Encuesta inicial 47
3.5.3. Evaluación inicial y final 47
3.5.4. Diario de Reflexión 48
3.5.5. Instrumentos/Objetivos y Preguntas 48
3.6. Descripción del proceso de análisis 50
3.7. Validez 51
4. Hallazgos 55
4.1. Análisis y selección de recursos TIC con sentido pedagógico 55
4.1.1. Estado del arte 55
4.1.2. Análisis del uso de los recursos TIC en una implementación 62
4.1.2.1. Selección de recursos 63
4.1.2.2. Uso de los recursos 70
4.2. Diseño e implementación de una propuesta didáctica 75
4.2.1. Fase diagnóstico 75
4.2.2. Fase diseño 77
4.2.3. Fase implementación 82
4.3. Evaluación del impacto de la implementación 85
4.3.1. Impacto en el aprendizaje 85
4.3.1.1. Análisis de los resultados por componente 86
4.3.1.2. Comparación de los resultados de las pruebas inicial y final 108
4.3.2. Impacto en la enseñanza 111
4.4. Contexto socio-cultural 114
5. Discusión 120
Conclusiones 127
Referencias ..... **¡Error! Marcador no definido.**
Lista de referencias 131

Anexos..... 135

Índice de gráficos

Gráfico 1. Estructura metodológica de la investigación. ..... **¡Error! Marcador no definido.**
Gráfico 2. Secuencia de aprendizaje. 41
Gráfico 3. Respuesta del Estudiante 4 en el momento 2 de la actividad 2..... 72
Gráfico 4. Desempeño de los estudiantes en la pregunta 1, entre la prueba inicial y la final. 87
Gráfico 5. Desempeño de los estudiantes en la pregunta 2, entre la prueba inicial y la final. 88
Gráfico 6. Desempeño de los estudiantes en la pregunta 3, entre la prueba inicial y la final. 91
Gráfico 7. Desempeño de los estudiantes en la pregunta 3, entre la prueba inicial y la final. 94
Gráfico 8. Desempeño de los estudiantes en las preguntas 5a y 5b, entre la prueba inicial y la final..... 96
Gráfico 9. Desempeño de los estudiantes en la pregunta 6, entre la prueba inicial y la final. 98
Gráfico 10. Desempeño de los estudiantes en las preguntas 7A y 7B, entre la prueba inicial y la final..... 101
Gráfico 11. Desempeño de los estudiantes en las preguntas 8A y 8 B, entre la prueba inicial y la final..... 104
Gráfico 12. Desempeño de los estudiantes en las preguntas 10 y 11, entre la prueba inicial y la final..... 106
Gráfico 13. Desempeño de las pruebas Inicial y Final de los seis estudiantes..... **¡Error! Marcador no definido.**

Índice de tablas

Tabla 1. Interpretaciones de la letra propuestas por Kuchemann (1981)..... 20
Tabla 2. Sesiones de la Intervención..... 42
Tabla 3. Momentos de clase. 43
Tabla 4. Matriz de análisis de recursos tecnológicos..... 46
Tabla 5. Datos estadísticos de las pruebas inicial y final. 109

Índice de Anexos

Anexo 1. Encuesta de Expectativas de aprendizaje y Uso de Tecnología para Estudiantes.
Anexo 2. Evaluación diagnóstico sobre algebra para Estudiantes.
Anexo 3. Entrevista al docente encargado del curso en el área de matemáticas.
Anexo 4. Actividad Lenguaje Algebraico.
Anexo 4.1. Juego lo tuyo y lo mío.
Anexo 4.2. Guía Juego lo tuyo y lo mío.
Anexo 4.3. Tarea. Traducción entre lenguajes.
Anexo 4.4. Guía Descubriendo errores.
Anexo 5. Actividad de aprendizaje Equivalencias.
Anexo 5.1. Exploración con las balanzas numéricas.
Anexo 5.2. Guía Exploración con las balanzas de formas.
Anexo 5.3. Guía Análisis de propiedades de las equivalencias con números.
Anexo 5.4. Guía Análisis de equivalencias con expresiones algebraicas.
Anexo 6. Actividad de aprendizaje Ecuaciones lineales.
Anexo 6.1. Guía Exploración de problemas con ecuaciones simples.
Anexo 6.2. Solución de situaciones con Ecuaciones simples.
Anexo 7. Situaciones que involucran números enteros (operaciones y jerarquía) y Operaciones básicas con expresiones algebraicas.
Anexo 8. Niveles de valoración para analizar los desempeños de los estudiantes en las pruebas Inicial y Final.
Anexo 9. Ítems analizados en la matriz de recursos.
Anexo 10. Estado del arte de recursos virtuales para el desarrollo del pensamiento algebraico.
Anexo 10.1. Recurso Algebra Tiles.
Anexo 10.2. Recurso Factorize.
Anexo 10.3. Recurso Pan Balance – Expressions.
Anexo 10.4. Recurso Pan Balance – Number.
Anexo 10.5. Recurso Pan Balance – Shapes.
Anexo 10.6. Recurso Proof Without Words: Completing the Square.
Anexo 10.7. Recurso Producto de Binomios.
Anexo 10.8. Recurso Graficador de funciones.
Anexo 10.9. Recurso Torres de Hanoi.
Anexo 10.10. Recurso Balanza Algebraica.
Anexo 10.11. Recurso Balanza Algebraica con negativos.
Anexo 11. Resultados de la encuesta de caracterización de estudiantes y prueba inicial.
Anexo 12. Reflexiones por sesión de clase.
Anexo 13. Análisis comparativo por estudiante entre el desempeño de las pruebas Inicial y Final.
Anexo 14. Primera versión del diseño de la intervención.

Sólo puedo dedicarle este resultado a aquella persona que con su compromiso, amor y dedicación logró darme los elementos para aprender a cumplir mis metas, la única que incondicionalmente siempre estará dispuesta a brindarme su apoyo y cariño …

FLOR MARINA

Agradecimientos

Agradezco a mi **familia** por su comprensión en cuanto a la disminución de tiempo dedicado, y a la confianza diaria brindada, sin su apoyo y tolerancia todo hubiese sido más difícil.

Un agradecimiento muy especial a los docentes **Ángela María Restrepo** y **Gary Cifuentes** por ser excelentes guías de procesos, ya que gracias a su dedicación, tolerancia, preocupación, conocimiento y empatía, finalmente se logró concluir este trabajo con excelentes resultados.

Agradezco también por sus aportes académicos a **Pablo Flores, María Isabel Ramírez**, los **docentes de la maestría** y **Carlos Merchán Basabe**, por sus aportes, discusiones, orientaciones, consejos y correcciones

Por sus aportes técnicos le agradezco a **Luis José Forero Ruiz** (Rector IED Villas del Progreso), **Fabiola Ballén Triana** (Rectora IED José Francisco Socarrás), **Andrés Castañeda** (Docente de Tecnología de IED José Francisco Socarrás), **Gladys Méndez** (Coordinadora de IED Villas del Progreso) y **otros docentes** de la IED José Francisco Socarrás, ya que me colaboraron con la consecución de espacios, tiempos, e instrumentos.

En lo logístico, agradezco especialmente a **Harold Velosa** por el desarrollo del OVA la Balanza 2, uno de los elementos usados como apoyo a la enseñanza en este estudio.

Finalmente un agradecimiento especial por sus aportes sentimentales a Carolina **Lizarazo, Carolina Huertas, María Fernanda Mora, Oscar Quintero** y Amig@s y confidentes por su apoyo, tolerancia, comprensión y consejo.

0. Resumen

La presente investigación estuvo orientada a reconocer e impactar positivamente los procesos cognitivos de estudiantes de grado noveno, relacionados con el razonamiento algebraico, a partir del diseño e implementación de una secuencia didáctica apoyada por recursos TIC que fueron encontrados y seleccionados en la web mediante criterios analíticos. El estudio correspondió a un diseño de investigación – acción realizado en cuatro fases (algunas simultáneas): reconocimiento del contexto, diseño, implementación y análisis. Los principales resultados se evidenciaron en los cambios positivos presentados por los estudiantes frente al desarrollo de habilidades en el razonamiento algebraico. Y se presentaron bajo el análisis de cuatro categorías: recursos TIC, procesos de diseño e implementación, impacto en los procesos de aprendizaje - enseñanza y el contexto social.

Palabras claves:

Razonamiento algebraico, ambiente de aprendizaje apoyado por TIC, ecuaciones lineales, metodología investigación acción.

1. El problema

1.1. Introducción

El presente estudio hizo parte de mi proceso formativo llevado a cabo desde la Maestría en Educación de la Universidad de los Andes. Con esta investigación pretendí diseñar, implementar y evaluar una propuesta didáctica que involucrara los procesos de enseñanza - aprendizaje del razonamiento algebraico con estudiantes del grado noveno, apoyada por recursos TIC.

El uso que proyecté darle a las TIC en esta investigación obedeció al apoyo de los procesos pedagógicos dispuestos en la secuencia didáctica que aquí se presenta. El principal uso dado a la tecnología fue orientado hacia que los estudiantes, desde la manipulación de representaciones gráficas y simulaciones de los objetos matemáticos, llegasen a solucionar problemas mediante análisis de información, exploración de conjeturas, discusión entre pares y validación de conclusiones. La intervención giró en torno al tema "ecuaciones simples con números enteros" y fue implementada en el Colegio José Francisco Socarrás en el primer semestre del año 2012.

Este trabajo está organizado en cinco (5) capítulos. En el Capítulo I: *El Problema*. Se encuentra una explicación general respecto a la contextualización, situaciones y argumentos en los que se manifiestan las características que fundamentan el problema planteado en el presente documento, desde donde surgen los objetivos generales y específicos planteados. El capítulo II se titula *Referentes teóricos*. En esta sección se presentan los enfoques teóricos que fortalecieron el estudio, entre los cuales se encuentran: enseñanza del álgebra,

recursos didácticos para álgebra, ambientes de aprendizaje apoyados con tecnología y educación matemática en situaciones de conflicto social y político. En el Capítulo III: *Diseño de la intervención*, se presenta la metodología, fases de la investigación y la descripción de la intervención. El Capítulo IV: *Hallazgos y discusión.* Se divide en cuatro apartados relacionados con [1] los recursos tecnológicos: el análisis, la selección, sus potencialidades y dificultades en este estudio. También se evidenció el proceso de la intervención, específicamente en [2] el diseño e implementación, luego se encuentra el [3] desempeño de los estudiantes, el cual se analizó desde dos enfoques: el impacto en su proceso de aprendizaje y el impacto en mi proceso de enseñanza. Posteriormente, hice un reconocimiento del [4] contexto social, que influyó y modificó algunos elementos de la propuesta. Finalmente el Capítulo V: *Conclusiones*. En éste se determina el impacto en el aprendizaje de los estudiantes cuando abordan la solución de problemas que involucran las ecuaciones simples, a través de actividades dispuestas en un ambiente virtual de aprendizaje; así mismo, se presenta el impacto de la propuesta en mis procesos pedagógicos y las reflexiones logradas sobre el uso pertinente de la tecnología como apoyo a los procesos de enseñanza – aprendizaje, el contexto socio-político y su afectación a los procesos académicos.

Las fases del estudio se desarrollaron de la siguiente manera: la primera correspondió al reconocimiento del contexto desde tres perspectivas: el nivel cognitivo de los estudiantes, los Objetos Virtuales de Aprendizaje (OVA) encontrados en la web y relacionados con álgebra, y la revisión bibliográfica en documentos que aportaron a esta investigación. La segunda fase estuvo orientada hacia el diseño; en ella diseñé los instrumentos de

recolección de información, además del Ambiente Virtual de Aprendizaje (AVA) con el fin de afianzar el razonamiento algebraico de los estudiantes. La tercera fase fue la implementación, es decir, realicé la aplicación de la secuencia con los 39 estudiantes de grado noveno. Finalmente, en la última fase realicé el proceso de análisis y evaluación de la intervención, donde interpreté los datos recolectados y evalúe el impacto de la intervención en el aprendizaje de los estudiantes.

Los principales resultados del estudio se evidenciaron en los cambios positivos presentados por los estudiantes frente al desarrollo de habilidades en el razonamiento algebraico, tales como: el uso de la letra, las equivalencias y la comunicación de ideas algebraicas. En cuanto a mi proceso de enseñanza, el diseño, implementación y evaluación de esta propuesta didáctica me permitieron reflexionar en diferentes campos de mi desempeño pedagógico, como por ejemplo, los objetivos de aprendizaje que planteo, así como el tipo de actividades que propongo a los estudiantes. Este estudio también me brindó información sobre el contexto social y cómo afecta el proceso de enseñanza, dejando entonces elementos para reflexionar sobre su impacto.

1.2. Justificación

Al iniciar esta investigación, traía mi experiencia en el aula como docente a cargo de los niveles octavo y noveno durante varios años, grados en los cuales, particularmente en Colombia, se inicia el proceso de transición desde la aritmética hacia el álgebra –indicación sugerida por los Estándares Nacionales de Matemáticas (MEN, 2006)–. Durante mi

experiencia previa, se me presentaron muchos inconvenientes porque las acciones pedagógicas planeadas y realizadas no presentaban mayor impacto positivo en los aprendizajes de mis estudiantes. Por otro lado, durante la misma época tuve, desde la parte académica, un fuerte contacto con los recursos tecnológicos como apoyo a los procesos de enseñanza desde dónde he notado sus ventajas y desventajas. Con este estudio pretendí entrelazar las dos ideas: por un lado, las dificultades de mis estudiantes al aprender el álgebra, y por el otro, el uso de la tecnología como apoyo a la educación; a partir de la reflexión, el análisis y la práctica, pretendía lograr plantear posibles soluciones a las dificultades de mi aula, y que en lo posible sirvieran como un ejemplo para otras experiencias con ese mismo escenario.

La importancia que se supone adquiere el álgebra para los estudiantes, viene dada por dos líneas: la primera, como un elemento que es necesario aprender a usar para apoyar a otros conceptos matemáticos; la segunda, como un lenguaje novedoso que aporta a la comunicación desde las matemáticas (Esquinas, 2009). Desde este sentido, abordar la enseñanza y el aprendizaje del álgebra toma un papel de gran relevancia, en cuanto a las bondades que su desarrollo le va a brindar a cada estudiante.

Por otra parte, según Kieran (1989) “los adolescentes, al comenzar el estudio del álgebra, traen consigo las nociones y los enfoques que usaban en aritmética. Sin embargo, el álgebra no es simplemente una generalización de la aritmética” (p. 229), en ese sentido la autora refiere la importancia que el maestro relacione las posibles nociones, enfoques o errores

que puedan presentar los estudiantes, además de sus necesidades, con la planeación de situaciones de aprendizaje para fomentar el desarrollo del pensamiento algebraico.

Específicamente, los estudiantes de la Institución Educativa Distrital (IED) José Francisco Socarrás del grado noveno jornada tarde, mostraron un escaso uso de sus elementos conceptuales, procedimentales y habilidades (ver descripción del contexto, apartado 3.4 Contexto), necesarias para el desarrollo de su pensamiento algebraico; estos contenidos son propuestos para el grado noveno, tanto por los Estándares Curriculares en Matemáticas del Ministerio de Educación Nacional (2006), como por el currículo del colegio (2012). Además, estos estudiantes presentaban dificultades sociales, económicas y culturales, de acuerdo con su contexto, relacionadas con el poco acompañamiento familiar en el espacio extracurricular y un bajo nivel de autonomía para responder a sus compromisos académicos, lo cual posiblemente dificulta su proceso de formación en el área de matemáticas.

Considero como una posibilidad del maestro para complementar su trabajo la búsqueda de recursos ya construidos, los cuales les servirán para adoptarlos o adaptarlos en su aula. Algunos de los recursos usados con mayor frecuencia en la actualidad, son los recursos encontrados en la web; éstos pueden ir desde aplicaciones muy sencillas, hasta Objetos Virtuales de Aprendizaje (OVA) que se caracterizan por ser autocontenidos y muchas veces interactivos (no sólo informativos). En la última década, tanto investigadores como docentes, se han preocupado por desarrollar, implementar y publicar recursos posibles de

emplear en el proceso de aprendizaje matemático, y específicamente, en la enseñanza del álgebra. Sin embargo, una de las dificultades de consulta para los maestros interesados en usar estos elementos, es que la mayoría de estos recursos no especifican los objetivos, fortalezas y debilidades, entre otros datos que serían de gran utilidad para su aplicación.

Lo anterior puede generar un trabajo desgastante para el docente al tener que pasar una gran cantidad de tiempo haciendo consultas con el fin de encontrar recursos de calidad. Algunos de los maestros del CED Villas del Progreso narraron que en su experiencia de búsqueda de recursos en internet para usarlos en el aula, pasan en promedio, más de tres horas en la red, y en ocasiones no logran encontrar alguno que pueda cubrir las necesidades requeridas (Comunicación personal, 11 de agosto, 2011).

En una primera búsqueda de recursos relacionados con álgebra en la web (8 recursos analizando concepto, habilidad o destreza que propone desarrollar, objetivos, fortalezas, debilidades), se observó que la mayoría de las herramientas presentaban instrucciones de uso que inicialmente no facilitaron la interacción; la mitad de los recursos analizados no presentan objetivos, ni indicaciones didácticas o pedagógicas de uso; además, son recursos que no se han encontrado en un ambiente integral, desde el cual se obtuviera información en este sentido.

Intentando dar orientaciones, opciones o nuevas reflexiones sobre estas dos situaciones – dificultades en la enseñanza-aprendizaje del álgebra y el uso de las herramientas tecnológicas como apoyo a los procesos de enseñanza-aprendizaje del álgebra – surgió el presente estudio orientado por los objetivos que se presentan en el siguiente apartado.

1.3. Objetivos de la investigación

1.3.1. Objetivo General

Diseñar, implementar y evaluar una propuesta didáctica que involucre los procesos de enseñanza-aprendizaje del razonamiento algebraico con estudiantes del grado noveno de la Institución Educativa Distrital José Francisco Socarrás, apoyada por recursos TIC.

1.3.2. Objetivos específicos

1. Elaborar un estado del arte de recursos TIC en la web que sean utilizados en procesos de enseñanza-aprendizaje del álgebra.
2. Diseñar e implementar una propuesta didáctica que fortalezca los procesos de enseñanza-aprendizaje del álgebra apoyada por recursos TIC, con estudiantes del grado noveno de la Institución Educativa Distrital José Francisco Socarrás.
3. Evaluar el impacto de la implementación de la propuesta didáctica apoyada por recursos TIC en los procesos de enseñanza-aprendizaje del álgebra de los estudiantes del grado noveno de la Institución Educativa Distrital José Francisco Socarrás.

2. Revisión bibliográfica

En esta sección presento los enfoques teóricos que me ayudaron a enmarcar y fortalecer el estudio. Esta revisión conceptual la realicé desde cuatro enfoques: [1] enseñanza del álgebra: niveles cognitivos, dificultades o errores en el aprendizaje del álgebra, componentes del razonamiento algebraico y retroalimentación; [2] recursos didácticos para álgebra, [3] recursos tecnológicos para el apoyo de procesos de aprendizaje: ambientes de aprendizaje apoyados con tecnología y objetos virtuales de aprendizaje y finalmente, [4] educación matemática en situaciones de conflicto social y político.

2.1. Enseñanza del álgebra

En la planeación, implementación y evaluación de cualquier actividad de enseñanza - aprendizaje se debe reflexionar sobre diversas preguntas que facilitan este tipo de procesos, como *¿qué?, ¿cómo?, ¿cuándo?, ¿con qué?, ¿para quién?, ¿para qué enseñar?* (Marín, Flores y Estupiñan, 2006); éstas son las principales preguntas que busqué argumentar a través de los siguientes apartados sobre el razonamiento algebraico para grado noveno, con el fin de apoyar la secuencia didáctica que se pretendió plantear.

2.1.1. Estándares para la enseñanza del álgebra

Con el fin de responder a las preguntas *qué enseñar* y *para qué enseñar* el álgebra, hay dos elementos fundamentales para tener en cuenta en el desarrollo del pensamiento algebraico: el razonamiento algebraico y el concepto de función. En el caso del primero, –elemento

base para esta tesis– el razonamiento algebraico "implica representar, generalizar y formalizar patrones y regularidades en cualquier aspecto de las matemáticas" (Godino y Font, 2003, p. 9). En esta misma línea, los estándares del NCTM (2000) proponen para el desarrollo del razonamiento algebraico cuatro capacidades generales de las cual seleccioné como elemento para delimitar el qué enseñar diferentes estándares y logros de algunas instituciones que brindan orientaciones para organizar el trabajo pedagógico en matemáticas:

- "usar modelos matemáticos para representar y comprender relaciones cuantitativas" y la capacidad especifica relacionada es "modelizar y resolver problemas contextualizados usando representaciones diversas, como gráficas, tablas y ecuaciones" (NCTM, 2000, p. 226);
- usar procesos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas (MEN, 1998, p. 87);
- comprender el concepto de función y ecuación lineal para resolver situaciones problema (Documento institucional, 2012).

Estos estándares se usaron en esta investigación en tres momentos: inicialmente para categorizar los recursos encontrados en la web sobre enseñanza del álgebra. Algunos de los elementos analizados respecto a cada recurso fueron el tema, los objetivos y las habilidades que proponía desarrollar; por esta razón se usaron los estándares para clasificarlos entre las herramientas tecnológicas que iban en el mismo camino que los estándares seleccionados. En un segundo momento, para el diseño y planteamiento de la secuencia didáctica que posteriormente fue implementada con estudiantes de grado noveno de la IED José

Francisco Socarrás, específicamente de estos estándares surgieron los objetivos general y específicos. Finalmente, los estándares se usaron para el análisis de los procesos de aprendizaje desarrollados por los estudiantes.

2.1.2. Competencia matemática

Durante el diseño de la propuesta didáctica surgió la necesidad de buscar elementos que la orientaran y organizaran, de este modo se tomó como elemento principal la resolución de problemas. Luego en el trascurso de la implementación surge la necesidad de documentar los resultados que presentaban los estudiantes, y por lo tanto se investiga sobre la competencia comunicación, al ser explicito el cambio de los estudiantes en esta parte.

Como antelación a las competencias específicas tomé como referente teórico la definición de competencia propuesta en los Estándares Curriculares colombianos: "como conjunto de conocimientos, habilidades, actitudes, comprensiones y disposiciones cognitivas, socioafectivas y psicomotoras apropiadamente relacionadas entre sí para facilitar el desempeño flexible, eficaz y con sentido de una actividad en contextos relativamente nuevos y retadores" (MEN, 2006, 49). La invitación que hacen instituciones como el MEN y el NCTM al proponer el desarrollo de la clase de matemáticas desde las competencias matemáticas en que como maestros generemos ambientes de aprendizaje enriquecidos posibilitando el avance de los estudiantes por los diferentes niveles de competencia, desde esta aserción se orientó la construcción de la propuesta.

2.1.2.1.Resolución de problemas

La resolución de problemas suele ser un elemento sugerido como organizador de currículo (NCTM, 2000; MEN, 2006), así se tomó en el diseño de esta intervención, puesto que genera que los estudiantes encuentren contextos más significativos para desempeñarse en matemáticas (Ibid., 2006). Algunas de las recomendaciones a tener en cuenta al usar la resolución de problemas como un organizador son:

- Usarlos para construir nuevos conocimientos.
- Usar problemas abiertos abiertos donde sea posible encontrar múltiples soluciones o tal vez ninguna.
- Usar variedad de estrategias de solución de problemas. (NCTM, Op cit. p.55)

2.1.2.2.Comunicación

La comunicación fue un elemento que surgió en el trascurso de la implementación de la intervención como un elemento preponderante en los resultados del aprendizaje de los estudiantes. La comunicación suele impactar positivamente en el aprendizaje de los estudiantes aportando: significado y permanencia de las ideas, desarrollo de la comprensión y la claridad, hacer conexiones entre otras (NCTM, Op cit.).

Para desarrollar la comunicación de los estudiantes se sugiere:

- Trabajar en ideas matemáticas que constituyan temas útiles de discusión. (NCTM, Op cit., p. 64)
- Estimular a los estudiantes a comunicar a otros los resultados. (Ibid.)

- Incentivar el hablar, escribir, leer y escuchar matemáticas. (Ibid.)

2.1.3. Componentes del pensamiento algebraico

El aspecto *¿qué enseñar?* se alimenta desde diferentes elementos, con los estándares y competencias esperadas, presentados en los ítems anteriores, y elementos más específicos como los componentes del pensamiento algebraico. Este apartado lo nutrí desde dos enfoques aquellos procesos que constituyen directamente el pensamiento algebraico y los procesos previos, para el primer grupo seleccioné: uso de la letra, generalización, igualdad, paso del lenguaje cotidiano al algebraico y solución de problemas que involucran las ecuaciones simples; en el segundo grupo definí: valor numérico de una expresión algebraica, simplificación de expresiones semejantes y multiplicación de expresiones algebraicas.

2.1.3.1.Niveles cognitivos del razonamiento algebraico

Otro aspecto que tuve en cuenta al desarrollar la secuencia didáctica fue el posible nivel cognitivo presentado por un sujeto al afianzar su razonamiento algebraico con el propósito de reconocer un aspecto de la pregunta: *¿qué enseñar?*, ya que los niveles aportan posibles criterios para evidenciar la etapa actual de los estudiantes el aprendizaje del álgebra. Sobre este tema Kuchemann (1981), citado por Godino, Batanero y Font (2003), en su investigación, propone seis niveles, los cuales han sido usados frecuentemente en investigaciones interesadas en el desarrollo del razonamiento algebraico. Los niveles definidos por Kuchemann son:

Niveles de la interpretación de la letra

LETRA EVALUADA	A la letra se le da un valor numérico en lugar de tratarla como un valor desconocido.
LETRA NO USADA	Aquí la letra se ignora o a lo más es reconocida (pero sin dársele un significado)
LETRA COMO OBJETO	La letra vista como un nombre para un objeto, o como el objeto propiamente dicho.
LETRA COMO INCÓGNITA	Aquí la letra se piensa como un número particular pero desconocido y el muchacho se lanza a operar con la letra vista de esa manera, a pesar de la falta de cerradura del resultado.
LETRA COMO NÚMERO GENERALIZADO	La letra se ve como representante de valores o capaz de tomar varios valores más que como un valor específico.
LETRA COMO VARIABLE	La letra representa un rango de valores.

Tabla 1. Interpretaciones de la letra propuestas por Kuchemann (1981, citado por Godino y Font, 2003)

Estos niveles fueron usados en este estudio con el fin de comprender, analizar y favorecer los procesos de aprendizaje desarrollados por los estudiantes en el diseño e implementación de la secuencia didáctica. Además se constituyeron en un grupo de los indicadores que

permitieron evaluar esta secuencia didáctica, ya que es posible contrastar el diagnóstico inicial desde la ubicación de cada estudiante en el nivel de interpretación de la letra en el cual se encuentra con la información que arrojan los resultados de la evaluación final de cada estudiante y los avances clase a clase.

2.1.3.2. Generalización

"Uno de los procesos esenciales de la actividad matemática, y de los que a menudo se ponen en juego, es la generalización". (Alonso et al., 1993, p. 27) Para estos autores la generalización es una capacidad que puede desarrollarse ya que puede ser vista desde dos partes: visión de la regularidad (el proceso) y la expresión. En este sentido, desde lo didáctico es recomendable desarrollar en el proceso de generalización tres fases: la visión de la regularidad (la relación), la exposición verbal y la expresión escrita (Ibid.).

2.1.3.3.Igualdad

Uno de los cambios importantes que es necesario resaltar en el momento de generar en los estudiantes la transición de la aritmética al álgebra es la visión del igual (Kieran, 1989). Las tres visiones del signo igual son:

- Carácter unidireccional: Acción física donde generalmente se presenta la operación al lado izquierdo y al derecho aparece la respuesta. En algunas ocasiones se usa para relacionar procesos sucesivos. (Ibid., Alonso et al., 1993)
- Restricción: Son igualdades donde sólo algunos valores hacen cierta la igualdad. (Ibid.)

- Carácter bidireccional: Permite operar a ambos lados del igual. (Kieran, Op. cit., Alonso et al., Op. cit.)

2.1.3.4. Paso del lenguaje cotidiano al algebraico

El proceso de simbolización requiere de dos tipos de actuaciones que se deben realizar al mismo tiempo:

1. Atribuir un significado adecuado a los símbolos interpretándolos de forma adecuada y sin ambigüedad.

2. Hacer uso de las posibilidades de cálculo que permite el lenguaje simbólico. (Alonso et al., Op cit.)

2.1.4. Retroalimentación del aprendizaje en matemáticas

Debido a que en el presente estudio se propuso evaluar el impacto de una secuencia de actividades de aprendizaje del álgebra, era indispensable referirse a la evaluación del aprendizaje en esta área, aspecto que responde al *¿cómo evaluar?*. Sin embargo, se delimitó este aspecto a la retroalimentación del proceso de los estudiantes, a continuación enuncio algunas de las orientaciones generales que se encuentran son:

Autores como Black & William (1998) y el NCTM (2000) presentan la retroalimentación como aquel proceso que le brinda información al estudiante y al docente sobre tres aspectos: el estado actual, el estado esperado y las acciones para recortar la brecha entre el uno y el otro. Se espera que este proceso sea cíclico donde tanto estudiantes como

profesores estén comparando sus desempeños con los desempeños esperados para tomar decisiones sobre el proceso y que este se repita sucesivamente (Black y William, Op cit.). Uno de los aspectos más importantes a tener en cuenta en este proceso es la retroalimentación, la cual se realizará en su mayoría por rúbricas que los estudiantes conocerán antes de las actividades (ver anexos 4, 5 y 6, apartado evaluación).

El proceso de retroalimentación desde el docente se puede complementar con la autoevaluación y la evaluación entre pares como un recurso en el que los estudiantes se aceptan entre sí y se toman en serio las críticas sobre su trabajo. Esto da al docente la opción de estar disponible para observar y reflexionar sobre lo que está sucediendo. Además le permite determinar en qué momento intervenir a manera de ayuda con algunos estudiantes de forma individual (Black, Harrison, Lee, Marshall & Wiliam, 2004).

2.2. Recursos Virtuales en Álgebra

En este apartado se busca aportar elementos para contestar la pregunta *¿con qué?, ¿qué recursos?*. Los materiales y recursos que se usaron en el aula como apoyo a los procesos de enseñanza-aprendizaje pasaron por un instrumento que los caracterizó (Ver apartado 3.5.1.). La sugerencia que hacen Marín et al. (2006) para observar los recursos es detallar en ellos los siguientes aspectos: objetivo general, obstáculos y dificultades posibles, contenido que manejan, modos de representación de la operación, objetivos y competencias de aprendizaje, nivel de complejidad.

Por otro lado, Trgalova, Bouhineau y Nicaud (2009) realizaron un estudio donde analizaron diferentes recursos electrónicos con el objetivo de identificar y comparar funcionalidades didácticas de los mismos. En la matriz de análisis que usaron tuvieron en cuenta los siguientes aspectos: nivel, contenido matemático, representación, manipulación, tipo de actividades, retroalimentación, reacción al error, sugerencia de corrección, diagnóstico, personalización, sistema operativo, traducciones, licencia.

Teniendo en cuenta estas orientaciones, construí una matriz de análisis para efectos del estudio. El análisis de los recursos encontrados en la web para la enseñanza del álgebra, bajo la matriz que construí (ver apartado 3.5.1.), me posibilitó obtener un panorama de la información necesaria para saber según el contexto y las necesidades del mismo cuáles recursos tecnológicos serían los más favorables para la implementación.

Algunos autores como Trgalova et al. (2009), Sierra (2010), han decidido analizar o describir algunos de los recursos TIC para la enseñanza de las matemáticas; en otros casos, agremiaciones nacionales como National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000)[1] y Utah State University Utah State University[2] (1999), han abierto un espacio en la web para recopilar recursos TIC para la enseñanza de las matemáticas, entre los cuales se encuentran algunos diseñados para la enseñanza del álgebra. Sin embargo, todavía se

[1] http://illuminations.nctm.org/ (Consultada: Marzo 3 de 2013)
[2] http://nlvm.usu.edu/es/nav/vlibrary.html (Consultada: Marzo 3 de 2013)

encuentra esta información muy dispersa y no todos los sitios, ni los autores, usan los mismos criterios para describir y analizar los recursos, por lo que en general la persona interesada en implementar, usar o analizar estos recursos tiene que interpretar la mayoría de la información desde su óptica.

Siendo esta una de las dificultades que se encontró al iniciar la recopilación de los recursos Web en esta investigación, se tomó la decisión de analizar todos los recursos hallados con los mismos parámetros por lo que surgió la necesidad de crear la matriz de análisis con el fin de recopilar la información necesaria de cada recurso para luego compararla con las necesidades de la innovación.

2.3. Recursos para apoyar una secuencia didáctica

En este apartado pretendí incorporar elementos esenciales para el uso de recursos virtuales como apoyo al proceso de enseñanza – aprendizaje, ya que en el diseño planeé usar un Ambiente Virtual de Aprendizaje (AVA) desde el cual se orientara el contacto tecnológico con los estudiantes, donde lograran visualizar el camino propuesto para la implementación del estudio y también donde encontraran los recursos tecnológicos que apoyaran su aprendizaje (Objetos Virtuales de Aprendizaje, OVAs).

2.3.1. Ambiente Virtual de Aprendizaje (AVA)

Dado que en este estudio se implementó el AVA como estrategia para que los estudiantes tuvieran contacto con la docente, los objetivos de la secuencia, las actividades y los

recursos virtuales, se hizo necesario conocer cuáles eran algunas indicaciones esperadas de estos ambientes.

Según Merchán (2008) un Ambiente Virtual de Aprendizaje (AVA) puede ser definido como:

> la relación pedagógica que, mediada por un entorno digital, establece una persona o grupo de personas (con un interés común) alrededor de un conjunto de elementos instruccionales, tutoriales y tecnológicos que les posibilita, de manera autónoma y flexible, adquirir y modificar sus estructuras de conocimiento: generando para ello acciones de interacción, enseñanza, reciprocidad y comunicación. (p. 12)

Algunos de los elementos que generalmente se recomienda tener en cuenta al desarrollar recursos apoyados por la tecnología son el diseño pedagógico (objetivo, tipos de aprendizaje, estrategias de enseñanza, actividades, evaluación, contenido), el usuario, el contexto de uso y el formato del programa (Díaz & Morales 2008; Merchán, 2008).

En cuanto al diseño pedagógico, como cualquier otra intervención pedagógica, los ambientes virtuales de aprendizaje deben estar pensados y alineados en elementos como los objetivos, los tipos de aprendizaje, las estrategias de enseñanza, la evaluación, el contenido; ya que precisamente son elementos que definirán el AVA, como lo afirman Gros et al.

(1997) este “condiciona la forma de interacción entre el usuario y el programa y, en consecuencia, la forma de aprendizaje” (p. 145).

Un aspecto importante es entrelazar las actividades presenciales con las virtuales, hechas en casa o en clase, de modo que formen parte de un mismo tejido y de unos mismos objetivos de manera que se utilicen con normalidad unas y otras aunque para ello se precisa un análisis previo de ubicación conceptual del aula virtual en cada uno de los centros (Barbera & Badía, 2002, p. 2).

2.3.2. Objeto virtual de aprendizaje (OVA)

Puesto que en este estudio se pretendió usar objetos virtuales de aprendizaje que contribuyeran al logro de los objetivos y fueran parte del AVA, en este apartado se pretende mostrar algunos elementos que moldearon el uso y el análisis de los recursos en este estudio.

Los objetos virtuales de aprendizaje son los elementos de un tipo de instrucción basada en programación y fundamentada bajo el paradigma computacional de diseño "orientado a objetos". Se valora sobre todo la creación de componentes (llamados "objetos") que pueden ser reutilizados en múltiples contextos. Esta es la idea fundamental que se esconde tras los objetos de aprendizaje: “los diseñadores instruccionales pueden construir pequeños componentes (en relación con el tamaño de un curso entero) que pueden ser reutilizados varias veces en contextos de estudios diferentes" (Wiley, 2000, p.3).

Para Wiley (Ibid.) un objeto virtual de aprendizaje debe tener las siguientes características:

- Autocontenido: Es la capacidad que debe tener para dar cumplimiento a las intencionalidad propuesta.

- Interoperatividad: Hace referencia a la flexibilidad que debe tener para ser utilizado con otros ambientes de aprendizaje, por lo que su estructura debe ser estándar.

- Reutilizable: Se refiere a poder utilizarse en otros contextos de enseñanza, ello garantizado por las características de autocontenido.

- Duradero y actualizable: Debe ser dinámico y no estático, es decir permitir la inclusión de nuevos contenidos y la modificación de los existentes, ello garantiza que no se vuelva obsoleto.

- Fácil acceso y manejable: Debe cumplir con las características de accesibilidad, usabilidad y navegabilidad.

- Sintético y esencial: Debe mantener un equilibrio entre los recursos utilizados sin que este saturado o que carezca de ellos, pues de lo contrario sería imposible el cumplimiento de la intencionalidad pedagógica.

- Citar las fuentes de los recursos utilizados: Debe contemplar los derechos de autor, además que sirve para ser referenciados.

Los objetos virtuales de aprendizaje usados en el presente trabajo fueron clasificados, según Wiley (Ibid.) como objetos de aprendizaje específicos (OAe) debido a las características representadas en su intencionalidad pedagógica, orientadas al tema específico: razonamiento algebraico.

2.4. Educación matemática en situaciones de conflicto social y político

Este es uno de los apartados de los referentes teóricos que surgió durante el trascurso de la investigación, después de hechos sociales ocurridos durante la implementación que afectaron a la comunidad educativa de la Institución José Francisco Socarrás. Luego de observar las consecuencias causadas por un hecho no muy cercano al curso con el que se trabajó, pero que por la gravedad de los eventos, decisiones administrativas y locales terminaron influyendo en el proceso de la implementación, surgió la necesidad de afianzar mi capacidad conceptual sobre este tema.

Vithal y Valero (2012) nos hacen la invitación a tener en cuenta el conflicto como parte de los procesos educativos desde dos tesis: la primera, los conflictos hacen parte del mundo en que vivimos, y por ende como profesores e investigadores estamos involucrados en la producción y reproducción de los mismos. Y la segunda, si las matemáticas y la educación matemática desempeñan un papel fundamental en el desarrollo del mundo por lo tanto, las matemáticas pueden ser en sí mismas generadoras de segregación, por ende como investigadores debemos comprender la forma en que las matemáticas se ven involucradas en los conflictos.

Algunas de las implicaciones que pueden ser generadas por conflictos sociales en las investigaciones realizadas por Vithal y Valero (2012) son:

- El distanciamiento entre el investigador y el foco inicial de su investigación, la gravedad de este hecho depende de diversos aspectos como: la duración, la naturaleza, el contenido de la interrupción y la parte del sistema educativo afectada por ella.
- Investigación de "baja calidad".
- Investigaciones marginalmente pertinentes al contexto.

Algunas de las sugerencias que hacen las autoras para abordar los diversos conflictos sociales desde las aulas es "incorporar la realidad exterior al aula de clase para mejorar su pertinencia" (Ibid., p.241) donde se espera que a través de tareas abiertas y enfoques investigativos se discutan los diversos temas y problemáticas con los estudiantes.

2.5. Preguntas de investigación

A. ¿Cuáles son las condiciones didácticas necesarias para el uso pertinente de algunos recursos TIC encontrados en la web, como apoyo a los procesos de enseñanza-aprendizaje del álgebra de los estudiantes del grado noveno de la Institución Educativa Distrital José Francisco Socarrás?

B. ¿Cuál es el impacto que generó la implementación de la propuesta didáctica en los procesos de enseñanza-aprendizaje del álgebra de los estudiantes del grado noveno de la Institución Educativa Distrital José Francisco Socarrás?

3. Diseño del estudio

Esta investigación fue desarrollada en el marco del proceso de formación de la Maestría en Educación de la Universidad de los Andes, realizada entre enero 2011 y abril 2013. La investigación fue abordada desde el paradigma cualitativo, ya que mi intención era comprender elementos del proceso de aprendizaje de los estudiantes de grado noveno[3] de la IED José Francisco Socarrás en el desarrollo del pensamiento algebraico y en consecuencia reflexionar sobre mi proceso de enseñanza a partir del uso pertinente de recursos TIC que respondieran a las necesidades del contexto. En un primer momento, el propósito fue hacer un reconocimiento del contexto en cuanto a los procesos cognitivos actuales en el razonamiento algebraico de los estudiantes de noveno grado del colegio José Francisco Socarrás; al mismo tiempo, se realizó una recopilación y análisis desde el punto de vista didáctico de los recursos TIC encontrados en la Web; a partir de la información recolectada en un segundo momento, intervine con una secuencia didáctica en busca de la transformación positiva de los procesos cognitivos de los estudiantes y mi proceso de enseñanza.

El diseño seleccionado está basado en el método investigación - acción, específicamente el método de triangulación simultánea. Con éste validé los resultados hallados en los procesos cognitivos desarrollados por los estudiantes y elaboré una reflexión sobre mi proceso de enseñanza.

[3] Este grupo de estudiantes no eran parte de los cursos que corresponden a mi carga académica ya que este no es en colegio dónde laboro. Con contactos de profesores se consiguió el permiso con la rectora para hacer la intervención con estos estudiantes.

3.1. Investigación – Acción (IA)

En este apartado se aborda un elemento fundamental para el desarrollo de la investigación, específicamente para la metodología, con el cual se encuentran los elementos que aportan a la reflexión y análisis del proceso y de la propuesta durante toda la investigación. Según Latorre (2007) la investigación - acción surge como respuesta a las inquietudes sobre el papel de la escuela y los modelos de aprendizaje centrado en el profesor y en la repetición de contenidos. El profesor tiene la oportunidad de ser investigador y en este nuevo rol dentro del aula se busca una mejora sustancial de la práctica educativa. Esta oportunidad de reflexión ha permitido que el término investigación-acción se vuelva amplio y cobije diferentes prácticas, actividades y experiencias que se van dando en el aula de clase.

Para la investigación - acción es vital que el papel del profesor se modifique para ser investigador de su misma práctica y poder convertirse en el eje transformador para la generación de mejores actividades en el proceso de enseñanza - aprendizaje. En este papel de investigador es importante vincular a la comunidad educativa para que la colaboración redunde en mejoras en la calidad que se deben evidenciar en una transformación social a largo plazo. Es importante que este tipo de prácticas investigativas sean políticas institucionales que motiven la reflexión entre los docentes para que los resultados se puedan ver en mayor escala.

Según Latorre (2007) desde la visión de la investigación - acción la enseñanza se convierte en un fenómeno social y cultural con gran capacidad de transformación en la medida en que el profesor es más consciente de su quehacer formador y está dispuesto a la reflexión constante para emprender acciones que mejoren la calidad de su actividad profesional.

Para Latorre (2007) la investigación - acción se observa como una «espiral autorreflexiva», que se inicia con una situación o problema práctico, se analiza y revisa el problema con la finalidad de mejorar dicha situación, se implementa el plan o intervención a la vez que se observa, reflexiona, analiza y evalúa, para volver a replantear un nuevo ciclo.

De forma genérica es posible decir que la investigación – acción (IA) se desarrolla siguiendo un modelo en *espiral en ciclos* sucesivos que incluyen diagnóstico, planificación, acción, observación y reflexión – evaluación (Bausela, 2002, p.5). Para planear las fases de la presente investigación tuve en cuenta las cuatro fases que aparecen en el libro *Cómo planificar la investigación-acción* de Kemmis y Mc Taggart (como se cita en Bausela, 2002): (i) Diagnóstico y reconocimiento de la situación inicial. (ii) Desarrollo de un plan de acción, críticamente informado, para mejorar aquello que ya está ocurriendo. (iii) Actuación para poner el plan en práctica y la observación de sus efectos en el contexto que tiene lugar. (iv) La reflexión en torno a los efectos como base para una nueva planificación (Citados por Bausela, 2002, p.5).

3.2.Fases de la investigación

En el presente apartado se evidencian cada una de las fases de investigación, las acciones realizadas y los instrumentos que nutrieron cada una de ellas.

Fase 1: Diagnóstico. En esta fase se determinaron los elementos que se tuvieron en cuenta para el desarrollo de la investigación, tales como (ver gráfico 1):

- Revisión bibliográfica.
- Reconocimiento del contexto y de los estudiantes.
- Revisión de los recursos web relacionados con álgebra.

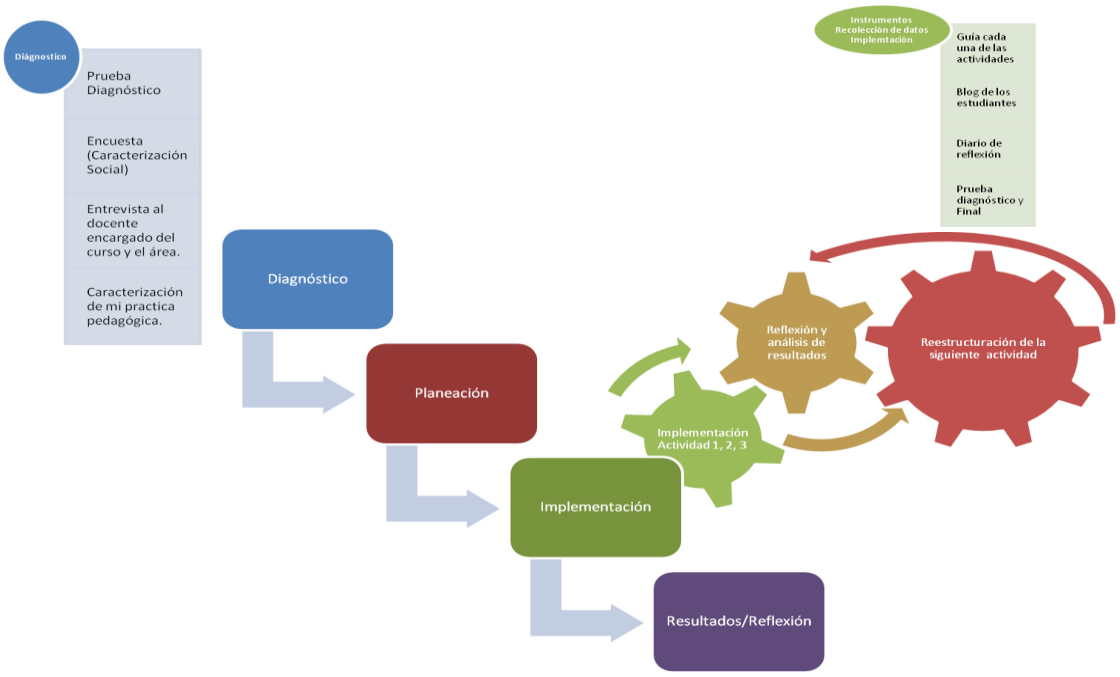


Gráfico 1. Estructura metodológica del estudio.

Algunos instrumentos que enriquecieron esta etapa en cuanto al reconocimiento de los estudiantes y del contexto fueron: la prueba diagnóstico, la encuesta de caracterización, la entrevista al docente encargado, la caracterización de mi práctica pedagógica.

Fase 2: Planeación. En esta fase se usó la información recolectada en la fase anterior para definir y planear los elementos y procesos a desarrollar en la propuesta de intervención. Se planearon aspectos como:

- Secuencia de Actividades.
- Recursos a usar.
- Evaluación.

Fase 3: Implementación. En esta fase se hizo la implementación de la propuesta. Esta fase, al igual que toda la investigación, estuvo mediada por la investigación - acción lo que significada que en cada momento de la intervención se aplicaba lo planeado, se analizaban los resultados y se reestructuraba la siguiente actividad según las necesidades del contexto.

Fase 4: Resultados/Reflexión. En esta fase se retroalimenta la investigación con ayuda del análisis a los resultados obtenidos.

La metodología desarrollada en la investigación se desenvolvió en ciclos lo que generaba que en todos los momentos de la investigación se presentaban cada una de las fases (ver gráfico 1).

3.3. Innovación

3.3.1. Diagnóstico

Para realizar el diagnóstico tuve en cuenta dos instrumentos de recolección de datos: una encuesta y la evaluación inicial (ver anexos 1 y 2). A través de estos dos instrumentos recolecté y posteriormente analicé la información para reconocer el contexto con el cual trabajé. La encuesta tenía como propósito recolectar información sobre los estudiantes en cuanto a aspectos sociales, y obtener información sobre posibles variables extrañas cuya presencia llegase a afectar la intervención (ejemplo: estudiantes que cuenten con refuerzo extraescolar en matemáticas, estudiantes que no tengan acceso al computador, entre otras).

Por su parte, con la evaluación inicial esperaba recolectar información cognitiva de los estudiantes frente al razonamiento algebraico para luego compararla con los resultados de la evaluación final.

Resultados del diagnóstico

La mayoría de los estudiantes presentan dificultades en el área de matemáticas, esta información fue recolectada con la prueba inicial aplicada al 90% de los estudiantes[4]. En ese sentido, paso a enunciar a continuación las características encontradas en la mayoría de estudiantes frente al razonamiento algebraico:

[4] El lector puede encontrar información más específica sobre los conocimientos de los estudiantes en el anexo 11.

- La mayoría de los estudiantes (97% y 94%) evalúan o ignoran la letra, esto se refiere a nociones donde los estudiantes necesitan darle un valor arbitrario a la letra o simplemente la ignoran operando solamente con los números.
- Todos los estudiantes (100%) a partir de un único ejemplo generalizan situaciones; eso significa que ellos no se toman el tiempo o el trabajo de explorar todas las posibilidades que pueda llegar a presentar la situación, se limitan a verificar un ejemplo y desde allí llegan a la conclusión de si funciona o no una afirmación.
- La mayoría de los estudiantes (97%) encuentran igualdades numéricas encontrando los resultados de las expresiones, pero no encuentran o asocian otras características que permitan definirlas como "iguales".
- Todos los estudiantes (100%) presentan pocas conexiones entre lenguaje algebraico y el lenguaje común para relacionarlos.
- La mayoría de los estudiantes (69% y 80%) no usan las ecuaciones lineales como proceso para solucionar situaciones que las involucran.

Otras características presentadas por los estudiantes que no están relacionadas directamente con el razonamiento algebraico, pero que pueden influir altamente en los procesos de aprendizaje de los estudiantes son:

- Presentan dificultades para comunicar los procesos matemáticos que realizan para llegar a justificar una elección o una respuesta. Esto se traduce en frases poco explicativas como las usadas por el estudiante 4 en la prueba diagnóstico dónde responde: Siempre, porque no sé. (prueba diagnóstico, pregunta 3, ítem A)

- Usan información que no corresponde a la situación. En casos donde se presentan situaciones problema con datos no relevantes, fue común notar como los estudiantes tomaron los datos no relevantes para resolver la situación, aún cuando estos no se relacionaban con la pregunta.
- Cometen errores al realizar las operaciones, específicamente en potencias, y algunas veces en los procesos que refieren al pensamiento aditivo (sumas).
- Comenten errores al interpretar las operaciones que hay entre letras y números, específicamente cuando se requiere hacer una multiplicación.
- Aún presentan la necesidad de clausurar operaciones con expresiones algebraicas, lo que ocasiona que operen los coeficientes dejando de lado totalmente las partes literales que los acompañan.
- Los estudiantes operan elementos no semejantes porque tienen la misma letra, así que no tienen en cuenta el exponente que las acompaña.

Caracterización social de los estudiantes

De acuerdo con el análisis estadístico desarrollado para los datos obtenidos de la encuesta de Expectativas de aprendizaje y Uso de Tecnología (anexo 11) aplicada a los estudiantes del grado 901 del colegio José Francisco Socarrás de la jornada tarde, se puede extraer la siguiente información:

Los estudiantes en un 58% están en el rango esperado de edades para el grado noveno (13-14 años), y un 39% de los estudiantes superan la edad esperada. También se encontró que

en este curso existe cantidades iguales entre géneros, 18 estudiantes de cada uno. Un hecho preocupante que se extrae de las encuestas aplicadas consiste en el promedio de horas dedicadas a estudiar matemáticas ya que el 44% de los estudiantes afirman invertir entre una y dos horas a la semana para estudiar y el 47% no dedican tiempo, lo que sugiere tener cuidado con las actividades que se les proponga para realizar extraclase, ya que posiblemente la mayoría de estudiantes no estén dispuestos a cumplirlas.

3.3.2. Descripción de la innovación/intervención

Objetivo: Los estudiantes generalicen métodos de razonamiento algebraico en la temática ecuación simple con números enteros mediante el uso de construcciones, manipulación y representación de diversos objetos matemáticos apoyados por TIC.

La intervención se realizó en 12 sesiones. El propósito del recurso TIC buscaba ayudar a los estudiantes a representar gráficamente los conceptos matemáticos, con el fin de realizar manipulaciones o modelización de algunas situaciones y objetos. Así mismo se buscaba que los estudiantes también analizaran los resultados para que propusieran hipótesis y finalmente construyeran generalizaciones. La intervención se diseñó con el tema "ecuaciones simples". La siguiente gráfica describe la secuencia de actividades de aprendizaje que como se ha descrito, buscaba mejorarse conforme avanzaba su implementación a partir de los ciclos de la IA.

Gráfico 2. Secuencia de aprendizaje.

A continuación se especifican la descripción y el tiempo esperado de cada una de las actividades:

Sesión	Actividad	Descripción	Tiempo
1	Evaluación Inicial y Encuesta	Se realizó la implementación de dos instrumentos: Una evaluación inicial y una encuesta con el propósito de seleccionar los participantes que cumplieran con las condiciones propuestas (estudiantes de tres niveles, alto, básico y bajo; que además evidencien verbalmente con facilidad sus pensamientos y construcciones cognitivas).	2 Horas
2	Indicaciones y acuerdos de trabajo	Se les presentó a los estudiantes las condiciones de trabajo. Por ejemplo, se les indicaron los compromisos de trabajo individual y grupal, el respeto del uso de la palabra, entre otros. Asimismo, se presentaron las indicaciones necesarias para el uso del Ambiente Virtual de Aprendizaje (AVA).	1 Hora
3	Lenguaje Algebraico	Actividad: “Paso entre lenguajes: cotidiano, algebraico y numérico”	6 horas

		A partir de un juego los estudiantes resolvieron diversos ejercicios en los que era necesario pasar de un lenguaje a otro. El recurso utilizado para esta actividad fue el juego “lo tuyo y lo mío”.	
4	Equivalencia	Los estudiantes analizaron el concepto de equivalencia en diversos contextos: numérico, formas, y algebraico. Posteriormente se realizó un análisis especial en las propiedades de la equivalencia. El recurso utilizado: “Balanzas virtuales”.	8 horas
5	Ecuaciones con una incógnita y números enteros.	Los estudiantes representaron desde lo gráfico y lo algebraico situaciones que involucraban ecuaciones lineales. El recurso utilizado: “Balanzas virtuales2”.	4 horas
6	Evaluación Final	Se realizó la evaluación para comparar el nivel inicial de los estudiantes con el final.	1 hora

Tabla 2. Sesiones de la Intervención.

Cada actividad (Lenguaje algebraico, Equivalencia y Ecuaciones) estuvo compuesta por momentos que complejizaban el nivel de dificultad o de profundidad. Del mismo modo, dentro de cada momento se encontraron diferentes espacios y formas de participación de los estudiantes; a continuación hago una descripción de estos momentos:

	Antes	**Durante**	**Después**
Momento Presencial	En este espacio se espera que el estudiante se prepare para la clase a partir de diversas formas como: contestar	En este espacio se espera que el estudiante desarrolle individualmente o en grupo diversas situaciones, dé posibles	En este espacio se espera que los estudiantes comprueben los acuerdos y generalizaciones de la

	preguntas orientadoras, investigar, leer, ver videos sugeridos, entre otras. No es necesario hacer uso de las herramientas virtuales.	soluciones a los problemas o plantee hipótesis. En el trabajo en grupo se espera que compartan sus construcciones individuales y lleguen a acuerdos o desacuerdos. En plenaria se espera que presenten sus construcciones para que como grupo se lleguen a acuerdos, desacuerdos o generalizaciones	plenaria y complementen las construcciones logradas individualmente a través de acciones como la solución de nuevas situaciones, contestar preguntas orientadoras, entre otras. Sin hacer uso de las herramientas virtuales.
Momento Virtual	En este espacio se espera que el estudiante se prepare para la clase a partir de diversas formas como: contestar preguntas orientadoras, investigar, leer, ver videos sugeridos, entre otras. Se debe hacer uso de las herramientas virtuales.	En este espacio se espera que el estudiante manipule los objetos virtuales con el fin de llegar a soluciones a los problemas, plantee hipótesis, analice situaciones o compruebe hechos.	En este espacio se espera que el estudiante realice los procesos de autoevaluación y coevaluación haciendo uso de espacios virtuales de interacción y comunicación como lo es el blog. Además busquen información nueva o comprueben los acuerdos y generalizaciones de la plenaria.

Tabla 3. Momentos de clase[5].

3.4. Contexto

A. Institución: La Institución Educativa Distrital José Francisco Socarrás es una institución pública, ubicada en la localidad de Bosa. Desde marzo de 2009 presta el

[5] Elaboración propia.

servicio de educación para los niveles de transición, primaria y bachillerato. El colegio está conformado por una sede que funciona en dos jornadas, mañana y tarde, y la cantidad de estudiantes de la institución es de 2800 distribuidos aproximadamente de a 1400 en cada jornada.

B. Ciclo: El ciclo IV está conformado por los grados octavo y noveno, en el currículo de este ciclo se espera que el estudiante reconozca su proyecto de vida desde la profundización de las áreas. El colegio propone usar el aprendizaje significativo, el desarrollo de la autonomía y la metacognición como elementos para desarrollar los procesos en el aula de clase.

C. Área: El proyecto de área para el año 2012 se titula matemática recreativa y tiene el objetivo de desarrollar en los estudiantes pensamiento matemático a partir de su motivación con un uso adecuado y necesario del material y los recursos didácticos. Según los temas y la condición cognitiva de los estudiantes, algunas de las actividades propuestas en este proyecto son el uso del calendario matemático, origami, tangram, entre otros recursos didácticos.

D. Curso 901 (Jornada Tarde): El curso 901 está compuesto por 39 estudiantes. La intensidad horaria de matemáticas en ciclo IV es de cuatro horas semanales. Actualmente la clase de matemáticas no cuenta con recursos o materiales didácticos,

ya que el colegio hasta ahora está adquiriendo elementos de ayuda para esta área. Este curso en el área de matemáticas está a cargo del docente Richar William Andrade, ingeniero Agrónomo de profesión.

3.4.1. Participantes

Descripción de los participantes

La población con la que se desarrolló el estudio fue un grupo de estudiantes del grado noveno, cuyas edades oscilaron entre los 12 y 18 años. Con el fin de analizar en detalle el proceso y el progreso de una muestra de estudiantes, se escogió un grupo de 4 hombres y 2 mujeres. Estos fueron elegidos de manera a tener dos estudiantes de cada nivel de desempeño en matemáticas, alto, medio y bajo, tras haber aplicado la evaluación inicial; así mismo, se seleccionaron pues al contestar la prueba, justificaron de manera más detallada sus respuestas que sus compañeros.

Son estudiantes de estratos 2 y 3, algunos con familias disgregadas o la mayoría de acudientes de los estudiantes con ocupaciones laborales extensas, por lo tanto presentan poco acompañamiento familiar para sus actividades extraescolares, según datos recolectados por la encuesta de caracterización (ver anexo 11).

3.5. Instrumentos de recolección de datos

3.5.1. Matriz de análisis de recursos tecnológicos

Este instrumento (ver tabla 4) fue usado con el fin de recolectar información didáctica acerca de las fortalezas y posibles debilidades de los recursos TIC para la enseñanza del álgebra encontrados en la Web, el cual se utilizó antes de hacer la implementación de la secuencia didáctica.

<table>
<tr><th colspan="5">NOMBRE Y DIRECCIÓN DE UBICACIÓN</th><th>#</th></tr>
<tr><td colspan="6"></td></tr>
<tr><th>NIVEL – GRADO</th><th>CONTENIDO MATEMÁTICO</th><th>REPRESENTACIÓN</th><th>MANIPULACIÓN</th><th>TIPOS DE ACTIVIDADES</th><th>RETROALIMENTACIÓN</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><th>REACCIÒN AL ERROR</th><th>SUGERENCIA DE CORRECIÒN DE RESPUESTA</th><th>DIAGNÓSTICO</th><th>PERSONALIZACIÓN</th><th>SISTEMA OPERATIVO</th><th>TRADUCCIONES</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><th colspan="2">DURADERO Y ACTUALIZABLE</th><th colspan="2">FÁCIL ACCESO Y MANEJABLE</th><th colspan="2">SINTÉTICO Y ESENCIAL</th><th>INTEROPERATIVIDAD</th></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td></td></tr>
<tr><th colspan="4">DESCRIPCIÓN</th><th colspan="3">GRÁFICA</th></tr>
<tr><td colspan="4"></td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><th colspan="3">HABILIDAD, DESTREZA Ó CAPACIDAD QUE PROPONE DESARROLLAR</th><th colspan="4">OBJETIVO</th></tr>
<tr><td colspan="3"></td><td colspan="4"></td></tr>
<tr><th colspan="3">FORTALEZAS</th><th colspan="4">OBTÁCULOS (Aprendizaje)</th></tr>
<tr><td colspan="3"></td><td colspan="4"></td></tr>
<tr><th colspan="3">DIFICULTADES (Del sistema)</th><th colspan="4">LICENCIA</th></tr>
<tr><td colspan="3"></td><td colspan="4"></td></tr>
</table>

Tabla 4. Matriz de análisis de recursos tecnológicos[6].

[6] Ver anexo 9 para obtener información sobre alguno de los ítems analizados en la matriz.

3.5.2. Encuesta inicial

El instrumento de la encuesta (ver anexo 1) se realizó al inicio de la investigación, con el propósito de recolectar información social, familiar y académica de los estudiantes de noveno grado del Colegio José Francisco Socarrás. Esta información se utilizó como una de las fuentes para la selección de los participantes. Las preguntas en su mayoría fueron cerradas y algunas pocas abiertas, la respondió el 90% de los estudiantes del curso. Aproximadamente duraba 20 minutos.

3.5.3. Evaluación inicial y final

El instrumento evaluación inicial y final (ver anexo 2) se usó con el propósito de recolectar información cognitiva del estado inicial y final de los estudiantes de noveno grado del Colegio José Francisco Socarrás, respecto del trabajo con el álgebra. Se aplicó a 37 de los 39 estudiantes que cursaban en ese momento el curso correspondiente. La información recolectada en este instrumento y los instrumentos siguientes fue empleada para validar los hallazgos de esta investigación.

Vale la pena señalar que la información recolectada en la prueba inicial fue una de las fuentes para la selección de los participantes. Es una evaluación con preguntas de selección múltiple y preguntas abiertas, y tuvo una duración de aproximadamente una hora.

3.5.4. Diario de Reflexión

El instrumento Diario de Reflexión fue usado en toda la implementación de la secuencia didáctica con el fin de obtener información del proceso de la secuencia. La información recolectada en este instrumento fue usada para validar los hallazgos en esta investigación (ver apartado anterior). Asimismo utilicé esta información para continuar o replantear la secuencia didáctica establecida en un primer momento. Estas reflexiones se realizaron al final de cada una de las sesiones. En total cuento con 12 reflexiones (Ver anexo 12). Sería útil mencionar otro argumento: en todo proceso de investigación acción hay una fase de reflexión, y esta es la principal función del diario reflexivo.

3.5.5. Instrumentos/Objetivos y Preguntas

A continuación se presenta un cuadro donde relacioné cada instrumento con los objetivos y las preguntas de investigación para los que brinda información.

Objetivo o Pregunta de Investigación / Instrumento	Objetivo General	Objetivo Específico 1	Objetivo Especifico 2	Objetivo Especifico 3	Pregunta A	Pregunta B
	Diseñar, implementar y evaluar una propuesta didáctica que involucre los procesos de enseñanza-aprendizaje del razonamiento algebraico con estudiantes del grado noveno de la Institución Educativa Distrital José Francisco Socarrás, apoyada por recursos TIC.	Elaborar un estado del arte de recursos TIC en la web que sean utilizados en procesos de enseñanza-aprendizaje del álgebra.	Diseñar e implementar una propuesta didáctica que fortalezca los procesos de enseñanza-aprendizaje del álgebra apoyada por recursos TIC, con estudiantes del grado noveno de la Institución Educativa Distrital José Francisco Socarrás.	Evaluar el impacto de la implementación de la propuesta didáctica apoyada por recursos TIC en los procesos de enseñanza-aprendizaje del álgebra de los estudiantes del grado noveno de la Institución Educativa Distrital José Francisco Socarrás.	¿Cuáles son las condiciones didácticas necesarias para el uso pertinente de algunos recursos TIC encontrados en la web, como apoyo a los procesos de enseñanza-aprendizaje del álgebra de los estudiantes del grado noveno de la Institución Educativa Distrital José Francisco Socarrás?	¿Cuál es el impacto que generó la implementación de la propuesta didáctica en los procesos de enseñanza-aprendizaje del álgebra de los estudiantes del grado noveno de la Institución Educativa Distrital José Francisco Socarrás?
Matriz de análisis de recursos tecnológicos	X	X	X		X	
Encuesta Inicial	X		X			
Prueba inicial y final	X		X	X		X
Diario de Campo	X		X	X	X	X

Tabla 5. Relación objetivos y preguntas con instrumentos de recolección de datos.

3.6. Descripción del proceso de análisis

En esta investigación se analizaron datos cualitativos y cuantitativos, los datos fueron analizados simultáneamente a la recolección de datos, complementando este proceso con reflexiones bajo el método de construcción de memos. A continuación se especifica el proceso de análisis que se llevará a cabo con cada clase de datos.

3.6.1. Datos cuantitativos

Los instrumentos que corresponden en este apartado son la evaluación inicial y la final, con las cuales se hizo la prueba no paramétrica para muestras relacionadas: Wilconxon. Esta prueba fue seleccionada para analizar el desempeño de los estudiantes del grado 901 del Colegio José Francisco Socarrás, el cual ya ha sido conformado por razones administrativas de la institución desde el inicio del año, y cuyo propósito para fines del estudiante fue comparar los resultados de las evaluaciones inicial y final en la intervención. A estas evaluaciones también se les hizo mediciones de tendencia central y desviación estándar. Los programas que se usaron para facilitar los cálculos matemáticos fueron Excel y SPSS.

3.6.2. Datos Cualitativos

El diario de reflexión se analizó con el proceso de categorización abierta con códigos emergentes y posterior categorización de códigos. La información adquirida en este proceso se usó como uno de los elementos determinantes para tomar las decisiones pertinentes en la implementación de la intervención. Este proceso se realizó durante toda la intervención.

Tanto los datos cuantitativos como los cualitativos se triangularon mediante una matriz de doble entrada, entre las categorías que respondían a cada entrada y los instrumentos que arrojaron información de cada pregunta, con el fin de validar las interpretaciones de los resultados que se encontraron en el estudio.

3.7. Validez

En esta investigación mixta se realizó la validación de los resultados dependiendo del tipo de información: datos cuantitativos y datos cualitativos. Estas estrategias se realizaron simultáneas al diseño de la intervención y a la recolección de datos.

3.7.1. Datos Cuantitativos

Para los datos cuantitativos, correspondientes a las evaluaciones inicial y final, tuve en cuenta dos estrategias de validación: validación por expertos, y control de variables extrañas. A continuación se explica la forma en la que usé para esta investigación cada estrategia:

<u>Validación por expertos</u>

Luego de diseñadas las pruebas inicial y final se buscaron dos expertos, en el área, para que validaran las pruebas respondiendo a preguntas que estuvieran relacionadas con la

alineación de la prueba según el constructo, la cantidad de preguntas, el nivel de dificultad, el tipo de conocimiento. Esta estrategia fue empleada con el fin de tener otras perspectivas que analizaran y aprobaran el instrumento.

Control de variables extrañas

La encuesta inicial se diseñó e implementó con el fin de recolectar información sobre la población. Esta información sirvió para identificar participantes que por su experiencia o acciones podían quedar inhabilitados para ser analizados en esta investigación: adultos que intervienen en el proceso académico de los estudiantes con alguna preparación superior en el área de matemáticas (ingenieros, docentes en el área, etc.), estudiantes que son participantes de actividades extraescolares donde apoyan su proceso de matemáticas (participantes de Kumon, clases particulares, fundaciones de la localidad) eran algunas de las variables que se esperaba encontrar.

3.7.2. Datos cualitativos

Los datos cualitativos fueron validados a través de tres estrategias: participación extensa (Prolonged Engagement), reflexión y triangulación, a continuación se explica la forma en la que se usará en esta investigación cada estrategia:

Participación extensa (Prolonged Engagement)

Esta intervención fue realizada en 12 sesiones de clase, lo que significa entre cinco y seis semanas, dos veces a la semana, cada una de 2 horas a clase. Esta intervención extensa se ejecutó con el fin de establecer mejor relación con los participantes y ahondar en la comprensión del problema.

Reflexión y verificación

El diario de reflexión que fui construyendo durante toda la implementación se usó con el fin de analizar y reflexionar sobre mi práctica y mi visión de los aprendizajes de los estudiantes, esto con el propósito de tomar las decisiones que se consideraran pertinentes luego de cada sesión de la implementación.

Triangulación

Se realizó una triangulación de métodos con los datos recolectados en las evaluaciones, en los diarios de reflexión y la discusión con los autores. En este estudio se seleccionó esta estrategia porque busca realizar la recolección de datos del estudio a través de diferentes instrumentos (pruebas iniciales y finales, diarios de campo, algunas reflexiones de los estudiantes en sus autoevalauciones y coevaluaciones) con el fin de compensar las limitaciones que puedan existir en cada uno. Además de permitir comparar los puntos de encuentro o las disyuntivas en la información, así como de complementar los datos.

3.8.Ética

Consentimiento informado

En este aspecto se desarrolló una carta que contenía la información necesaria para brindarle al estudiante y a su acudiente sobre la investigación, como objetivo, tiempo, actividades a realizar, forma de usar los datos, confidencialidad. Igualmente, se hizo hincapié en el hecho que podían aceptar o no que sus datos fueran utilizados y que si en cualquier momento se le presentan algunas razones para retirarse del estudio, lo podría hacer sin afectar de ningún modo, ni en su proceso académico, ni en su ambiente escolar.

Voluntario

A los estudiantes se les dio la opción de aceptar o no la participación desde el principio ó retirarse en cualquier momento de la investigación sin que esto se viera reflejado en el proceso académico de su materia ó su desempeño social y emocional en el aula.

Confidencial

Desde un principio no se usaron los nombres de los estudiantes ya que como son varios, se consideró que al menos uno se negaría a que usen su nombre en público, por lo tanto se les dio un código numérico para presentar y usar la información recolectada por cada estudiante.

4. Hallazgos

En el presente apartado se describirán y analizarán los hallazgos obtenidos al diseñar e implementar la propuesta de enseñanza que involucra el desarrollo del razonamiento algebraico en estudiantes de grado noveno de la IED José Francisco Socarrás, apoyado con recursos TIC. Para evidenciar y comprender el impacto que esta propuesta generó, analicé los siguientes cuatro aspectos: [1] recursos TIC, [2] el proceso de diseño e implementación, [3] el desempeño de los estudiantes (desde dos miradas: impactos en el aprendizaje y en mi práctica docente) y [4] el contexto socio-cultural.

4.1. Análisis y selección de recursos TIC con sentido pedagógico.

El propósito de este primer grupo de hallazgos es identificar y dar a conocer al lector el proceso de análisis de los recursos TIC, evidenciando elementos hallados, dificultades, soluciones y criterios de selección.

4.1.1. Estado del arte

En un primer momento mostraré el estado del arte de los recursos virtuales en el tema álgebra. Con la aplicación de la matriz de análisis para los quince recursos seleccionados (ver anexo 10 y el apartado 3.5.1.) recolecté información de cada uno de ellos en cuanto a elementos relacionados con su uso para la enseñanza del álgebra y con la parte técnica. A continuación presentaré un resumen de las características generales de los recursos analizados desde los siguientes aspectos: contenido, representaciones, manipulación, retroalimentación, tipo de actividades y obstáculos de aprendizaje. Presentaré un listado de

los nombres de los recursos analizados, cada número da una etiqueta al recurso para hacer referencia al mismo en la descripción (para mayor detalle ver anexo 10):

- Algebra Tiles [1]
- Factorize [2]
- Pan Balance – Expressions [3]
- Pan Balance – Number [4]
- Pan Balance – Shapes [5]
- Proof Without Words: Completing the Square [6]
- Producto de Binomios [7]
- Graficador de funciones [8]
- Torres de Hanoi [9]
- Balanza Algebraica [10]
- Balanza Algebraica con negativos [11]
- Moneda falsa [12]
- Máquina de funciones [13]
- Patrones de Bloques [14]
- Transformaciones de funciones [15]

Contenido

Los recursos analizados tienden a enfocar su contenido en pro del desarrollo de temáticas del álgebra. Encontré recursos enfocados en temas como concepto de equivalencia [3, 4, 5], análisis de regularidades [9, 12, 13, 14], factorización de números naturales [2] y gráficas

de funciones; en este ámbito – funciones – se encuentran dos casos el recurso que solamente grafica la función a partir de la expresión algebraica [8] y el recurso que permite pasar entre diversas representaciones de las funciones [15].

Algunos recursos tecnológicos enfocados a un proceso matemático más específico, encontré relacionados con temas como factorización [1] y específicamente completación del cuadrado [6], multiplicación de binomios [7], sustitución en ecuaciones [1] y finalmente solución de ecuaciones simples en dos rangos numéricos: enteros positivos [3, 10] y enteros [1, 11]. En la búsqueda realizada no se encontraron herramientas tecnológicas orientadas directamente a la resolución de problemas.

Representaciones

La mayoría de recursos manejan por lo menos dos tipos de representaciones, muy pocos usan solamente una representación que le permita al estudiante manipular en el aplicativo. Hay recursos que manejan la representación numérica [1, 2, 3, 4, 14] donde con frecuencia los estudiantes pueden manipular elementos y relaciones numéricas; otros permiten que los estudiantes usen o escriban las representaciones algebraicas [1, 3, 7, 10, 11, 14] de los diferentes elementos matemáticos. Los recursos que usan las representaciones gráficas dependen del punto de vista de los autores; así encontré representaciones gráficas en tres niveles: figuras geométricas [1, 2, 6, 7], donde se usan elementos de la geometría para representar el concepto y desde allí desarrollarlo; gráficas de funciones [3, 7, 14, 15], donde se usa la representación en el plano cartesiano para hacer análisis de las diferentes

funciones y las representaciones icónicas [5, 9, 10, 11, 12, 13, 14], las cuales usan los autores para ayudar en la comprensión el concepto abordado. Por ejemplo, frecuentemente en la literatura sobre enseñanza del álgebra se encuentra como propuesta el uso de las balanzas como un elemento que funciona muy similar a las ecuaciones.

Manipulación

En el análisis de los recursos encontré diversos elementos posibles de manejar en el contacto con el aplicativo; entre estos se encuentran la introducción de valores de diversas formas como valores numéricos [2, 3, 4, 8, 10, 11, 13 14], valores icónicos [5, 10, 11] y expresiones algebraicas [1, 3, 4, 8, 14, 15]. Por otra parte hay recursos que permiten la manipulación de representaciones geométricas [1, 2, 7] donde se pueden modificar los tamaños o las cantidades para cumplir con el ejercicio. Otra forma de manipular los recursos se visibiliza en aquellos que permiten el movimiento propio del simulador [3, 6, 9, 12, 14], como por ejemplo el recurso completación del cuadrado [6] que permite el movimiento de la representación gráfica que allí se encuentra para hallar regularidades.

Retroalimentación

La mayoría de recursos no presentan retroalimentación alguna [5, 6, 7, 8, 14, 15] al proceso que realizan los usuarios. Sin embargo, en algunos fue posible identificar ciertos momentos para esta actividad. Un primer momento de retroalimentación generalmente ocurre posterior al proceso realizado [1, 9, 12, 13]. Sin embargo, éste se constituye en una opción

sujeta a la preferencia del usuario que puede ser descartada para pasar a un siguiente nivel. Otro momento de retroalimentación se presenta como reacción inmediata al error [2, 4] y finalmente en determinados errores [3, 10, 11], algunos seleccionados por el autor, por ejemplo en la solución de ecuaciones [10] si el estudiante al resolver una ecuación hace un movimiento o especialmente le adiciona un elemento que mantenga equivalente la ecuación, el sistema se lo permite sin hacerle un comentario en cuanto a que no es necesario el paso realizado.

En cuanto a la forma de presentar la retroalimentación, hay recursos que únicamente indican el error [1, 5, 13]; en estos casos, con algún elemento extra (resaltar de color diferente), muestran que el estudiante se ha equivocado pero no dan ninguna sugerencia al error; el usuario debe encontrar la solución al error o continuar probando hasta encontrar la respuesta correcta (ensayo y error). Otro recurso borra automáticamente el error [2], no da información alguna que permita al estudiante saber en qué está fallando. Otros recursos detallan el error al pasar al siguiente proceso [10, 11], por lo que el usuario al darle clic a un botón específico (de corrección) o dar clic para continuar en el proceso, el recurso arroja el detalle o explicación del error que ha cometido.

Tipos de actividades

En la mayoría de los recursos analizados se encontró que el tipo de actividades presentado con más frecuencia son los ejercicios [1, 2, 5, 10, 11, 13, 14] relacionados con el tema objetivo del recurso. Algunos recursos permiten que el usuario introduzca sus propios

ejercicios [3, 4, 7, 8, 10, 11, 14, 15], sin embargo, estos deben ser similares a los propuestos en él. Uno de los recursos presenta un ejercicio tipo ejemplo [6] que únicamente modifica algunas variables que intervienen en el ejercicio; ejemplo: la cantidad de monedas o la cantidad de aros. Dos recursos presentan un problema único [9, 12] para resolver con diferentes variables.

Obstáculos de aprendizaje

Los obstáculos de aprendizaje presentados en algunos de los recursos se encuentran orientados en dos sentidos: aspectos específicos relacionados con el tema abordado o el recurso y generales del uso de recursos. En los obstáculos de aprendizaje específicos encontré:

- Relacionados con el concepto de equivalencia se encontraron 2. Gráficamente los recursos no permiten hacer al mismo tiempo los movimientos de cancelación pertinentes al resolver la ecuación [1]. Esta herramienta tecnológica permite hacer cambios libres en cada lado de la representación de la ecuación; esto puede ser un elemento de riesgo porque permite hacer el análisis sobre las consecuencias de no hacer cambios equivalentes a cada lado de la igualdad, pero como el recurso no presenta una retroalimentación clara sobre este proceso el estudiante puede no llegar a las conclusiones esperadas.

  El otro elemento que puede convertirse en obstáculo de aprendizaje es que el sistema hace algunas operaciones sin hacer evidente todo el proceso al usuario

[10, 11]. En algunas herramientas tecnológicas el sistema hace los cálculos aritméticos que propone el sujeto, por lo que el sujeto propone cierta operación y el recurso inmediatamente le aplica la misma operación a ambos lados de la igualdad, lo que restringe el análisis que pueda hacer el estudiante al aplicar la ley de equivalencia.

- Limitado a operaciones binomiales [1, 2]. Son recursos que en sus ejercicios sólo presentan la posibilidad de hacer operaciones de dos términos.

- Limitado a rangos de números enteros. En estos recursos no hay posibilidad de explorar las relaciones con números racionales, ya que se enfatizan en representaciones concretas que generalmente se refieren a números enteros positivos [1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 10, 12, 13, 14] y enteros [1, 8, 11, 15].

En cuanto al obstáculo de aprendizaje general se encuentra la dependencia al material que puede generar el uso de material concreto en el proceso de enseñanza y aprendizaje, lo que consiste en no llegar a usar como modelo las conclusiones a las que se llega con las actividades propuestas y el material, puesto que al sujeto se le vuelve imprescindible el uso del mismo para poder resolver las situaciones similares a las resueltas con el recurso.

En conclusión, en cuanto a los recursos analizados es posible resaltar:

- La mayoría de las herramientas tecnológicas tienden a potenciar el desarrollo de temáticas algunas más puntuales que otras. Por lo tanto, el desarrollo de habilidades o competencias matemáticas depende del uso del recurso tecnológico que el docente aplique en el aula.

- Las representaciones gráficas son las más usadas en los recursos tecnológicos, en un menor grado se encuentran la numérica y algebraica. Definitivamente la representación menos potenciada es la verbal, por lo que tiende a depender del enfoque y las condiciones que el docente le dé al recurso en el aula.

- La manipulación de los objetos tecnológicos tiende a ser en la parte numérica o algebraica, se encuentran pocos recursos que permiten la manipulación de más elementos, por ejemplo simulaciones.

- En la mayoría de recursos tecnológicos no hay retroalimentación, generalmente esta se limita a presentar de una forma notoria el error o a mostrar algunas frases para algunos errores seleccionados con anterioridad.

- El tipo de actividades más usado en los recursos tecnológicos son los ejercicios, se presentan con menos frecuencia los problemas (2), pero son un único problema para solucionar con variación en los datos relevantes.

4.1.2. Análisis del uso de los recursos TIC en una implementación

La necesidad de hacer un estado del arte sobre recursos en internet que involucren el álgebra surgió en el momento de seleccionar el tema de investigación y tuvo en cuenta dos

razones: la primera estuvo referida a la notoria cantidad de recursos disponibles en la web, pero de los cuales frecuentemente, como afirman Trgalova et al. (2009), se encuentran diferentes obstáculos que impiden su uso en el aula; por ejemplo, la falta de descripciones del recurso que permitan analizar la correspondencia con el contexto donde se va a aplicar o la verificación de propósitos u objetivos para desarrollar. La segunda razón tuvo que ver con la necesidad de ahondar sobre las experiencias educativas específicas del álgebra con el fin de hacer uso de los recursos creados que aporten a la innovación propuesta por mí y para no caer en la repetición de recursos, con objetivos o especificaciones muy similares. El estado del arte en este estudio orientó la investigación en dos sentidos: [1] para seleccionar los recursos usados en la innovación y [2] como argumento para crear el recurso que se propuso para finalizar la intervención.

En este apartado proyecto mostrar los elementos, razones o justificaciones seleccionados para responder a preguntas como: *¿qué recursos tecnológicos use?*, *¿para qué los usé?* y *¿cómo los usé?*. Para responder las dos primeras preguntas presento el apartado denominado *Selección de recursos* y para revelar la tercera, el apartado nombrado *Uso de los recursos*.

4.1.2.1. Selección de recursos

El proceso de selección de recursos estuvo concebido desde el supuesto que comparten Godino et al. (2003, p. 127) quienes asumen que los materiales manipulativos ayudan a los niños tanto en la comprensión del significado de las ideas matemáticas, como en las aplicaciones de estas ideas a situaciones reales. No obstante, también tuve en cuenta las

precauciones evidenciadas por Thompson (1994), quien advierte que el uso de materiales en sí no tiene asegurado ningún éxito; Thompson recomienda la realización de un análisis objetivo del ambiente educativo en general para entender el uso efectivo de los recursos. Desde estas perspectivas, el proceso de selección de recursos en este estudio fue guiado por preguntas, objetivos y necesidades del contexto. Algunas de las preguntas que buscaba responder estaban encaminadas a saber: ¿qué quiero que mis estudiantes comprendan?[7], ¿qué obstáculos de aprendizaje generan los recursos seleccionados?, ¿qué habilidades o conceptos pretenden desarrollar? En cuanto a los objetivos, se tuvieron en cuenta los definidos para cada una de las secciones de la intervención propuesta en el presente estudio. A continuación doy a conocer el análisis de las características que tuve en cuenta para cada uno de los recursos seleccionados.

Juego "Lo tuyo y lo mío" (Ver anexo 4.1.)

Este recurso concreto fue seleccionado para la actividad correspondiente al tema: Lenguaje Algebraico – Lenguaje Común – Lenguaje Aritmético; con esta actividad se buscaba que los estudiantes comprendieran el paso entre lenguajes (lenguaje común, lenguaje algebraico y el lenguaje aritmético) (para mayor detalle ver anexo 4 y apartado 4.2.2.). Una de las razones por las cuales se seleccionó este recurso para esta actividad atiende al objetivo para el cual fue creado. Alonso et al. (1993) lo presentan como un elemento que contribuye a dar significado concreto a diferentes enunciados verbales que aparecen en las 20 tarjetas del juego, propósito considerado como semejante al propuesto en la intervención planteada en

[7] Pregunta propuesta por Thompson (1994, p.558)

este estudio. Otra razón es el uso de diferentes lenguajes (aritmético, común y algebraico) que se propone en el juego, puesto es esperado que al hacer uso o estudiar la correlación entre diferentes lenguajes, se está logrando aclarar aspectos de un concepto complejo o de una relación (NCTM, 2000); igualmente, que los estudiantes conecten ideas matemáticas con el fin de llegar a una comprensión más profunda y duradera. Los aspectos anteriores se esperaban desarrollar con los estudiantes en el marco de la investigación, evidenciando las conexiones entre los tres lenguajes, esperando una mayor comprensión de cada uno de los lenguajes, particularmente del lenguaje algebraico. La tercera razón para usar este juego fue la fuerte necesidad de comunicación entre compañeros, propuesta por el juego, ya sea para explicarle al compañero su solución o para discutir la solución de sus compañeros; el proceso de comunicación es uno de los que más les brinda elementos a los estudiantes para mejorar sus procesos matemáticos. La NCTM (2000) muestra como aportes de la comunicación llegar a mejores comprensiones y hacer diversas conexiones tras procesos en que los estudiantes hacen visibles sus pensamientos, ya sea de forma oral o escrita, los estudiantes aprenden a ser claros y convincentes además de encontrar diferentes puntos de vista. Finalmente, se seleccionó este recurso concreto porque no se encontró una herramienta tecnológica que cumpliera con los 3 criterios mencionados anteriormente y porque los recursos web encontrados, que como tema tenían el uso de diversos lenguajes, eran escasos y proponían ejercicios únicos de representación en lenguaje común y algebraico, como una receta (a partir de ciertas indicaciones resolver el ejercicio).

Recursos web "Pan Balance – Number", "Pan Balance – Shapes" y "Pan Balance – Expressions" (ver anexos 10.4, 10.5, 10.3)

Estos recursos fueron seleccionados para la actividad correspondiente al tema equivalencias, con el objetivo de que los estudiantes reconozcan, analicen y apliquen el concepto de equivalencia. Una de las razones por las que fueron seleccionadas estas herramientas tecnológicas es el objetivo que persiguen: practicar habilidades aritméticas y algebraicas, e investigar el importante concepto de equivalencia. Estas actividades propuestas por el NCTM (2013) buscan explorar las equivalencias entre expresiones aritméticas y figuras hasta llegar a hipótesis sobre equivalencias entre expresiones algebraicas. El ejemplo de actividades y el objetivo que estos recursos presentan se encuentran en coherencia con lo esperado para el desarrollo de la actividad, ya que esta actividad se dividió en tres momentos para hacer exploración del concepto de equivalencia usando diferentes entes matemáticos. En primer lugar se propuso la exploración con expresiones aritméticas, luego se propuso la exploración con equivalencias de figuras; y finalmente se dirigió la discusión con expresiones algebraicas.

Otra razón para haber seleccionado estas herramientas fue el modelo de representación para el concepto de equivalencia: la balanza. Éste es uno de los modelos recomendados para representar este concepto. Como lo mencionan Socas, Camacho, Palarea y Hernández (1989), la balanza de dos platillos de brazos iguales es uno de los modelos usados para el uso de algunas reglas de manipulación de igualdades. Se seleccionó este modelo, considerando la balanza como aquel puente que permite reconocer los cambios que alteran o mantienen las igualdades. Además, este tipo de simulaciones tecnológicas permiten al sujeto hacer diversas manipulaciones, que con lápiz y papel u otro elemento concreto sería más difícil de imaginar, representar o lograr. Con los dos últimos elementos mencionados,

los estudiantes tienen la posibilidad de hacer el análisis necesario para saber cuándo y qué cambios son validos según la expresión o igualdad.

Recurso Propio "La balanza algebraica 2"

El objetivo de la actividad para la cual se buscó un recurso adecuado era que los estudiantes usaran ecuaciones lineales con números enteros para resolver problemas reales. Este recurso fue de creación propia, ya que surgió la necesidad de no usar las herramientas analizadas, principalmente por la limitante que reducía el uso de recurso seleccionado.

El recurso seleccionado como primera opción fue Balanza Algebraica [recurso 10], el cual se había seleccionado por su objetivo: comprender el proceso algebraico y gráfico de solución de ecuaciones de primer grado con operadores positivos. Al igual que los recursos anteriores, fue seleccionado por el tipo de representación que usa para desarrollar la comprensión del tema ecuaciones, las balanzas. Socas et al. (1989) presentan esta representación como un elemento que facilitará la adquisición del concepto de ecuación y la resolución de ecuaciones sencillas. El tercer argumento por el cual se había seleccionado este recurso es la misma razón de las herramientas en el apartado anterior, las manipulaciones que permite hacer el simulador, se usa como el puente para fomentar la comprensión de las posibles conexiones entre la representación gráfica y los algoritmos. En especial se seleccionó en un primer momento, porque permite crear la ecuación con la que se desea trabajar, pero este recurso solamente permite trabajar con ecuaciones en rangos numéricos entre 0 al 10.

Al encontrar que el programa no permitía el desarrollo de ecuaciones con un rango numérico más grande y que este recurso era viable para apoyar la solución de problemas, surgió la necesidad de crear un programa con características similares que permitiera un rango mayor para desarrollar ejercicios; con esas indicaciones fue creado el programa La balanza algebraica 2.

Al considerar la creación del programa Balanza algebraica 2 se pretendió que conservara las mismas características del recurso Balanza algebraica [10]: (1) la relación entre el objetivo del recurso y de la actividad[8]; (2) el tipo de representación gráfica – la balanza – usado como elemento para apoyar la comprensión de la solución de ecuaciones; (3) la manipulación que permite en recurso, en el manejo de cada uno de los brazos de la balanza y su coherencia en el procedimiento para resolver ecuaciones simples; y finalmente, (4) la posibilidad de crear ejercicios propios para resolver.

Los elementos considerados importantes para la propuesta en el nuevo recurso, que no cumplía el recurso anterior son: (4a) se amplió el rango numérico de las ecuaciones a crear, en las variables entre -100 a 100 y en los coeficientes entre -100.000 y 100.000. Este cambio se hizo necesario porque los problemas planeados como parte de la actividad consideraban datos mayores que el rango entre 0 y 10. Aunque habría sido más fácil

[8] Comprender el proceso algebraico y gráfico de solución de ecuaciones de primer grado con operadores positivos.

cambiar los datos de los problemas para usar el recurso diez, consideré como importante crear este recurso porque la mayoría de situaciones que se prestan para involucrar ecuaciones simples se relacionan más con datos numéricos mayores y el rango de 0 a 10 suele restringir las posibilidades de situaciones para usar.

Asimismo, un elemento que se pretendió cambiar fue uno de los posibles obstáculos de aprendizaje del recurso seleccionado anteriormente [10]. En el nuevo recurso se brindó la posibilidad de escoger en qué brazo de la balanza hacer los cambios, puesto que el recurso anterior realizaba el cambio en los dos brazos de la balanza sin dejar al sujeto seleccionar dónde hacer el cambio.

Blog

Este recurso es trasversal y complementario a todo el proceso de la intervención. Esta herramienta se propuso como un medio de comunicación entre estudiantes y docente – estudiantes. Se planteó además como un espacio para plasmar la reflexión del proceso por parte de los estudiantes, donde se esperaba que aparecieran elementos como la autoevaluación, la coevaluación y momentos o elementos que para los estudiantes fueran relevantes. Una de las razones para seleccionar este recurso fue la posibilidad de compartir fácilmente la información entre compañeros; es un recurso con el cual cada estudiante puede acceder a lo escrito por sus otros compañeros, leerlo y comentarlo. Otra razón, es que los blogs permiten anexar a la reflexión no solo elementos escritos sino también representaciones como imágenes o símbolos, que constantemente a los estudiantes les

facilita el uso para complementar o mostrar sus reflexiones. En el proceso de evaluación, el blog facilita el tiempo de la retroalimentación, ya que permite hacer los comentarios del trabajo de los estudiantes en un menor tiempo, porque no hay que esperar encuentros presenciales para hacer entregas ni devoluciones, teniendo en cuenta que el encuentro presencial con estos estudiantes se dificultaba ya que este grupo no era uno de los que tenía a cargo y los encuentros estaban planeados con varios días de diferencia, la retroalimentación se hubiese demorado más tiempo al hacerlo con elementos físicos.

4.1.2.2. Uso de los recursos

> *"La tecnología es fundamental en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas; influye en las matemáticas que se enseñan y enriquece su aprendizaje" (NCTM, 2000, p. 26)*

En este apartado se pretende contestar a la pregunta ¿cómo se usó?, desde un análisis interpretativo sobre las bondades y las limitaciones que generó el uso de los recursos tecnológicos en la implementación de la propuesta didáctica. Comenzaré por mostrar los elementos positivos encontrados al apoyar la propuesta de aprendizaje con herramientas tecnológicas.

La necesidad de desarrollar otras habilidades con el apoyo de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas se convierte en un objetivo deseable de este tipo de intervenciones (Haddad & Draxler, 2001; NCTM, 2000). Por ejemplo, la competencia de resolución de problemas (analizar, comprobar hipótesis, entre otras) es uno de los objetivos anhelados al

usar la tecnología como apoyo para la educación. Al usar herramientas tecnológicas en esta intervención facilitó que los estudiantes desde la exploración de conjeturas llegaran a conclusiones sobre los objetos matemáticos: las ecuaciones simples. Por ejemplo, en la actividad dos[9] (Equivalencias), el estudiante 6 muestra en cada uno de los momentos cómo encuentra las diferentes equivalencias que se le proponen:

> En el momento final con operaciones y expresiones algebraicas, aunque duda, encuentra la regla fundamental para solucionar ecuaciones, él dice "No siempre[10], las expresiones de las balanzas se pueden equilibrar con la suma y la resta, con la multiplicación y la división pueden dar resultados distintos" (Solución a la Actividad 2, Estudiante 6, 2012).

Con esta conclusión el estudiante muestra que con el análisis de algunos casos ha encontrado la regla de equivalencias en una ecuación, específicamente para operaciones como la adición y la sustracción, pero se le dificulta generalizarla para operaciones como la multiplicación y la división.

El análisis de diferentes y mayor cantidad de ejemplos, además de la posibilidad de probar ejemplos que considere el propio estudiante, permite que se formulen y prueben las conjeturas más fácilmente (NCTM, 2000); probablemente fue lo que sucedió con los estudiantes en la Actividad 2, donde era necesario que constataran las posibilidades de equivalencia en las balanzas. Otra característica importante a resaltar en este estudio fue el

[9] Para mayor detalle ver apartados 3.3.2. y 4.2.2., y anexo 5.
[10] El estudiante 6 está respondiendo a la pregunta: ¿Es posible que la balanza permanezca en equilibrio cuando en los dos platillos se hacen dos operaciones iguales?

apoyo visual que brindó la tecnología para las discusiones entre estudiantes y docente (NCTM, 2000). Los estudiantes comenzaron a rememorar y regresar a los elementos de los recursos, especialmente para explicar argumentos cuando no había acuerdos; le mostraban a sus compañeros que tenían razón evidenciando en el recurso lo que ellos afirmaban. En este caso, podemos encontrar el ejemplo del estudiante 4 (ver gráfico 3) quien para mostrar que un equilibrio no funciona, grafica lo que cree que sucede, por medio de un recurso tecnológico como ayuda para hacerse entender.

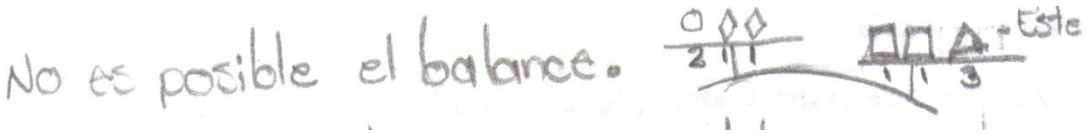


Gráfico 3. Respuesta del Estudiante 4 en el momento 2 de la actividad 2.

"Se ayuda al aprendizaje mediante la retroalimentación que la tecnología suministra" (NCTM, 2000, p. 27). Ésta es otra de las potencialidades evidenciadas en esta intervención, puesto que los estudiantes durante el uso de los recursos obtenían la retroalimentación de cada uno de los programas, en cuanto a los procedimientos o errores de uso del sistema. Los pocos que usaron el blog obtuvieron una retroalimentación de sus evaluaciones más rápida y oportuna que la obtenida por los que presentaron sus tareas por otro medio.

Por otro lado, algunas de las dificultades presentadas durante la intervención fueron en su gran mayoría logísticas. Estas son evidencias de las dificultades presentadas:

El recurso que presentó más dificultades para su uso fue el blog. La primera dificultad consistió en no poder crear el blog con el uso del internet del colegio; esto ocurrió porque la red del colegio, por ser un centro educativo distrital, está bloqueada para hacer uso de páginas como redes sociales; solicitar el cambio de este permiso incluía muchos requerimientos, lo que generó que desde el colegio no se hiciera el uso de este recurso y causó que solamente los estudiantes con conexión desde su casa y los que vieran la necesidad de hacerlo, lo usaran. La solución para este problema, fue que el resto de estudiantes presentaran las actividades ya fuera en un archivo de Word (y lo enviaran a mi correo) o lo presentaran en papel.

Debido a este inconveniente se perdieron elementos que se esperaban generar con el uso de esta herramienta tecnológica como lo era la retroalimentación en menor tiempo (NCTM, 2000) y la comunicación entre grupos fuera del espacio escolar. Particularmente, con respecto a la comunicación entre grupos, considero que fue el objetivo más perjudicado puesto que no hubo espacio para que los estudiantes compartieran las autoevaluaciones y especialmente las coevaluaciones realizadas a su grupo.

Por otro lado, otra de las dificultades presentadas, fue el uso de otros recursos tecnológicos, no propuestos para la clase, por parte de algunos estudiantes. Como los estudiantes en su mayoría tienen restringido el uso del computador, encuentran en el espacio del colegio la posibilidad de compartir – con sus compañeros – otros recursos tecnológicos (música, juegos, trabajos de otras materias, programas), no correspondientes a la clase propuesta. En

estos casos, aunque no fueron muchos y es comprensible, se hizo con los estudiantes la reflexión necesaria y el llamado a cumplir con los acuerdos de convivencia planteados en la primera sesión.

Uno de los obstáculos de aprendizaje que se alcanzó a evidenciar en la intervención fue la dependencia del recurso tecnológico en el desarrollo del aprendizaje, lo cual puede repercutir en dos niveles en el aprendizaje de los estudiantes: (1) hacer más difícil que los estudiantes en un futuro usen los conceptos matemáticos como modelo de situaciones, ya que solamente van a representar exactamente la situación; y (2) los estudiantes empiezan a darle características o propiedades a los objetos matemáticos que no les corresponden. En este estudio, los estudiantes empezaron a hacer afirmaciones sobre los conocimientos o habilidades que iban construyendo conectadas con los recursos tecnológicos usados. Por ejemplo, los estudiantes empezaron a hablar del peso de los números, como lo hace el estudiante 1 cuando hace una de sus conclusiones: "cuando los números son diferentes porque unos pesan más que otros" (Estudiante 1, Actividad 2, momento 1), en este caso los estudiantes empiezan a darle una característica a los números dependiendo de lo representado en el recurso. La dependencia al recurso tecnológico es un elemento que considero se debe tener en cuenta como uno de los impactos negativos que se espera disminuir al usarlos en el aula.

4.2. Diseño e implementación de una propuesta didáctica

En este grupo de hallazgos pretendo evidenciar y dar a conocer al lector el proceso de diseño e implementación en cada una de sus fases, con sus fortalezas, dificultades, obstáculos y soluciones, priorizando los elementos que se tuvieron en cuenta para tomar decisiones conforme a la exigencia de cada situación.

4.2.1. Fase diagnóstico

La fase de diagnóstico inicia con mi necesidad e interés de indagar y fortalecer el proceso de aprendizaje en el razonamiento algebraico de mis estudiantes. Para hacer la propuesta del ambiente de aprendizaje inicié la revisión bibliográfica sobre modelos, errores, dificultades, estándares y niveles en el aprendizaje del álgebra. Los hallazgos de esta revisión bibliográfica se constituyeron en los principales componentes de esta investigación así: los niveles en el uso de la letra propuestos por Kuchemann (1981, citado por Godino et al. 2003) y los diferentes errores al resolver situaciones que involucran ecuaciones simples que propone Socas et al. (1989). Estos dos componentes alimentaron la prueba inicial cuyas 14 preguntas indagaban acerca de las comprensiones de los estudiantes frente a temas relacionados con números enteros, números racionales, igualdad, ley distributiva, potencias y uso de la letra.

Frente al diseño de las preguntas de la prueba inicial, vale la pena aclarar que algunas buscaban que el estudiante solucionara problemas mientras que otras solamente fueron

puestas a manera de ejercicios que él debería resolver, dado que se pretendía indagar sobre la mayoría de los elementos que pudiesen intervenir en el proceso de aprendizaje de los estudiantes.

A continuación, se hizo la implementación de la prueba inicial y con ella se obtuvieron los resultados que posteriormente orientaron algunos cambios en la propuesta de aprendizaje, así como en la selección de los participantes. Un caso ilustrativo de estas decisiones se evidencia en las secciones cualitativas de las preguntas de la prueba, pues "los estudiantes al justificar su respuesta a un enunciado usan frases poco explicativas del proceso empleado" (ampliar información en el apartado 3.3.1). Esta situación fue tenida en cuenta a la hora de ampliar los criterios de selección de los estudiantes, por lo que se hizo necesario introducir como nuevo criterio de selección que los estudiantes (participantes) en cada uno de los niveles dieran más información sobre sus procesos que el promedio de los estudiantes.

Otro resultado que se consideró como elemento de toma de decisiones fueron las dificultades de los estudiantes con las operaciones básicas de números enteros. Esta limitante generó mi preocupación porque era un tema no prioritario en la intervención pero podía dificultara el desempeño de los estudiantes al requerir este conocimiento previo para desempeñarse mejor en la solución de ecuaciones lineales. Lo anterior generó plantear un cambio en cada una de la sesiones de clase, aunque no se pretendía abordar directamente este tema por no ser el objetivo de este trabajo; tomé entonces la decisión de abordarlo de

forma tangencial, para no dejarlo de lado, y que no interfiriera negativamente en el aprendizaje de los estudiantes. Entonces, planteé situaciones para diferentes operaciones y jerarquía de operaciones con números enteros (ver anexo 7) que los estudiantes debían revisar y corregir en sus casas, para que a partir de una no muy extensa discusión al principio de cada clase, se llegaran a las conclusiones pertinentes sobre los números enteros.

4.2.2. Fase diseño

En este apartado procuro mostrar algunos resultados obtenidos: resumen de las tres actividades y el proceso de diseño que involucró cambios relevantes en la planeación de la intervención.

Actividad Uno (Lenguaje algebraico)

El objetivo planteado en esta actividad fue que los estudiantes comprendieran el paso entre lenguajes como el lenguaje común, el algebraico y el aritmético. El recurso concreto como apoyo de esta sección fue el juego *"Lo tuyo y lo mío"*. La actividad estaba dividida en tres momentos; cada uno finalizaba con las auto y coevaluaciones hechas por cada uno de los estudiantes. Como productos se esperaba que los estudiantes: (1) solucionaran cada uno de los instrumentos que acompañaban los momentos (en este caso tres instrumentos), (2) hicieran su aporte autorreflexivo en el blog y (3) solucionaran dos tareas una como complemento a lo discutido en clase sobre el juego y otra una situación para discutir sobre operaciones básicas de números enteros.

El primer momento de la actividad estaba orientado a conocer el juego *"Lo tuyo y lo mío"*, sus características iniciales y jugar con tres compañeros más; los estudiantes debían tomar nota de sus juegos y las soluciones dadas por cada uno. En el segundo momento, los estudiantes tenían un segundo contacto con el juego pero con un cambio en las condiciones iniciales, el cual fue representar la frase seleccionada con lenguaje algebraico; luego en plenaria, se discutían las respuestas dadas con algunas tarjetas para como grupo evaluar cada representación. En el tercer momento, los estudiantes validaban algunas representaciones dadas en cualquiera de los lenguajes, se propuso hacer el análisis de las representaciones individual, luego en parejas y por último en plenaria.

Actividad Dos (Equivalencias)

El objetivo pretendido en esta actividad fue que los estudiantes reconocieran, analizaran y aplicaran el concepto de equivalencia. Los recursos tecnológicos como apoyo de esta sección fueron los *"Pan Balance: Number [4], Shapes [5] y Expressions [3]"*. La actividad estaba dividida en cuatro momentos, cada uno finalizaba con las auto y coevaluaciones hechas por cada uno de los estudiantes. Como productos se esperaba que los estudiantes: (1) solucionaran cada uno de los instrumentos que acompañaban los momentos (en este caso cuatro instrumentos), (2) hicieran su aporte autorreflexivo en el blog y (3) solucionaran dos tareas una como complemento a lo discutido en clase sobre las equivalencias y otra una situación para discutir sobre jerarquía de las operaciones con números enteros.

Cada momento de esta actividad estaba orientado para que los estudiantes encontraran y explicitaran equivalencias entre diferentes objetos matemáticos. Lo que cambiaba en cada momento era el objeto matemático con el que se estudiaba, en el siguiente orden: primero, expresiones aritméticas; en el momento dos: las figuras; luego, expresiones y relaciones aritméticas y finalmente expresiones algebraicas.

Actividad Tres (Solución de problemas que involucran ecuaciones simples)

El objetivo pretendido en esta actividad fue que los estudiantes usaran ecuaciones lineales con números enteros para resolver problemas. El recurso tecnológico como apoyo de esta sección fue *"Balanza algebraica 2"*. La actividad estaba dividida en dos momentos, cada uno finalizaba con las auto y coevaluaciones hechas por cada uno de los estudiantes. Como productos se esperaba que los estudiantes: (1) solucionaran cada uno de los instrumentos que acompañaban los momentos (en este caso dos instrumentos), (2) hicieran su aporte autorreflexivo en el blog y (3) solucionaran dos tareas una como complemento a lo discutido en clase sobre la solución de situaciones y otra una situación para discutir sobre jerarquía de las operaciones con números enteros.

En los dos momentos de la sección se planeó que los estudiantes resolvieran las situaciones primero individualmente, luego compartieran con tres compañeros sus respuestas y finalmente discutieran sus conclusiones con otro grupo. En el primer momento se presentan

tres situaciones que los estudiantes deben representar algebraicamente para luego, con apoyo del recurso, resolver la ecuación. En el segundo, los estudiantes responden diversas preguntas de una misma situación.

Proceso y toma de decisiones

El diseño inicia con mis ideas previas sobre el razonamiento algebraico, las lecturas y las dificultades de mis estudiantes de clase; a partir de estos elementos, se plantea una primera idea de la intervención. En ésta se pretendía fortalecer en los estudiantes dos frentes, el tema de factorización, ya que es un tema que para mí difícil de trabajar desde la construcción de conocimiento, desde la manipulación de objetos, así como lograr mostrar la aplicación directa en la vida diaria; el segundo frente era en ecuaciones simples, pues considero que este tema tiene dos niveles de dificultad para los estudiantes: la primera, aprender los procesos de ecuaciones simples, la segunda, traducir el lenguaje común a lenguaje algebraico para usar las ecuaciones como procesos de solución en situaciones problema. La primera versión del diseño de la intervención (ver anexo 14) tuvo muchos cambios: entre ellos está la extensión de los temas, la extensión de los ejercicios, el enfoque, el tipo de actividades para los estudiantes, entre otros.

En cuanto a la extensión y cantidad de los temas, me refiero en la primera versión de la intervención se pretendía abordar dos temas que por su complejidad y extensión, admiten realizar un análisis de cada uno (Factorización y Ecuaciones lineales), pero se vio la necesidad de limitar el tema de estudio con el fin de evitar un análisis extenso de poca

profundidad. La razón por la cual me incliné por las ecuaciones lineales fue su importancia en el desarrollo del pensamiento matemático y específicamente del pensamiento algebraico. Una de las visiones del álgebra recomendada para enseñar es "como un conjunto de conceptos y habilidades referentes a la representación de relaciones cuantitativas" (NCTM, 2000, p. 227), éste es el caso de las ecuaciones (Socas et al, 1989).

En cuanto a las actividades, cambié el tipo de actividad por elementos tomados de las lecturas, la reflexión y sugerencia de expertos. Inicialmente había propuesto hacer análisis de ejemplos para llegar a conjeturas; que los estudiantes analizaran – con apoyo de la tecnología – una gran cantidad de ejercicios, para que llegaran a la conclusión sobre el funcionamiento de esos algoritmos matemáticos. El enfoque de la intervención cambió bastante, ya que en la segunda propuesta busqué desarrollar competencias como la resolución de problemas. Aunque se mantuvo la idea de llegar a conjeturas a partir del análisis, los elementos para analizar se limitaron y se guiaron con preguntas orientadoras con el fin de llegar a las conclusiones esperadas.

Por ejemplo, en la primera versión de la intervención se esperaba que los estudiantes analizaran 20 ejercicios del caso de factorización "factor común" y, aunque este tema desapareció, en la segunda versión de la intervención, cada actividad estuvo encaminada a que a partir de algunas situaciones que los estudiantes debían estudiar y analizar, llegaran a concluir cómo funciona la solución de ecuaciones.

Otro cambio importante en el diseño de la intervención fue hacer más específicos y descriptivos cada uno de los momentos esperados en las sesiones de clase. El resultado de este cambio fue la tabla 3 (Apartado 3.3.2, descripción de la innovación), la cual especifica cada uno de los momentos de clase según el nivel de dificultad, de profundidad, y el espacio o la forma de participación de los estudiantes en la misma. Por ejemplo, uno de los momentos planteados es el momento presencial antes de la clase, en el cual se esperaba que el estudiante preparara la clase a partir de diversas formas como: contestar preguntas orientadoras, investigar, leer, ver videos sugeridos, entre otras; sin hacer uso de las herramientas virtuales.

4.2.3. Fase implementación

La fase de implementación tiene en cuenta la aplicación y el contacto con los estudiantes a partir de la propuesta de intervención. Es este espacio haré referencia a aquellos momentos que generaron algún cambio durante la implementación.

Cambios técnicos

El no poder usar el blog generó cambios en lo planeado, puesto que los estudiantes no lograron, por problemas técnicos, hacer uso del mismo dentro del espacio brindado por el colegio; por lo tanto, fue necesario cambiar la forma de presentar las reflexiones de los estudiantes (en un trabajo enviado por mail o en un trabajo presentado en el aula) lo que generó que se perdiera la posibilidad de compartir estas reflexiones entre compañeros.

La disciplina en el aula

Algunas dificultades de disciplina que no permitieron un buen ambiente en la clase, también generaron cambios en lo planeado. Habitualmente tiendo a planear mis clase sin tener en cuenta la disposición o la disciplina de los estudiantes; esto solamente lo tengo en cuenta cuando son cursos que causan dificultades continuas de comportamiento en la institución, y éste no era el caso.

Algunas dificultades que generalmente se presentan en clases como la charla sobre otros temas de interés y no sobre el tema de la clase, o la distracción momentánea por algo ocurrido de último momento (el comentario público de algún compañero, el "chiste"), comúnmente las atiendo con un llamado de atención individual o en pequeño grupo. Como éste era un grupo con el que antes no había tenido contacto, estas situaciones en algún momento estaban generando dificultades en el buen desarrollo de la intervención, para lo cual se tomó la decisión de hacer plenarias, recordando los acuerdos de clase a los que se llegaron en la primera sesión y proponiendo una reflexión sobre el uso adecuado de los espacios y el aprovechamiento de las herramientas cognitivas brindadas en clase.

Algunos casos particulares, como los presentados en la primera y la séptima clase, donde hubo venta y consumo de productos comestibles [primera], y el usar el computador para compartir recursos tecnológicos no correspondientes a la clase (música y juegos) [séptima]

ocasionaron que se hiciera un llamado de atención más cercano y se expusiera la situación frente a los compañeros para que como grupo se tomaran las decisiones pertinentes acerca de lo que se debería hacer y las consecuencias de repetir la situación.

Errores conceptuales

Los errores presentados por los estudiantes al abordar algunos conceptos determinaron la necesidad de retomar o hacer nuevas actividades sobre el tema antes de continuar las actividades planeadas. Dos ejemplos se presentaron: uno al abordar el tema del paso entre lenguaje cotidiano y lenguaje algebraico y el otro cuando se trabajó la actividad dos de las equivalencias.

En el primer momento los estudiantes estaban representando de forma equívoca la representación en lenguaje algebraico de algunas frases que estaban compuestas de varias relaciones, una de estas frases fue: "No me quites 8, que entonces te quedas con 1 más que yo", al ver esta necesidad decidí realizar una discusión intermedia donde se tomó como ejemplo cada una de las representaciones dadas por los mismos estudiantes para que en plenaria se validara o no la representación realizada.

El segundo momento fue al terminar la actividad dos, aunque los estudiantes habían llegado a algunas conclusiones favorables para el proceso como el hecho que al sumar o restar un mismo número de dos expresiones equivalentes las nuevas expresiones son equivalentes,

pero también llegaron a la conclusión equivoca que no funcionaba **siempre** igual para la multiplicación y división. En este caso antes de iniciar la actividad 3, se mostraron varios ejemplos - en plenaria - dónde la multiplicación y la división por un mismo número, mantienen expresiones iguales, y donde se les permitía a los estudiantes probar con nuevos ejemplos que comprobaban la hipótesis.

4.3. Evaluación del impacto de la implementación

El propósito de este grupo de hallazgos es identificar y dar a conocer al lector el impacto que presentó la implementación del ambiente de aprendizaje en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Se presenta en dos apartados que describen por un lado, el proceso de aprendizaje de los estudiantes, y por el otro, mi proceso de enseñanza como docente en este ambiente.

4.3.1. Impacto en el aprendizaje

En este apartado pretendo mostrar al lector el impacto que presentó la implementación del ambiente de aprendizaje en los procesos de aprendizaje de los estudiantes. Para cumplir con este propósito analicé los siguientes aspectos: el desempeño de los estudiantes en cada uno de los componentes y el desempeño de los estudiantes en la comparación entre prueba inicial y final.

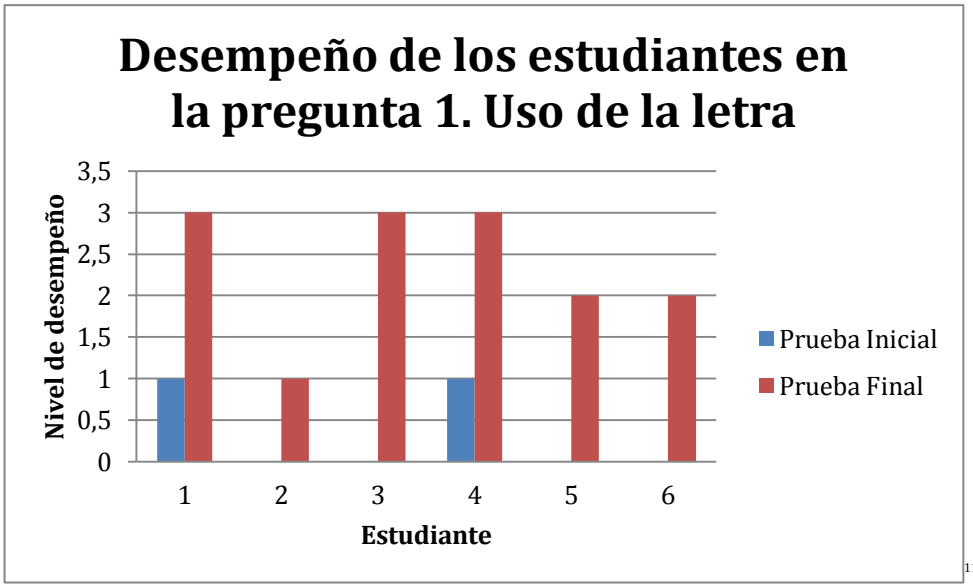
4.3.1.1.Análisis de los resultados por componente

En este apartado pretendo evidenciar los resultados de los estudiantes en cada uno de los componentes planteados para evaluar en el diseño de la unidad didáctica.

Componente 1. Uso de la letra

El desempeño valorado en este componente reunió las preguntas 1 y 2, donde se evaluó el desempeño de los estudiantes en el uso de la letra. A partir del resultado en el valor de significancia (0,024), se puede concluir que los estudiantes presentaron cambio positivo entre el desempeño de la prueba inicial y la prueba final en la pregunta 1.

La comparación del desempeño de esta pregunta en la prueba se puede observar en la gráfica 4, en esta pregunta los estudiantes en un 100% presentaron un cambio de nivel positivo.



[11]

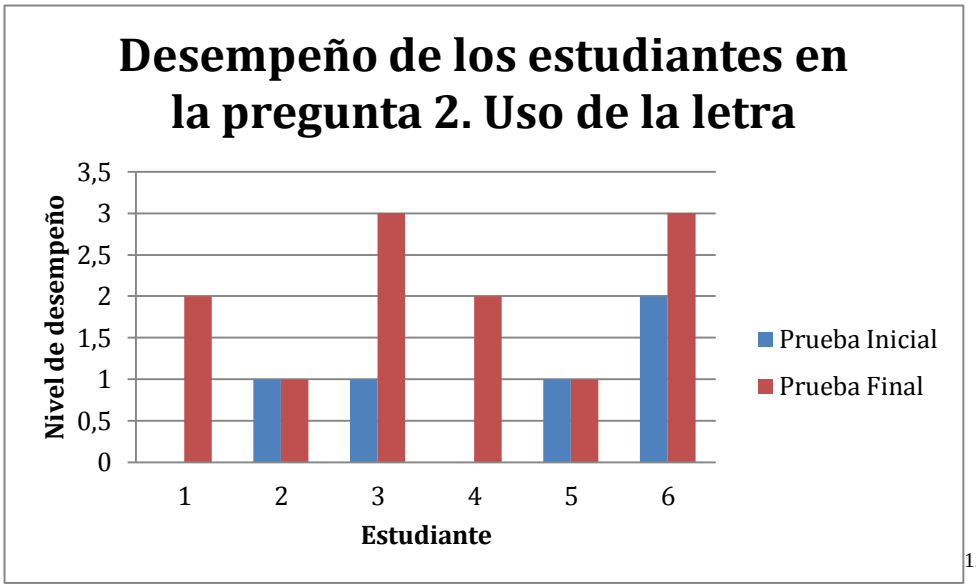
Gráfico 4. Desempeño de los estudiantes en la pregunta 1, entre la prueba inicial y la final.

El 50% de los estudiantes en esta pregunta evidenciaron moverse al nivel 3 donde el nivel más alto es 4, lo que significa que los estudiantes usan la letra como incógnita o número generalizado. Los estudiantes usan adecuadamente el algoritmo de la adición con expresiones algebraicas que involucran tanto parte literal como coeficientes. El 33% de los estudiantes evidenciaron estar en el nivel 2, donde usan la letra como objeto lo que significa que los estudiantes realizan el algoritmo de la adición en expresiones que solamente involucran expresiones con coeficientes o con parte literal, en el caso de presentar combinaciones de estas partes los estudiantes comenten errores de procedimiento, generalmente intentando clausurar la operación. El 17% de los estudiantes estuvieron en nivel 1, donde la letra es evaluada o ignorada, es decir, los estudiantes presentan la necesidad de asignarle un valor arbitrario a la letra.

[11] En los gráficos de desempeño, en caso que algún estudiante no muestre la frecuencia absoluta que representa el nivel de desempeño, es porque presentó el nivel de desempeño cero.

A partir del resultado en el valor de significancia (0,059), se puede concluir que los estudiantes no presentaron un cambio significativo entre el desempeño de la prueba inicial y la prueba final en la pregunta 2.

La comparación del desempeño de esta pregunta en la prueba se puede observar en la gráfica 5, en esta pregunta los estudiantes en un 66% presentaron un cambio de nivel positivo y un 34% de los estudiantes mantuvieron el mismo nivel de la prueba inicial.



[12]

Gráfico 5. Desempeño de los estudiantes en la pregunta 2, entre la prueba inicial y la final.

El 33% de los estudiantes en esta pregunta evidenciaron moverse al nivel 3, lo que significa que los estudiantes usan la letra como incógnita o número generalizado. Los estudiantes

[12] En los gráficos de desempeño, en caso que algún estudiante no muestre la frecuencia absoluta que representa el nivel de desempeño, es porque presentó el nivel de desempeño cero.

encuentran diversos números enteros que cumplen con condiciones presentadas pero no encuentran todos los posibles. El 33% de los estudiantes evidenciaron estar en el nivel 2, donde usan la letra como objeto lo que significa. Los estudiantes encuentran diversos números enteros que cumplen con condiciones presentadas, no encuentran todos los posibles y generalmente en casos particulares comenten errores al encontrar los números para ciertas condiciones. El 33% de los estudiantes estuvieron en nivel 1, donde la letra es evaluada o ignorada, es decir, sólo encuentran algunos ejemplos para algunas condiciones pero no presentan los números esperados.

Discusión

El uso de la letra es un desempeño donde los estudiantes muestran un cambio positivo en su desempeño pero no es permanente, evaluado desde dos sentidos: (1) todos los estudiantes no llegan al mismo nivel y (2) hay estudiantes que presentan un uso de la letra, en diferente nivel, con diferentes preguntas.

Considero que esta situación se presenta por elementos como:

- Poco tiempo de interacción entre los estudiantes y la intervención, aunque la implementación duró aproximadamente mes y medio[13], los procesos de aprendizaje suelen requerir de más tiempo y variedad de actividades para que sean reestructurados. Por ejemplo, en los estándares propuestos por el MEN (2006) y

[13] En tiempo real un mes, teniendo en cuenta el tiempo perdido por la toma del colegio.

NCTM (2000) plantean desarrollar el pensamiento algebraico desde grado cero hasta once, y proponen gran variedad de actividades para desarrollar en el aula. En el mimo sentido Alonso et al. (1993) evidencian la necesidad de desarrollar dos procesos para la construcción de la idea de variable (uso de la letra) – generalización y simbolización – de los cuales proponen la necesidad que los estudiantes se enfrenten a abundantes experiencias donde se involucren la representación de la variable y las reglas de uso.

Desde estos puntos de vista, las actividades aquí propuestas (Actividad uno, dos y tres) son algunas de esas situaciones a las que se pueden enfrentar los estudiantes, pero falta se deberían aplicar con mayor frecuencia e intensidad.

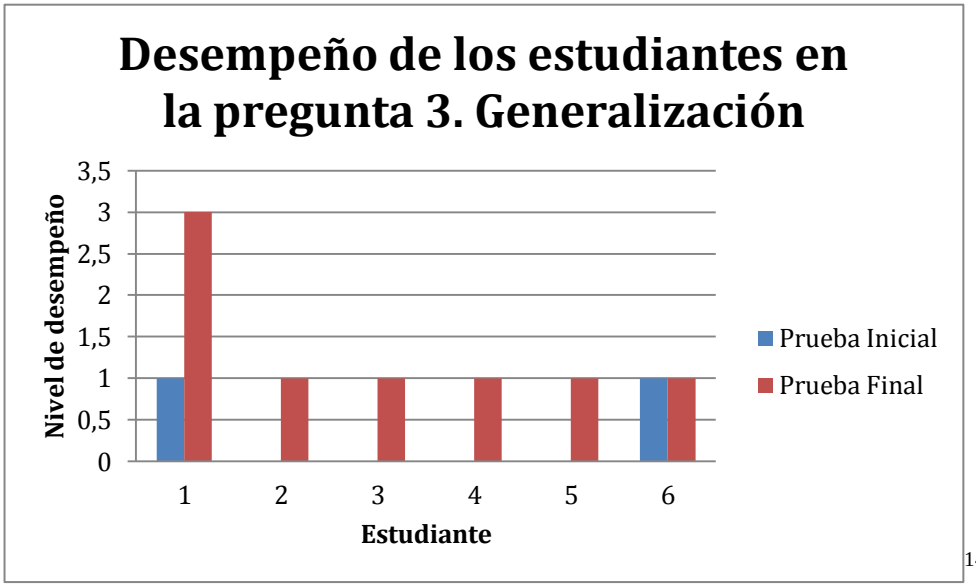
- Las actividades no estaban enfocadas directa y explícitamente a mejorar este desempeño. Aunque eran actividades relacionadas con el razonamiento algebraico y específicamente con la solución de ecuaciones, elementos esenciales para llegar a desarrollar los diferentes niveles en el uso de la letra, existen actividades más cercanas o con una aproximación en el nivel de discusión que pueden aportar más al encontrar los diferentes usos de la letra y consolidar esos usos.

Componente 2. Generalización

El desempeño valorado en este componente se evaluó con la pregunta 3, donde se valoró el desempeño de los estudiantes en el nivel de generalización. A partir del resultado en el

valor de significancia (0,034), se puede concluir que los estudiantes presentaron un cambio positivo entre el desempeño de la prueba inicial y la prueba final en la pregunta 3.

La comparación del desempeño de esta pregunta en la prueba se puede observar en la gráfica 6, en esta pregunta los estudiantes en un 83% presentaron un cambio de nivel positivo y un 17% de los estudiantes mantuvieron el mismo nivel de la prueba inicial.



[14]

Gráfico 6. Desempeño de los estudiantes en la pregunta 3, entre la prueba inicial y la final.

El 17% de los estudiantes en esta pregunta evidenciaron moverse al nivel 3, lo que significa que los estudiantes usan las leyes de los números para justificar la validez de las afirmaciones pero no encuentra la igualdad de p = q ó 2c = 4c. El 83% de los estudiantes

[14] En los gráficos de desempeño, en caso que algún estudiante no muestre la frecuencia absoluta que representa el nivel de desempeño, es porque presentó el nivel de desempeño cero.

evidenciaron estar en el nivel 1, donde los estudiantes usan un ejemplo específico para validar o no la afirmación, sin tener en cuenta todos los posibles casos.

Discusión

La generalización es un desempeño donde los estudiantes muestran un cambio positivo en su desempeño pero su cambio de nivel es mínimo, de 0 a 1. Considero que esta situación se presenta por elementos como:

- Poco tiempo de interacción entre los estudiantes y la intervención; aunque la implementación duró aproximadamente mes y medio[15], los procesos de aprendizaje suelen requerir de más tiempo y variedad de actividades para que sean reestructurados.

- Las actividades no estaban enfocadas directa y explícitamente a mejorar este desempeño. Aunque eran actividades relacionadas con el razonamiento algebraico y específicamente con la solución de ecuaciones, existen actividades más cercanas o con una aproximación en el nivel de discusión que pueden aportar más a desarrollar niveles de generalización; éste es otro enfoque del álgebra posible de enseñar y complemento del enfoque propuesto en esta intervención. Por ejemplo, según Alonso et al. (1993), se espera que para desarrollar este proceso se les proponga a los estudiantes actividades en dos contextos: el campo de los números, las cantidades, y el de las formas geométricas, con el fin de desarrollar la

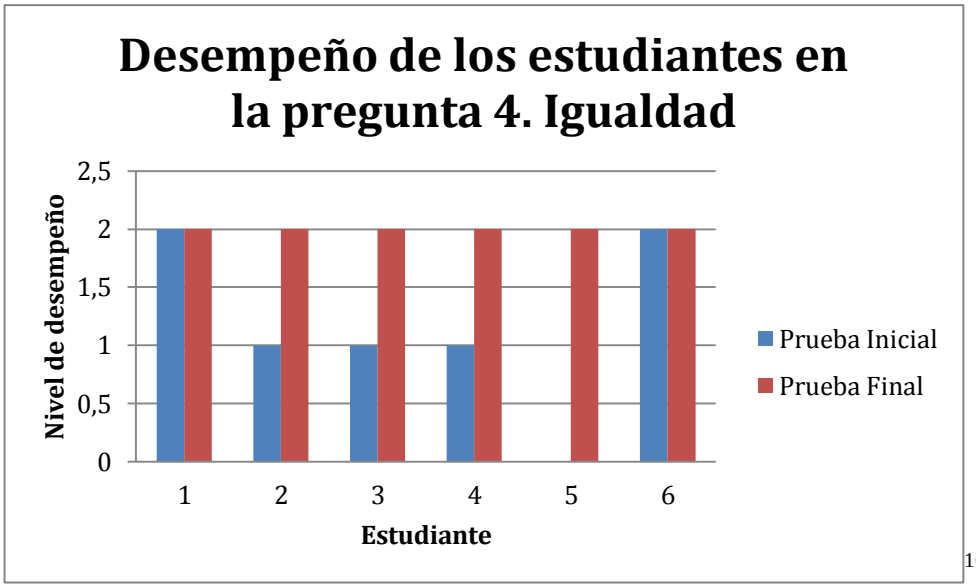
[15] En tiempo real un mes, teniendo en cuenta el tiempo perdido por la toma del colegio.

capacidad de percibir los aspectos generales. En este sentido, las actividades propuestas relacionadas con la generalización en este estudio, estuvieron más enfocadas a lo numérico, pero faltó, en las actividades (actividad 2), hacer más énfasis en los procesos de describir y escribir, como unas de las fases requeridas para generar el aprendizaje pertinente (Alonso et al., 1993).

Componente 3. Igualdad

El desempeño valorado en este componente se evaluó con la pregunta 4, donde se valoró el desempeño de los estudiantes en el uso de la igualdad. A partir del resultado en el valor de significancia (0,059), se puede concluir que los estudiantes no presentaron un cambio significante entre el desempeño de la prueba inicial y la prueba final en la pregunta 4.

La comparación del desempeño de esta pregunta en la prueba se puede observar en la gráfica 7, en esta pregunta los estudiantes en un 67% presentaron un cambio de nivel positivo y un 33% de los estudiantes mantuvieron el mismo nivel de la prueba inicial.



[16]

Gráfico 7. Desempeño de los estudiantes en la pregunta 3, entre la prueba inicial y la final.

El 17% de los estudiantes en esta pregunta evidenciaron moverse al nivel 3, lo que significa que los estudiantes usan las leyes de los números para justificar la validez de las afirmaciones pero no encuentra la igualdad de p = q ó 2c = 4c. El 83% de los estudiantes evidenciaron estar en el nivel 1, donde los estudiantes usan un ejemplo específico para validar o no la afirmación, sin tener en cuenta todos los posibles casos.

Discusión

La igualdad es un desempeño donde los estudiantes no muestran un cambio positivo.

Considero que esta situación se presenta por elementos como:

[16] En los gráficos de desempeño, en caso que algún estudiante no muestre la frecuencia absoluta que representa el nivel de desempeño, es porque presentó el nivel de desempeño cero.

- Poco tiempo de interacción entre los estudiantes y la intervención, aunque la implementación duró aproximadamente mes y medio[17], particularmente sobre este tema se dedicaron 4 sesiones o momentos con la actividad dos, los procesos de aprendizaje suelen requerir de más tiempo y variedad de actividades para que sean reestructurados. Probablemente con este tema hizo falta más tiempo para mejores discusiones entre estudiantes.

- Posiblemente, según Alonso et al. (1993), los estudiantes pueden seguir manteniendo sólo una visión del signo igual – la visión unidireccional – donde los estudiantes tienden a ver el igual como el conector entre la operación y el resultado, o como una relación entre procesos que dan el mismo resultado. Esto se puede observar, cuando el estudiante 2 opera expresiones algebraicas y al ejercicio $5x^4 + 2xy – 3x^4 + 6xy^2 + 3x – 12xy$ da como resultado 8xy (Prueba final, E2, ítem 7A), intentando dar un único resultado, recordando su estructuras aritméticas.

Componente 4. Paso del lenguaje cotidiano al algebraico.

El desempeño valorado en este componente se evaluó con las preguntas 5A y 5B, donde se valoró el desempeño de los estudiantes en el paso del lenguaje cotidiano al algebraico. A partir del resultado en el valor de significancia (0,102 y 0,180), se puede concluir que los estudiantes no presentaron un cambio significativo entre el desempeño de la prueba inicial y la prueba final de estas preguntas.

[17] En tiempo real un mes, teniendo en cuenta el tiempo perdido por la toma del colegio.

La comparación del desempeño de estas preguntas en la prueba se puede observar en la gráfica 8. En la pregunta 5A, 50% de los estudiantes presentó un cambio de nivel positivo y un 50% de los estudiantes mantuvo el mismo nivel de la prueba inicial. Asimismo, en la pregunta 5B 33% de los estudiantes presentó un cambio de nivel positivo y un 64% de los estudiantes mantuvo el mismo nivel de la prueba inicial.

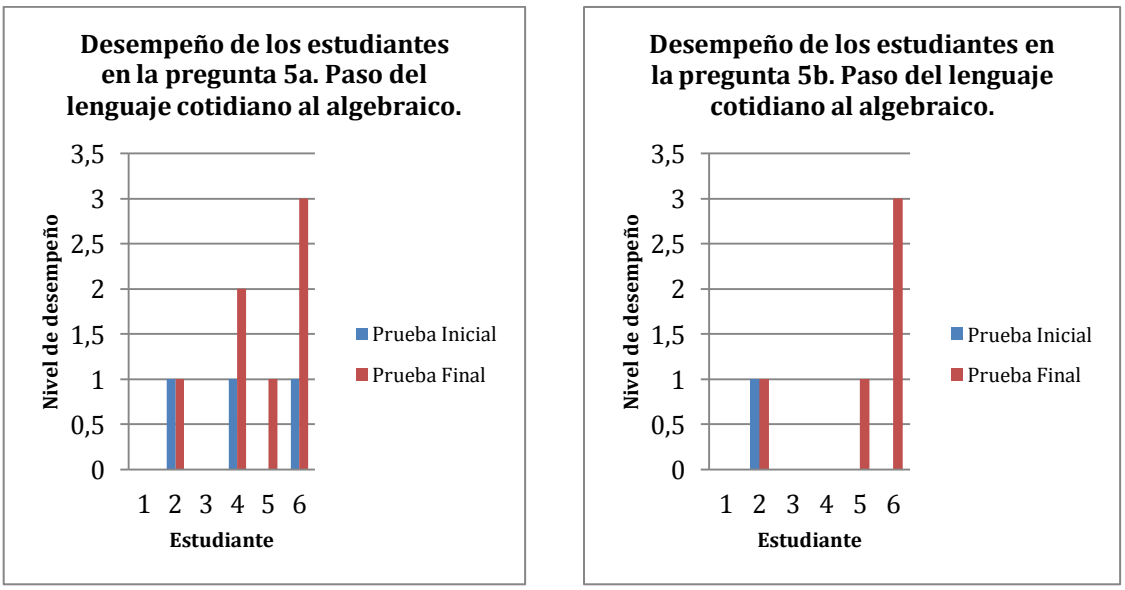


Gráfico 8. Desempeño de los estudiantes en las preguntas 5a y 5b, entre la prueba inicial y la final.

El 17% de los estudiantes en esta pregunta evidenció estar en el nivel 3, donde representan adecuadamente frases cotidianas en lenguaje algebraico. Se presenta otro caso como es el estudiante 4 (17%), quién muestra representar el problema con lenguaje algebraico pero no resuelve adecuadamente la ecuación planteada; además no mantiene el proceso usado en el primer problema.

[18] En los gráficos de desempeño, en caso que algún estudiante no muestre la frecuencia absoluta que representa el nivel de desempeño, es porque presentó el nivel de desempeño cero.

Discusión

El paso del lenguaje cotidiano a algebraico es un desempeño donde los estudiantes muestran poco cambio positivo en su desempeño, especialmente no es permanente, evaluado desde dos sentidos: (1) todos los estudiantes no llegan al mismo nivel y (2) hay estudiantes que presentan un uso de la letra, en diferente nivel, con diferentes preguntas.

Considero que esta situación se presenta por elementos como:

- Poco tiempo de interacción entre los estudiantes y la intervención, aunque la implementación duró aproximadamente mes y medio[19], los procesos de aprendizaje suelen requerir de más tiempo y variedad de actividades para que sean reestructurados.

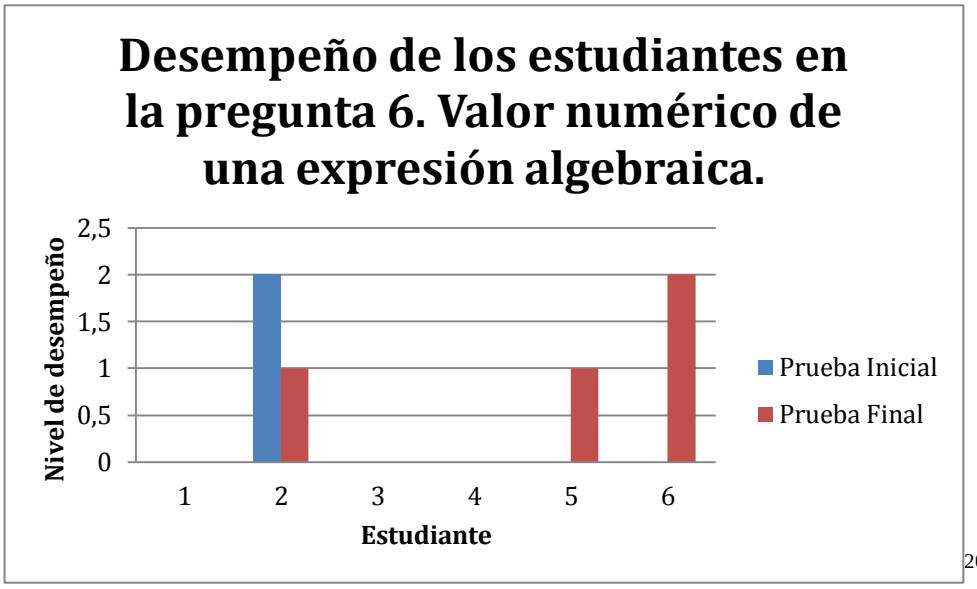
- Particularmente la actividad uno estaba orientada a lograr el desarrollo de este tema, pero la pregunta no solamente requería pasar del lenguaje cotidiano al algebraico, también requería buscar los datos relevantes para contestarla, esto pudo haber ocasionado que algunos estudiantes no encontraran los datos solicitados y usaran otros o prefirieran no solucionarla.

[19] En tiempo real un mes, teniendo en cuenta el tiempo perdido por la toma del colegio.

Componente 5. Valor numérico de una expresión algebraica.

El desempeño valorado en este componente se evaluó con la pregunta 6, donde se valoró el desempeño de los estudiantes en encontrar el valor numérico de una expresión algebraica. A partir del resultado en el valor de significancia (0,414), se puede concluir que los estudiantes no presentaron un cambio significante entre el desempeño de la prueba inicial y la prueba final en la pregunta 6.

La comparación del desempeño de esta pregunta en la prueba se puede observar en la gráfica 9. En esta pregunta los estudiantes en un 33% presentaron un cambio de nivel positivo, un 50% de los estudiantes mantuvieron el mismo nivel y un 17% de los estudiantes cambiaron su nivel negativamente con respecto a la prueba inicial.



[20]

Gráfico 9. Desempeño de los estudiantes en la pregunta 6, entre la prueba inicial y la final.

[20] En los gráficos de desempeño, en caso que algún estudiante no muestre la frecuencia absoluta que representa el nivel de desempeño, es porque presentó el nivel de desempeño cero.

El 17% de los estudiantes quedaron en el nivel 1, lo que significa que usa información no relevante para solucionar el problema, entonces los estudiantes no supieron seleccionar la información adecuada para darle solución a la pregunta. El 8% de los estudiantes está en el nivel 2, donde el estudiante usa la información relevante para el problema pero comete errores en la solución del algoritmo, eso significa que continúan sus problemas con los conocimientos previos.

Discusión

Hallar el valor numérico de una expresión algebraica es un desempeño donde los estudiantes muestran poco cambio positivo en su desempeño pero es permanente, evaluado desde dos sentidos: (1) todos los estudiantes no llegan al mismo nivel y (2) hay estudiantes que presentan un uso de la letra, en diferente nivel, con diferentes preguntas.

Considero que esta situación se presenta por elementos como:

- Poco tiempo de interacción entre los estudiantes y la intervención, aunque la implementación duró aproximadamente mes y medio[21], los procesos de aprendizaje suelen requerir de más tiempo y variedad de actividades para que sean reestructurados. Aunque como la construcción de conocimiento no es algo acabable o definitivo, se puede concluir que en el desempeño hallar el valor

[21] En tiempo real un mes, teniendo en cuenta el tiempo perdido por la toma del colegio.

numérico de una expresión algebraica los estudiantes todavía presentan ideas previas parcialmente erróneas (Coll et al. 1994).

- Las actividades no estaban enfocadas directa y explícitamente para mejorar este desempeño. Probablemente para este tipo de situaciones es necesario plantear actividades más particulares para que los estudiantes comprendan el manejo del algoritmo que se presenta.

- Los conocimientos previos no desarrollados influyen en la construcción de los nuevos conocimientos (Coll et al., 1994). En este estudio se encontró que los estudiantes tenían dificultades al operar números enteros y expresiones algebraicas, lo que se intentó abordar mediante tareas extra-clase y pequeñas discusiones en plenarias. Pero es notable que no funcionó esta estrategia para reestructurar estos conocimientos previos necesarios y que obstruyeran los nuevos aprendizajes.

Componente 6. Simplificación de expresiones semejantes.

El desempeño valorado en este componente se evaluó con las preguntas 7A y 7B, donde se valoró el desempeño de los estudiantes en la simplificación de expresiones algebraicas. A partir del resultado en el valor de significancia (0,180 y 0,317), se puede concluir que los estudiantes no presentaron un cambio significativo entre el desempeño de la prueba inicial y la prueba final en las preguntas 7A y 7B.

La comparación del desempeño de estas preguntas en la prueba se puede observar en la gráfica 10. En la pregunta 7A, los estudiantes en un 33% presentaron un cambio de nivel positivo y un 67% de los estudiantes mantuvieron el mismo nivel de la prueba inicial.

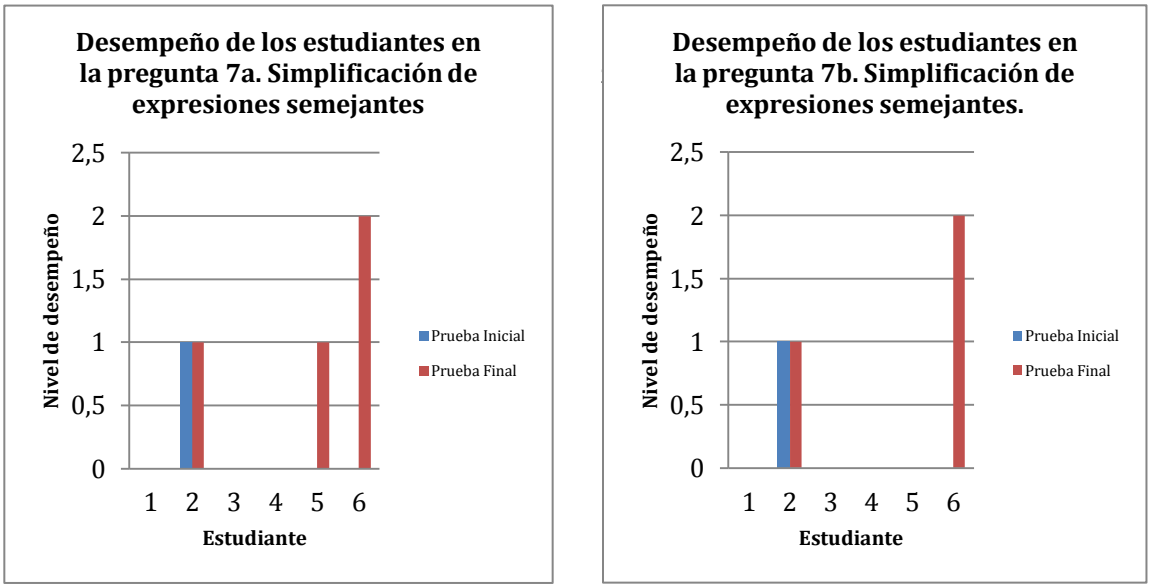


Gráfico 10. Desempeño de los estudiantes en las preguntas 7A y 7B, entre la prueba inicial y la final.

Simplificación de expresiones algebraicas es un desempeño donde los estudiantes muestran poco cambio positivo en su desempeño, evaluado desde dos sentidos: (1) todos los estudiantes no llegan al mismo nivel y (2) hay estudiantes que presentan un uso de la letra, en diferente nivel, con diferentes preguntas.

Considero que esta situación se presenta por elementos como:

[22] En los gráficos de desempeño, en caso que algún estudiante no muestre la frecuencia absoluta que representa el nivel de desempeño, es porque presentó el nivel de desempeño cero.

- Poco tiempo de interacción entre los estudiantes y la intervención, aunque la implementación duró aproximadamente mes y medio[23], los procesos de aprendizaje suelen requerir de más tiempo y variedad de actividades para que sean reestructurados. Aunque como la construcción de conocimiento no es algo acabable o definitivo, se puede concluir que en el desempeño simplificar expresiones algebraicas los estudiantes todavía presentan ideas previas parcialmente erróneas (Coll et al. 1994). Algunas como la necesidad de dar un solo resultado, sin observar los elementos semejantes. Esto se puede observar, cuando el estudiante 2 opera expresiones algebraicas y al ejercicio $5x^4 + 2xy – 3x^4 + 6xy^2 + 3x – 12xy$ da como resultado 8xy (Prueba final, E2, ítem 7A), intentando dar un único resultado, recordando su estructuras aritméticas.

- Las actividades no estaban enfocadas directa y explícitamente para mejorar este desempeño. Probablemente para este tipo de situaciones es necesario plantear actividades más particulares para que los estudiantes comprendan el manejo del algoritmo que se presenta.

- Los conocimientos previos no desarrollados influyen en la construcción de los nuevos conocimientos (Coll et al., 1994). En este estudio se encontró que los estudiantes tenían dificultades al operar números enteros y expresiones algebraicas, lo que se intentó abordar mediante tareas extra-clase y pequeñas discusiones en plenarias. Pero es notable que no funcionó esta estrategia para

[23] En tiempo real un mes, teniendo en cuenta el tiempo perdido por la toma del colegio.

reestructurar estos conocimientos previos necesarios y que obstruyeran los nuevos aprendizajes.

Componente 7. Multiplicación de expresiones algebraicas.

El desempeño valorado en este componente se evaluó con las preguntas 8A y 8B, donde se valoró el desempeño de los estudiantes en el uso de la multiplicación de expresiones algebraicas. A partir del resultado en el valor de significancia (1,000 y 1,000), se puede concluir que los estudiantes no presentaron un cambio significante entre el desempeño de la prueba inicial y la prueba final en las preguntas 7A y 7B.

La comparación del desempeño de estas preguntas en la prueba se pueden observar en la gráfica 11. En la pregunta 7A, los estudiantes en un 33% presentaron un cambio de nivel positivo y un 67% de los estudiantes mantuvieron el mismo nivel de la prueba inicial. Así mismo; en la pregunta 7B los estudiantes en un 17% presentaron un cambio de nivel positivo y un 83% de los estudiantes mantuvieron el mismo nivel de la prueba inicial.

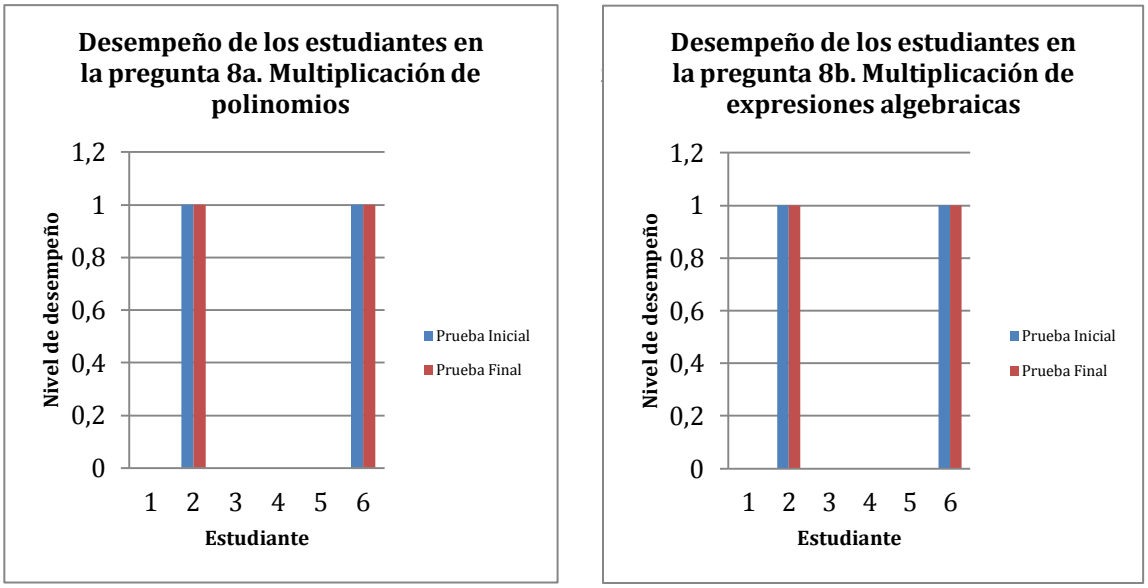


Gráfico 11. Desempeño de los estudiantes en las preguntas 8A y 8 B, entre la prueba inicial y la final.

Multiplicación de expresiones algebraicas es un desempeño donde los estudiantes muestran poco cambio positivo en su desempeño, evaluado desde dos sentidos: (1) todos los estudiantes no llegan al mismo nivel y (2) hay estudiantes que presentan un uso de la letra, en diferente nivel, con diferentes preguntas.

Considero que esta situación se presenta por elementos como:

- Poco tiempo de interacción entre los estudiantes y la intervención, aunque la implementación duró aproximadamente mes y medio[25], los procesos de aprendizaje suelen requerir de más tiempo y variedad de actividades para que sean reestructurados. Aunque como la construcción de conocimiento no es algo

[24] En los gráficos de desempeño, en caso que algún estudiante no muestre la frecuencia absoluta que representa el nivel de desempeño, es porque presentó el nivel de desempeño cero.
[25] En tiempo real un mes, teniendo en cuenta el tiempo perdido por la toma del colegio.

acabable o definitivo, se puede concluir que en el desempeño multiplicación de expresiones algebraicas los estudiantes todavía presentan ideas previas parcialmente erróneas (Coll et al., 1994).

- Las actividades no estaban enfocadas directa y explícitamente para mejorar este desempeño. Probablemente para este tipo de situaciones es necesario plantear actividades más particulares para que los estudiantes comprendan el manejo del algoritmo que se presenta.

- Los conocimientos previos no desarrollados influyen en la construcción de los nuevos conocimientos (Coll et al., 1994). En este estudio se encontró que los estudiantes tenían dificultades al operar números enteros y expresiones algebraicas, lo que se intentó abordar mediante tareas extra-clase y pequeñas discusiones en plenarias. Pero es notable que no funcionó esta estrategia para reestructurar estos conocimientos previos necesarios y que obstruyeran los nuevos aprendizajes.

Componente 8. Solución de problemas que involucran ecuaciones simples.

El desempeño valorado en este componente se evaluó con las preguntas 10 y 11, donde se valoró el desempeño de los estudiantes en la solución de problemas que involucran ecuaciones simples. A partir del resultado en el valor de significancia en la pregunta 10 (0,041), se puede concluir que los estudiantes presentaron un cambio significativo entre el desempeño de la prueba inicial y la prueba final en esta pregunta, lo que nos se presenta en la pregunta 11 ya que el valor de significancia de esta es del 0,180.

La comparación del desempeño de esta pregunta en la prueba se puede observar en la gráfica 12. En la pregunta 10, los estudiantes en un 83% presentaron un cambio de nivel positivo y un 17% de los estudiantes mantuvieron el mismo nivel de la prueba inicial. En la pregunta 11, los estudiantes también presentaron un cambio de nivel positivo en un 83% y un 17% de los estudiantes mantuvieron el mismo nivel de la prueba inicial.

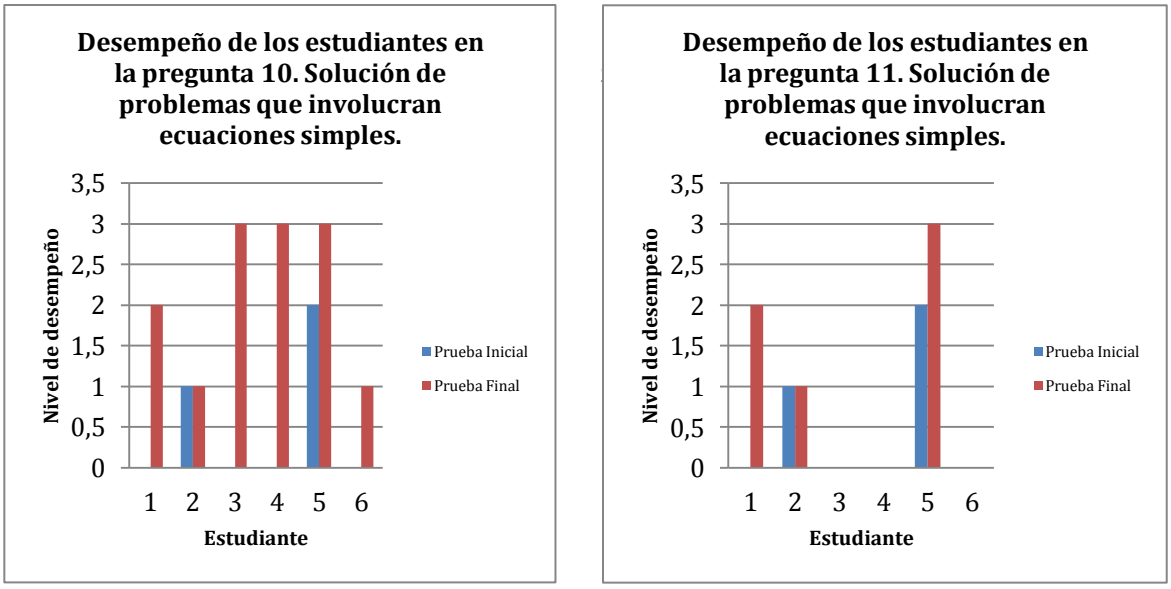


Gráfico 12. Desempeño de los estudiantes en las preguntas 10 y 11, entre la prueba inicial y la final.

En la pregunta 10 el 50% de los estudiantes llegaron al nivel 3, donde usan la información que corresponde para solucionar el problema pero comete errores de signos u operaciones. Y en la pregunta 11 tan solo uno de los estudiantes mantiene ese nivel.

[26] En los gráficos de desempeño, en caso que algún estudiante no muestre la frecuencia absoluta que representa el nivel de desempeño, es porque presentó el nivel de desempeño cero.

Discusión

Solucionar problemas que involucran ecuaciones lineales es un desempeño donde los estudiantes muestran poco cambio positivo en su desempeño pero es permanente, evaluado desde dos sentidos: (1) todos los estudiantes no llegan al mismo nivel y (2) hay estudiantes que presentan un uso de la letra, en diferente nivel, con diferentes preguntas.

Considero que esta situación se presenta por elementos como:

- Poco tiempo de interacción entre los estudiantes y la intervención, puesto que los procesos de aprendizaje suelen requerir de más tiempo y variedad de actividades para que sean reestructurados.

- Particularmente la actividad tres estaba orientada a lograr el desarrollo de este tema, pero es una de las preguntas donde se presenta menor cambio positivo, especialmente porque al responder la segunda pregunta (11) que tiene la misma estructura de la primera, los estudiantes no usan los mismos procedimientos utilizados para responder la pregunta 10.

- Los conocimientos previos no desarrollados interfieren con la construcción de los nuevos conocimientos. En este estudio se encontró que los estudiantes tenían dificultades al operar números enteros y expresiones algebraicas, lo que se intentó abordar mediante tareas extra-clase y pequeñas discusiones en plenarias. Pero es notable que no funcionó esta estrategia para reestructurar estos conocimientos previos necesarios y que obstruyeran los nuevos aprendizajes (Coll et al., 1994).

- Este desempeño involucra tres procesos: (1) Comprender la información del problema, (2) traducirla al lenguaje algebraico y (2) resolver la ecuación del problema (Martín et al. 1989). Los elementos que probablemente más dificulten la solución de los problemas propuestos en la prueba es la posible falta de habilidades específicas para resolver problemas, algunas de ellas: saber detectar los datos conocidos y los que se deben buscar, probar posibles soluciones, usar tablas, diagramas (Socas et al., 1989). Elementos con los que probablemente los estudiantes analizados continúan teniendo dificultades, esto se evidenció en el desarrollo de las pruebas (Inicial y final), ya que los enunciados que involucraban problemas tenían un menor índice de respuesta.

4.3.1.2. Comparación de los resultados de las pruebas inicial y final

La tabla 6 muestra los datos estadísticos descriptivos, en la cual se puede observar que los datos de la prueba final tuvieron indicios de mejora en aspectos como la media aritmética, la cual subió 0.78, así como el valor máximo, lo que significa que en algunas preguntas los estudiantes obtuvieron un nivel de 3[27].

Estadísticos descriptivos

	N	Media	Desviación	Mínimo	Máximo

[27] Para valorar cada una de las preguntas se usó una tabla de niveles que oscilan entre 0 y 4 (En algunas preguntas sólo llega hasta 3). La tabla se encuentra a disposición del lector en el anexo 8.

			típica		
PruebaInicial	78	,44	,636	0	2
PruebaFinal	78	1,22	1,077	0	3

Tabla 6. Datos estadísticos de las pruebas inicial y final.

El valor de significancia es 0,00 con el cual se puede rechazar la hipótesis nula (Ho)[28], lo que permite concluir que hubo cambios positivos en el nivel de desempeño de los estudiantes en algunos de los saberes valorados en estas pruebas.

La comparación del desempeño de los seis sujetos en cada una de las pruebas se puede observar en las gráficas 13 y 14. De forma general los estudiantes presentaron un cambio de nivel positivo frente a su desempeño en las preguntas de las pruebas. Al respecto, el 49% de las respuestas dadas en la prueba final evidencia un desempeño superior respecto de la prueba inicial. De otro lado, el 50% de las respuestas dadas en la prueba final mantiene el mismo nivel que en la prueba inicial. Solamente una respuesta evidencia un nivel inferior en la prueba final respecto a la prueba inicial.

[28] Ho. Los estudiantes presentan el mismo nivel en las pruebas inicial y final.

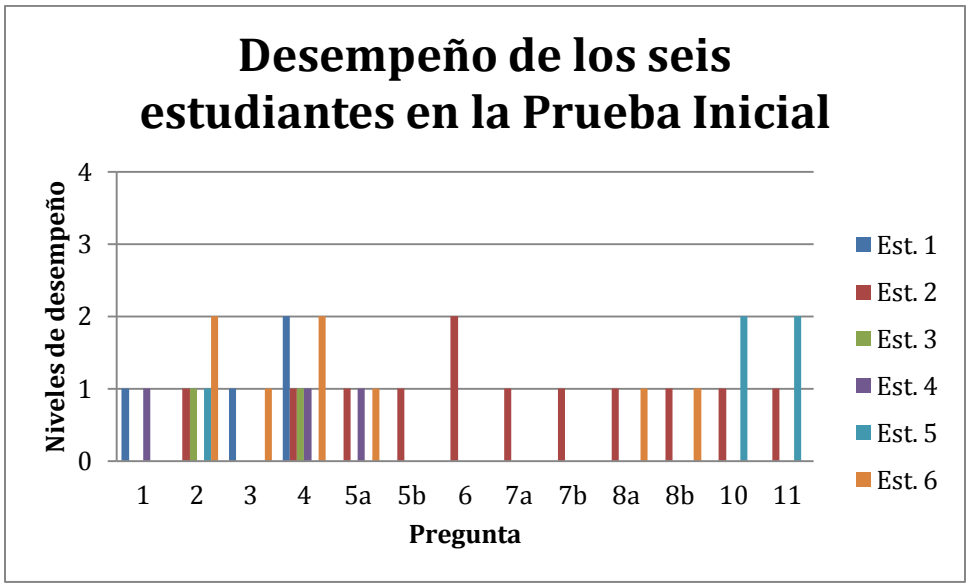


Gráfico 13. Desempeño de los seis estudiantes en la prueba Inicial.

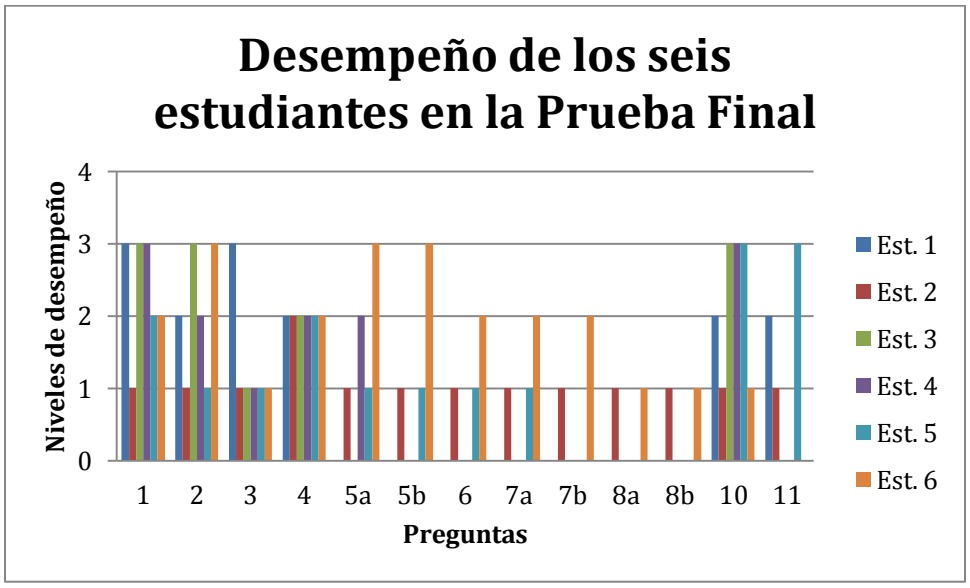


Gráfico 14. Desempeño de los seis estudiantes en la prueba Final.

Al revisar los resultados por estudiante (Ver anexo 13), se puede concluir que solamente uno de los estudiantes no presentó un cambio significativo en sus respuestas entre la prueba

inicial y la final. Los otros estudiantes todos mostraron un cambio positivo y significante entre los resultados de sus pruebas inicial y final.

Los estudiantes 1 y 3 mejoraron en 5 de sus respuestas y en 4 componentes de la prueba. El estudiante 4 mejoró en 6 preguntas y en 5 componentes de la prueba. Los estudiantes 5 y 6 mejoraron en 9 y 10 de sus respuestas, respectivamente, y mejoraron en 6 componentes de la prueba.

4.3.2. Impacto en la enseñanza

En este apartado pretendo mostrar al lector el impacto que presentó la implementación del ambiente de aprendizaje en mi proceso de enseñanza. Para cumplir con este propósito analicé de la dimensión didáctica: Estrategias de enseñanza, procesos y actitudes que se promueven.

Estrategias de enseñanza

El impacto de este estudio se puede evidenciar en mi desempeño como docente, no sólo a mi relación con el grupo de estudiantes con el que se hizo la implementación. Desde el componente estrategias de enseñanza noté como evolución el tipo de actividades seleccionadas para realizar en clase.

Lo anterior se puede sustentar con un ejemplo como lo es la comparación entre la primera versión del diseño de intervención (Ver anexo 14) y la final (Ver apartado 3.3.2) donde se puede observar un cambio en el tipo de actividades propuesta. En la primera versión del diseño, se hizo un énfasis en el análisis de ejercicios, una gran cantidad, en la versión final se priorizó la producción de conjeturas y el análisis de casos, algunos propuestos por los mismos estudiantes.

Procesos que se promueven

En la planeación de las actividades para mis clases noté haber logrado una transformación en el ámbito de los procesos que me propongo promover, ahora pienso primero en procesos como las competencias, las capacidades o los desempeños que espero mis estudiantes lleguen a desarrollar en el proceso de aprendizaje de las matemáticas. En el estudio esto se evidenció con el cambio de las actividades y los objetivos propuestos entre la primera versión de la propuesta de intervención y la versión final.

En el primer momento la propuesta estaba centrada específicamente en el tema a abordar, desde los algoritmos matemáticos, pero con la revisión bibliográfica y la reflexión realizada surgió la necesidad de complementar la temática seleccionada con la competencia que se esperaba desarrollar, en este caso la solución de problemas. Además durante la implementación de la propuesta fue tomando fuerza la competencia comunicación, primero porque es una de las formas como los estudiantes evidencian su aprendizajes y segundo porque sin haberlo planeado explícitamente, las acciones realizadas en el aula - como el

trabajo en grupo y la discusión - generaron que esta competencia tomara un papel preponderante en el desarrollo de conocimiento de los estudiantes.

Actitudes que se promueven

Otro elemento con el que encontré valiosos resultados durante la implementación y que por ende tomó fuerza para el desarrollo de mis clases actuales son las actitudes que se promueven, en este caso la discusión y el trabajo en grupo.

La discusión está muy relacionada con los efectos causados en el desarrollo de la competencia comunicación, comentada en el ítem anterior, donde se produjo efectos positivos en el aprendizaje de los estudiantes, al fomentar ambientes propicios para la discusión entre pares y con la docente.

Por otro lado, el trabajo en grupo les permitió a los estudiantes desarrollar destrezas sociales y académicas que posiblemente repercutieron en sus desempeños. Por ejemplo, destrezas sociales como el respeto de la palabra y prestar atención al otro cuando está hablando, son elementos necesarios y básicos que surgieron como necesidad para comprender la postura del otro.

4.4. Contexto socio-cultural

En la actualidad la sociedad está teniendo cada vez más problemas sociales que la afectan. Habitualmente, la escuela se ve afectada, involucrada o al menos tangencialmente tocada por esos hechos que afectan a la sociedad (Valdés, 2010). Es común, que en las escuelas, especialmente las públicas (experiencia personal de la investigadora) se deba hacer un paro en la jornada habitual para por lo menos reflexionar sobre algunos asuntos de fuera de la escuela que se convierten en protagonistas del momento; algunos colegios han sido más organizados o han tenido problemas de mayor impacto, por lo que ya hay proyectos institucionales que tratan de responder a tales problemáticas.

Problemáticas como el del matoneo – fenómeno recurrente en el país –, drogadicción, venta de SPA (Sustancias psicoactivas y agentes tóxicos) o pandillas – donde entran los barristas de equipos de fútbol – han sido algunas de esas problemáticas que últimamente están generando mayor preocupación en las escuelas, aunque no son las únicas. Comúnmente, los docentes nos centramos en las necesidades cognitivas y didácticas de las propuestas pedagógicas, pero nos olvidamos de las condiciones sociales que rodean al centro educativo que de alguna forma terminan interviniendo en la escuela y en las investigaciones.

Documentación del evento

La situación que impactó desfavorablemente este estudio empezó el 2 de mayo del 2012: dos estudiantes tuvieron un conflicto dentro del colegio, que no se resolvió dentro del

mismo, para luego salir a solucionarlo involucrando personas de afuera. Esto ocasionó que se presentara una fuerte pelea entre dos grupos (uno por cada estudiante), donde se involucraron arma corto-punzantes. El resultado de esta riña fue la muerte de uno de los hermanos de los involucrados y fuertes heridas de gravedad para otras tres personas (dos de ellos eran los estudiantes que comenzaron el problema).

Dos días después de la situación, hombres armados y encapuchados entraron al colegio por encima de las rejas buscando al estudiante al que su grupo había ocasionado la muerte del otro estudiante, pero no lo encontraron; debido a ello no causaron daño alguno dentro de la institución. Luego de esas situaciones el colegio se vio en la obligación de generar jornadas de reflexión en la institución, por lo que algunos días después se suspendieron las clases programadas para hacer un encuentro con el director de curso y hacer las actividades propuestas.

Finalmente los estudiantes, especialmente de décimo y once grado de la institución, acompañados de algunos padres de familia, sintieron la necesidad de hacer una toma de las instalaciones del colegio con el fin de denunciar lo que ellos consideraban era las problemáticas del colegio y pedir que les solucionaran algunas de estas situaciones. Las denuncias fueron:

- Venta y consumo de drogas dentro del plantel.
- Uso de armas dentro del colegio para amenazar otros estudiantes.

- Funcionamiento de pandillas dentro de la institución.
- Matoneo entre estudiantes.
- Poco interés de las directivas sobre las problemáticas de la institución.
- Poco uso de los recursos económicos de la institución para la institución.

Instituciones como la policía y la DILE (Dirección Local de Educación) tomaron cartas en el asunto, dialogaron con los representantes de estudiantes y padres de familia, llegaron a acuerdos e hicieron la entrega del colegio para retornar a las actividades habituales, este proceso duró aproximadamente dos semanas.

Problemas ocasionados en la implementación

Cuando se presentaron estos hechos se estaba desarrollando la primera fase de la implementación educativa, lo cual ocasionó que se detuviera la intervención por fuerza mayor. Cuando se planeó el tiempo de la intervención, se programó que se terminara la implementación unas semanas antes (tres) antes de que los estudiantes salieran a receso de vacaciones de mitad de año, previendo la posibilidad de necesitar recolectar más datos o que surgieran percances (no tan graves) de último momento. Cuando ocurrió el evento en cuestión, en primer momento, como las condiciones no eran claras, se llegó a pensar que no se lograba terminar la implementación con los estudiantes. Luego, cuando las condiciones del colegio regresaron a la normalidad, las acciones que se realizaron para que este lapso no ocasionara consecuencias muy graves en la investigación fueron:

- Se habló con otros docentes del colegio, quienes prestaron algunas de sus horas de clase para darle espacio a la investigación. Cabe aclarar que los docentes que brindaron este espacio de más, lo hicieron colaborando con el buen funcionamiento del estudio, puesto que ellos estaban con tiempos muy cortos para terminar de dar notas definitivas del periodo.

- Se implementaron nuevas presentaciones y plenarias que no estaban planeadas, con el fin de recordar la actividad que se había realizado antes del evento, para poder continuar y no perder la información que se había desarrollado en ese momento.

Finalmente se logró aplicar toda la intervención antes del tiempo del receso escolar. Este fue un evento que causó daños colaterales a todos los integrantes de la institución: directivos, docentes, estudiantes, padres de familia y comunidad alrededor. Por eso, una de las invitaciones que espera dejar esta investigación es la necesidad de incluir en los proyectos de investigación esos elementos sociales que cada vez afectan con más fuerza la escuela y que como investigadores en educación matemáticas y TIC (experiencia propia) hemos dejado rezagados, no incluimos como elemento de reflexión en la investigación, no como objeto de estudio, ni como elemento que puede llegar a ser parte de las propuestas didácticas.

Posibles Soluciones

Los conflictos socio – culturales suelen impactar de manera recurrente el desarrollo de los procesos de la escuela, particularmente en el sector público, razón por la cual se quiso documentar esta situación y apoyarse en autores que han avanzado en este camino. Entre

estos están Vithal y Valero (2012), quienes proponen convertir las clases de matemáticas en espacios donde las injusticias de la sociedad se puedan debatir. Su idea fundamental es plantear en las aulas tareas abiertas y enfoques investigativos que requieran un cuestionamiento por parte de los estudiantes sobre su cultura particular, la de su aula y la de su escuela.

En este sentido, estoy de acuerdo con las autoras cuando afirman que las investigaciones pueden mostrar el éxito de procesos, tareas, materiales y tecnologías particulares en ámbitos específicos para las clases de matemáticas (Vithal y Valero, 2012). Sin embargo, nos hacen el llamado a tener en cuenta que cuando los sistemas son cambiantes o más amplios, no contamos con la misma información para desempeñarnos en ellos. Frecuentemente como docente suelo proponerles a mis estudiantes la necesidad de reflexionar sobre algún hecho que se presente en la institución y que nos afecte como seres humanos, pero poco uso los elementos matemáticos o un proceso planeado y permanente de reflexión sobre las injusticias sociales que les afectan en su barrio o en su contexto. Uno de los elementos que considero se presta más para estas reflexiones puede ser el desarrollo del pensamiento estadístico; considero que desde la construcción de los conceptos relacionados con este pensamiento, se puede integrar ampliamente temas de reflexión en la escuela.

Por otra parte, las matemáticas no son ni deberían ser la única área que responda a este cuestionamiento. Considero importante que como instituciones presentemos proyectos transversales generadores de espacios de reflexión para los estudiantes en sus diferentes

niveles. En este camino, Valdés (2010) propone incentivar en los estudiantes el proyecto de vida personal como uno de los elementos que le dé al estudiante argumentos para la toma de decisiones.

5. Discusión

> *"El maestro como agente que, a través de los procesos de enseñanza, orienta, dirige, facilita y guía la interacción de los alumnos con el saber colectivo culturalmente organizado, para que ellos, los alumnos, construyan su propio conocimiento". (Fierro et al., 1999, p. 34)*

El desarrollo de este estudio me ha ayudado a reflexionar con miras a mejorar mis desempeños en diferentes campos académicos y profesionales. Algunos de los campos en los que me ha aportado la investigación son los desempeños de mis estudiantes en el aula, particularmente en el desarrollo del pensamiento algebraico; mi desempeño en el aula y mi desempeño como investigadora. A continuación presentaré algunos de esos elementos particulares sobre los cuales reflexioné:

Uso de recursos tecnológicos

La invitación actual de diversos autores es usar como apoyo en el aula diferentes recursos concretos o tecnológicos, desde una mirada responsable, donde no se crea que el recurso en sí tiene un poder de enseñanza o de éxito para el evento de aprendizaje (Thompson, 1994; NCTM, 2000; Godino et al., 2003; Trgalova, 2009).

Para comenzar el uso de los recursos, Thompson (1994) recomienda hacer un estudio total del contexto y tener claros los objetivos de aprendizaje que se quieren implementar. Una de

las preguntas que este autor sugiere tener más clara es *¿qué quiero que mis estudiantes comprendan?*. Desde mi experiencia en este estudio, considero que tener claro el contexto – esto incluye los estudiantes, la institución y el docente – y los objetivos de aprendizaje da herramientas claras para tomar decisiones: en primer lugar, sí es útil apoyarse de recursos en esa actividad particular de aprendizaje y en segundo lugar, para seleccionar el o los recursos más apropiados para el proceso.

Otras recomendaciones que nos hacen al momento de seleccionar o usar los recursos tecnológicos como apoyo a la actividad de aprendizaje son (1) la necesidad de desarrollar habilidades de exigencia diferentes a las acostumbradas, tales como: aprender a aprender, resolver problemas, analizar, crear, proponer, entre otras (Haddad & Draxler, 2001); y (2) proponerle situaciones a los estudiantes donde tengan un papel activo (Godino et al., 2003). Las dos recomendaciones anteriores nos hacen un llamado como docentes a brindarles el papel protagónico a los estudiantes, donde sean ellos los que manipulen información, planteen hipótesis, conjeturas y creen propuestas o resuelvan problemas. Donde cada estudiante tenga claro su proceso de aprendizaje y sea el principal participe del mismo, donde discuta con sus compañeros y con sus docentes a cerca de las situaciones propuestas y los conocimientos desarrollados.

Particularmente, en este estudio se hizo una selección objetiva de los recursos que apoyaron cada momento, aún así se presentaron tanto potencialidades como limitaciones en el uso de la tecnología. Desde lo cual se plantea que posiblemente el uso de ningún recurso es

totalmente positivo en un proceso de aprendizaje, pero que si es posible desde la reflexión oportuna y la experiencia disminuir el impacto negativo que pueda ocasionar el uso de recursos tecnológicos en el proceso de aprendizaje.

Impacto en el aprendizaje

El desarrollo de habilidades en el razonamiento algebraico, en la actualidad, es una preocupación tanto para docentes como para estudiantes. Los estudiantes suelen tener dificultades en los otros razonamientos (numérico, geométrico, estadístico) pero cuando llegan al curso donde empiezan con mayor fuerza el razonamiento algebraico, el panorama a la mayoría de los estudiantes empieza a tornárseles negro.

Con este estudio, como docente me alimenté de estrategias que pueden ayudar a disminuir la dificultad para desarrollar este razonamiento, al menos en lo orientado a la solución de problemas que involucran ecuaciones simples con números enteros.

Las competencias matemáticas a las que se le había dado más fuerza en este estudio fueron la solución de problemas y la representación, pero en el camino tomó fuerza otra que es la comunicación. Uno como docente suele darle mayor fuerza a algunas competencias, habilidades o conocimientos, aunque no se debe olvidar que las competencias matemáticas no son totalmente excluyentes las unas de las otras, por lo que seguramente si se desarrolla

una en específico, al menos tangencialmente, se ampliarán otras. El darle más relevancia a algunas competencias que a otras suele ser influencia de gustos, formación o tranquilidad.

Por otro lado, Kieran (2006) presenta como uno de los ajustes que los estudiantes deben hacer durante la transición aritmética al álgebra la forma de ver el igual. Los estudiantes en el presente estudio, no mostraron un cambio significativo en su desempeño, pero se logró que empezaran a estudiar ejemplos para comprobar afirmaciones sobre el igual, lo que posiblemente generó un espacio de discusión en ellos para llegar a comprender y utilizar las otras interpretaciones del igual.

Otro ajuste que los estudiantes necesitan realizar es el uso de la letra; este es uno de los desempeños que los estudiantes de esta investigación presentaron con más cambio positivo. Aunque todos los estudiantes no lograron el mismo nivel, sí tuvieron movimientos positivos de nivel entre los niveles 2 y 3. El 33% de los estudiantes evidenciaron estar en el nivel 2, donde usan la letra como objeto lo que significa. Los estudiantes encuentran diversos números enteros que cumplen con condiciones presentadas, no encuentran todos los casos posibles y generalmente en casos particulares comenten errores al encontrar los números para ciertas condiciones. El 33% de los estudiantes en esta pregunta evidenciaron moverse al nivel 3, lo que significa que los estudiantes usan la letra como incógnita o número generalizado. Los estudiantes encuentran diversos números enteros que cumplen con condiciones presentadas pero no generalizan sus respuestas con el fin de encontrar todos los casos posibles.

Reflexión sobre mi práctica docente

Una invitación de Fierro et al. (1999) es a transformar las practicas pedagógicas a través de la investigación – acción, como elemento para reflexionar sobre la práctica docente de cada uno. Entre las dimensiones que ellas proponen analizar se encuentra la dimensión didáctica, siendo ésta la que más noté como afectada positivamente por este estudio, que he logrado una reconstrucción de mi desempeño docente, un elemento que no me permite en la actualidad tomar decisiones de aula sin pensar en cada uno de los aspectos en los que posiblemente intervendría.

Procesos de razonamiento en el aula

Desde mi formación en pregrado me han hablado, he leído y he aprendido que la resolución de problemas es uno de los elementos más apropiados para usar en la enseñanza de las matemáticas, ya sea como metodología o como habilidad o competencia a desarrollar en el aula. Pero soy fiel creyente que algunas prácticas "tradicionales" no se deben perder en el aula, porque se pierden otros elementos que también brindan estos enfoques, por ejemplo, el adiestramiento en algoritmos. Desde que empecé mi práctica profesional he intentado darle un equilibrio a estos dos enfoques donde no se pierda o se relegue ninguno.

Al iniciar la implementación noté que, aunque ese era mi discurso, en la práctica estaba cometiendo algunos errores enfocándome estrictamente a lo algorítmico. Esto lo noté

porque empecé a reflexionar sobre las propuestas didácticas que estaba planteando en el último año, la primera versión de mi implementación en este estudio, o las clases en el colegio donde soy la encargada, estaban cargadas de un gran componente algorítmico. Desde las lecturas y los ajustes recomendados por los expertos, reorienté mi diseño a la versión dos, al mismo tiempo, fui proponiendo cambios pequeños, pero muy bien planeados, en mis clases diarias. Las primeras preguntas que me contesto ahora son ¿cuál o cuáles son las habilidades o competencias que quiero desarrollar con mis estudiantes en x grado? y ¿cuáles son los conocimientos esenciales del grado en el que se encuentran?. Tomo estos elementos como punto de partida para mi planeación en cuanto a objetivos, actividades, uso de recursos, evaluación, entre otros.

Reflexión sobre la enseñanza como actividad investigadora.

> *"Sólo los docentes, sobre una base de continuidad, tienen acceso a los datos cruciales para comprender las aulas". (Latorre, 2007, p.12)*

La reflexión vista como el elemento más importante en la investigación – acción (Latorre, 2007) fue uno de los aspectos que más aportó a mi estudio, a mi aprendizaje y a mis decisiones mas al mismo tiempo fue la más difícil de realizar. La reflexión suele atravesar la investigación como una espiral reflexiva dentro del estudio y la intervención, también sentí que ocurría este mismo evento en mi proceso como investigadora. Usando la investigación – acción descubrí elementos valiosos para tener en cuenta en los procesos

investigativos pero también descubrí mis debilidades, en las que debo enfocarme para mejorar mis prácticas y especialmente mi reflexión sobre mis desempeños en el aula.

Al igual que Latorre (2007) considero que un aspecto limitante a la reflexión, es el hecho de no contar con procedimientos definidos que orienten el modo de llevar a cabo la reflexión. Al no haber un "modelo" para hacer la reflexión sobre la práctica, la metodología, las actividades, los recursos, etc., dependemos de nuestra creatividad y las personas que nos orientan en este camino para definir nuestro propio proceso reflexivo.

Una de las estrategias que considero es de gran ayuda: es hacer el diario de reflexión, este es muy substancioso si se realiza no solo de la intervención sino del estudio en general. Considero que así, al principio, no se haga una reflexión muy profunda si debemos tomar la disciplina de hacer apuntes de lo sucedido en cada una de las fases de la investigación, así sean eventos particulares como sentimientos, eventos especiales o aspectos que llamaron la atención. Posiblemente en los primeros momentos este proceso sea muy descriptivo pero considero que con el tiempo, la autoevaluación y la comparación con otros estudios se va logrando un refinamiento en el estilo reflexivo.

Conclusiones

En el presente apartado se pretenderá responder a las preguntas de investigación como forma de mostrar las conclusiones del presente estudio. Además se explicitarán algunos elementos que considero hicieron parte importante del desarrollo de esta investigación, ya sea como elemento reflexivo o como aporte pedagógico.

Las condiciones didácticas que aportaron positivamente a los procesos de enseñanza y aprendizaje del álgebra, apoyados por TIC, de los estudiantes del grado noveno de la Institución Educativa Distrital José Francisco Socarrás se pueden describir como:

En cuanto al aprendizaje:

- El uso de recursos tecnológicos aportó diferentes bondades al proceso de aprendizaje: (i) por medio de la manipulación de simulaciones los estudiantes exploraron conjeturas para llegar a conclusiones sobre los temas de equivalencias y solución de problemas que involucran ecuaciones lineales; (ii) las herramientas tecnológicas brindaron un elemento concreto para los estudiantes sobre el cual discutir con sus compañeros y profesora. Además, los recursos tecnológicos brindaron (iii) un proceso de retroalimentación diferente, en cuanto a la propia retroalimentación dada por cada recurso y la dada en el blog de cada estudiante.
- En cuanto a los propósitos, las actividades estuvieron encaminadas al desarrollo de otras habilidades o competencias como fueron la exploración, el análisis, la solución de problemas.

- La discusión entre compañeros fue un elemento que los estudiantes evidenciaban no haber desarrollado constantemente, pero que con el trascurso de la intervención, se convirtió en fundamental para el desarrollo de las clases y la construcción del conocimiento. En un primer momento fue un elemento que dificultó la intervención porque los estudiantes no expresaban claramente sus ideas y tampoco estaban acostumbrados a escuchar a sus pares; luego fue uno de los elementos que más evidenció el aprendizaje logrado por los estudiantes y sus discusiones empezaron tener más afirmaciones y ejemplos relacionados con el álgebra.

En cuanto a la enseñanza, este estudio me brindó la necesidad de reflexionar sobre todos y cada uno de los elementos que intervienen en los procesos de enseñanza-aprendizaje, especialmente sobre aquellos que uno considera no tan importantes pero que con ciertas condiciones terminan siendo fundamentales en estos procesos:

- El ejemplo específico de este estudio, fue las implicaciones en los procesos de aprendizaje y enseñanza de los contextos sociales que nos rodean. Generalmente, los contextos sociales de las instituciones no toman gran relevancia en los estudios, como lo hice yo; me concentré en las implicaciones cognitivas y tecnológicas de la intervención, aunque hechos sociales generaron consecuencias que en algún momento pudieron haber sido totalmente negativas para la intervención; por ejemplo, el distanciamiento entre sesiones de clase, debida a la dificultad para llevar a cabo las sesiones previstas, pudo haber afectado la intervención.

El impacto que generó la implementación de la propuesta didáctica en los procesos de enseñanza-aprendizaje del álgebra en los estudiantes del grado noveno de la Institución Educativa Distrital José Francisco Socarrás fue positivo. Esto se evidencia mediante:

- El análisis de progreso de cada estudiante – entre la prueba inicial y la prueba final – evidencia que el 83% de los estudiantes (5 de 6), cambiaron positiva y significativamente su desempeño en la prueba. Los cambios positivos de nivel de desempeño de los estudiantes osciló entre el 38% y 69%, presentando mayor porcentaje de cambio los estudiantes clasificados en un nivel alto de desempeño, al iniciar el estudio.
- Al analizar cada uno de los componentes de la prueba, encontré que los componentes uso de la letra, generalización y solución de problemas que involucran ecuaciones lineales, fueron los componentes que presentaron mayor cambio en el desempeño de los estudiantes. En el componente uso de la letra, el 100% de los estudiantes cambió positivamente de nivel, donde la mayoría hace uso de la letra como número generalizado o incógnita. En cuanto al componente generalización, el 83% de los estudiantes tuvieron un cambio positivo de nivel, ya que en un primer momento los estudiantes en esta pregunta habían resuelto equivocadamente la pregunta o no habían respondido, pasaron a estar en el nivel 1 donde usan algunos ejemplos (una cantidad finita y generalmente pequeña, uno o dos) para generalizar una expresión. Por otro lado, el componente de solución de problemas el 83% de los estudiantes presentaron un cambio de nivel, aunque este no es estable, ya que en situaciones similares, no siempre aplican las habilidades de: representación de lenguaje algebraico y el uso de ecuaciones para solucionar problemas.

- Los componentes de igualdad y lenguaje cotidiano no tuvieron un cambio positivo tan representativo como los tres anteriores, pero en ellos el 67% y 50% de los estudiantes, respectivamente, presentaron un cambio positivo en el desempeño.
- Un elemento que no había sido planeado, pero que con el trascurso del estudio se presentó como fundamental, fue la comunicación o expresión verbal de los estudiantes. Esta competencia se tornó un elemento decisivo para mejorar la comprensión de los estudiantes sobre los conceptos matemáticos aquí abordados.

  Lo comunicativo se pudo observar desde dos perspectivas: el uso del lenguaje para explicar su comprensión del tema y su uso para discutir argumentos con sus compañeros o profesora.
- En resolución de problemas los estudiantes presentaron un cambio positivo en sus desempeños, en cuanto a la representación algebraica de los mismos y tratar de darle solución al problema, así no fuera con los algoritmos estudiados en la implementación. Cuando los estudiantes se enfrentaron por primera vez a la prueba, la mayoría, prefirieron dejar el espacio en blanco y no escribir lo que pensaban. En la segunda oportunidad algunos usaron elementos aritméticos para solucionarlos lo que evidencia un cambio positivo en su desempeño.

En mi proceso de refinamiento como investigadora logré ser más consciente de la importancia, necesidad y dificultad para desarrollar el proceso reflexivo, siendo este la columna vertebral de cualquier estudio enfocado en la educación es conveniente documentarlo desde el primer momento que empieza la investigación y volver varias veces sobre los datos recolectados, las estrategias y las decisiones tomadas en cada fase.

Lista de referencias

Área de matemáticas (2012). *Malla curricular de matemáticas*. Documento Institucional de la Institución Educativa Distrital José Francisco Socarrás.

Alonso, F., Barbero, C., Fuentes, I., Azcárate, A., Dozagarat, J., Gutiérrez, S., et al. (1993). *Ideas y Actividades para enseñar álgebra*. España: Editorial Sintesis.

Bausela, E. (2002). *La docencia a través de la investigación–acción.* Revista Iberoamericana de Educación, ISSN: 1681-5653. Recuperado de http://www.rieoei.org/deloslectores/682Bausela.PDF el 29 de abril de 2013.

Barbera, E. & Badia, A. (2002). *Hacia el aula virtual: actividades de enseñanza y aprendizaje en la red*. Revista Iberoamericana de Educación, ISSN: 1681-5653. Recuperado de http://www.rieoei.org/deloslectores/1064Barbera.PDF el 29 de abril de 2013.

Black, P. & Wiliam, D. (1998). *Inside The Black Box: Raising Standars Through Classroom Assesment.* Phi Delta Kappan, volumen 80(2), pp. 139-148.

Black, P., Harrison, C., Lee, C., Marshall, B., y Wiliam, D. (2004). Working *Inside The Black Box: Assessment for learning in the classroom.*Phi Delta Kappan, volumen, 86 (1), pp. 8 – 21.

Coll, C., Martín, E., Mauri, T., Miras, M., Onrubia, J., Solé, I., & Zabala, A. (Eds.). (1993). *El constructivismo en el aula*. Barcelona: Editorial Graó.

Díaz, F. & Morales, L. (2008). *Aprendizaje colaborativo en entornos virtuales: un modelo de diseño instruccional para la formación profesional continua*. Tecnología y Comunicación Educativas, volumen 22-23, pp. 4 – 25.

Esquinas, A. (2009). *Dificultades de aprendizaje del lenguaje algebraico: del símbolo a la formalización algebraica: aplicación a la práctica docente*. Tesis Doctoral Universidad Complutense de Madrid.

Fierro, C., Fortoul, B. & Rosas, L. (1999). *Transformando la práctica docente: Una propuesta basada en la investigación – acción*. México D.F.: Paidós. Maestros y Enseñanza.

Godino, J. & Font, V. (2003). *Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros.* ReproDigital. C/ Baza, 6. La Mediana. Polígono Juncaril. Albolote. 18220-Granada. Distribución en Internet:http://www.ugr.es/local/jgodino/edumatmaestros/

Godino, J., Batanero, C. & Font, V. (2003). *Fundamentos en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.* ReproDigital. C/ Baza, 6. La Mediana. Polígono Juncaril. Albolote. 18220-Granada. Distribución en Internet: http://www.ugr.es/local/jgodino/edumatmaestros/

Gros, B., Bernardo, A., Lizano, M., Martinez, C., Panadés, M. & Ruiz, I. (1997). *Pautas pedagógicas para la elaboración de software*. Barcelona: Editorial Ariel.

Haddad, W. y Draxler, A. (2002). *Technologies for Education: Potential, Parameters and Prospects*. Paris & Academy for Educational Development, Washington D.C.: Unesco.

Kieran, C. (1989). *El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica.* Traducción castellana de Luis Puig. Enseñanza de las ciencias, volumen 7 (3), pp. 229 – 240.

Kieran, C. (2006). Algebraic Thinking in the Early Grades: What Is It?. *The Mathematics Educator*, volumen 8 (1), pp. 139 – 151.

Latorre, A. (2007). *La investigación-acción: Conocer y cambiar la práctica educativa*. Barcelona: Grao.

Marín, A.., Flores, P. & Lupiañez, J. (2006). *Materiales y recursos en el aula de Matemáticas de Secundaria y Bachillerato*. Cursos de formación a distancia Thales-CICA 2006-07.

Merchán B. (2008). *Ambientes Virtuales de Aprendizaje: Elementos Fundamentales para su Diseño*. Universidad Pedagógica Nacional. Ponencia Cuba.

Ministerio de Educación Nacional (1998). *Matemáticas: Lineamientos curriculares.* Recuperado de http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-89869_archivo_pdf9.pdf el 29 de abril de 2013.

Ministerio de Educación Nacional (2006). Estándares Básicos de competencias en Matemáticas. Recuperado de http://www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/articles-116042_archivo_pdf2.pdf el 29 de abril de 2013.

National Council Of Teachers Of Mathematics (2000). *Principios y estándares para la educación matemática*. Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales (Traductores al Español). Armilla (Granada).

National Council Of Teachers Of Mathematics (2013). Illuminations: Resources for teaching math. Recuperado de http://illuminations.nctm.org/ el 29 de Abril de 2013

Socas, M., Camacho, M., Palarea, M. & Hernández, J. (1989). *Iniciación al álgebra*. Madrid: Síntesis. Matemáticas: Cultura y aprendizaje.

Thompson W. (1994). *La influencia en el uso de los materiales en la comprensión de las matemáticas,* Arithmetic Teacher, vol. 41, n.º 9, pp. 556-558.

Trgalova, J., Bouhineau, D. & Nicaud, J. (2009). An Analysis of Interactive Learning Environments for Arithmetic and Algebra Through an Integrative Perspective. *International Journal of Computers for Mathematical Learning* , vol. 14, no. 3, pp. 299-331.

Valdés, E. (2010). *Análisis sobre las constantes tomas violentas de una institución educativa distrital*. Documento interno Institución Educativa Carlos Albán Holguín.

Vithal, R. & Valero, P. (2012). *La investigación en educación matemática en situaciones* de conflicto social y político. En Valero, Paola; Skovsmose, Ole (Eds.), Educación matemática crítica. Una visión sociopolítica del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas (pp. 217-268). Bogotá: una empresa docente.

Wiley, D. A. (2000). Connecting learning objects to instructional design theory: a definition, a metaphor, and a taxonomy. In D A Wiley (Ed.), *The Instructional Use of Learning Objects*: http://reusability.org/read/chapters/wiley.doc Recuperado el 29 de Abril de 2013

Anexos

Anexo 1. Encuesta de Expectativas de aprendizaje y Uso de Tecnología para Estudiantes.

No.

ENCUESTA CARACTERIZACIÓN DE LOS ESTUDIANTES DE GRADO NOVENO
COLEGIO JOSÉ FRANCISCO SOCARRÁS

Inicialmente le sugiero leer la totalidad de la encuesta (son 17 preguntas y finalmente encontrará un espacio para comentarios).
El tiempo estimado para responder la encuesta es de 20 minutos. Rellene el circulo de la(s) respuestas que correspondan a su información
Toda la información que recoja esta encuesta será totalmente anónima, y los datos serán procesados únicamente para los fines a los que da lugar el presente estudio.

Perfil del Estudiante

Fecha DD/MM/AAAA

1. Sexo Masculino ○ Femenino ○ 2. Edad _____

3. Las actividades que comúnmente le gusta realizar en los espacios que no se encuentra en el colegio son: (Puede marcar más de una opción)

Escuchar música ○ Leer ○ Escribir ○ Compartir con la familia ○ Compartir con los amigos ○
Ayudar con los quehaceres de la casa ○ Otras ¿Cuáles? _____

Caracteristicas de Estudio

4. ¿Cuántas horas dedica a estudiar matemáticas en una semana, durante horas en las que no se encuentra en el colegio?
No dedico tiempo ○ 1 - 2 horas ○ 3 - 4 horas ○ 5 - 6 horas ○ 7 - 8 horas ○ 9 ó más horas ○ ¿Cuántas? __

5. Cuando realiza sus deberes escolares de matemáticas, ¿Cuenta con la ayuda de alguien?
SI ○ Mis padres ○ Un Familiar ○ Un centro de refuerzo o complementación ○
Una Fundación ○ Otro ○ ¿Quién? _____
NO ○

6. La persona que comúnmente me ayuda con mis deberes escolares en matemáticas se dedica a: (tiene como profesión)

7. ¿Qué tanto cree que el álgebra puede serle útil en la vida diaria? Mucho ○ Poco ○ Nada ○

8. ¿Le parece más difícil el álgebra que otras áreas de Matemáticas?
SI ○ **NO** ○ ¿Por qué? _____

9. Describa cómo han sido sus clases de álgebra hasta el momento.

Uso de herramientas tecnológicas

10. ¿Cuáles de los siguientes dispositivos posee en su casa?
PC de escritorio ○ Portátil ○ Reproductor DVD ○ Grabador/reproductor VHS ○
Otros ○ ¿Cuáles? _____

11. En las horas no escolares, ¿Usa internet? **SI** ○ **NO** ○

12. ¿En qué lugares tiene acceso a internet?
En la casa ○ En el café internet ○ Donde un familiar ○ Otro ○ ¿Cúal? _____

13. Cuando usas internet, frecuentemente lo usas para:
Uso de redes sociales (Facebook, MySpace, etc.) ○ Uso de correo electrónico (gmail, Hotmail, Yahoo, etc) ○
Ver videos (Youtube) ○ Encontrar Información de interés personal (Google) ○ Hacer tareas ○
Otros ○ ¿Cuáles? _____

14. Sin importar si tiene Internet en casa o no, ¿con que frecuencia accede a Internet?
Diariamente ○ Un día por medio ○ Esporádicamente en la semana ○
Una vez semanalmente ○ Otros ○ ¿Cuáles? _____

15. ¿Qué aplicaciones de computador maneja?
Ninguno ○ Word ○ Excel ○ PowerPoint ○ Internet ○
Otros ○ ¿Cuáles? _____

16. ¿Cómo aprendió a usar el computador?
En el colegio ○ Solo ○ Ayuda de mis amigos ○ Por mis papás ○ Otros ○ ¿Cúal? _____

17. ¿Cree que Internet y la tecnología pueden ser herramientas útiles en su aprendizaje?
SI ○ NO ○
¿Por qué? _____

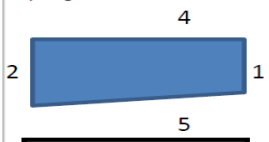
Anexo 2. Evaluación diagnóstico sobre algebra para Estudiantes

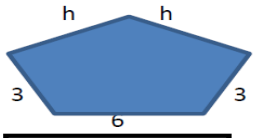
No. _____

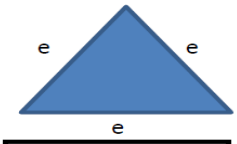
ACTIVIDAD DIAGNÓSTICO RAZONAMIENTO ALGEBRAICO
COLEGIO JOSÉ FRANCISCO SOCARRÁS

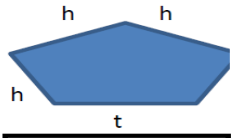
Inicialmente le sugiero leer la totalidad de la prueba (son 12 preguntas).
El tiempo estimado para responder la prueba es de 60 minutos.
Toda la información que recoja esta prueba será totalmente anónima, y los datos serán procesados únicamente para los fines a los que da lugar el presente estudio. Por favor escriba todos los procedimientos necesarios, en caso de no entender trate de explicar lo que le dificulta resolver la situación.

1. El perímetro de un polígono es igual a la suma de sus lados. Halle el perímetro de cada uno de los siguientes polígonos*:









Operación/Procedimiento:	Operación/Procedimiento:	Operación/Procedimiento:	Operación/Procedimiento:
Perímetro:	Perímetro:	Perímetro:	Perímetro:

2. La expresión **2W** significa **2** multiplicado por **W*.**

a) Asigne un valor a **W** para que **2W** sea igual a **2 + W**. Un valor de **W** es _____

b) Asigne dos valores a **W** para que **2W** sea mayor que **2 +W.**
Un valor de **W** es _____ y otro valor de **W** es _____

c) Asigne dos valores a **W** para que **2W** sea menor que **2 +W.**
Un valor de **W** es _____ y otro valor de **W** es _____

d) Encuentre **todos** los valores posibles de **W** para los que **2W** sea menor que **2 + W**

_____

3. Debe decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas siempre, algunas veces o nunca. Selecciona la respuesta correcta y explica el por qué de la selección (Las letras representan cualquier número)*

a + b = b + a
- ○ Siempre _____
- ○ Nunca _____
- ○ Algunas Veces _____

m + n + q = m + p + q
- ○ Siempre _____
- ○ Nunca _____
- ○ Algunas Veces _____

a + 2b + 2c = a + 2b + 4c
- ○ Siempre _____
- ○ Nunca _____
- ○ Algunas Veces _____

* Preguntas tomadas del libro La transición artimética - álgebra. Grupo Pretexto.

4. Decide en cada caso si las dos expresiones son equivalentes y explica el por qué de tal decisión*.

3 + 5 y **2 + 6** — **SI** ○ **NO** ○
Explicación: _____

5 x 3 y **4 x 4** — **SI** ○ **NO** ○
Explicación: _____

475 + 236 y **477 + 234** — **SI** ○ **NO** ○
Explicación: _____

$\frac{279 \times 412}{279}$ y $\frac{376 \times 412}{376}$ — **SI** ○ **NO** ○
Explicación: _____

CON LA INFORMACIÓN QUE SE PRESENTA A CONTINUACIÓN, RESPONDE LAS PREGUNTAS 5 - 8 **

Dos años después de haber abierto una empresa de software los informes tanto de producción como de ventas e inversión reflejan los buenos tiempos por los que están pasando. La cantidad de empleados es 15 más que el doble de los que trabajaron el primer año, y cada uno de los empleados del área de producción gana 2/5 más del sueldo con el que empezó, más una bonificación de $45.000 semanales a aquellos con el mejor desempeño. Los ingresos del primer año, en cientos de dólares, estaban dados por la expresión $2x^2 + 50x + 100$ con x igual al número de empleados en producción; mientras que, en el segundo año, la empresa obtuvo ingresos dados por $3x^2 + 120x + 150$.

5. Encuentra las expresiones algebraicas que representan la cantidad de empleados en cada caso.

En el segundo año

Procedimiento:

En el tercer año se aumenta en doce el número de empleados con relación al segundo año.

Procedimiento:

6. Calcula los ingresos de la empresa en el primer año, suponiendo que la empresa tenía 20 empleados.

Procedimiento:

7. Simplifica las expresiones que representan las utilidades de algunas inversiones en la empresa

a) Empresas electrificadoras: $5x + 2xy - 3x + 6xy + 3x - 12xy$

Procedimiento:

b) Empresas de hardware: $6x - xy - 3x + 6xy + 3x - 12xy + xy$

Procedimiento:

** Preguntas tomadas del libro Evaluaciones 1290/Pruebas Tipo PISA Matemáticas 8. Equipo Ediciones SM.

8. Determina el área que ocupan las bodegas de la empresa, de las cuales se conocen las dimensiones de su base rectangular

a) (5x) metros de ancho y (5x + 3y) metros de largo

Procedimiento:

b) (2x + 3y)metros de ancho y (2x + 5y - 3) metros de largo

Procedimiento:

CON LA INFORMACIÓN QUE SE PRESENTA A CONTINUACIÓN, RESPONDE LAS PREGUNTAS 9 - 12.**

A una feria ganadera asistieron un promedio de 8.000 personas al día. Un ganadero logró vender un caballo percherón y dos becerros por $ 12.400.000. El caballo fue vendido por un precio 18 veces mayor que el de uno de los becerros, los cuales por tener las mismas características, costaron ambos lo mismo. El comprador pagó en efectivo con billetes de $20.000 y $50.000, siendo la cantidad de billetes de $50.000, 28 más que el cuádruplo de los de 20.000.

9. Indica si cada ecuación permite hallar el precio de un ternero o no. Toma X: precio de un ternero e Y: precio de un caballo.

2x + y = 12.400.000 con x = 18y **SI** ○ **NO** ○

Explicación: _____

y + 2x = 12.400.000 con y = 18x **SI** ○ **NO** ○

Explicación: _____

2y + 4x = 24.800.000 con y = 36x **SI** ○ **NO** ○

Explicación: _____

Además de ganado en las ferias se vende maquinaria con tecnología de punta. Determina el costo de la máquina en cada compra.

Halla el valor de cada tipo de animal, según el valor total de cada venta en cada caso

10. Dos vacas, del mismo precio y una yegua de $6.200.000 por la suma total de $9.400.000.

Procedimiento:

11. Tres toros y un caballo se vendieron por una suma total de $9.000.000. El caballo se vendió por $1.800.000.

Procedimiento:

12. Encuentra resultados de las siguientes operaciones. Recuerda realizar los procedimientos de cada uno.

$\frac{2}{3}\times\left(1-\frac{1}{4}\right)+\frac{3}{4}=$

$\frac{3}{4}\div\left(\frac{3}{2}+1\right)=$

(9 + 9)[(-7) - (-7) + 2]

5[5 - (-4)] - (2 - 1)

$\left(-\frac{3}{8}\right)^3=$

$-\left(\frac{4}{5}\right)^2=$

$3x^4 - 2x^4 + 7x^4 =$

$(x^3+2x^2-5x+7)+(4x^3-5x^2+3)$

Resuelve las siguientes ecuaciones:

x – 2 = 25

7x = 14

2x = x + 5

Anexo 3. Entrevista al docente encargado del curso en el área de matemáticas

Objetivo: Indagar sobre las percepciones del maestro encargado del área de matemáticas en grado noveno del Colegio José Francisco Socarrás, acerca de la material, del curso y de estudiantes en específico.

¿Cuál es su nombre?

¿Cuál es su profesión?

¿Cuántos años de experiencia tiene enseñando matemáticas? ¿En qué grados?

¿Qué temas ha trabajado este año con los estudiantes de grado noveno?

Describa algunas de las clases

¿Genera espacios de participación en clase? ¿De qué tipo?

¿Ha usado materiales o recursos para la clase de matemáticas? ¿Cuáles? ¿Por qué? ¿Para qué?

¿Cómo realiza el proceso de evaluación en su clase?

¿Qué apreciación u opinión tiene respecto a la mayoría de sus estudiantes en torno a su motivación, capacidad y esfuerzo en la solución de problemas o ejercicios de clase en matemáticas?

Sugiera tres estudiantes que considere son de nivel alto en matemáticas y tienen un buen nivel de expresión de sus ideas. ¿Por qué considera que son de nivel alto?

Sugiera tres estudiantes que considere son de nivel medio en matemáticas y tienen un buen nivel de expresión de sus ideas. ¿Por qué considera que son de nivel medio?

Sugiera tres estudiantes que considere son de nivel bajo en matemáticas y tienen un buen nivel de expresión de sus ideas. ¿Por qué considera que son de nivel bajo?

Anexo 4. Actividad Lenguaje Algebraico

Tema:	Lenguaje Algebraico – Lenguaje Común – Lenguaje Aritmético
Objetivo de aprendizaje	Los estudiantes comprendan el paso entre lenguajes como el habitual, el algebraico y el aritmético.
Conocimientos, habilidades y actitudes que implica el logro del objetivo.	Conocimientos: Uso de la letra como incógnita y número generalizado. Habilidades: Traducción entre diversos lenguajes. Actitudes: Trabajo en equipo – Indagación.
Descripción	Momento 1. Juego: Lo tuyo y lo mío[29] Los estudiantes desarrollarán en grupos de tres o cuatro el juego con las condiciones iniciales. (Ver anexo 4.1) Al final individualmente reflexionarán sobre su desempeño en el juego a través de la siguiente actividad: 1. Si tuvieras que escribir en un titular de periódico tu desempeño en la clase de hoy, ¿Cuál sería? Complementa con tres frases que consideras serían importantes en tu artículo. 2. Si tuvieras que escribir en un titular de periódico el desempeño de tu grupo en la clase de hoy, ¿Cuál sería? Complementa con tres frases que consideras serían importantes en tu artículo. Esta reflexión se registrará en el blog individual. Momento 2. Lo tuyo y lo mío, expresiones generales. Los estudiantes nuevamente se enfrentarán al juego Lo Tuyo y Lo Mío pero con la modificación que cuando les salga una de las tarjetas con frases tendrán que representar únicamente con letras, signos y números, esas frases. Durante el juego cada estudiante diligenciará un

[29] Tomado de Ideas y Actividades para enseñar álgebra. Grupo ARZAQUIEL. Editorial: Síntesis. 1993.

	formato donde anote los datos del juego. (Ver anexo 4.2) Luego se presentarán en plenaria las diferentes soluciones que cada estudiante mostró a las expresiones verbales para como grupo decidir si hay errores de traducción y cuáles son. Al final individualmente reflexionarán sobre su desempeño en el juego a través de las siguientes preguntas: 1. Escoge un color con el que consideres identificas tu desempeño de la clase de hoy. Escribe dos razones por las cuales consideras se puede representar tu desempeño con ese color. 2. Escoge un color con el que consideres se identifica con el desempeño de tu grupo en la clase de hoy. Escribe dos razones por las cuales consideras se puede representar el desempeño de tu grupo con ese color. Tarea: Hacer traducciones entre los tres lenguajes. (Ver anexo 4.3) Momento 3. Descubriendo errores. A los estudiantes se les presentarán enunciados y ejercicios donde aparecen errores en alguno de los tres lenguajes (Algebraico, numérico, ó cotidiano) individualmente realizarán un análisis con el fin de encontrar los errores. (Ver anexo 4.4) Se hará la misma discusión en parejas. Luego en plenaria los estudiantes compartirán los errores encontrados y se analizarán, en caso que los hallan, los no encontrados. Al final individualmente reflexionarán sobre su desempeño en el análisis a través de las siguientes preguntas: 1. Escoge un símbolo con el que consideres identificas tu desempeño de la clase de hoy. Escribe dos razones por las cuales consideras se puede representar tu desempeño con ese símbolo. 2. Escoge un símbolo con el que consideres se identifica con el desempeño de tu grupo en la clase de hoy. Escribe dos razones por las cuales consideras se puede representar el

	desempeño de tu grupo con ese símbolo.
Actores y roles	Profesor: El profesor tiene un rol de guía durante todo el proceso. Por lo tanto debe estar haciendo diferentes actividades en cada momento. En el momentos 1 y 2: El docente debe apoyar el trabajo de los grupos, escuchar sus dificultades y dirigir el trabajo para darle ideas sobre los elementos relevantes de cada tema. Además debe revisar los aportes de cada estudiante en el blog. En el momento 3: El docente orienta la discusión sobre los posibles errores de traducción al lenguaje algebraico. Además debe revisar los aportes de cada estudiante en el blog. Estudiante: El estudiante debe apropiarse de su proceso de aprendizaje y conceptualización durante el proceso. En los momentos 1 y 2: El estudiante desarrolla el juego propuesto con las indicaciones y condiciones dadas. Comunica sus ideas a sus compañeros. Hace una reflexión individual de su proceso hasta el momento. Hace auto y coevaluación. En el momento 3: Aplica sus conocimientos sobre traducción de lenguajes a una situación donde puede o no haber errores, los encuentra. Comunica sus ideas a sus compañeros. Hace una reflexión individual de su proceso hasta el momento.

<table>
<tr><td></td><td>Hace auto y coevaluación.</td></tr>
<tr><td>Recursos y materiales</td><td>Materiales:
• Un tablero numerado del 1 al 49.
• Dos dados con 6 caras.
• 10 fichas de distinto color para cada jugador.
• Una colección de 20 tarjetas con enunciados verbales.
• Hojas cuadriculadas
• Guías de cada momento
Recursos:
Buscadores
Internet (Blog)</td></tr>
<tr><td>Apoyo de las TIC</td><td>En esta actividad la tecnología apoyará el proceso de aprendizaje en diferentes momentos y de diferentes formas:
1. Informativa: Con el uso de los buscadores para recolectar información.
2. Comunicativa: Con el uso del blog.</td></tr>
<tr><td>Productos</td><td>Blog del proceso de aprendizaje.
Traducción de expresiones.
Análisis de errores.</td></tr>
<tr><td>Evaluación</td><td>La retroalimentación se realizará mediante la siguiente rúbrica:
Criterios de evaluación
<table><tr><td>Rúbrica de evaluación</td><td>Criterios de evaluación</td><td>Porcentaje</td></tr><tr><td>Cognitivo: Conceptual</td><td>El estudiante resuelve situaciones cotidianas desde lo aritmético.</td><td>10%</td></tr></table></td></tr>
</table>

		El estudiante traduce del lenguaje habitual al lenguaje algebraico pasando por el lenguaje aritmético y viceversa.	20%
		El estudiante reconoce y argumenta errores en el proceso de traducción de lenguajes (aritmético, cotidiano, algebraico).	20%
	Participación	El estudiante muestra motivación por las actividades realizando lo propuesto y comunicando ideas a sus compañeros.	10%
	Solución de Problemas	El estudiante toma una actitud investigadora para con ayuda de elementos conceptuales encontrar posibles respuestas a la situación presentada. Evalúa la asertividad de cada respuesta.	10%
	Razonamiento crítico	El estudiante muestra, en sus reflexiones, aportes	10%

		a las posibles mejoras de la actividad, sustentado en el desarrollo de la misma y el conocimiento adquirido	
	Trabajo grupal	El estudiante muestra participación activa y responsabilidad en el trabajo grupal, desde su desempeño individual.	10%
		El estudiante aporta a la comunicación de ideas y como grupo hacen una exposición adecuada para su grupo	10%
Duración	3 clases, posiblemente 6 horas. Aproximadamente dos horas por cada momento.		

A continuación se describe la secuencia de actividades mostrando cada uno de los momentos que se realizarán:

Momento 1

	Antes	**Durante**	**Después**
Momento Presencial		Los estudiantes desarrollarán el juego Lo tuyo y lo mío.	

Momento Virtual			Autoreflexión. Reflexión sobre el trabajo individual en el desarrollo del juego

Momento 2

	Antes	**Durante**	**Después**
Momento Presencial		Los estudiantes desarrollarán el juego Lo tuyo y lo mío con cambio de condiciones.	Ejercicios de traducción entre lenguajes cotidianos, algebraicos y aritméticos.
Momento Virtual			Autoreflexión. Reflexión sobre el trabajo individual en el desarrollo del juego.

Momento 3

	Antes	**Durante**	**Después**
Momento Presencial		Los estudiantes analizarán errores en traducción en lenguajes cotidianos, algebraicos y aritméticos.	
Momento Virtual	Investigar sobre indicaciones generales del paso entre lenguajes.		Autoreflexión. Reflexión sobre el trabajo individual en análisis de errores.

Anexo 4.1. Juego lo tuyo y lo mío

JUEGO: LO TUYO Y LO MIO[30]

La información que aparece a continuación se les presentará a los estudiantes en plenaria, donde se explicarán los elementos que componen el juego, las instrucciones y se les dará en primer lugar un ejemplo general y luego se les propondrá a mínimo tres parejas de estudiantes que intenten hacer el juego en voz alta para que realicen entre todos las preguntas y aclaraciones necesarias. Las instrucciones serán entregadas por escrito a cada grupo.

Material:

- Un tablero numerado del 1 al 49.
- Dos dados con 6 caras.
- 10 fichas de distinto color para cada jugador.
- Una colección de 20 tarjetas con enunciados verbales.

Desarrollo del juego:

Juego para tres o cuatro jugadores, que juegan por turno.

Sale quien menor puntuación obtiene en el primer lanzamiento de los dados.

El primer jugador lanza los dados y el siguiente saca una de las 20 tarjetas deben permanecer volteadas en la mesa.

Con el número obtenido con los dados por el otro, "lo tuyo", el jugador que ha sacado la tarjeta calcula el número que corresponde a "lo mío"; utilizando la frase de la tarjeta, pone una ficha sobre ese resultado en el tablero y devuelve la tarjeta al montón.

Si el número obtenido no está en el tablero, el jugador pierde su turno.

[30] Tomado del libro Ideas y Actividades para la enseñanza del Álgebra

Si la casilla ya está ocupada, el jugador pierde su turno.

Si el jugador contrario observa que la operación ha sido incorrecta, se anula el turno y pasa al siguiente jugador.

Gana quien consiga colocar todas sus fichas.

Por ejemplo, un alumno lanza los dos dados y obtiene 7 con ellos. El siguiente jugador saca, entonces, una tarjeta del montón que dice:

Lee la tarjeta y razona, dirigiéndose al alumno que ha lanzado los dados:

− Si LO TUYO ha sido 7, LO MIO será cuatro veces LO TUYO, es decir, 28. Colocando, seguidamente, su ficha en la casilla 28 del tablero.

A continuación, lanza los dados a su vez, sacando una tarjeta el siguiente y prosiguiéndose el juego de la misma forma.

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
8	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**
15	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**
22	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**
29	**30**	**31**	**32**	**33**	**34**	**35**
36	**37**	**38**	**39**	**40**	**41**	**42**
43	**44**	**45**	**46**	**47**	**48**	**49**

Contenido de las tarjetas:

Anexo 4.2. Guía Juego lo tuyo y lo mío

Guía Juego lo tuyo y lo mío

A continuación escribe y llena las casillas con los datos que salgan en tú juego.

Expresión cotidiana **(Tarjeta del juego)**	**Expresión usando números, letras y símbolos.**	**Ejemplo**
		Número de la suma de los dados: **Lo mío:** **Lo tuyo:**
		Número de la suma de los dados: **Lo mío:** **Lo tuyo:**
		Número de la suma de los dados: **Lo mío:** **Lo tuyo:**
		Número de la suma de los dados: **Lo mío:** **Lo tuyo:**
		Número de la suma de los dados: **Lo mío:** **Lo tuyo:**
		Número de la suma de los dados: **Lo mío:** **Lo tuyo:**

Anexo 4.3. Tarea. Traducción entre lenguajes

TAREA: TRADUCCIÓN ENTRE LENGUAJES (ARITMÉTICO, ALGEBRAICO Y COTIDIANO)

Recuerda las formas de representación de expresiones cotidianas con números, letras y símbolos, y los ejemplos. A continuación representa en las otras dos formas que falta para completar la tabla.

Expresión cotidiana	**Expresión usando números, letras y símbolos.**	**Ejemplo**
No me quites 7, que entonces te quedas con 3 menos que yo.		**Número de la suma de los dados: 3** **Lo mío:** **Lo tuyo:**
Te gano por 35.		**Número de la suma de los dados: 9** **Lo mío:** **Lo tuyo:**
Tengo la tercera parte de lo que tienes tú.		**Número de la suma de los dados: 12** **Lo mío:** **Lo tuyo:**
Cuatro veces lo tuyo, sólo llega a la mitad de lo mío.		**Número de la suma de los dados: 4** **Lo mío:** **Lo tuyo:**
Tienes el doble de lo mío, más dos.		**Número de la suma de los dados: 12** **Lo mío:** **Lo tuyo:**

Anexo 4.4. Guía Descubriendo errores

Guía Descubriendo errores

Una docente les envío a sus estudiantes una tarea. Ellos debían pasar entre los diferentes lenguajes (cotidiano, algebraico y numérico). Juan obtuvo un puntaje de 20/100, la docente les dijo que corrigieran, pero Juan no encuentra los errores. ¿Puedes ayudarle a encontrarlos?

Lo que está en negrilla es la información dada por la docente.

Expresión cotidiana	**Expresión usando números, letras y símbolos.**	**Ejemplo**	**Descripción del error**	**Corrección**
La diferencia de lo tuyo y lo mío es 15, pero yo tengo más.	**X + Y = 15** **Donde X es mayor** **X: Lo mío** **Y: Lo tuyo**	**Número de la suma de los dados: 3** **Lo mío: 18** **Lo tuyo: 3**		
Entre los dos tenemos 43.	**X + X = 43** **X: Lo mío** **X: Lo tuyo**	**Número de la suma de los dados: 8** **Lo mío: 35** **Lo tuyo: 8**		
Lo mío es el doble de lo tuyo.	**X = Y + 2** **X: Lo mío** **Y: Lo tuyo**	**Número de la suma de los dados: 7** **Lo mío: 14** **Lo tuyo: 7**		
Tengo 3 más que la quinta parte de lo tuyo.	**X + 3 = Y/5** **X: Lo mío** **Y: Lo tuyo**	**Número de la suma de los dados: 10** **Lo mío: 53** **Lo tuyo: 10**		

Préstame 3 y así tendré justo el doble que tú.	**X + 3 = Y – 3** **X: Lo mío** **Y: Lo tuyo**	**Número de la suma de los dados: 12** **Lo mío: 18** **Lo tuyo: 12**		

Anexo 5. Actividad de aprendizaje Equivalencias

ACTIVIDAD EQUIVALENCIAS

Tema:	Equivalencias
Objetivo de aprendizaje	Los estudiantes reconocerán, analizarán y aplicarán el concepto de equivalencia.
Conocimientos, habilidades y actitudes que implica el logro del objetivo.	Conocimientos: Establecer igualdades entre cantidades. Habilidades: Reconocer las propiedades de las igualdades y las equivalencias. Actitudes: Actitud investigativa / Trabajo en grupo.
Descripción	Momento Uno. Exploración con equivalencias numéricas. Los estudiantes resolverán las preguntas propuestas con la herramienta Pan Balance – Number. (Ver anexo 5.1) (http://illuminations.nctm.org/ActivityDetail.aspx?ID=26) Los estudiantes tomarán nota de sus hallazgos. Luego compartirán éstos en pequeños grupos y finalmente socializarán los hallazgos grupales en plenaria. Al final individualmente reflexionarán sobre su desempeño en la exploración a través de las siguientes preguntas: 1. Escoge una imagen con la que consideres te identificas con tu desempeño de la clase de hoy. Escribe dos razones por las cuales consideras se puede representar tu desempeño con esa imagen. 2. Escoge una imagen con la que consideres se identifica con el desempeño de tu grupo en la clase de hoy. Escribe dos razones por las cuales consideras se puede representar el desempeño de tu grupo con esa imagen. Esta reflexión se registrará en el blog individual. Momento Dos. Exploración con equivalencias de formas. Los estudiantes resolverán las preguntas propuestas con la herramienta Pan Balance – Shapes. (Ver anexo 5.2)

	(http://illuminations.nctm.org/ActivityDetail.aspx?ID=33) Los estudiantes tomarán nota de sus hallazgos. Luego compartirán estos en pequeños grupos y finalmente socializarán los hallazgos grupales en plenaria. Al final individualmente reflexionarán sobre su desempeño en la exploración a través de las siguientes preguntas: 3. Si tuvieras que escribir en un titular de periódico tu desempeño en la clase de hoy, ¿Cuál sería? Complementa con tres frases que consideras serían importantes en tu artículo. 4. Si tuvieras que escribir en un titular de periódico el desempeño de tu grupo en la clase de hoy, ¿Cuál sería? Complementa con tres frases que consideras serían importantes en tu artículo. Esta reflexión se registrará en el blog individual. Momento tres. Análisis de propiedades de las equivalencias mediante ejemplos. Los estudiantes resolverán las preguntas propuestas con la herramienta Pan Balance – Number. (Ver anexo 5.3) (http://illuminations.nctm.org/ActivityDetail.aspx?ID=26) Los estudiantes tomarán nota de sus hallazgos. Luego compartirán estos en pequeños grupos y finalmente socializarán los hallazgos grupales en plenaria. Al final individualmente reflexionarán sobre su desempeño en la exploración a través de las siguientes preguntas: 3. Escoge un color con el que consideres te identificas con tu desempeño de la clase de hoy. Escribe dos razones por las cuales consideras se puede representar tu desempeño con ese color. 4. Escoge un color con el que consideres se identifica con el desempeño de tu grupo en la clase de hoy. Escribe dos razones por las cuales consideras se puede representar el desempeño de tu grupo con ese color. Esta reflexión se registrará en el blog individual. Momento cuatro. Análisis de equivalencias con expresiones

	algebraicas. Los estudiantes resolverán las preguntas propuestas con la herramienta Pan Balance – Expressions. (Ver anexo 5.4) (http://illuminations.nctm.org/ActivityDetail.aspx?ID=10) Los estudiantes tomarán nota de sus hallazgos. Luego compartirán estos en pequeños grupos y finalmente socializarán los hallazgos grupales en plenaria. Al final individualmente reflexionarán sobre su desempeño en la exploración a través de las siguientes preguntas: 3. Escoge un símbolo con el que consideres te identificas con tu desempeño de la clase de hoy. Escribe dos razones por las cuales consideras se puede representar tu desempeño con ese símbolo. 4. Escoge un símbolo con el que consideres se identifica con el desempeño de tu grupo en la clase de hoy. Escribe dos razones por las cuales consideras se puede representar el desempeño de tu grupo con ese símbolo. Esta reflexión se registrará en el blog individual.
Actores y roles	Profesor: El profesor tiene un rol de guía durante todo el proceso. Por lo tanto debe estar haciendo diferentes actividades en cada momento. Dirigir y retroalimentar a los estudiantes en cada una de las exploraciones. Además debe revisar los aportes de cada grupo en el blog. Orientar las discusiones. Evaluar. Estudiante: El estudiante debe apropiarse de su aprendizaje y conceptualización durante el proceso. Realiza las indicaciones y analiza los resultados en cada una. Comunica sus ideas a sus compañeros. Hace una reflexión grupal de su proceso hasta el momento. Hace auto y coevaluación.
Recursos y materiales	Materiales:

<table>
<tr><td></td><td>Papel

Recursos:

Buscadores

Internet (Blog y páginas de illuminate)</td></tr>
<tr><td>Apoyo de las TIC</td><td>En esta actividad la tecnología apoyará el proceso de aprendizaje en diferentes momentos y de diferentes formas:

1. Informativa: Con el uso de los buscadores para recolectar información.

2. Comunicativa: Con el uso del blog.

3. Innovadora: Con el uso de las aplicaciones de illuminate.</td></tr>
<tr><td>Productos</td><td>Blog del proceso de aprendizaje.

4 análisis de situaciones.

Presentaciones de los hallazgos grupales.</td></tr>
<tr><td>Evaluación</td><td>La retroalimentación se realizará mediante la siguiente rúbrica:

Criterios de evaluación

<table>
<tr><td>Rúbrica de evaluación</td><td>Criterios de evaluación</td><td>Porcentaje</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Cognitivo: Conceptual</td><td>.Los estudiantes reconocen equivalencias en diversas representaciones (numéricas, formas y expresiones)</td><td>25%</td></tr>
<tr><td>Los estudiantes encuentran y analizan las propiedades de las equivalencias.</td><td>25%</td></tr>
<tr><td>Participación</td><td>El estudiante muestra motivación por las actividades realizando lo propuesto y comunicando ideas</td><td>10%</td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>

		a sus compañeros.	
	Solución de Problemas	El estudiante toma una actitud investigadora para con ayuda de elementos conceptuales encontrar posibles respuestas a la situación presentada. Evalúa la asertividad de cada respuesta.	10%
	Razonamiento crítico	El estudiante muestra, en sus reflexiones, aportes a las posibles mejoras de la actividad, sustentado en el desarrollo de la misma y el conocimiento adquirido	10%
	Trabajo grupal	El estudiante muestra participación activa y responsabilidad en el trabajo grupal, desde su desempeño individual.	10%
		El estudiante aporta a la comunicación de ideas y como grupo hacen una exposición adecuada para su grupo	10%
Duración	4 clases, posiblemente 8 horas. Aproximadamente dos horas por cada momento.		

Momento 1

	Antes	Durante	Después
Momento Presencial		2. Los estudiantes socializarán en pequeños grupos y en plenaria los hallazgos de la exploración con equivalencias de números.	Repasar los ejercicios de clase. Encontrar nuevas relaciones o ejemplos.
Momento Virtual		1. Los estudiantes desarrollarán la exploración con equivalencias de números. (Anexo 5.1)	Autoreflexión. Reflexión sobre el trabajo individual y grupal en el desarrollo de la exploración.

Momento 2

	Antes	Durante	Después
Momento Presencial		2. Los estudiantes socializarán en pequeños y en gran grupo los hallazgos de la exploración con equivalencias de formas.	Repasar los ejercicios de clase. Encontrar nuevas relaciones o ejemplos.
Momento Virtual		1. Los estudiantes desarrollarán la exploración con equivalencias de formas. (Anexo 5.2)	Autoreflexión. Reflexión sobre el trabajo individual y grupal en el desarrollo de la exploración.

Momento 3

	Antes	Durante	Después
Momento Presencial		2. Los estudiantes socializarán en pequeños grupos y en plenaria los hallazgos del análisis de las propiedades de las equivalencias.	Repasar los ejercicios de clase. Encontrar nuevas relaciones o ejemplos.
Momento Virtual		1. Los estudiantes desarrollarán el análisis de las propiedades de las equivalencias. (Anexo 5.3)	Autoreflexión. Reflexión sobre el trabajo individual y grupal en el desarrollo de la exploración.

Momento 4

	Antes	Durante	Después
Momento Presencial		2. Los estudiantes socializarán en pequeños y en gran grupo los hallazgos del análisis de equivalencias con expresiones.	Repasar los ejercicios de clase. Encontrar nuevas relaciones o ejemplos.
Momento Virtual		1. Los estudiantes desarrollarán el análisis de equivalencias con expresiones. (Anexo 5.4)	Autoreflexión. Reflexión sobre el trabajo individual y grupal en el desarrollo de la exploración.

Anexo 5.1. Exploración con las balanzas numéricas

EXPLORACIÓN CON LAS BALANZAS NÚMERICAS

Conteste las preguntas según la exploración que realice en la balanza numérica.

1. Escriba 4 en platillo de color rojo. A continuación, escriba 4 en platillo azul.

¿Qué pasa? _____

_____

¿Por qué? _____

_____

2. Escriba 4 en platillo de color rojo. A continuación, escriba 9 en platillo azul.

¿Qué pasa? _____

_____

¿Por qué? _____

_____

3. Restablezca el equilibrio, borre los números que ha introducido en los platillos. Introduzca 12 en el platillo de color rojo. A continuación, introduzca la suma (dos números sumados) en el plato de la derecha que sea igual a 12.

¿Qué pasa? _____

_____

¿Por qué? _____

_____

4. ¿Puedes encontrar otra suma igual a 12? Muestra un ejemplo._____

_____

¿Puedes encontrar otra expresión que utilice una operación diferente? Muestra un ejemplo.

_____

¿Puedes encontrar otra distinta? Muestra un ejemplo._____

_____

¿Es posible añadir hasta tres números para que el balance sea 12? Muestra un ejemplo. ___

_____

¿Cuatro números? Muestra un ejemplo. _____

_____

¿Cuál es la mayor cantidad de números que se pueden añadir a la balanza que sumen 12? Muestra un ejemplo. _____

_____

5. Ahora has encontrado varias expresiones que equivalen a 12. Ingresa una de estas expresiones en el platillo de color rojo y otra en la bandeja azul (No utilices el número 12).

¿Qué pasa? _____

_____

¿Por qué? _____

_____

Anexo 5.2. Guía Exploración con las balanzas de formas

EXPLORACIÓN CON LAS BALANZAS DE FORMAS

Conteste las preguntas según la exploración que realice en la balanza numérica.

1. Coloca un cuadrado rojo en el platillo de la izquierda y un círculo azul en el platillo de la derecha.

¿Son iguales en peso? _____

Si no, ¿qué pesa más? _____

Trata de hacer el balance de los platillos por la adición de otra forma a un platillo. Dibuje lo que encontró.

2. Continúa agregando el círculo azul a uno de los platillos. Cuando encuentre el equilibrio, una entrada se agrega a la tabla.

¿Crees que conoces el peso de un círculo azul? _____

Compruébelo haciendo clic en el botón Adivinar Pesos y escriba su secuencia. Dibuje lo que encontró.

3. ¿Hay alguna otra combinación de cuadrados rojos y círculos azules que harán el balance de los platillos? Trata de encontrar al menos una más. Dibuje lo que encontró.

4. Lleve a cabo investigaciones similares para averiguar cómo los cuadrados rojos y los círculos azules están relacionados con los triángulos de color rosa y diamantes amarillos. Dibuje lo que encontró.

Investigación 1

Investigación 2

Anexo 5.3. Guía Análisis de propiedades de las equivalencias con números

ANÁLISIS DE LAS PROPIEDADES DE LAS EQUIVALENCIAS CON NÚMEROS

Conteste las preguntas según la exploración que realice en la balanza numérica.

Introduzca la expresión (2 + 8) en el platillo rojo, y escriba la expresión (6 + 4) en platillo azul.

1. Manteniendo las expresiones anteriores, introduzca el valor + 5 solamente en el platillo rojo ¿Qué pasa?. _____

_____

Ahora introdúzcalo sólo en el platillo azul ¿Qué pasa?. _____

_____

Ahora introdúzcalo en los dos platillos al mismo tiempo ¿Qué pasa?. _____

_____

2. Realiza el mismo procedimiento con el valor 0. ¿Cómo cambia esto la relación entre los platillos? _____

_____

y luego con (-5). ¿Cómo cambia esto la relación entre los platillos? _____

_____

3. Manteniendo las expresiones iniciales introduzca el valor multiplicado por 3 solamente en el platillo rojo ¿Qué pasa?. _____

_____

Ahora introdúzcalo solo en el platillo azul ¿Qué pasa?. _____

_____

Ahora introdúzcalo en los dos platillos al mismo tiempo ¿Qué pasa?. _____

_____

4. Realiza el mismo procedimiento con el valor 0. ¿Cómo cambia esto la relación entre los platillos? _____

_____

y luego con (-3). ¿Cómo cambia esto la relación entre los platillos? _____

_____

5. Manteniendo las expresiones iniciales, introduzca el valor dividido 10 solo en el platillo rojo ¿Qué pasa?. _____

_____

Ahora introdúzcalo solo en el platillo azul ¿Qué pasa?. _____

_____

Ahora introdúzcalo en los dos platillos al mismo tiempo ¿Qué pasa?. _____

_____

6. Realiza el mismo procedimiento con el valor 0. ¿Cómo cambia esto la relación entre los platillos? _____

_____

y luego con (-10). ¿Cómo cambia esto la relación entre los platillos? _____

_____

7. ¿Qué otras observaciones se pueden hacer sobre la relación entre los valores de los platillos y la gráfica? _____

_____

_____

Anexo 5.4. Guía Análisis de equivalencias con expresiones algebraicas

ANÁLISIS DE EQUIVALENCIAS CON EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Conteste las preguntas según la exploración que realice en la balanza algebraica.

Introduzca la expresión 2x en el platillo rojo, y escriba la expresión x + 4 en platillo azul.

1. Introduzca el valor x = -5 en el cuadro de la parte superior. ¿Qué pasa? _____

_____

2. Realiza el mismo procedimiento con el valor de x = 0. ¿Cómo cambia esto la relación entre los platillos? _____

_____

3. y luego x = 5. ¿Cómo cambia esto la relación entre los platillos? _____

_____

4. Encuentra un valor de x tal que el platillo rojo sea igual a 0. ¿Dónde está el punto rojo en el platillo de color rojo cuando tiene un valor de 0? _____

_____

5. Encontrar un valor de x tal que el platillo azul es igual a 0. ¿Dónde está el punto azul cuando el platillo azul tiene un valor de 0? _____

_____

6. Mueve el control deslizante para ajustar el valor de x. ¿Para qué valor de x hace que los platillos de color rojo y azul tengan el mismo valor? _____

¿Qué sucede en el gráfico cuando los valores de los platillos son iguales? _____

_____

7. ¿Qué otras observaciones se pueden hacer sobre la relación entre los valores de los platillos y la gráfica? _____

_____

_____

Anexo 6. Actividad de aprendizaje Ecuaciones lineales

ACTIVIDAD ECUACIONES LINEALES

Tema:	Ecuaciones Lineales con números enteros
Objetivo de aprendizaje	Los estudiantes usan ecuaciones lineales con números enteros para resolver problemas reales.
Conocimientos, habilidades y actitudes que implica el logro del objetivo.	Conocimientos: Ecuaciones Lineales con números enteros Habilidades: Solución de situaciones problema. Actitudes: Actitud investigativa / Trabajo en grupo.
Descripción	Momento 1. Exploración de problemas que involucran ecuaciones simples con números enteros. Individualmente los estudiantes resolverán 3 problemas que involucran ecuaciones simples, con ayuda del recurso Balanzas y llenando la guía Anexo 6.1. Luego se reunirán en pequeños grupos para compartir las soluciones halladas, los procesos seguidos, las dudas que quedan. En plenaria se presentaran los hallazgos de cada grupo. Al final individualmente reflexionarán sobre su desempeño en el taller a través de la siguiente actividad: 5. Si tuvieras que escribir en un titular de periódico tu desempeño en la clase de hoy, ¿Cuál sería? Complementa con tres frases que consideras serían importantes en tu artículo. 6. Si tuvieras que escribir en un titular de periódico el desempeño de tu grupo en la clase de hoy, ¿Cuál sería? Complementa con tres frases que consideras serían importantes en tu artículo. Esta reflexión se registrará en el blog individual. Momento 2. Solución de situaciones que involucran ecuaciones simples.

	Individualmente los estudiantes resolverán preguntas de una situación que involucra ecuaciones simples, en caso que consideren necesario tendrán disponible el recurso Balanzas, resolverán la guía Anexo 6.2. Luego se reunirán en pequeños grupos para compartir las soluciones halladas, los procesos seguidos, las dudas que quedan. En plenaria se presentaran los hallazgos de cada grupo. Al final individualmente reflexionarán sobre su desempeño en la exploración a través de las siguientes preguntas: 5. Escoge un color con el que consideres te identificas con tu desempeño de la clase de hoy. Escribe dos razones por las cuales consideras se puede representar tu desempeño con ese color. 6. Escoge un color con el que consideres se identifica con el desempeño de tu grupo en la clase de hoy. Escribe dos razones por las cuales consideras se puede representar el desempeño de tu grupo con ese color. Esta reflexión se registrará en el blog individual.
Actores y roles	**Profesor:** El profesor tiene un rol de guía durante todo el proceso. Por lo tanto debe estar haciendo diferentes actividades en cada momento. En los momentos 1 y 2: El docente debe apoyar el trabajo individual y de los grupos, escuchar sus dificultades y dirigir el trabajo para darle ideas sobre los elementos relevantes de cada tema. En las exposiciones debe orientar el proceso de coevaluación de los grupos y retroalimentar a cada grupo sobre su proceso. Además debe revisar los aportes de cada grupo en el blog. **Estudiante:** En los momento 1 y 2: El estudiante individualmente se enfrenta a las situaciones presentadas y realiza los procedimientos necesarios para resolverlas. Comunica sus ideas a sus compañeros. Hace una reflexión grupal de su proceso hasta el momento.

	Hace auto y coevaluación.
Recursos y materiales	**Materiales:** Papel **Recursos:** Buscadores Internet (Blog) Herramienta Balanza
Apoyo de las TIC	En esta actividad la tecnología apoyará el proceso de aprendizaje en diferentes momentos y de diferentes formas: 4. Informativa: Cuando usan los buscadores para recolectar información. 5. Comunicativa: Con el uso del blog. 6. Innovadora: Con el uso de la herramienta Balanza para la solución de Ecuaciones.
Productos	Blog del proceso de aprendizaje. Exposición de los elementos relevantes de cada tema. Las guías anexos 6.1 y 6.2.
Evaluación	La retroalimentación se realizará mediante la siguiente rúbrica: Criterios de evaluación
Duración	2 clases, posiblemente 4 horas. Aproximadamente dos horas por cada momento.

Momento 1

	Antes	**Durante**	**Después**
Momento Presencial		Desarrollo de la guía Anexo 6.1.	
Momento Virtual		Uso de la Herramienta Balanza, el cual complementa el	**Autoreflexión**. Reflexión sobre el trabajo individual en el desarrollo del

		trabajo de la guía.	juego

Momento 2

	Antes	**Durante**	**Después**
Momento Presencial	Preguntas de reflexión sobre el uso de los conceptos vistos hasta el momento.	Desarrollo de la guía Anexo 6.2.	
Momento Virtual		Los estudiantes que lo consideren necesario tendrán a su disposición la herramienta Balanzas.	**Autoreflexión**. Reflexión sobre el trabajo individual en el desarrollo del juego.

Anexo 6.1. Guía Exploración de problemas con ecuaciones simples

EXPLORACIÓN DE PROBLEMAS CON ECUACIONES SIMPLES

Revisa cada una de las siguientes situaciones con el fin que planees los pasos que necesitas realizar para poderlas solucionar.

1. La compañía de computadoras ET Computer Services utilizó los servicios de un correo privado para enviar un paquete. El correo le cobró $3.000, más $800 por cada libra enviada. ¿Cuánto pesó el paquete si la compañía pagó por enviar el paquete a Cartagena $243.000?

Representa esta situación con el lenguaje algebraico (Usando signos, letras y números)

Introduce la expresión en la aplicación y sigue las instrucciones que allí te dan.

Ahora resuelve la ecuación

La respuesta es

_____

2. Un estacionamiento privado cobra $3.500 por la primera hora y $2.550 por cada hora adicional. Ángel es ingeniero de sistemas de una empresa y no recuerda cuántos días ha estado sin ir a su casa. ¿Cuántas horas estuvo el carro de Ángel estacionado si pagó $131.000?

Representa esta situación con el lenguaje algebraico (Usando signos, letras y números)

Introduce la expresión en la aplicación y sigue las instrucciones que allí te dan.

Ahora resuelve la ecuación

La respuesta es

_____

Alberto alquiló un carro por $54.700 diarios en Bogotá por cuatro (4) días. Además pagó $2.300 por cada kilómetro recorrido. ¿Cuántos kilómetros viajó Alberto si su factura fue de $155.900?

Representa esta situación con el lenguaje algebraico (Usando signos, letras y números)

Introduce la expresión en la aplicación y sigue las instrucciones que allí te dan.

Ahora resuelve la ecuación

La respuesta es

_____

Anexo 6.2. Solución de situaciones con Ecuaciones simples

SOLUCIÓN DE SITUACIONES CON ECUACIONES SIMPLES

Usa la siguiente información para responder las preguntas

Parque nacional natural El Retiro

Entrada: $10.000

Horario: 7:00 a.m. a 3:00 p.m.

Rutas: 20 Km.

Alquiler de Caballo:

Básico: $12.000

Por cada hora: $7.500

Sitios para visitar:

Los tejares (Hotel y restaurante)

Alto de las Aves.

Bosque tres quebradas.

Los pocitos.

Leyendo un afiche, Fernando, encuentra la información del parque nacional natural "El Retiro" distante a 60 minutos de la cuidad donde vive. Fernando quiere organizar una salida con sus compañeros de clase.

1. Representa en una expresión algebraica el dinero con el que deben contar los estudiantes para entrar al parque y montar a caballo una hora cada uno. En este momento no han confirmado todos los estudiantes.

2. Si en la salida van a participar 32 estudiantes, ¿Cuánto dinero deben recolectar?

3. Esteban, uno de los estudiantes, pagó $49.500 por el alquiler de un caballo. ¿Cuántas horas monto?

Anexo 8. Niveles de valoración para analizar los desempeños de los estudiantes en las pruebas Inicial y Final

		PREGUNTAS				PREGUNTAS			
NIVELES		1ª	1b	1c	1d	2a	2b	2c	2d
0		No contesta/No responde. Realiza otras operaciones que no corresponden con el perímetro, o con la suma de coeficientes y variables.				No contesta / No responde			
1	Letra evaluada o ignorada	Le da un valor específico a las letras para dar un valor en el resultado. Ó no tiene en cuenta la letra y solo usa los números.				Halla valores específicos para cada condición, alguno puede no cumplir la condición, ó le da valores diferentes a cada lado de la igualdad aunque la letra sea la misma			
2	letra como objeto	Resuelve adecuadamente los ejercicios que involucran sólo números y sólo letras pero comete errores con los ejercicios que involucran letras y números				Halla valores correctos para las condiciones 1, 2 y 3, pero no halla la cuarta opción			
3	Letra como incógnita o número generalizado	Resuelve adecuadamente los cuatro ejercicios, teniendo en cuenta las operaciones entre coeficientes y variables.				Halla respuesta a la cuarta condición mostrando varios ejemplos pero no todos.			
4	letra como variable	No aplica				Halla respuesta a la cuarta condición mostrando todos los valores posibles.			

	PREGUNTAS			PREGUNTAS			
NIVELES	**3a**	**3b**	**3c**	**4a**	**4b**	**4c**	**4d**
0	No contesta / No responde			No contesta / No responde			
1	El estudiante usa un ejemplo específico para validar o no la afirmación			El estudiante resuelve correctamente las 3 operaciones iniciales, haciendo la operación correspondiente			
2	El estudiante usa dos o más ejemplos específicos para validar o no la afirmación.			El estudiante resuelve correctamente las 4 operaciones iniciales, haciendo la operación correspondiente.			
3	El estudiante usa las leyes de los números para justificar la validez de las afirmaciones pero no encuentra la igualdad de p=q ó 2c=4c			El estudiante justifica sus selecciones con relaciones entre los números, sin necesidad de hacer las últimas dos operaciones			
4	El estudiante encuentra la igualdad entre p=q y 2c =4c			No aplica			

	PREGUNTAS		PREGUNTAS	PREGUNTAS	
NIVELES	**5a**	**5b**	**6**	**7a**	**7b**
0	No contesta / No responde		No contesta / No responde	No contesta / No responde	
1	Usa información no correspondiente para solucionar el problema		Usa información no correspondiente para solucionar el problema	Opera con expresiones algebraicas de forma clausurativa, tratando de dar un solo resultado	
2	Usa la información que corresponde para solucionar el problema pero comete errores de signos u operaciones		Usa la información que corresponde para solucionar el problema pero comete errores de signos u operaciones	Realiza las operaciones entre expresiones algebraicas pero comete algunos errores de signos o exponentes	
3	Representa adecuadamente el problema		Halla el valor adecuado al problema	Halla el valor adecuado al problema	
4	No aplica		No aplica	No aplica	

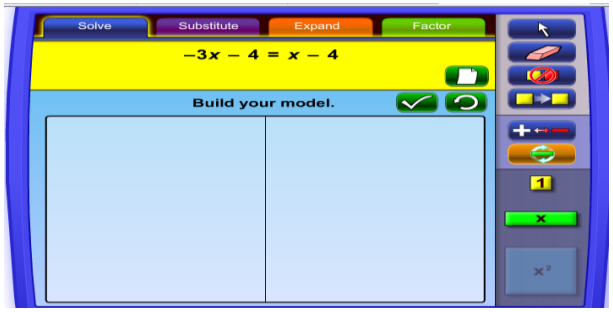
	PREGUNTAS		PREGUNTAS	
NIVELES	**8a**	**8b**	**10**	**11**
0	No contesta / No responde		No contesta / No responde	No contesta / No responde
1	Opera con expresiones algebraicas de forma clausurativa, tratando de dar una sola operación		Usa información no correspondiente para solucionar el problema/ hace operaciones mal con la información dada	Usa información no correspondiente para solucionar el problema
2	Realiza las operaciones entre expresiones algebraicas pero comete algunos errores de signos		Resuelve el problema sin usar elementos algebraicos	Resuelve el problema sin usar elementos algebraicos
3	Halla el valor adecuado al problema		Usa la información que corresponde para solucionar el problema pero comete errores de signos u operaciones	Usa la información que corresponde para solucionar el problema pero comete errores de signos u operaciones
4	No aplica		Halla el valor adecuado al problema	Halla el valor adecuado al problema

Anexo 7. Estado del arte de recursos virtuales para el desarrollo del pensamiento algebraico

Estado del Arte del recursos virtuales para el desarrollo del pensamiento algebraico.

NOMBRE Y DIRECCIÓN DE UBICACIÓN					1
Algebra Tiles		http://illuminations.nctm.org/ActivityDetail.aspx?ID=216 [Consultada el 10 de octubre de 2012]			
NIVEL – GRADO	**CONTENIDO MATEMÀTICO**	**REPRESENTACIÓN**	**MANIPULACIÓN**	**TIPOS DE ACTIVIDADES**	**RETROALIMENTACIÓN**
6 - 12	Solución de ecuaciones, sustitución, factorización.	Gráfica (Geométrica) Numérica Algebraica	Ubicación de las figuras, introducción de números y expresiones algebraicas.	Ejercicios	Al final de cada etapa durante la solución.
REACCIÓN AL ERROR	**SUGERENCIA DE CORRECIÓN DE RESPUESTA**	**DIAGNÓSTICO**	**PERSONALIZACIÓN**	**SISTEMA OPERATIVO**	**TRADUCCIONES**
Indica que hay error, pero no muestra sugerencias.	No	No	No	Un navegador (Mozilla Firefox, Google crome e Internet explorer) Un motor: Java flash Acceso a internet	Inglés

DURADERO Y ACTUALIZABLE	FÁCIL ACCESO Y MANEJABLE	SINTÉTICO Y ESENCIAL	INTEROPERATIVIDAD
No	Si	Si, pero falta trabajar en la sugerencia al error	Si

DESCRIPCIÓN	GRÁFICA
Este recurso presenta ejercicios en cuatro temas que son: solución de ecuaciones, , multiplicación de factores y factorización. La representación que se realiza se basa en la idea de álgebra geométrica donde se representan las expresiones por el área de algunas figuras como son una unidad por un cuadrado de lado 1, la expresión x por un rectángulo de lados 1y x, y la expresión x^2 por un cuadrado de lado x. las cantidades positivas y negativas se diferencian por el color, las cantidades negativas siempre se representan por el color rojo. Todos los ejercicios deben ser completados en dos etapas: • Construir el modelo Se deben colocar las piezas correctas en el espacio de trabajo, representar con las construcciones dadas el ejercicio mostrado. Después de construir el modelo del problema, se debe comprobar la respuesta para pasar a la siguiente etapa. Sólo el tipo de baldosa, la cantidad de baldosas, y el espacio	

de trabajo se revisan, no la forma en que las baldosas están dispuestas.

- Resolver el problema

Dar la respuesta del ejercicio, tanto numéricamente como gráficamente. En este caso, las respuestas deben darse de forma simplificada.

1. Resolver una ecuación

Se debe representar en el lugar de trabajo: la expresión a la izquierda del = en el espacio de trabajo izquierdo, y en la expresión a la derecha del = en el espacio de trabajo derecho. Luego debe revisar el modelo para seguir adelante con el siguiente paso.

Para resolver el problema, hallar el valor de la x, se debe arreglar las baldosas por lo que sólo un azulejo verde solo se queda en la mitad del espacio de trabajo con su respectivo valor.

Se debe recordar a los estudiantes que sólo los valores de la igualdad pueden ser removidos de ambos lados, como una baldosa amarilla de la izquierda y una baldosa amarilla de la derecha. Para "mover" una baldosa, primero debe añadir el valor inverso de ambos lados. Si se quiere mover un rectángulo rojo, se debe añadir un rectángulo amarillo a ambos lados.

2. Sustitución de valores en expresiones.

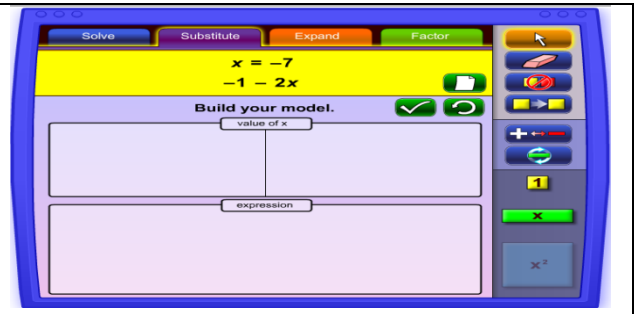
Se debe representar en la parte superior el valor de la incógnita, y en la parte inferior la expresión dada. Luego debe revisar el modelo para seguir adelante con el siguiente paso.
Al final en la parte inferior del espacio de trabajo debe quedar representado el valor de la expresión y escribir el valor numérico en el espacio superior.

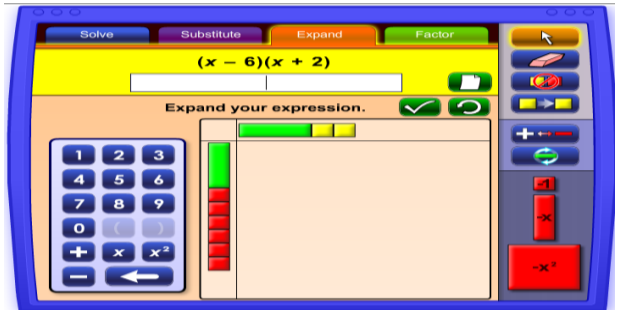
3. Multiplicación

El espacio de trabajo cambia en este tema, presenta un cuadrado con dos rectángulos que lo rodean, los factores dados se deben representar inicialmente en los rectángulos horizontal y vertical. . Luego debe revisar el modelo para seguir adelante con el siguiente paso.
Luego debe representar la solución por área que mostraría esa multiplicación con las baldosas correspondientes y poner en la parte superior la expresión indicada, en la parte izquierda aparece una simulación del teclado de una calculadora con el cual se puede escribir la respuesta algebraica.

4. Factorización

El espacio de trabajo es el mismo del tema anterior, pero ahora se utiliza primero el cuadrado grande para representar la expresión que muestra el programa y formar un rectángulo o un cuadrado con las baldosas correspondientes. Luego debe revisar el modelo para seguir adelante con el siguiente paso.





Finalmente se escribe la expresión conformada por los lados del rectángulo en la parte superior y con ayuda del teclado de la calculadora que aparece a la izquierda.	
HABILIDAD, DESTREZA Ó CAPACIDAD QUE PROPONE DESARROLLAR	**OBJETIVO**
Representación (gráfica, algebraica)	Aprender a representar y resolver problemas de álgebra. Resolver ecuaciones, variables de sustitución en las expresiones, multiplicar y factorizar.
FORTALEZAS	**OBTACULOS (Aprendizaje)**
El recurso permite representar gráficamente ecuaciones y la solución.	El uso del recurso puede generar dependencia del "material concreto" al únicamente usar el recurso y no hacer el proceso de escritura al mismo tiempo. Al no anularse los datos al mismo tiempo en los dos lados tiende a cometerse error por hacer procesos diferentes en cada lado de la representación.
DIFICULTADES (Del sistema)	**LICENCIA**
El recurso no permite representar el proceso de solución de una ecuación, pasa de la ecuación a la solución. No presenta sugerencia al error. El uso del recurso no es intuitivo. Fácilmente no se comprende el uso de los cuadros y cada uno de los botones que tienen.	Libre

NOMBRE Y DIRECCIÓN DE UBICACIÓN					2
Factorize			http://illuminations.nctm.org/ActivityDetail.aspx?ID=64 [Consultada el 10 de octubre de 2012]		
NIVEL – GRADO	**CONTENIDO MATEMÀTICO**	**REPRESENTACIÓN**	**MANIPULACIÓN**	**TIPOS DE ACTIVIDADES**	**RETROALIMENTACIÓN**
3 - 8	Factorización de números naturales	Gráfica (Geométrica) Numérica	Construcción de rectángulos e introducción de números.	Ejercicios	Inmediata
REACCIÓN AL ERROR	**SUGERENCIA DE CORRECIÓN DE RESPUESTA**	**DIAGNÓSTICO**	**PERSONALIZACIÓN**	**SISTEMA OPERATIVO**	**TRADUCCIONES**
Inmediatamente el programa da una alarma y borra lo realizado.	No presenta	No	Si, permite que el usuario escriba los datos propios, que desee resolver.	Un navegador (Mozilla Firefox, Google crome e Internet explorer) Un motor: Java flash Acceso a internet	Inglés
DURADERO Y ACTUALIZABLE	**FÁCIL ACCESO Y MANEJABLE**	**SINTÉTICO Y ESENCIAL**	**INTEROPERATIVIDAD**		
Permite incluir sus propios ejercicios.	Si	Sí, pero falta trabajar en la sugerencia del error.	Si		
DESCRIPCIÓN			**GRÁFICA**		

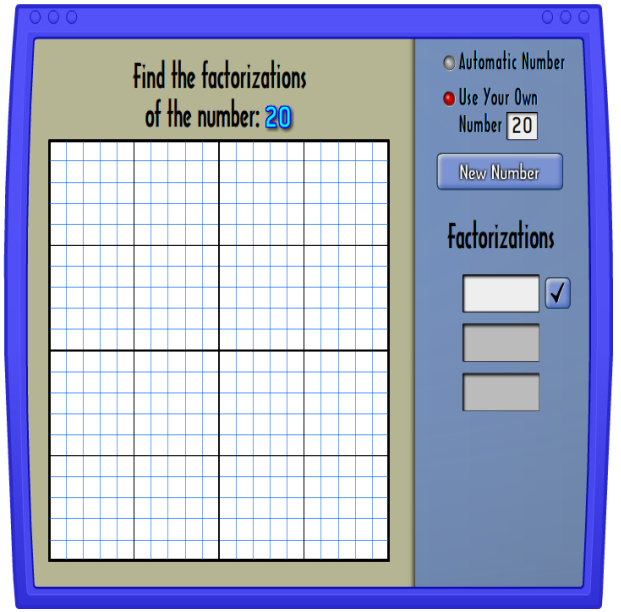
En este objeto el área de trabajo es una cuadrícula para ayudar a encontrar los factores. Se debe dibujar el rectángulo del cual el área sea el número que se esta factorizando, el área del rectángulo aparece en la pantalla. Al soltar el botón del ratón se comprueba su respuesta. Si el área es igual al número, el rectángulo se mantendrá. Si el área no es igual al número, se desaparece. La longitud y la anchura del rectángulo son los factores del número.

Luego se introduce las factorizaciones en los recuadros en blanco que aparecen a la derecha.

Una vez que haya entrado la factorización, se verifica la respuesta. Si es incorrecto, la entrada será eliminada.

El número de cajas blancas se corresponde con el número de factorizaciones del número.

Algunas preguntas que siguieren realizar son:
¿Por qué cree usted que lo largo y ancho de los rectángulos representan los factores de los números?
¿Qué número tiene la mayoría de factorizaciones? ¿Cuál tiene la menor cantidad? ¿Por qué crees que pasa esto?
¿Qué tipo de números sólo tienen una factorización? ¿Qué tienen en común los rectángulos de estas factorizaciones?
Si usted dobla la cantidad, ¿qué ocurre con el número de factorizaciones? ¿Usted nota un patrón en la factorización de su número original y el número que se duplicó?



HABILIDAD, DESTREZA Ó CAPACIDAD QUE PROPONE DESARROLLAR	OBJETIVO
Encontrar diferentes factores de un número dado.	Explorar visualmente el concepto de factores mediante la creación de matrices rectangulares. La longitud y la anchura de la matriz son factores de su número.
FORTALEZAS	**OBTACULOS (Aprendizaje)**
El recurso permite representar gráficamente los factores de un número y saber cuántos posibles arreglos de factores tiene un número.	
DIFICULTADES (Del sistema)	**LICENCIA**
No presenta sugerencia al error.	Libre

NOMBRE Y DIRECCIÓN DE UBICACIÓN					3
Pan Balance – Expressions **http://illuminations.nctm.org/ActivityDetail.aspx?ID=10** [Consultada el 10 de octubre de 2012]					
NIVEL – GRADO	**CONTENIDO MATEMÀTICO**	**REPRESENTACIÓN**	**MANIPULACIÓN**	**TIPOS DE ACTIVIDADES**	**RETROALIMENTACIÓN**
3 – 12	Concepto de equivalencia Solución de Ecuaciones Simples	Gráfica (Función) Algebraica Numérica	Introducir números, expresiones algebraicas, y mover el simulador para encontrar la solución.	Propios	Cuando las expresiones no son validas.
REACCIÓN AL ERROR	**SUGERENCIA DE CORRECIÓN DE RESPUESTA**	**DIAGNÓSTICO**	**PERSONALIZACIÓN**	**SISTEMA OPERATIVO**	**TRADUCCIONES**
NO	NO	NO	SI	Un navegador (Mozilla Firefox, Google crome e Internet explorer) Un motor: Java flash Acceso a internet	Inglés
DURADERO Y ACTUALIZABLE	**FÁCIL ACCESO Y MANEJABLE**	**SINTÉTICO Y ESENCIAL**	**INTEROPERATIVIDAD**		
Si	Si	Si, pero falta la retroalimentación	Si		
DESCRIPCIÓN			**GRÁFICA**		

En este objeto se coloca una expresión algebraica en cada uno de los platos rojo y azul. Estas expresiones pueden o no incluir la variable x. Luego tiene dos opciones introducir un valor de x, o ajustar el valor de x por el control deslizante. Como cambia el valor de x, los resultados serán graficados.

Se tienen los botones Zoom In y Zoom Out, o ajustar los valores de las x e y ejes con los deslizadores, para cambiar la parte del gráfico que se muestra.

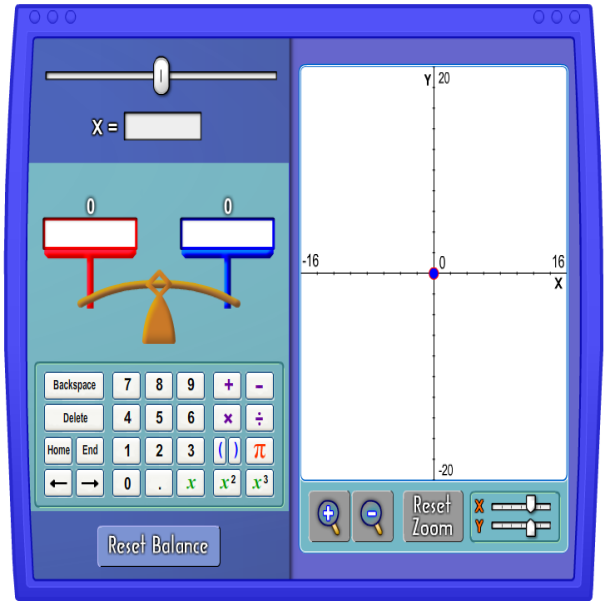
El botón Restablecer elimina el balance de las expresiones de las cacerolas y borra el gráfico.

Algunos de los ejercicios que proponen realizar con este OVA son:

Explora la equivalencia algebraica con la siguiente investigación.

Introduzca la expresión 2x en el plato rojo, y escriba la expresión x + 4 en plato azul.
Introduzca el valor x = -5 en el cuadro en la parte superior. ¿Qué pasa? Cambiar el valor de x en 0 y luego a 5. ¿Cómo cambia esto la relación entre los platos?
Encontrar un valor de x tal que el plato rojo es igual a 0. ¿Dónde está el punto rojo en la bandeja de color rojo cuando tiene un valor de 0?
Encontrar un valor de x tal que el plato azul es igual a 0. ¿Dónde está el punto azul cuando el plato azul tiene un valor de 0?
Mueva el control deslizante para ajustar el valor de x. ¿Para qué valor de x hace que los moldes de color rojo y azul tienen el mismo valor? ¿Qué sucede en el gráfico cuando los valores de las bandejas son iguales?

¿Qué otras observaciones se puede hacer sobre la relación entre los valores de las bandejas y la gráfica?



HABILIDAD, DESTREZA Ó CAPACIDAD QUE PROPONE DESARROLLAR	OBJETIVO
Comparación de expresiones algebraicas y numéricas.	Practicar habilidades aritméticas y algebraicas, e investigar el importante concepto de equivalencia.
FORTALEZAS	**OBTACULOS (Aprendizaje)**
El vínculo permite representar de dos formas diferentes las expresiones numéricas y algebraicas, lo que permite tener dos acercamientos diferentes al concepto de equivalencia.	

DIFICULTADES (Del sistema)	LICENCIA
No presenta sugerencia al error.	Libre

NOMBRE Y DIRECCIÓN DE UBICACIÓN					4
Pan Balance – Number			http://illuminations.nctm.org/ActivityDetail.aspx?ID=26 [Consultada el 10 de octubre de 2012]		
NIVEL – GRADO	**CONTENIDO MATEMÀTICO**	**REPRESENTACIÓN**	**MANIPULACIÓN**	**TIPOS DE ACTIVIDADES**	**RETROALIMENTACIÓN**
3 – 8	La igualdad como relación.	Numérica	Introducir números y expresiones.	Propios	Inmediata cuando hay error.
REACCIÓN AL ERROR	**SUGERENCIA DE CORRECIÓN DE RESPUESTA**	**DIAGNÓSTICO**	**PERSONALIZACIÓN**	**SISTEMA OPERATIVO**	**TRADUCCIONES**
Indica que hay error.	No	No	No	Un navegador (Mozilla Firefox, Google crome e Internet explorer) Un motor: Java Flash Acceso a internet	Inglés.

DURADERO Y ACTUALIZABLE	FÁCIL ACCESO Y MANEJABLE	SINTÉTICO Y ESENCIAL	INTEROPERATIVIDAD
No es necesario.	**Si**	**Si**	**Si**

DESCRIPCIÓN	GRÁFICA

El recurso cuenta con un espacio para interactuar, se puede escribir una expresión con el teclado o el teclado en la parte inferior del área de trabajo. El resultado de la expresión se muestra encima de la bandeja seleccionada. Las entradas no válidas se indican con un mensaje.
Las cacerolas se moverán hacia arriba y hacia abajo dependiendo de la relación de equivalencia de expresión. Cuando las expresiones son equivalentes, las cacerolas se muestran en equilibrio y la ecuación completa se introducirá en la tabla de ecuaciones balanceadas.

Exploración

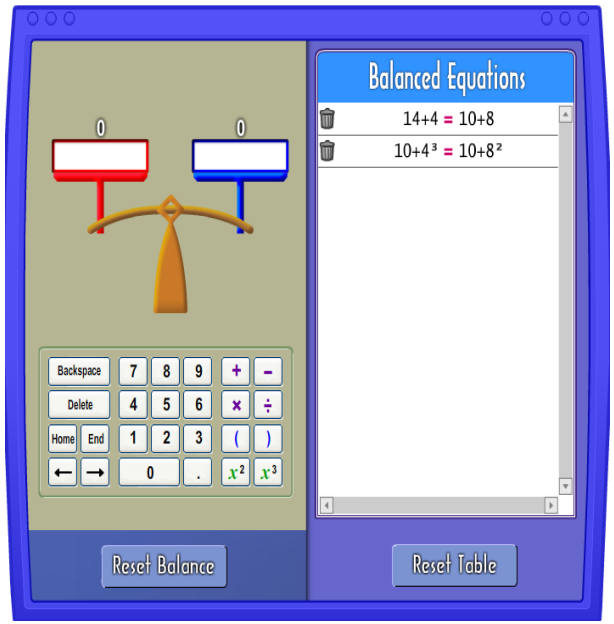
Escriba 4 en la bandeja de color rojo. A continuación, escriba 9 en la sartén azul. ¿Qué pasa? ¿Por qué?

Restablecer el equilibrio. Introduzca 12 en el molde de color rojo. A continuación, introduzca la suma (dos números sumados) en el plato de la derecha que es igual a 12. ¿Qué pasa?¿Por qué?

¿Puedes encontrar otra suma igual a 12? ¿Puedes encontrar otra expresión que utiliza una operación diferente?

¿Es posible añadir hasta tres números para que el balance sea 12? ¿Cuatro números? ¿Cuál es la mayor cantidad de números que se pueden añadir a la balanza con 12?

Ahora ha encontrado varias expresiones que equivalen a 12. Entre una de sus expresiones en la bandeja de color rojo y otra en la bandeja azul (No utilice 12). ¿Qué pasa?¿Por qué?



HABILIDAD, DESTREZA Ó CAPACIDAD QUE PROPONE DESARROLLAR	OBJETIVO
Encontrar equivalencias numéricas	Fortalecer la comprensión y cálculo de expresiones numéricas y la igualdad,

	especialmente la idea de igualdad como relación..
FORTALEZAS	**OBTACULOS (Aprendizaje)**
El vínculo permite escribir cualquier expresión con la mayoría de los elementos que se necesitan para representar las diferentes expresiones, permite expresar cantidades negativas, con paréntesis y con las cinco operaciones básicas: adición, sustracción, multiplicación división y algunas potencias.	
DIFICULTADES (Del sistema)	**LICENCIA**
No hay sugerencia al error.	Libre

NOMBRE Y DIRECCIÓN DE UBICACIÓN					5
Pan Balance – Shapes		http://illuminations.nctm.org/ActivityDetail.aspx?ID=33 [Consultada el 10 de octubre de 2012]			
NIVEL – GRADO	**CONTENIDO MATEMÁTICO**	**REPRESENTACIÓN**	**MANIPULACIÓN**	**TIPOS DE ACTIVIDADES**	**RETROALIMENTACIÓN**
3 – 8	Equivalencia	Gráfica.	Introducir figuras.	Ejercicios.	No
REACCIÓN AL ERROR	**SUGERENCIA DE CORRECIÓN DE RESPUESTA**	**DIAGNÓSTICO**	**PERSONALIZACIÓN**	**SISTEMA OPERATIVO**	**TRADUCCIONES**
SI	NO	NO	NO	Un navegador (Mozilla Firefox, Google crome e Internet explorer) Un motor: Java Flash Acceso a internet	Inglés

DURADERO Y ACTUALIZABLE	FÁCIL ACCESO Y MANEJABLE	SINTÉTICO Y ESENCIAL	INTEROPERATIVIDAD
NO	SI	SI	SI

DESCRIPCIÓN	GRÁFICA

El presente recurso pretende que el estudiante manipule la herramienta para que encuentre equivalencias y luego realice cálculos del posible peso de cada figura representada. Se comienza eligiendo un conjunto en el menú superior, a cada forma se le asigna un peso determinado. Entonces debe tratar de encontrar conjuntos equivalentes de las formas por los lugares en cada lado de la balanza. Los platillos se mueven de acuerdo a qué lado es más pesado y que es más ligero. Cuando en ambos lados de la balanza, la relación es equivalente esta aparecerá en la tabla de la derecha.

Cuando el estudiante cree que sabe todos los pesos, puede comprobar su respuesta. Hace clic en Adivina pesos, cuando los platillos están equilibrados. Esto lleva a la nueva pantalla Adivina pesos. Los pesos se manejan con números enteros positivos.

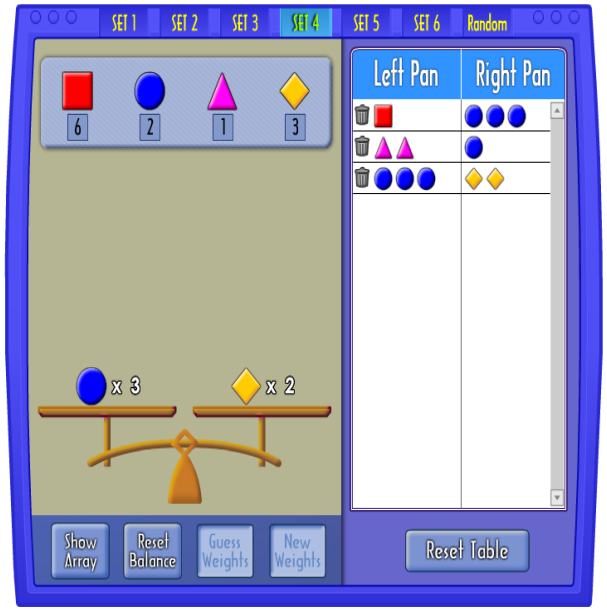
Exploración

Colocar un cuadrado rojo en la bandeja de la izquierda y un círculo azul en la bandeja de la derecha. ¿Son iguales en peso? Si no, ¿qué pesa más? Trate de hacer el balance de las bandejas por la adición de otra forma a una bandeja.

Continúe agregando cualquiera de las figuras a las bandejas. Cuando encuentre el equilibrio, una entrada se agrega a la tabla. ¿Cree que sabe el peso de un círculo azul? Compruébelo haciendo clic en el botón Adivinar Pesos y escriba su secuencia.

¿Hay alguna otra combinación de cuadrados rojos y círculos azules que se hará el balance de las bandejas? Trate de encontrar al menos una más.

Lleve a cabo investigaciones similares para averiguar cómo los cuadrados rojos y los círculos azules están relacionados con los triángulos de color rosa y diamantes amarillos.



HABILIDAD, DESTREZAÓ CAPACIDAD QUE PROPONE DESARROLLAR	OBJETIVO
Exploración del concepto de equivalencia con elementos como el peso de diferentes figuras.	Comprender el concepto de equivalencia o igualdad a partir de representación de pesos de figures.
FORTALEZAS	**OBTACULOS (Aprendizaje)**
El vínculo permite explorar el peso con diferentes figuras, para encontrar el peso de cada una relacionada con las otras figuras.	
DIFICULTADES (Del sistema)	**LICENCIA**
No hay sugerencia al error.	Libre

NOMBRE Y DIRECCIÓN DE UBICACIÓN					6
Proof Without Words: Completing the Square			http://illuminations.nctm.org/ActivityDetail.aspx?ID=132 [Consultada el 10 de octubre de 2012]		
NIVEL – GRADO	**CONTENIDO MATEMÁTICO**	**REPRESENTACIÓN**	**MANIPULACIÓN**	**TIPOS DE ACTIVIDADES**	**RETROALIMENTACIÓN**
9 - 12	Completación del cuadrado.	Gráfica	Longitud del lado del cuadrado.	Ejercicios (Tipo ejemplo)	No
REACCIÓN AL ERROR	**SUGERENCIA DE CORRECIÓN DE RESPUESTA**	**DIAGNÓSTICO**	**PERSONALIZACIÓN**	**SISTEMA OPERATIVO**	**TRADUCCIONES**
NO	NO	NO	NO	Un navegador (Mozilla Firefox, Google crome e Internet explorer) Un motor: Java flash Acceso a internet	INGLÉS

DURADERO Y ACTUALIZABLE	FÁCIL ACCESO Y MANEJABLE	SINTÉTICO Y ESENCIAL	INTEROPERATIVIDAD
NO	SI	NO	SI

DESCRIPCIÓN	GRÁFICA

El recurso es un ejemplo manipulable del caso de factorización completación del cuadrado. Se puede utilizar el deslizador para ajustar el ancho del rectángulo azul.
Luego hacer clic en el Rectángulo para dividir por la mitad el rectángulo azul. A continuación, hacer clic en mover piezas y alinear para colocar las piezas en la mejor disposición de todo el cuadro amarillo. Y hacer clic en Finalizar para añadir la Plaza de la pieza necesaria para hacer el arreglo en un cuadrado completo.

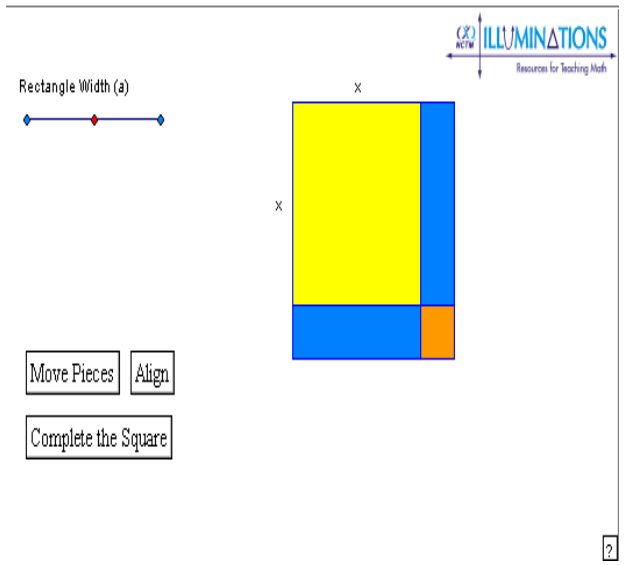
Exploración

La longitud de los lados del cuadrado amarillo es x, y el ancho del rectángulo azul es a. (Usted puede ajustar el ancho del rectángulo con el control deslizante en la parte superior de la pantalla.)
¿Cuál es el área del cuadrado amarillo?
¿Cuál es el área del rectángulo azul?
¿Cómo estas dos figuras representan la expresión $x^2 + ax$?

El proceso de "completar el cuadrado" consiste en tomar la mitad del coeficiente de x. Haga clic en el rectángulo, divide la mitad.
¿Cuáles son las dimensiones de cada uno de los rectángulos más pequeños que se forman?
¿Cuál es el área de cada uno de estos rectángulos más pequeños?
Haga clic en mover las piezas y la Alineación de botones para mover el rectángulo a un mejor arreglo. Este nuevo arreglo es casi, pero no del todo, un cuadro completo.

Haga clic en la completa el botón cuadrado. En términos de uno, ¿cuál es el área del cuadrado de color naranja que se ha añadido?

A medida que cambie el ancho del rectángulo, ¿cómo cambia la magnitud del cuadrado naranja? En términos de uno, ¿cuál es el área del cuadrado de color naranja?

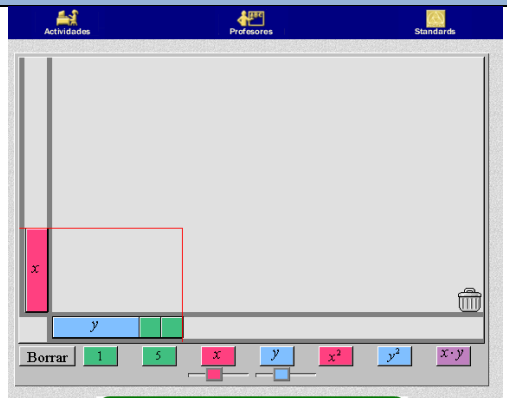


HABILIDAD, DESTREZAÓ CAPACIDAD QUE PROPONE DESARROLLAR	OBJETIVO
Representar gráficamente uno de los casos de factorización (Completación del cuadrado)	Comprender el proceso de completación del cuadrado.
FORTALEZAS	**OBTACULOS (Aprendizaje)**
Representación gráfica de uno de los casos de factorización.	
DIFICULTADES (Del sistema)	**LICENCIA**

No presenta corrección al error.	Libre

NOMBRE Y DIRECCIÓN DE UBICACIÓN					7
Producto de Binomios	http://nlvm.usu.edu/es/nav/frames_asid_189_g_1_t_2.html?open=activities&from=topic_t_2.html [Consultada el 10 de octubre de 2012]				
NIVEL – GRADO	**CONTENIDO MATEMÀTICO**	**REPRESENTACIÓN**	**MANIPULACIÓN**	**TIPOS DE ACTIVIDADES**	**RETROALIMENTACIÓN**
6 - 12	Multiplicación de binomios	Geométrica - Algebraica	Factores de la multiplicación	Propios	No presenta
REACCIÓN AL ERROR	**SUGERENCIA DE CORRECIÓN DE RESPUESTA**	**DIAGNÓSTICO**	**PERSONALIZACIÓN**	**SISTEMA OPERATIVO**	**TRADUCCIONES**
NO	NO	NO	SI	Un navegador (Mozilla Firefox, Google crome e Internet explorer) Un motor: Java flash Acceso a internet	Español

DURADERO Y ACTUALIZABLE	FÁCIL ACCESO Y MANEJABLE	SINTÉTICO Y ESENCIAL	INTEROPERATIVIDAD
SI	SI	SI	SI

DESCRIPCIÓN	GRAFICA
Este manipulador es muy útil como introducción a la representación rectangular de la multiplicación y división, pero está limitado a operaciones algebraicas binomiales (de dos términos), números enteros positivos, variables positivas y factores sin exponentes. El recurso presenta una zona de trabajo subdividida, en donde se representan los factores de la multiplicación y otro donde se representa el producto, en este aplicativo se puede hacer: • Añadir baldosas dentro del área de trabajo • Rotar las baldosas • Cambiar el ancho de las baldosas *x* o *y* • Borrar las baldosas • Representar el producto de dos o varios factores	

HABILIDAD, DESTREZAÓ CAPACIDAD QUE PROPONE DESARROLLAR	OBJETIVO
Representación rectangular de la multiplicación y la división.	Los estudiantes representarán el concepto de una variable como una o más

	cantidades desconocidas usando una letra o un símbolo. Los estudiantes modelarán problemas con objetos y usarán representaciones, tales como gráficas, cuadros y ecuaciones, para llegar a conclusiones.
FORTALEZAS	**OBTACULOS (Aprendizaje)**
El programa presenta diversos ejercicios al estudiante para que pueda representar el producto de binomios. El docente puede proponer los ejercicios para dirigir el análisis que desea que realice el estudiante.	Está limitado a operaciones algebraicas binomiales (de dos términos), números enteros positivos, variables positivas y factores sin exponentes.
DIFICULTADES (Del sistema)	**LICENCIA**
El programa no le presenta al estudiante una valoración o retroalimentación de su trabajo	Libre

NOMBRE Y DIRECCIÓN DE UBICACIÓN					8
Graficador de funciones	http://nlvm.usu.edu/es/nav/frames_asid_109_g_2_t_2.html?open=activities&from=topic_t_2.html [Consultada el 10 de octubre de 2012]				
NIVEL – GRADO	**CONTENIDO MATEMÀTICO**	**REPRESENTACIÓN**	**MANIPULACIÓN**	**TIPOS DE ACTIVIDADES**	**RETROALIMENTACIÓN**
6 - 12	Funciones	Gráfica	Funciones	Propios	NO
REACCIÒN AL ERROR	SUGERENCIA DE CORRECIÒN DE RESPUESTA	DIAGNÓSTICO	PERSONALIZACIÓN	SISTEMA OPERATIVO	TRADUCCIONES
NO	NO	NO	SI	Un navegador (Mozilla Firefox, Google crome e Internet explorer) Un motor: Java flash Acceso a internet	Español Inglés Francés

DURADERO Y ACTUALIZABLE	FÁCIL ACCESO Y MANEJABLE	SINTÉTICO Y ESENCIAL	INTEROPERATIVIDAD
SI	SI	SI	SI

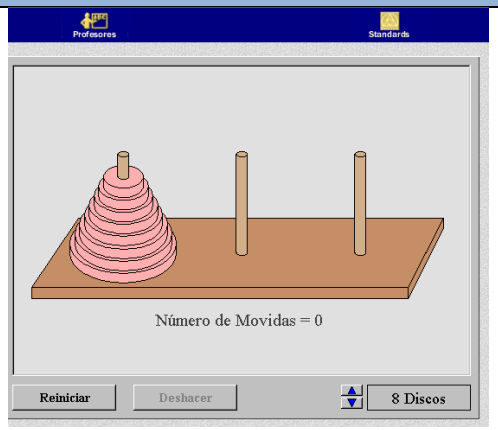
DESCRIPCIÓN	GRAFICA
Este recurso permite graficar diversas funciones con el fin que sean analizadas y estudiadas. Al mismo tiempo se puede graficar tres funciones, además se puede controlar elementos cómo: el rango, el dominio y parámetros de las funciones. En este recurso se puede hacer: • Graficar una función • Rastrear un punto a lo largo de la gráfica • Variar los parámetros de las funciones dinámicamente • Cambiar el rango de los valores mostrados en la gráfica • Graficar varias funciones a la vez • Restringir el dominio de una función • Acercar una parte de la gráfica	

HABILIDAD, DESTREZAÓ CAPACIDAD QUE PROPONE DESARROLLAR	OBJETIVO

Estudiar el comportamiento de las funciones de manera gráfica.	Representar gráficamente diversas funciones
FORTALEZAS	**OBTACULOS (Aprendizaje)**
El docente puede hacer uso de esta herramienta para proponer actividades de análisis de graficas de funciones. El programa permite hacer un análisis numérico punto a punto de cada gráfica. El programa permite hacer una comparación de tres funciones al mismo tiempo.	
DIFICULTADES (Del sistema)	**LICENCIA**
No hay sugerencia al error. El recurso no dirige la reflexión sobre los procesos, se deben dirigir desde afuera.	Libre

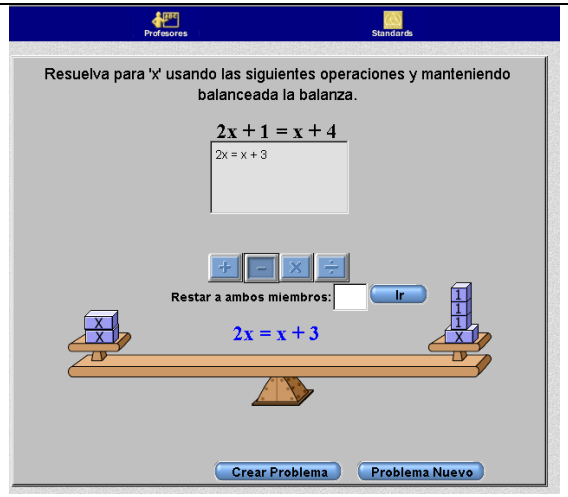
NOMBRE Y DIRECCIÓN DE UBICACIÓN					9
Torres de Hanoi http://nlvm.usu.edu/es/nav/frames_asid_118_g_2_t_2.html?from=topic_t_2.html [Consultada el 10 de octubre de 2012]					
NIVEL – GRADO	**CONTENIDO MATEMÀTICO**	**REPRESENTACIÓN**	**MANIPULACIÓN**	**TIPOS DE ACTIVIDADES**	**RETROALIMENTACIÓN**
3 - 12	Pensamiento algebraico, análisis de regularidades.	Gráfica	Cantidad de discos	Único (Resolver las torres de Hanoi)	Posterior
REACCIÒN AL ERROR	**SUGERENCIA DE CORRECIÒN DE RESPUESTA**	**DIAGNÓSTICO**	**PERSONALIZACIÓN**	**SISTEMA OPERATIVO**	**TRADUCCIONES**
NO	NO	NO	SI	Un navegador (Mozilla Firefox, Google crome e Internet explorer) Un motor: Java flash Acceso a internet	Español Inglés Francés Chino

DURADERO Y ACTUALIZABLE	FÁCIL ACCESO Y MANEJABLE	SINTÉTICO Y ESENCIAL	INTEROPERATIVIDAD
No es actualizable	SI	SI	SI

DESCRIPCIÓN	GRAFICA
El objetivo de las Torres de Hanoi es mover un grupo de discos de una estaca a otra usando el menor número de movidas posible. Las reglas son las siguientes: • Puedes mover solamente un disco a la vez. • No puedes colocar ningún disco sobre otro disco más pequeño. Usando este manipulador virtual podrás: • Mover un disco • Deshacer la última movida • Escoger un ejercicio con un número de discos diferente • Reiniciar un ejercicio	

HABILIDAD, DESTREZAÓ CAPACIDAD QUE PROPONE DESARROLLAR	OBJETIVO
Análisis de regularidades.	Desarrollar pensamiento algebraico
FORTALEZAS	**OBTACULOS (Aprendizaje)**
El programa permite desarrollar estrategias para solucionar los diferentes niveles del problema que se propone	
DIFICULTADES (Del sistema)	**LICENCIA**
No hay sugerencia al error. El recurso no dirige la reflexión sobre los procesos, se deben dirigir desde fuera.	Libre

NOMBRE Y DIRECCIÓN DE UBICACIÓN					10
Balanza Algebraica http://nlvm.usu.edu/es/nav/frames_asid_201_g_3_t_2.html?open=instructions&from=topic_t_2.html [Consultada el 10 de octubre de 2012]					
NIVEL – GRADO	**CONTENIDO MATEMÀTICO**	**REPRESENTACIÓN**	**MANIPULACIÓN**	**TIPOS DE ACTIVIDADES**	**RETROALIMENTACIÓN**
6 - 12	Solución de ecuaciones de primer grado con operadores positivos	Gráfica y Algebraica	Ubicación de figuras. Ecuaciones	Ejercicios Propios	Si
REACCIÒN AL ERROR	**SUGERENCIA DE CORRECIÒN DE RESPUESTA**	**DIAGNÓSTICO**	**PERSONALIZACIÓN**	**SISTEMA OPERATIVO**	**TRADUCCIONES**
SI	SI	NO	SI	Un navegador (Mozilla Firefox, Google crome e Internet explorer) Un motor: Java flash Acceso a internet	Español Inglés Francés Chino
DURADERO Y ACTUALIZABLE	**FÁCIL ACCESO Y MANEJABLE**	**SINTÉTICO Y ESENCIAL**	**INTEROPERATIVIDAD**		
NO	**SI**	**SI**	**SI**		
DESCRIPCIÓN			**GRAFICA**		

Este manipulador permite resolver ecuaciones lineares simples a través del uso de una balanza. Los bloques de unidades (representando unos - 1) y los bloques con una X (representando las cantidades desconocidas - X) deben ser arrastrados hacia las bandejas de la balanza. Cuando las bandejas estén en balance representando la ecuación lineal dada, podrás realizar cualquier operación aritmética, siempre y cuando se aplique la ley de equivalencia, manteniendo así las bandejas en balance, con el fin de encontrar la solución para una X.	

HABILIDAD, DESTREZAÓ CAPACIDAD QUE PROPONE DESARROLLAR	OBJETIVO
Resolución de ecuaciones primer grado con números enteros positivos	Comprender el proceso algebraico y gráfico de solución de ecuaciones de primer grado con operadores positivos.
FORTALEZAS	**OBTACULOS (Aprendizaje)**
El programa permite solucionar gráfica y algebraicamente ecuaciones de primer grado, entonces muestra algebraicamente y gráficamente los cálculos numéricos hechos por el estudiante.	El programa no muestra algunas operaciones que al principio podrían ser magia para el estudiante, lo que puede dificultar su comprensión. El aplicativo sólo funciona para números enteros positivos. El recurso no permite manipular cada uno de los brazos de la balanza, lo que genera que el estudiante pueda aplicar la ley de equivalencia sin ser consciente de la misma.
DIFICULTADES (Del sistema)	**LICENCIA**
El programa no retroalimenta exactamente donde puede haber error por parte del estudiante, cuando el estudiante hace movimientos que se pueden representar en la ecuación y no la desequilibra lo permite. El programa no muestra algunas operaciones que al principio podrían ser magia para el estudiante, lo que puede dificultar su comprensión. El aplicativo no funciona para constantes mayores de 10.	Libre

NOMBRE Y DIRECCIÓN DE UBICACIÓN					11
Balanza Algebraica con negativos	http://nlvm.usu.edu/es/nav/frames_asid_324_g_3_t_2.html?open=instructions&from=topic_t_2.html [Consultada el 10 de octubre de 2012]				
NIVEL – GRADO	**CONTENIDO MATEMÁTICO**	**REPRESENTACIÓN**	**MANIPULACIÓN**	**TIPOS DE ACTIVIDADES**	**RETROALIMENTACIÓN**
6 – 12	Solución de ecuaciones de primer grado con números enteros.	Gráfica y Algebraica	Ubicación de figuras. Ecuaciones	Ejercicios Propios	Si
REACCIÒN AL ERROR	**SUGERENCIA DE CORRECIÓN DE RESPUESTA**	**DIAGNÓSTICO**	**PERSONALIZACIÓN**	**SISTEMA OPERATIVO**	**TRADUCCIONES**
SI	SI	NO	SI	Un navegador (Mozilla Firefox, Google crome e Internet explorer) Un motor: Java flash Acceso a internet	Español Inglés Francés Chino

DURADERO Y ACTUALIZABLE	FÁCIL ACCESO Y MANEJABLE	SINTÉTICO Y ESENCIAL	INTEROPERATIVIDAD
NO	**SI**	**SI**	**SI**

DESCRIPCIÓN	GRAFICA

Este manipulador permite resolver ecuaciones lineares simples a través del uso de una balanza. Los bloques de unidades (representando unos - 1), los bloques con una X (representando las cantidades desconocidas - X), los globos rojos de unidades (representando los menos unos – (-1)) y los globos rojos con una –X (representando las cantidades desconocidas negativas – (-x)) deben ser arrastrados hacia las bandejas de la balanza. Cuando las bandejas estén en balance representando la ecuación lineal dada, podrás realizar cualquier operación aritmética, siempre y cuando se aplique la ley de equivalencia, manteniendo así las bandejas en balance, con el fin de encontrar la solución para la cantidad desconocida (X).	

HABILIDAD, DESTREZA Ó CAPACIDAD QUE PROPONE DESARROLLAR	OBJETIVO
Resolución de ecuaciones primer grado con números enteros	Comprender el proceso algebraico y gráfico de solución de ecuaciones de primer grado con números enteros.
FORTALEZAS	**OBTACULOS (Aprendizaje)**
El programa permite solucionar gráfica y algebraicamente ecuaciones de primer grado, entonces muestra algebraicamente y gráficamente los cálculos numéricos hechos por el estudiante.	El programa no muestra algunas operaciones que al principio podrían ser magia para el estudiante, lo que puede dificultar su comprensión. El aplicativo sólo funciona para números enteros. El recurso no permite manipular cada uno de los brazos de la balanza, lo que genera que el estudiante pueda aplicar la ley de equivalencia sin ser consciente de la misma.
DIFICULTADES (Del sistema)	**LICENCIA**
El programa no retroalimenta exactamente donde puede haber error por parte del estudiante, cuando el estudiante hace movimientos (innecesarios) que se pueden representar en la ecuación y no la desequilibra lo permite. El programa no muestra algunas operaciones que al principio podrían ser magia para el estudiante, lo que puede dificultar su comprensión. El aplicativo no funciona para constantes entre -10 y 10.	Libre

NOMBRE Y DIRECCIÓN DE UBICACIÓN					12
Moneda falsa	http://nlvm.usu.edu/es/nav/frames_asid_139_g_3_t_2.html?from=topic_t_2.html [Consultada el 10 de octubre de 2012]				
NIVEL – GRADO	**CONTENIDO MATEMÁTICO**	**REPRESENTACIÓN**	**MANIPULACIÓN**	**TIPOS DE ACTIVIDADES**	**RETROALIMENTACIÓN**
3 - 12	Pensamiento algebraico, análisis de regularidades.	Gráfica	Cantidad de monedas	Único (Resolver la situación de la moneda falsa)	Posterior
REACCIÒN AL ERROR	**SUGERENCIA DE CORRECIÓN DE RESPUESTA**	**DIAGNÓSTICO**	**PERSONALIZACIÓN**	**SISTEMA OPERATIVO**	**TRADUCCIONES**
NO	NO	NO	SI	Un navegador (Mozilla Firefox, Google crome e Internet explorer) Un motor: Java flash Acceso a internet	Español Inglés Francés Chino

DURADERO Y ACTUALIZABLE	FÁCIL ACCESO Y MANEJABLE	SINTÉTICO Y ESENCIAL	INTEROPERATIVIDAD
No es actualizable	SI	SI	SI

DESCRIPCIÓN	GRAFICA
Esta es una versión electrónica de un rompecabezas clásico. El reto de este rompecabezas es encontrar la moneda falsa (más liviana o más pesada) en un conjunto de monedas que parecen ser idénticas. La ventaja de la forma virtual es la conveniencia al manipular las monedas y saber inmediatamente si el intento ha sido exitoso o no. Para la versión de ocho monedas (una moneda liviana), la estrategia de éxito implica pesar dos conjuntos de tres monedas. Se debería animar a los estudiantes a que discutan qué sucede si los dos conjuntos se encuentran en equilibrio. ¿Se encuentra la moneda liviana entre ellos? ¿Cómo encontraríamos la moneda liviana de entre las dos monedas restantes? ¿Podríamos pesar tan sólo una de las monedas restantes con una de las monedas del conjunto de seis que ya han sido pesadas? ¿Qué pasaría si pesáramos tan sólo las dos monedas restantes? ¿Qué sucedería si los dos conjuntos de tres monedas no estuviesen en equilibrio? ¿Dónde se encuentra la moneda liviana? ¿Cómo identificaríamos a la moneda liviana de las tres restantes?	

HABILIDAD, DESTREZA Ó CAPACIDAD QUE PROPONE DESARROLLAR	OBJETIVO

Análisis de situaciones.	Desarrollar pensamiento algebraico
FORTALEZAS	**OBTACULOS (Aprendizaje)**
El programa permite desarrollar estrategias para solucionar los diferentes niveles del problema que se propone.	
DIFICULTADES (Del sistema)	**LICENCIA**
No hay sugerencia al error. El recurso no dirige la reflexión sobre los procesos, se deben dirigir desde fuera.	

Anexo 11. Resultados de la encuesta de caracterización de estudiantes y prueba inicial.

Caracterización de Estudiantes:

De acuerdo con el análisis estadístico desarrollado para los datos obtenidos de la encuesta de Expectativas de aprendizaje y Uso de Tecnología (Anexo 1) aplicada a los estudiantes del grado 901 del colegio José Francisco Socarrás de la jornada tarde, se puede extraer la siguiente información:

El colegio se encuentra en el sector de Bosa Occidental (Localidad 7) en el barrio las margaritas, donde predomina el estrato socioeconómico dos (Tovar 2011, p. 17). Esta institución cuenta con una sede en la que funcionan dos jornadas académicas, cada una con un aproximado de #### estudiantes. El método pedagógico de la institución es el aprendizaje significativo.

Particularmente en matemáticas, la intensidad horaria en ciclo IV es de seis horas semanales y en este curso el profesor encargado del área es….

El grado noveno está compuesto por 39 estudiantes, la encuesta se le aplicó a 36 para un 92% de los estudiantes encuestados.

Perfil de los estudiantes

Los estudiantes en un 58% están en el rango esperado de edades para el grado noveno (13-14 años), y un 39% de los estudiantes superan la edad esperada, como se muestra en la figura 1. También se encontró que en este curso existe cantidades iguales entre géneros, 18 estudiantes de cada uno.

Figura 1. Edades de los estudiantes del curso 901 jornada tarde.

Entre las actividades que con mayor frecuencia realizan los estudiantes de este curso en su tiempo libre se encuentra un 72% de estudiantes que escuchan música, así como se observa en la figura 2 otras actividades que también son de su preferencia son: compartir son sus familias o amigos y ayudar en los quehaceres de la casa. Las actividades que tan sólo un 13% de los estudiantes realiza son leer y escribir, recordemos que esto puede dificultar el compromiso con las actividades académicas, ya que puede ser un factor para preferir no hacer las tareas en los espacios fuera del centro educativo.

Figura 2. Actividades de preferencia por lo estudiantes en su tiempo libre.

Características de estudio

Un hecho preocupante que se extrae de las encuestas aplicadas consiste en el promedio de horas dedicadas a estudiar matemáticas ya que el 44% de los estudiantes afirman invertir entre una y dos horas a la semana para estudiar y el 47% no dedican tiempo, lo que permite tener cuidado con las actividades que se les proponga para realizar extraclase, ya que posiblemente la mayoría de estudiantes no estén dispuestos a cumplirlas.

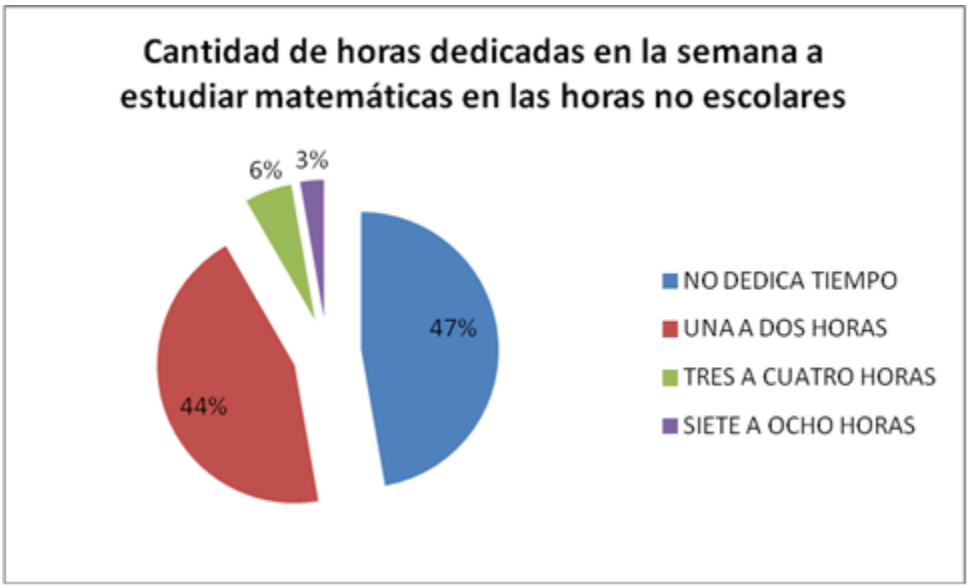


Figura 3. Cantidad de horas dedicadas en la semana para estudiar matemáticas en las horas no escolares

Uso de herramientas tecnológicas

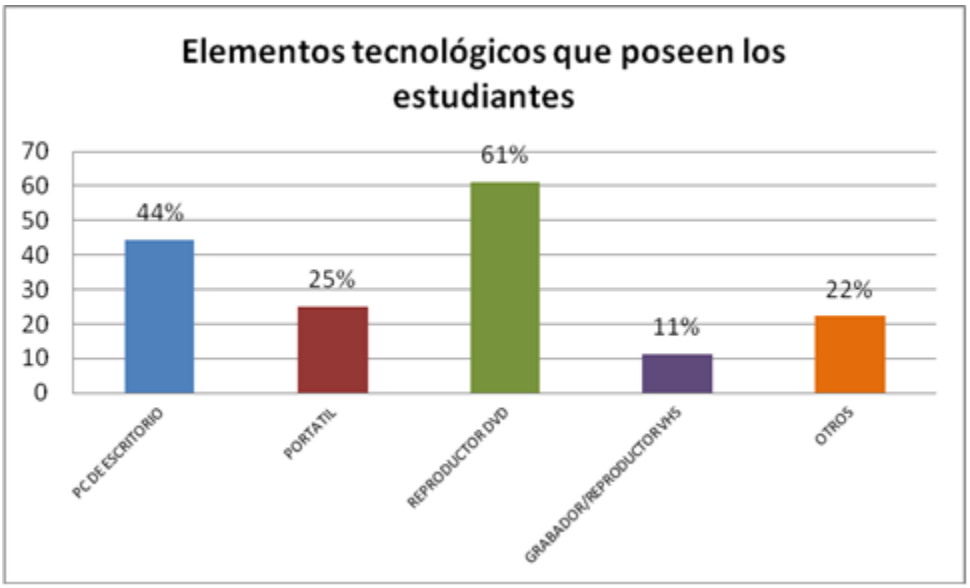


Figura 4. Elementos tecnológicos que poseen los estudiantes

De los estudiantes encuestados, un 61% informa poseer reproductor de DVD en casa (Figura), y un 44% afirma tener computador de escritorio en casa, sin embargo, el

coeficiente de correlación de Pearson entre el tener PC de escritorio en casa y usar internet en casa es de tan solo 0.11, lo que muestra que en algo más de la mitad de hogares representados por los estudiantes hay un computador, pero frecuentemente no se cuenta con acceso a Internet. La pregunta 14 indagó precisamente sobre el lugar donde principalmente, tiene acceso a Internet, los resultados se ilustran en la Figura .

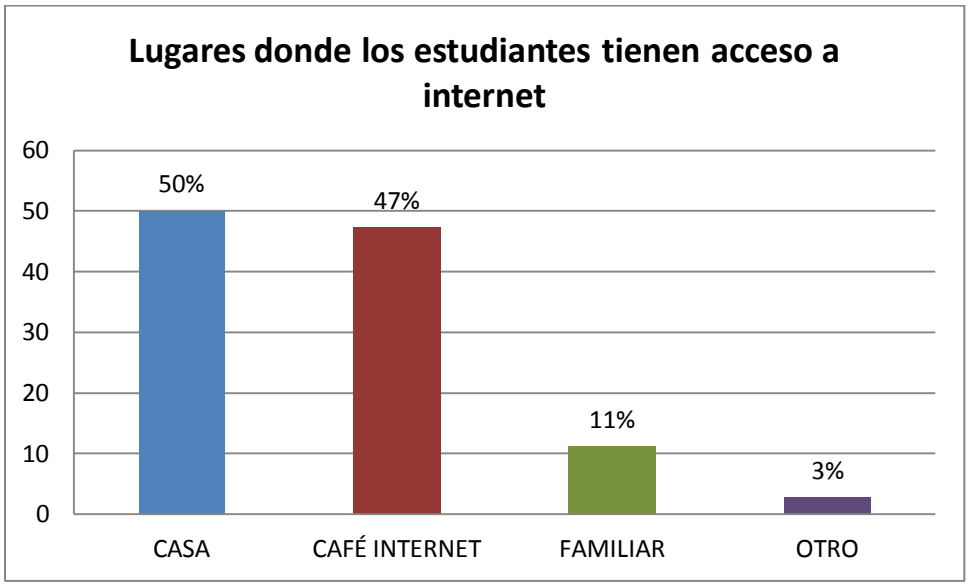


Figura 5. Lugares donde los estudiantes tienen acceso a internet

Como se puede apreciar por los resultados de ésta pregunta, si bien en el 69% de los hogares de los estudiantes hay un computador, el 47% tienen que hacer uso de un café Internet para acceder a la red. Ahora puede surgir la pregunta sobre ¿Qué hacen al conectarse a Internet?, ¿cuál es el uso principal que le dan a la Red?. La pregunta 15 de la encuesta consultó a éste respecto y encontró hechos muy interesantes: el 78% de los estudiantes indica que usa Internet para hacer tareas, y el 75% de ellos reporta usar el Internet para redes sociales como Facebook o MySpace, los resultados de éstas y las demás opciones de respuesta se ilustran en la Figura :

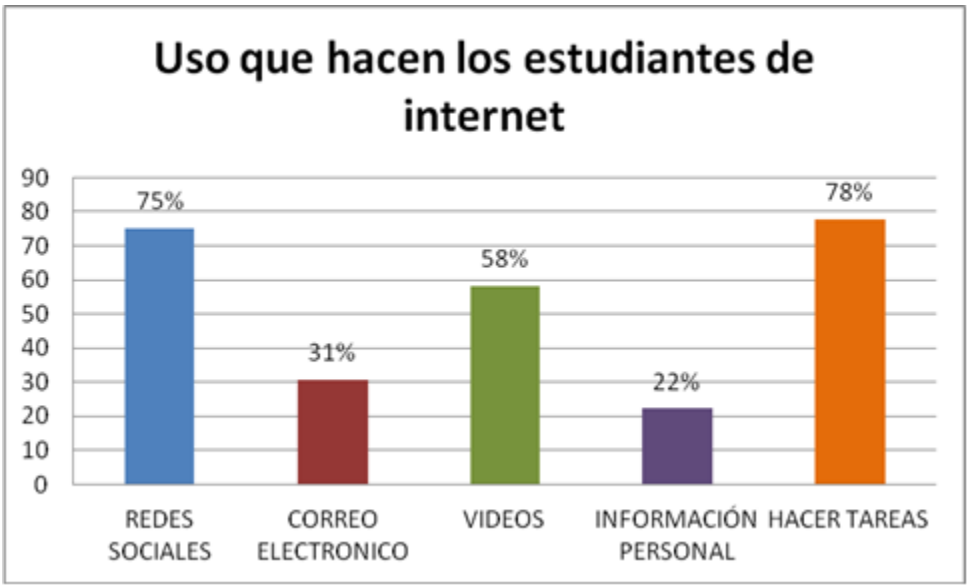


Figura 6. Uso que hacen los estudiantes de internet

Ahora, luego de tener un acercamiento hacia las actividades principales que los estudiantes del curso 901 del colegio José Francisco Socarrás, la encuesta también indagó sobre la frecuencia con la que ellos acceden a internet, obteniendo los resultados ilustrados en la Figura :

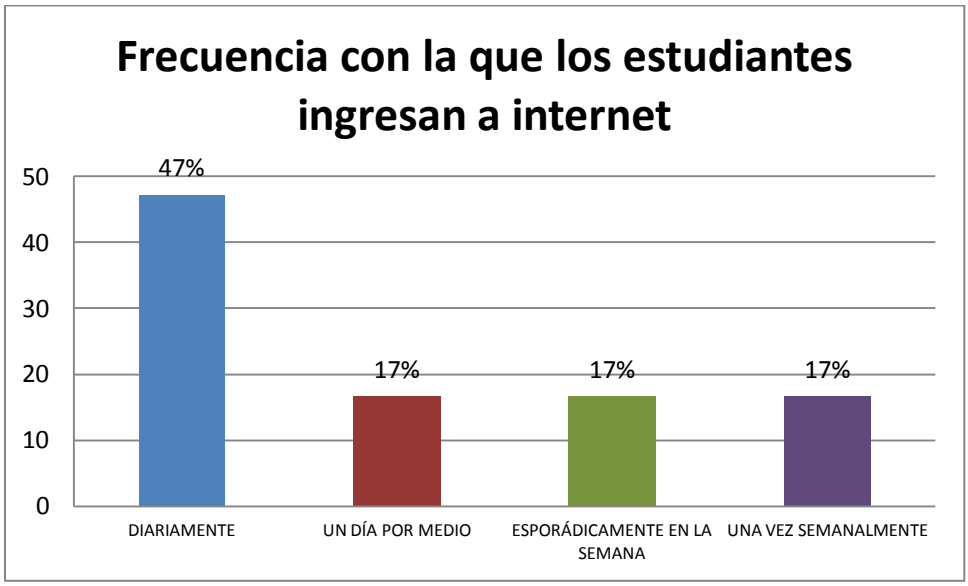


Figura 7. Frecuencia con la que los estudiantes ingresan a internet

Como lo ilustra la figura anterior, un 17% de los estudiantes encuestados reporta acceder a Internet día por medio y un 47% informa hacerlo a diario, lo que se puede deber a la baja penetración del servicio de Internet en los hogares lo que les lleva a acudir a otros lugares para tener acceso a dicho servicio.

En cuanto al manejo de herramientas de software, la pregunta 17 indagó sobre el uso de algunos programas principalmente de ofimática e Internet, con los siguientes resultados (Figura):

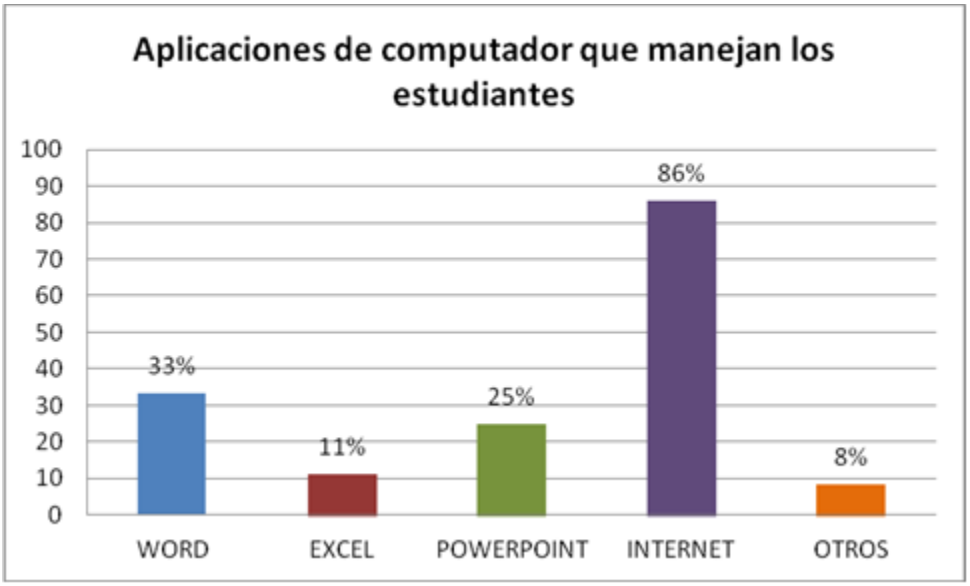


Figura 8. Aplicaciones de computador que manejan los estudiantes

Si bien Internet por sí mismo no puede considerarse una aplicación, la pregunta tiene que ver con el manejo general de un explorador de Internet para acceder al contenido que se requiera. En este sentido, el 86% de los estudiantes encuestados informa manejar el explorador de Internet, y el 33% afirma usar Word, por ser un programa que les permite realizar trabajos que se solicitan en el colegio. Los estudiantes que señalaron el campo Otros reportaron saber manejar programas de dibujo, pero sólo uno de ellos reportó manejar Google sketchup, y este es el programa que

actualmente están manejando en la clase de tecnología para desarrollar los planos de sus casas y colegio.

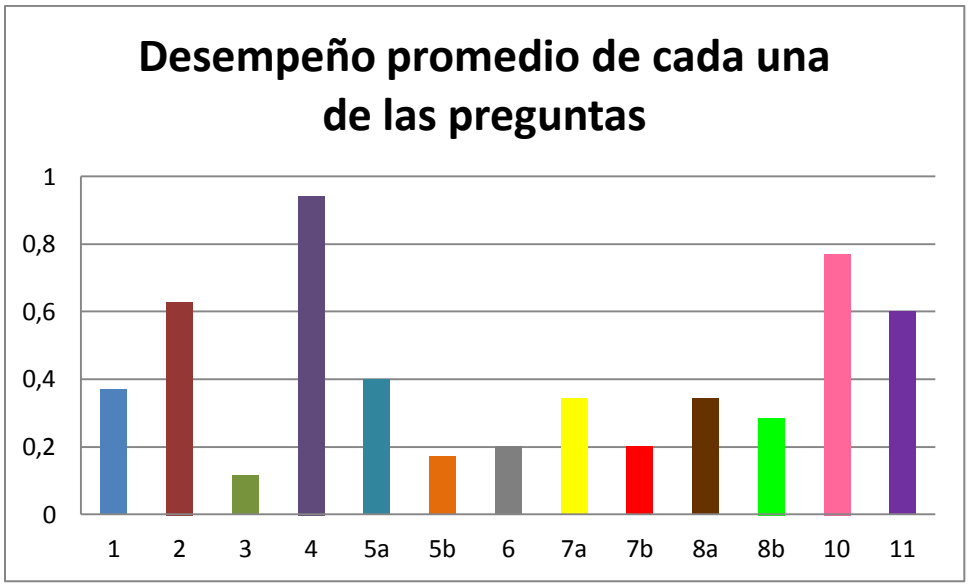
Perfil cognitivo en álgebra

Para calificar la prueba diagnóstico de razonamiento algebraico puntué los niveles de la matriz de calificación, así:

Realicé una base de datos en Excel teniendo en cuenta las 13 preguntas y los 4 criterios de desempeño planeados en la matriz utilizada para calificar la prueba. Calculé el promedio de cada estudiante. Los resultados de los estudiantes en la prueba fueron los siguientes

Muestra	Mínimo	Máximo	Media	Desviación estándar	Varianza	Mediana
35	0	2	0.41	0.62	0.38	0

La prueba fue desarrollada por 35 estudiantes del curso 901. La media obtenida (0,41) y la desviación estándar de 0,62 permiten afirmar que el 100% obtuvo puntajes inferiores al nivel mínimo esperado. Esta información será el insumo que indique en el diseño del ambiente el manejo que tienen los estudiantes de las temáticas evaluadas y esta información se apoya con las siguientes gráficas:



El promedio de todas las preguntas ubica a los estudiantes en el desempeño de cada temática entre los niveles 0 y 1 lo que significa que los estudiantes en su mayoría no encuentran los elementos necesarios para responder a las situaciones presentadas.

Uso de la letra

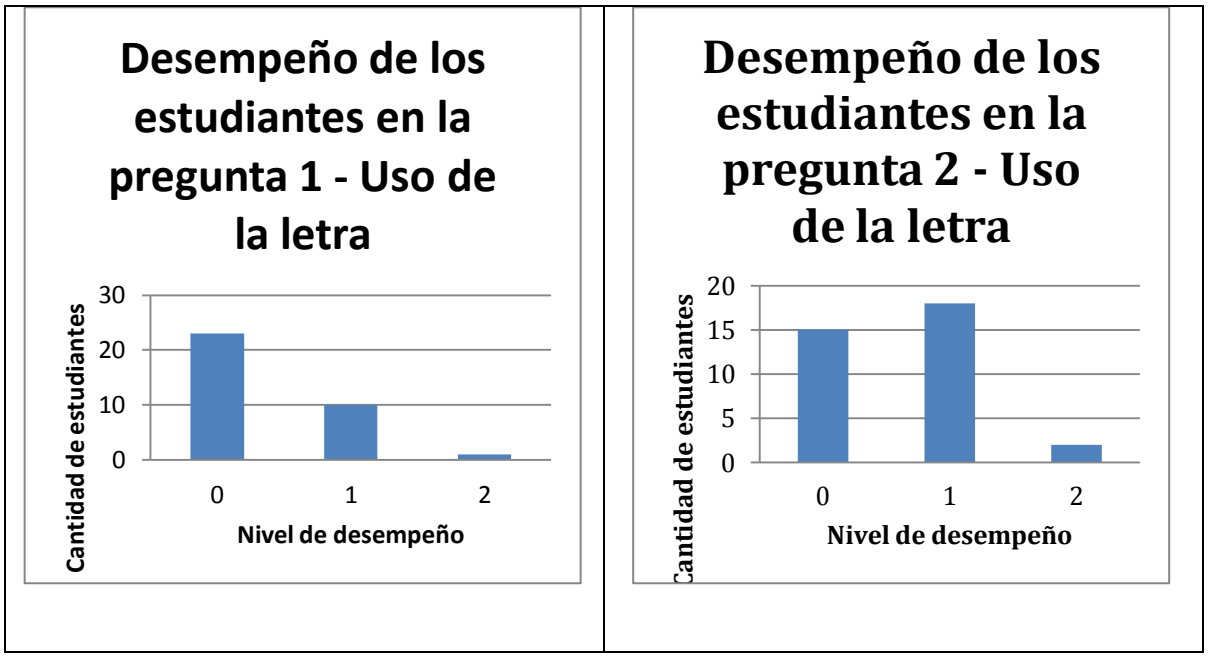


Figura 9. Desempeño de los estudiantes en las preguntas 1 y 2 de la prueba inicial.

Las preguntas 1 y 2 están relacionadas con el uso que hacen los estudiantes de la letra, en las dos preguntas, como se puede observar en la figura <<, la mayoría de los estudiantes (97% y 94%) se encuentran en los niveles 0 y 1 lo que significa que los estudiantes evalúan o ignoran la letra, este uso que se le hace refiere a nociones de uso de la letra donde en algunos casos necesitan darle un valor arbitrario a la letra y en otros los estudiantes ignoran la letra y sólo operan con los números.

Nivel de generalización

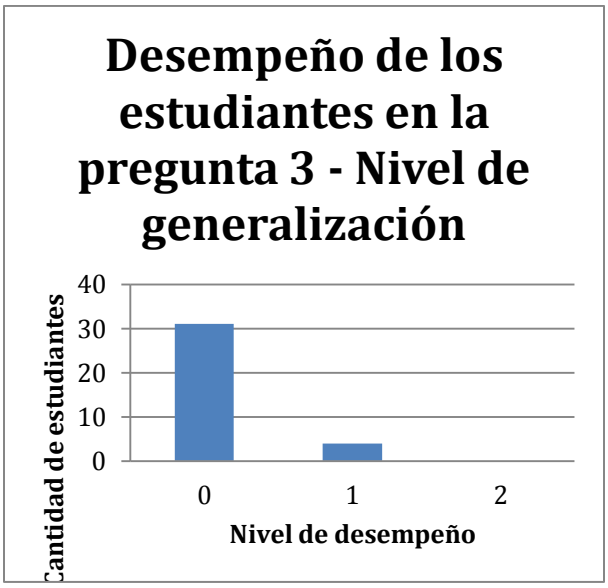


Figura 10. Desempeño de los estudiantes en la pregunta 3 de la prueba inicial.

La pregunta 3 está relacionada con el nivel de generalización que logran los estudiantes, como se puede observar en la figura <<, todos los estudiantes (100%) se encuentran en los niveles 0 y 1 lo que significa que los estudiantes a partir de un solo ejemplo generalizan situaciones, eso significa que ellos no estudian todas las posibilidades que presente la situación, se limitan a verificar un ejemplo y desde allí llegan a la conclusión si funciona o no una afirmación. Específicamente en esta pregunta encontré que los estudiantes al justificar su selección usan frases poco explicativas de sus procesos.

Igualdad

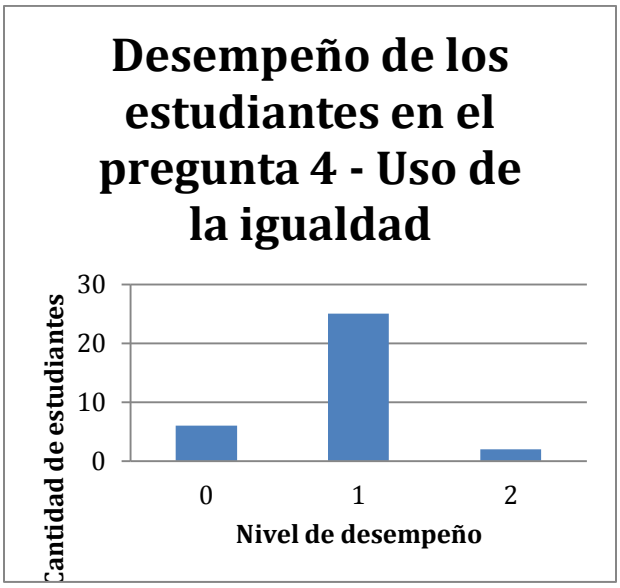


Figura 11. Desempeño de los estudiantes en la pregunta 4 de la prueba inicial.

La pregunta 4 está relacionada con el uso de la igualdad que logran los estudiantes, como se puede observar en la figura <<, la mayoría de los estudiantes (97%) se encuentran en los niveles 0 y 1 lo que significa que los estudiantes encuentran igualdades numéricas encontrando los resultados de las expresiones, pero no encuentran otras características que los definen como iguales. Específicamente en esta pregunta encontré que los estudiantes al justificar su selección usan frases poco explicativas de sus procesos.

Identifica las características de un expresión algebraica - Traduce a lenguaje algebraico

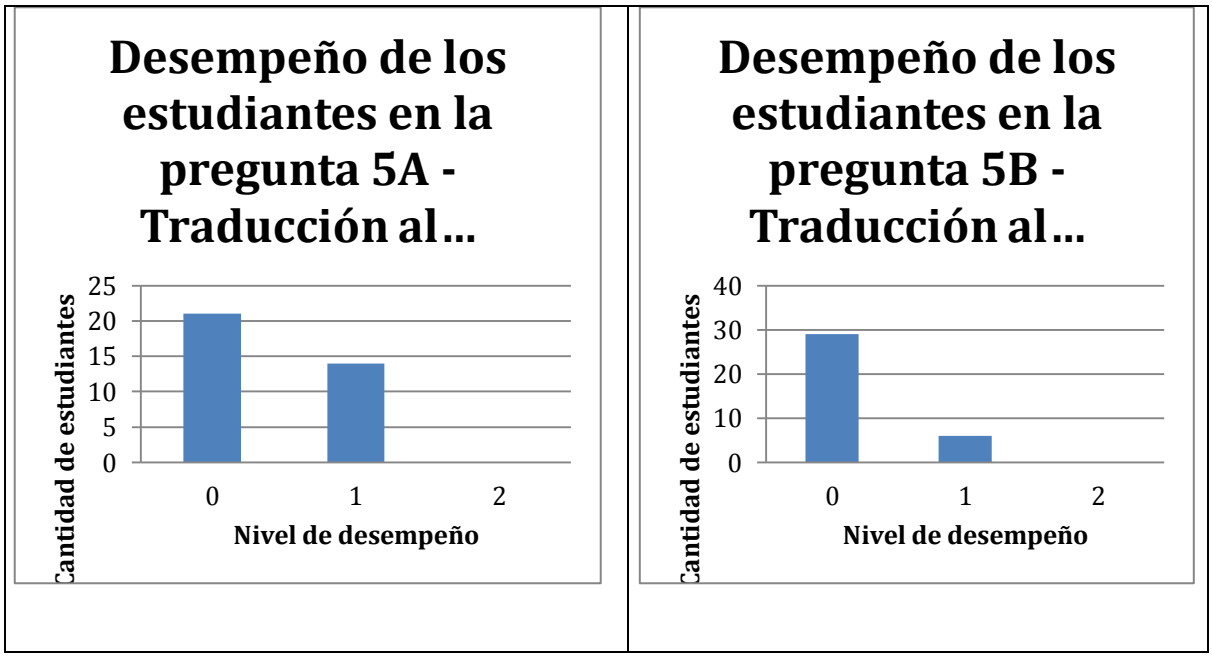


Figura 12. Desempeño de los estudiantes en las preguntas 5A y 5B de la prueba inicial.

Las preguntas 5A y 5B están relacionadas con traducción al lenguaje algebraico que hacen los estudiantes, como se puede observar en la figura <<, todos los estudiantes (100%) se encuentran en los niveles 0 y 1 lo que significa que los estudiantes, presentan pocas conexiones entre lenguaje algebraico y el común para relacionarlos, en algunos casos se presenta que como el problema mostraba datos no relevantes, los estudiantes tomaban para resolver los últimos datos dados y no los relacionados con la pregunta.

Halla el valor numérico de una expresión algebraica

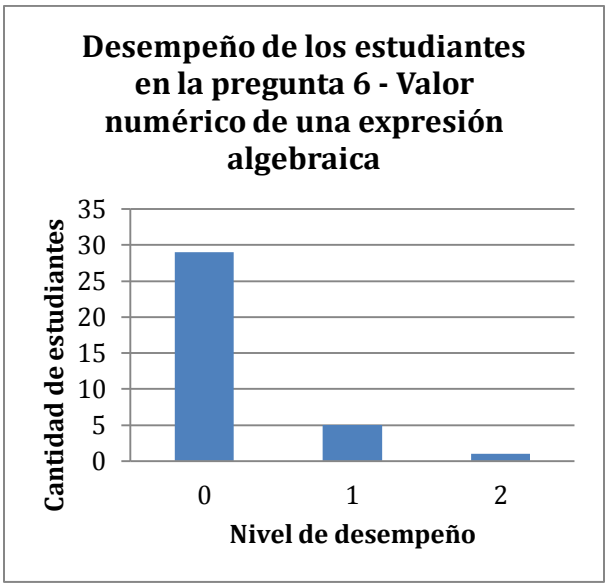


Figura 13. Desempeño de los estudiantes en las preguntas 5A y 5B de la prueba inicial.

La pregunta 6 está relacionada con encontrar el valor numérico en una expresión algebraica, como se puede observar en la figura <<, la mayoría de los estudiantes (97%) se encuentran en los niveles 0 y 1 lo que significa que los estudiantes se les dificulta hallar el valor numérico en una expresión algebraica, algunas de las dificultades que se evidenciaron son:

- Usan información que no corresponde a la situación.
- Cometen errores al realizar las operaciones, específicamente en potencias, y algunas veces sumas.
- Comenten errores al interpretar las operaciones que hay entre letras y números, específicamente cuando se requiere hacer una multiplicación.

Identifica y reduce términos semejantes en un polinomio

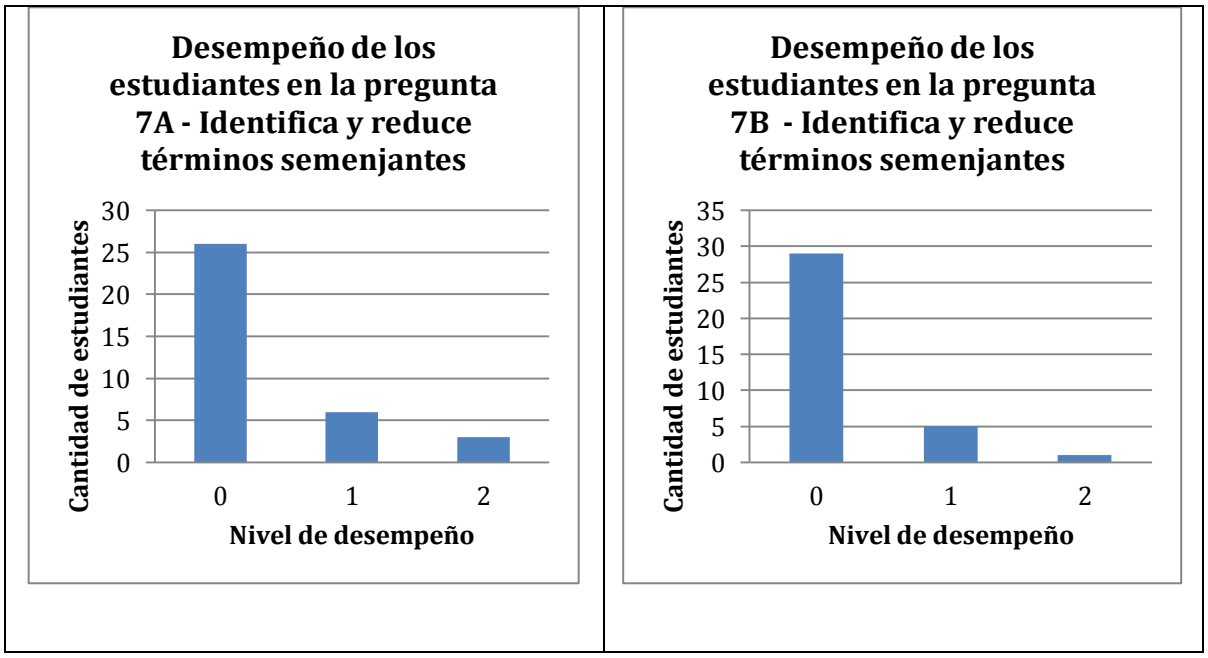


Figura 14. Desempeño de los estudiantes en las preguntas 7A y 7B de la prueba inicial.

La preguntas 7A y 7B están relacionadas con la identificación y reducción de términos semejantes, como se puede observar en la figura <<, la mayoría de los estudiantes (91% y 97) se encuentran en los niveles 0 y 1 lo que significa que los estudiantes tienen dificultad para identificar y reducir términos semejantes, algunas de las dificultades que se evidenciaron son:

- Los estudiantes todavía presentan necesidad de clausurar operaciones con expresiones algebraicas, lo que ocasiona que operen partes coeficientes sin observar sus partes literales.
- Los estudiantes operan elementos nos semejantes porque tienen la misma letra, así que no tienen en cuenta el exponente que las acompaña.

Encuentra el producto de dos polinomios

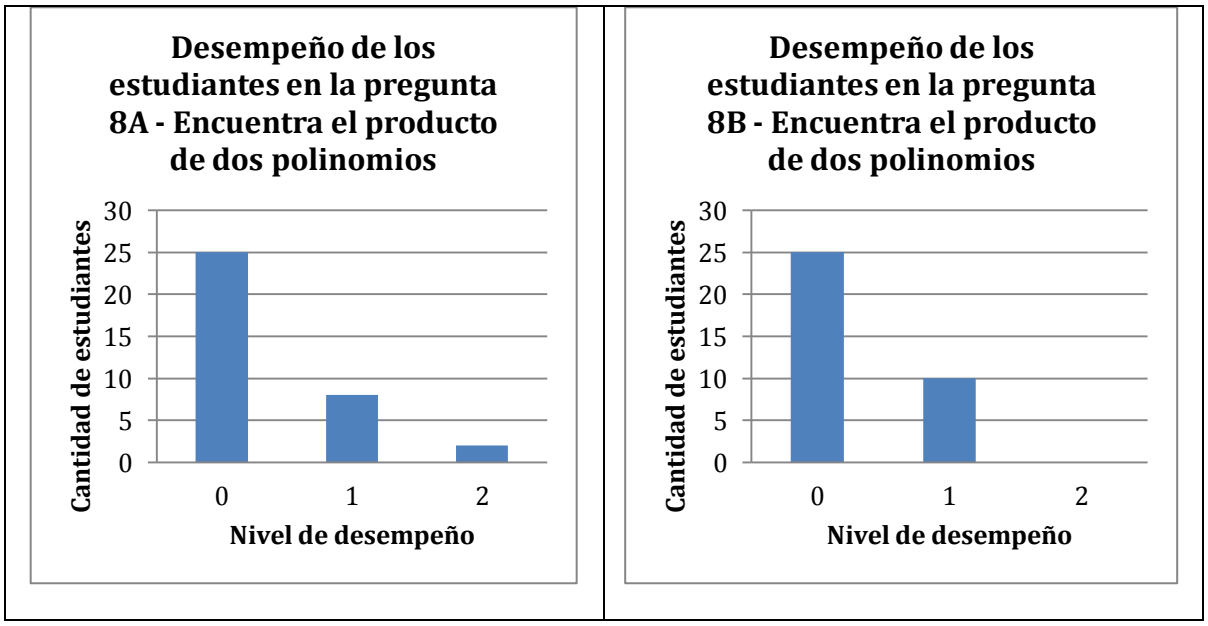


Figura 15. Desempeño de los estudiantes en las preguntas 8A y 8B de la prueba inicial.

Las preguntas 8A y 8B están relacionadas con encontrar el producto de dos polinomiso, como se puede observar en la figura <<, la mayoría de los estudiantes (94% y 100%) se encuentran en los niveles 0 y 1 lo que significa que los estudiantes presentan dificultades en encontrar el producto de dos polinomios, algunas de las dificultades que se evidenciaron son:

- Los estudiantes todavía presentan necesidad de clausurar operaciones con expresiones algebraicas, lo que ocasiona que operen partes coeficientes sin observar sus partes literales.
- Los estudiantes operan elementos nos semejantes porque tienen la misma letra, así que no tienen en cuenta el exponente que las acompaña.

Resuelve problemas que involucran ecuaciones lineales con números enteros

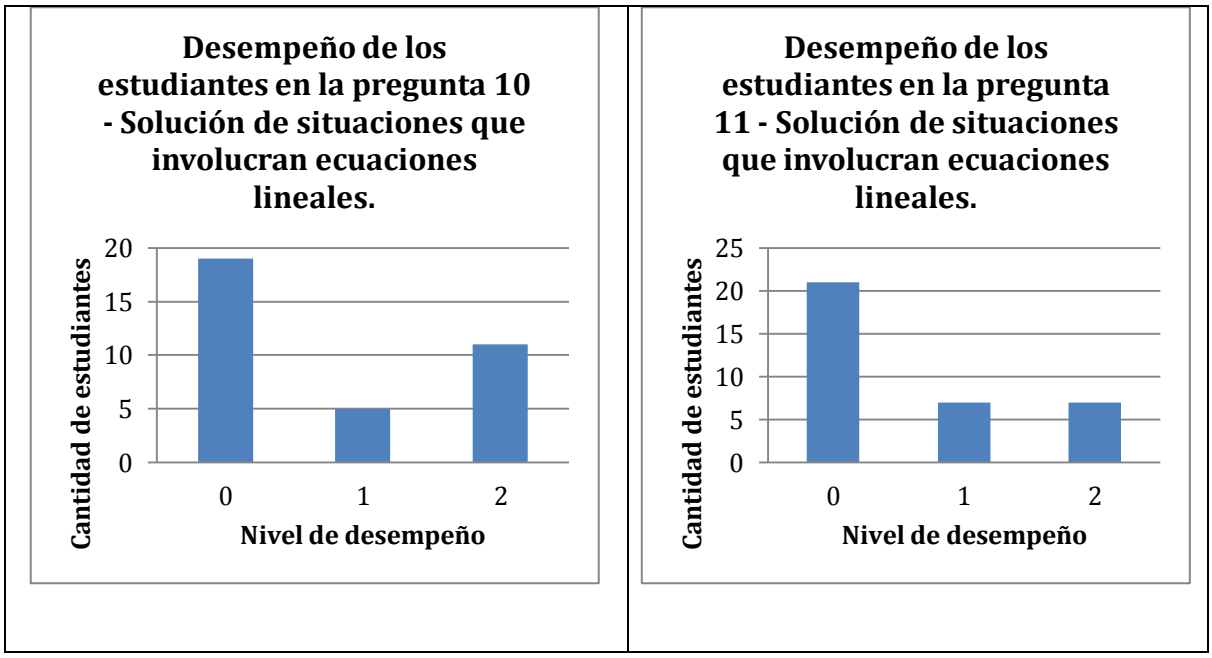


Figura 16. Desempeño de los estudiantes en las preguntas 10 y 11 de la prueba inicial.

Las preguntas 10 y 11 están relacionadas con la solución de ecuaciones que involucran ecuaciones lineales, como se puede observar en la figura 16, la mayoría de los estudiantes (69% y 80%) se encuentran en los niveles 0 y 1 lo que significa que los estudiantes no usan las ecuaciones lineales como proceso para solucionar situaciones que las involucran, algunas de las dificultades que se evidenciaron son:

- Los estudiantes resuelven los problemas sin usar ecuaciones, únicamente utilizando operaciones aritméticas.
- Los estudiantes usan la información dada en la situación para realizar operaciones que no corresponden con las características de la situación.

Anexo 12. Reflexiones por sesión de clase.

Anexo 13. Análisis comparativo por estudiante entre el desempeño de las pruebas Inicial y Final

Análisis de los resultados por estudiante

Estudiante A1

Este estudiante fue seleccionado por estar en un nivel bajo de desempeño en matemáticas. A partir del resultado en el valor de significancia (0,016), se puede concluir que el estudiante presentó un progreso significativo en su desempeño entre la prueba inicial y la prueba final.

De modo general se puede decir que la comparación del desempeño de este sujeto entre las pruebas presentó un cambio de nivel positivo en el 38% de los ítems entre la prueba inicial y la prueba final y mantuvo el mismo nivel en el 62% de los mismos.

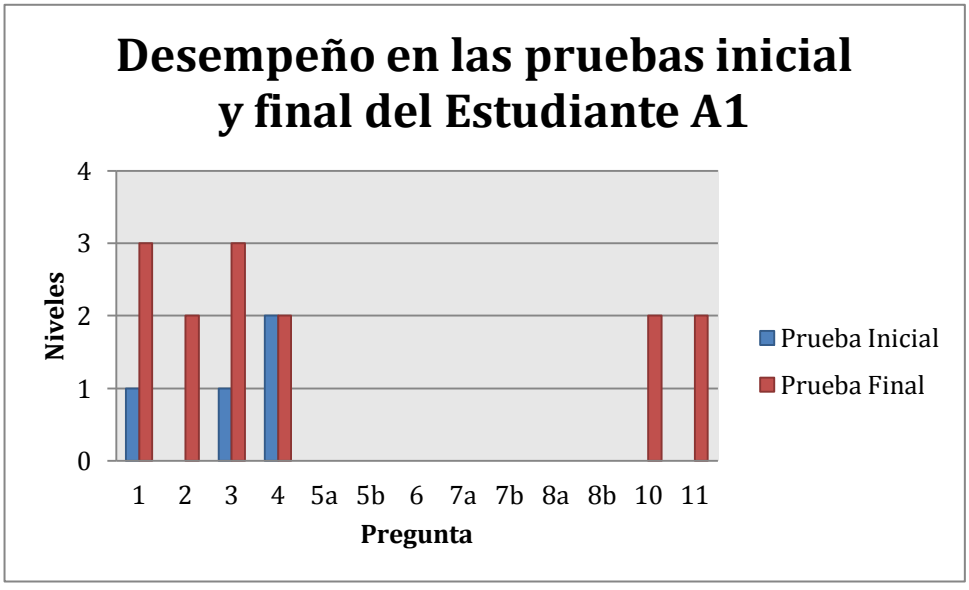


Gráfico 15. Desempeño de las pruebas Inicial y Final del estudiante A1.

En las preguntas uno y dos donde se valoraba el uso de la letra, el estudiante mostró usar la letra como incógnita o número generalizado donde admite encontrar un valor para la letra, pero todavía no asume la letra como un elemento que puede tomar diversos valores dependiendo de las condiciones[31]. En la pregunta tres el estudiante llega a encontrar condiciones y reglas que le permiten dar explicaciones de eventos generalizables pero no encuentra todos los eventos esperados; esta pregunta nos permite evidenciar que este estudiante mejoró en la comunicación de sus ideas, ya que para justificar la elección de sus respuestas, empieza a usar elementos matemáticos como igualdades. Un ejemplo que sustenta la afirmación anteriores es: en la prueba inicial el estudiante da frases cortas que no dan razón de su proceso, "porque no da el mismo resultado" (Estudiante A1, prueba inicial, punto 3) y en la prueba final en la misma opción responde: "cuando n y p son iguales" (Estudiante A1, prueba inicial, punto 3).

En la pregunta 4 el estudiante se mantiene en el nivel, lo que significa que encuentra equivalencias pero hallando los resultados, no haciendo comparaciones entre los elementos para dar la justificación de sus equivalencias. En las preguntas 10 y 11 el sujeto resuelve situaciones problema que involucran ecuaciones simples pero sin usar los procedimientos de las ecuaciones simples para solucionarlos. El resto de preguntas no presentan ninguna variación dado que el estudiante no contestó; esto podría significar que el estudiante no encontró elementos que le ayudaran a solucionar este tipo de preguntas.

Estudiante A2

[31] Niveles de uso de la letra propuestos por Kuchemann (1981, Citado por Godino et al. 2003)

Este estudiante fue seleccionado por estar en un nivel bajo de desempeño en matemáticas. A partir del resultado en el valor de significancia (0,317), se puede concluir que el estudiante no presentó un progreso significativo en su desempeño entre la prueba inicial y la prueba final.

De modo general se puede decir que la comparación del desempeño de este sujeto entre las pruebas presentó un cambio de nivel positivo en el 8% (una pregunta) de los ítems entre la prueba inicial y la prueba final y mantuvo el mismo nivel en el 84% de las mismas. A su vez, la prueba final da cuenta de una disminución en el nivel de su desempeño en el 8% (una pregunta) de los ítems.

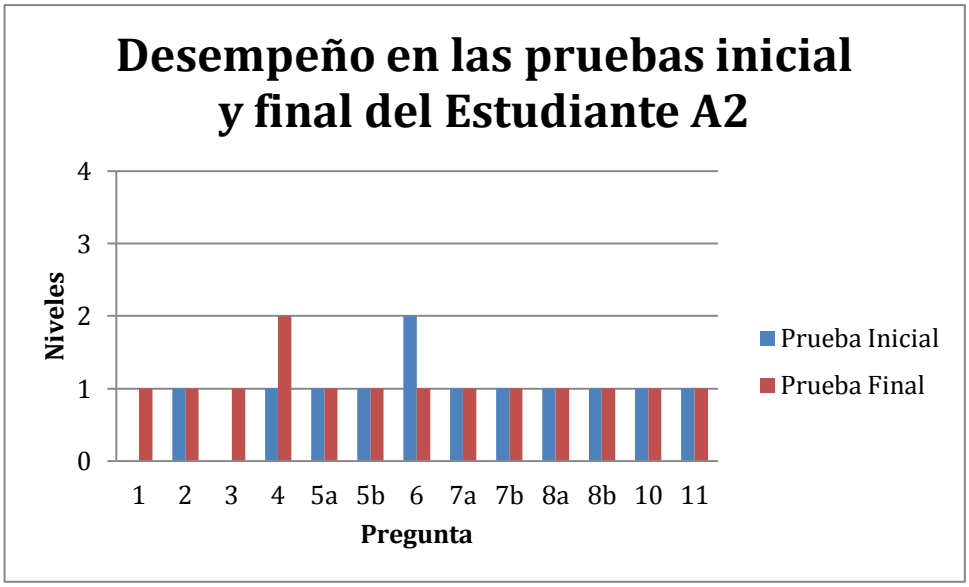


Gráfico 16. Desempeño en las pruebas inicial y final del estudiante A2.

En la pregunta cuatro (la única en la que el estudiante mejora su desempeño), realiza las operaciones sin encontrar elementos comparativos que permitan mostrar la equivalencia

entre las operaciones; aunque en la prueba inicial tiene un error de cálculo en uno de los ejercicios, en la prueba final realiza los cálculos adecuadamente. En la pregunta 6, el estudiante disminuye su desempeño; en la prueba inicial utiliza la información adecuada para solucionar el problema, en cambio en la prueba final confunde la información con las dos preguntas anteriores.

El resto de preguntas se mantienen en un nivel uno, por lo que el desempeño del estudiante se puede describir como: En las preguntas uno y dos donde se valoraba el uso de la letra el estudiante ignora la letra y mantiene la necesidad de clausurar los resultados en las expresiones algebraicas, aquí termina dando un único resultado entre números y letras, en ocasiones convierte las letras en un número que él arbitrariamente da y en otras representa todos con un letra dada arbitrariamente.

En la pregunta 3 el estudiante usa un único ejemplo para generalizar cada situación. En las preguntas 5A y 5B usa información que no corresponde al proceso que la situación busca se realice. En las preguntas 7A, 7B, 8A y 8B el estudiante nuevamente busca clausurar las operaciones entre expresiones algebraicas por lo que solo da un resultado y opera términos no semejante entre sí. En las preguntas 10 y 11 el estudiante usa la información que le es dada en la situación pero no realiza los procedimientos u operaciones adecuadas a las condiciones del problema.

Estudiante A3

Este estudiante fue seleccionado por estar en un nivel medio de desempeño en matemáticas. A partir del resultado en el valor de significancia (0,041), se puede concluir que el estudiante presentó un progreso significativo en su desempeño entre la prueba inicial y la final.

La comparación del desempeño de este sujeto entre pruebas se puede observar en la gráfica <<, este estudiante presentó un cambio de nivel positivo en el 38% de las preguntas y en un 62% de las mismas se mantuvo en el mismo nivel.

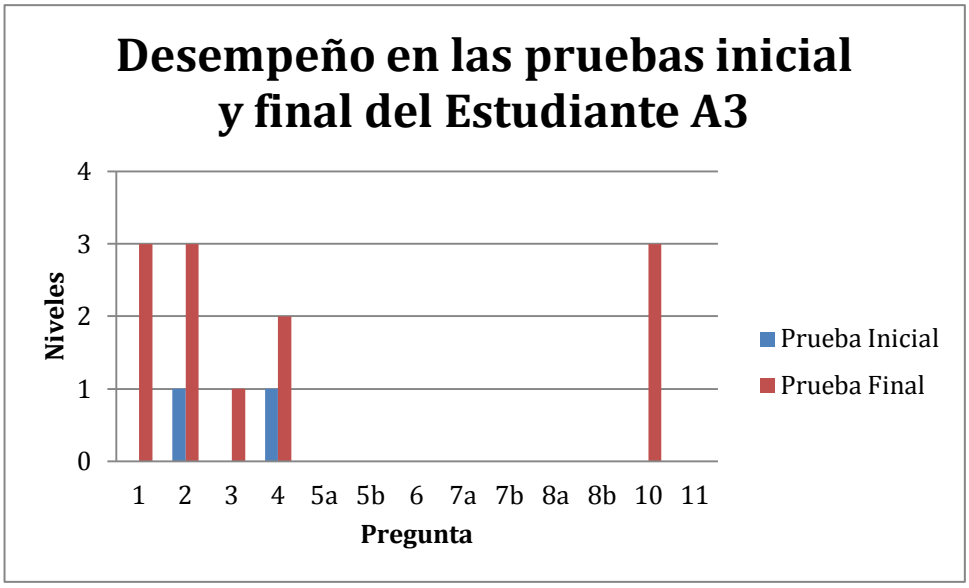


Gráfico 17. Desempeño en las pruebas inicial y final del Estudiante A3.

En las preguntas uno y dos en las que se valoraba el uso de la letra, el estudiante muestra usar la letra como incógnita o número generalizado donde admite encontrar un valor para la letra, pero todavía no asume la letra como un elemento que puede tomar diversos valores

dependiendo de las condiciones. En la pregunta 3 el estudiante usa un único ejemplo para generalizar la situación. En la pregunta 4 el estudiante encuentra equivalencias pero hallando los resultados, no haciendo comparaciones entre los elementos para dar la justificación de sus equivalencias. En la pregunta 10 el sujeto resuelve situaciones problema que involucran ecuaciones simples usando los procedimientos de las ecuaciones simples para solucionarlos, pero no mantiene el proceso usado para la pregunta 11, la cual no intenta resolver. El resto de preguntas no tienen variación alguna, por ende su nivel se mantiene en cero, el cual refiere a no contestar, lo que podría significar que el estudiante no encontró elementos que le ayudaran a solucionar este tipo de pregunta.

Estudiante A4

Este estudiante fue seleccionado por estar en un nivel medio de desempeño en matemáticas. A partir del resultado en el valor de significancia (0,026), se puede concluir que el estudiante presentó un progreso positivo en su desempeño entre la prueba inicial y la final.

La comparación del desempeño de este sujeto en la prueba se puede observar en la gráfica <<. El estudiante presentó un cambio de nivel positivo en el 46% de las preguntas y en un 54% se mantuvo en el mismo nivel.

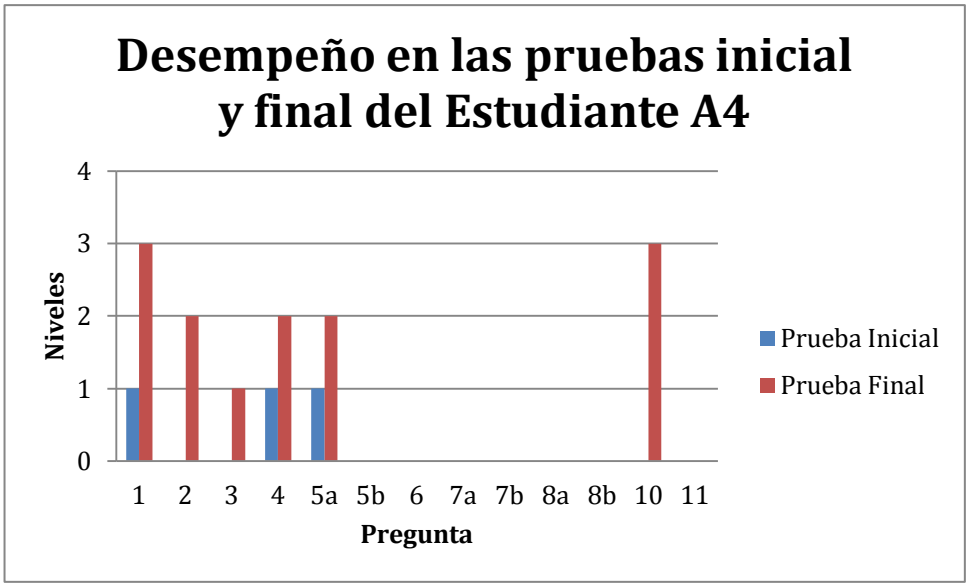


Gráfico 18. Desempeño en las pruebas inicial y final del Estudiante A4.

En las preguntas uno y dos donde se valoraba el uso de la letra el estudiante muestra usar la letra como incógnita o número generalizado donde admite encontrar un valor para la letra aunque no asume la letra como un elemento que puede tomar diversos valores dependiendo las condiciones. En la pregunta 3 el estudiante usa un único ejemplo para generalizar la situación, pero muestra una mejor comunicación de sus ideas, por ejemplo:

En el ítem **a** del punto 3, el estudiante no justifica su selección en la prueba inicial; sin embargo, en la prueba final responde: "porque dos números sumados al revés también dan lo mismo, digamos 2 + 3 = 5, 3 + 2 = 5 (Estudiante A4, prueba final, punto 3)"; del mismo modo en el ítem **b**, el estudiante en la prueba inicial responde: "porque cuando se hace una suma el resultado no es igual a la suma". Esta afirmación permite suponer que él quería expresar que no es posible que el resultado sea igual cuando la suma está compuesta por elementos diferentes, lo que sí expresa en la prueba final usando elementos matemáticos: "porque la n se cambia por p, así no puede dar lo mismo".

En la pregunta 4, el estudiante encuentra equivalencias pero hallando los resultados, no haciendo comparaciones entre los elementos para dar la justificación de sus equivalencias. En la pregunta 5A, el estudiante usa la información que se refiere al problema pero hace una interpretación errada de ella. A la frase: *La cantidad de empleados es 15 más que el doble de los que trabajaron el primer año*, él responde que es 30, puesto que asume que le están diciendo que la cantidad de empleados en el primer año es 15 y por lo tanto el doble es 30; aun así, no usa esa información para responder la pregunta 5B, que se relaciona con este ítem.

En la pregunta 10 el sujeto resuelve situaciones problema que involucran ecuaciones simples, usando los procedimientos de las ecuaciones simples para solucionarlos, pero no utiliza el mismo proceso para dar solución a la pregunta 11, la cual no resuelve.

El resto de preguntas no tienen variación alguna, razón por la cual su nivel se mantiene en cero, es decir, no contestó la pregunta; esto podría significar que el estudiante no encontró elementos que le ayudaran a solucionar este tipo de pregunta.

Estudiante A5

Este estudiante fue seleccionado por presentar un nivel alto de desempeño en matemáticas. A partir del resultado en el valor de significancia (0,005), se puede concluir que el estudiante presentó un progreso en su desempeño entre la prueba inicial y la final.

La comparación del desempeño de este sujeto entre pruebas se puede observar en la gráfica <<. El estudiante presentó un cambio de nivel positivo en el 69% de las preguntas y en un 31% se mantuvo en el mismo nivel.

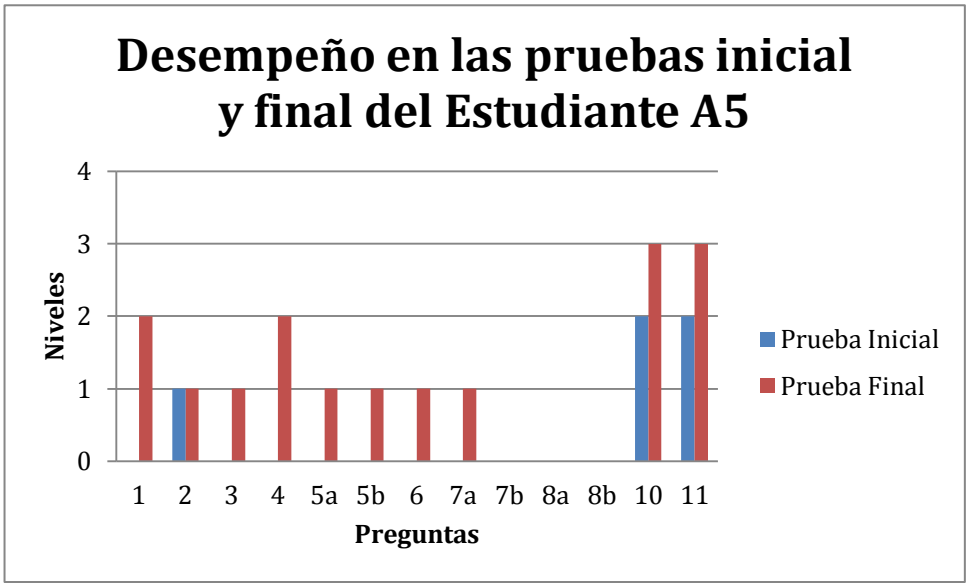


Gráfico 19. Desempeño en las pruebas inicial y final del estudiante A5.

En las preguntas uno y dos donde se valoraba el uso de la letra el estudiante ignora la letra y mantiene la necesidad de clausurar los resultados en las expresiones algebraicas, aquí termina dando un único resultado entre números y letras, así que suma los coeficientes de la parte literal con los elementos que son constantes. En la pregunta tres, el estudiante usa un único ejemplo para generalizar la situación. En la pregunta cuatro, el estudiante encuentra

equivalencias pero hallando los resultados, no haciendo comparaciones entre los elementos para dar la justificación de sus equivalencias. En las preguntas 5A, 5B y 6 el estudiante usa información no relevante para intentar solucionar el problema, llegando a una solución errónea. En la pregunta 7A el estudiante mantiene la idea de la ley clausurativa por lo que intenta dar un único resultado para el ejercicio. En las preguntas diez y once el sujeto resuelve situaciones problema que involucran ecuaciones simples usando los procedimientos de las ecuaciones simples para solucionarlos.

Estudiante A6

Este estudiante fue seleccionado por presentar un nivel alto de desempeño en matemáticas. A partir del resultado en el valor de significancia (0,010), se puede concluir que el estudiante obtuvo un desempeño positivo al comparar los resultados de la prueba inicial y la prueba final.

La comparación del desempeño de este sujeto entre pruebas se puede observar en la gráfica <<. Este estudiante presentó un cambio positivo en el 61% de las preguntas y en un 39% de se mantuvo en el mismo nivel.

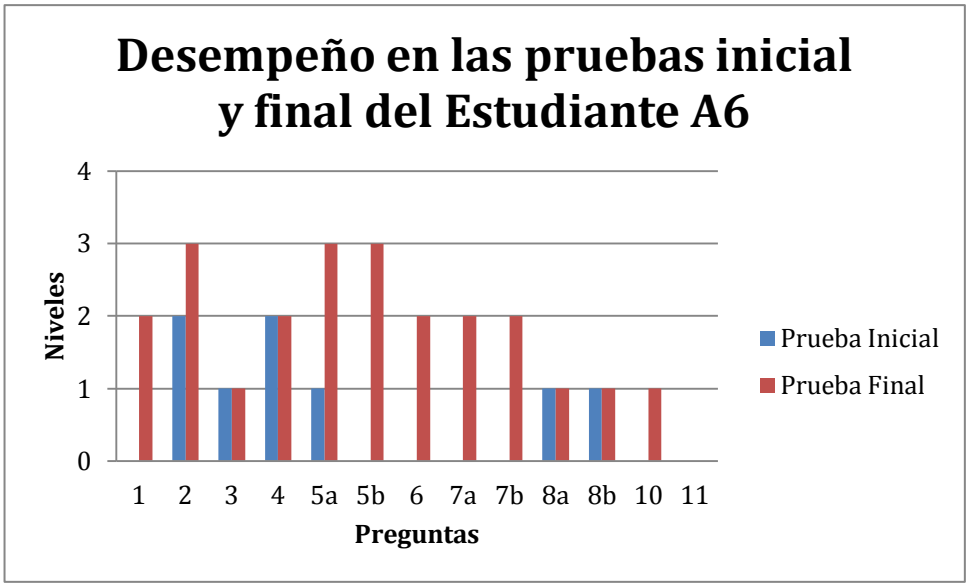


Gráfico 20. Desempeño en las pruebas inicial y final del estudiante A6.

En las preguntas uno y dos donde se valoraba el uso de la letra el estudiante muestra usar la letra como incógnita o número generalizado donde admite encontrar un valor para la letra pero todavía no asume la letra como un elemento que puede tomar diversos valores dependiendo de las condiciones. En la pregunta tres, el estudiante usa un único ejemplo para generalizar la situación. En la pregunta cuatro el estudiante encuentra equivalencias pero hallando los resultados, no realiza comparaciones entre los elementos para dar la justificación de sus equivalencias. En las preguntas 5A y 5B el estudiante representa adecuadamente el problema, usa la información relevante para las condiciones del problema y además traduce en lenguaje algebraico las expresiones verbales (lenguaje natural).

En las preguntas 6, 7A y 7B el estudiante usa la información adecuada para el problema pero comete errores entre operaciones, tal es el caso de tomar como semejantes expresiones que comparten la misma parte literal pero que difieren respecto del exponente. En las preguntas 8A y 8B el estudiante retoma la ley clausurativa, por lo que intenta dar un monomio como respuesta de la expresión, operando elementos que no son semejantes en expresiones algebraicas. En la pregunta diez el estudiante resuelve el problema sin usar los procesos de las ecuaciones lineales, sin embargo, en la pregunta once, el estudiante no utiliza este proceso.

Anexo 14. Primera versión del diseño de la intervención

4.1.Descripción de la innovación/Intervención

Objetivo: Los estudiantes generalicen métodos de razonamiento algebraico en las temáticas factorización (primeros cuatro casos) y ecuaciones simples a partir de construcciones, manipulación y representación de diversos objetos matemáticos apoyados por TIC.

La intervención se pretende realizar en 20 sesiones, el apoyo que hará el recurso TIC será para ayudar a los estudiantes a representar gráficamente los conceptos matemáticos, les permita realizar manipulaciones ó modelización de algunas situaciones y objetos, para que a partir del análisis de los resultados propongan hipótesis y finalmente construyan generalizaciones. La intervención se realizará en dos momentos, el primero será un pilotaje con el tema factorización (Seis primeros casos: Factor común, factor común por agrupación, Trinomio Cuadrado Perfecto, Trinomio de la forma $x^2 + bx + c$ y diferencia de cuadrados) y el segundo será la intervención con el tema ecuaciones simples.

Los estudiantes generalmente realizarán trabajos individuales y grupales. Durante las sesiones se presentarán 5 momentos, cada momento se explicará a continuación:

Momento Uno	Preparación. En este espacio se espera que el estudiante se prepare para la clase a partir de diversas formas como:

	contestar preguntas orientadoras, investigar, leer, ver videos sugeridos, entre otras.
Momento Dos	Individual. En este espacio se espera que el estudiante desarrolle individualmente diversas situaciones, dé posibles soluciones a los problemas ó plantee hipótesis.
Momento Tres	Socialización Grupo Pequeño. En este espacio se espera que los estudiantes en pequeños grupos compartan sus construcciones individuales y lleguen a acuerdos ó desacuerdos.
Momento Cuatro	Socialización Grupo Grande. En este espacio se espera que los estudiantes de los pequeños grupos presenten sus construcciones para que como grupo se lleguen a acuerdos, desacuerdos ó generalizaciones.
Momento Cinco	Complementación. En este espacio se espera que los estudiantes comprueben los acuerdos y generalizaciones del grupo grande y complementen las construcciones logradas individualmente a través de acciones como la solución de nuevas situaciones, contestar preguntas orientadoras, entre otras.

Tabla 4. Descripción de los momentos de cada sesión.

En las sesiones correspondientes a la temática factorización se pretende que el estudiante represente y manipule a través de las TIC diversas situaciones, bajo la idea de Álgebra

Geométrica, donde se espera que situaciones de factorización sean representadas como rectángulos ó cuadrados de tal forma que la solución sea el producto de los lados de estas figuras. A continuación se presentará cada una de las sesiones:

Sesión	Nombre	Descripción	Tiempo
1	Evaluación Inicial y Encuesta	Estos instrumentos se les aplicará a todos los estudiantes con el fin de seleccionar a los participantes que cumplan con las condiciones propuestas	2 Horas
2		Se le presentará a los estudiantes las condiciones del trabajo actual y se les presentará las indicaciones necesarias para la manipulación del AVA	1 Hora
3	Uno. Factor común	Se pretende que el estudiante generalice el procedimiento de solución del caso de factor común y reconozca las situaciones en las que se aplica a partir de la representación de situaciones de factor común en cuadrados o rectángulos y el análisis de estos casos.	4 horas
4	Dos. Factor común	Se pretende que el estudiante generalice el procedimiento de solución del caso de factor común por agrupación y reconozca las situaciones en las que se aplica a partir de la representación de situaciones de factor común en cuadrados o rectángulos y el análisis de estos casos.	4 Horas
5	Tres. Factor común	Se les presentará a los estudiantes los procedimientos dados por los matemáticos para la solución de estos dos casos de factorización para que luego comparen con las respuestas del grupo grande y complementen la comprensión del tema.	2 horas
6	Evaluación Intermedia	Se hará una evaluación con el fin de tomar decisiones sobre el proceso a seguir en la intervención.	1 hora
7	Uno. Trinomios	Se pretende que el estudiante generalice el procedimiento de solución del caso trinomio cuadrado perfecto y reconozca las situaciones en las que se aplica a partir de la representación de situaciones de factor común en cuadrados o rectángulos y el análisis de	4 horas

		estos casos.	
8	Dos. Trinomios	Se pretende que el estudiante generalice el procedimiento de solución del caso trinomio de la forma $x^2 + bx + c$ y reconozca las situaciones en las que se aplica a partir de la representación de situaciones de factor común en cuadrados o rectángulos y el análisis de estos casos.	4 horas
9	Tres. Trinomios	Se les presentará a los estudiantes los procedimientos dados por los matemáticos para la solución de estos dos casos de factorización para que luego comparen con las respuestas del grupo grande y complementen la comprensión del tema.	2 horas
10	Evaluación Final	Se hará la evaluación para comparar el nivel inicial de los estudiantes con el final.	1 hora

Tabla 5. Sesiones del momento de pilotaje

En las sesiones correspondientes a la temática ecuaciones simples se pretende que el estudiante represente y manipule a través de las TIC diversas situaciones problema con el fin de comprender los procesos de solución de ecuaciones simples, específicamente el concepto de equivalencia. A continuación se presentará cada una de las sesiones:

Sesión	Nombre	Descripción	Tiempo
1	Evaluación Inicial y Encuesta	Estos instrumentos se les aplicará a todos los estudiantes con el fin de seleccionar a los participantes que cumplan con las condiciones propuestas	2 Horas
2		Se le presentará a los estudiantes las condiciones del trabajo actual y se les presentará las indicaciones necesarias para la manipulación del AVA	1 Hora
3	Uno. Equivalencia	Actividad Balanzas I, con ayuda de los OVAs encontrados en internet, específicamente la balanza de formas, los estudiantes solucionarán problemas que se podrán representar en balanzas, estos problemas son gráficos exclusivamente, con ayuda de una	4 horas

		guía responderán preguntas que les ayuden a concluir situaciones importantes que se deben mantener en la equivalencia, como la ley de equivalencia.	
4	Dos. Equivalencia		4 Horas
5	Tres. Equivalencia	Actividad Puente con dos apoyos. Se les propondrá a los estudiantes un problema que les invite a usar los contenidos aprendidos.	2 horas
6	Evaluación Intermedia	Se hará una evaluación con el fin de tomar decisiones sobre el proceso a seguir en la intervención.	1 hora
7	Uno. Ecuaciones con una incógnita	Actividad Traducción del lenguaje cotidiano al algebraico y viceversa. Los estudiantes tendrán diversas situaciones las cuales traducirán al lenguaje cotidiano ò viceversa.	4 horas
8	Dos. Ecuaciones con una incógnita	Actividad Balanzas II, en este espacio se les propondrá a los estudiantes el uso del OVA de balanzas para representar y solucionar problemas que involucren ecuaciones simples con elementos positivos.	4 horas
9	Tres. Ecuaciones con una incógnita	Actividad Balanzas III, en este espacio se les propondrá a los estudiantes el uso del OVA de balanzas para representar y solucionar problemas que involucren ecuaciones simples con elementos negativos.	2 horas
10	Evaluación Final	Se hará la evaluación para comparar el nivel inicial de los estudiantes con el final.	1 hora

Tabla 6. Sesiones de la Intervención