Grupos isocategóricos de orden pequeño y sus formas reales

Yiby Karolina Morales Pinto
Matemática

Universidad de Los Andes
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Bogotá, D.C.
Mayo de 2013

Grupos isocategóricos de orden pequeño y sus formas reales

YIBY KAROLINA MORALES PINTO
MATEMÁTICA

DISERTACIÓN PRESENTADA PARA OPTAR AL TÍTULO DE
MAGISTER EN MATEMÁTICAS

DIRECTOR
CÉSAR NEYIT GALINDO MARTINEZ, PH.D.
DOCTOR EN MATEMÁTICAS

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ, D.C.
MAYO DE 2013

Título en español

Grupos isocategóricos de orden pequeño y sus formas reales.

Resumen: Utilizamos la descripción dada por Davydov [2] de los grupos isocategóricos a un grupo dado G, en términos de grupos de automorfismos sobre G-álgebras de Galois complejas, para clasificar los grupos isocategóricos de orden menor o igual que 64, mediante el desarrollo e implementación de un algoritmo en GAP. Más específicamente, verificamos que no existen grupos isocategóricos no isomorfos de orden 32, y que el único par de grupos isocategóricos sobre los complejos coresponde al par construido por Izumi y Kosaki [8]. Estudiamos también las formas reales de dichas G-álgebras de Galois complejas y utilizamos los resultados de la ejecución del programa para mostrar que, sobre los reales, los grupos de orden menor o igual que 64 son categóricamente rígidos.

Dedicado a

A Juan Felipe.

Agradecimientos

Quiero agradecer al profesor César Galindo por enseñarme una cara nueva e interesante de las matemáticas, lo cual me dejó una gran motivación para seguir aprendiendo. Además, por todo su apoyo, tiempo y paciencia. También agradezco a mi familia por su compañía y su apoyo infinito.

Índice general

Introducción

Gracias a un resultado de Deligne [3] se sabe que la categoría $Rep(G)$ de representaciones complejas de un grupo finito G, considerada como categoría tensorial simétrica, determina salvo isomorfismo a G. Sin embargo, esto no es cierto si se considera $Rep(G)$ únicamente como categoría tensorial. De manera independiente, Etingof y Gelaki [4], Davydov [2] e Izumi y Kosaki [8] encontraron ejemplos de grupos no isomorfos cuyas categorías de representaciones complejas son tensorialmente equivalentes. Cuando esto ocurre se dice que los dos grupos son *isocategóricos* sobre los complejos. El ejemplo de Izumi y Kosaki tiene orden 64. Etingof, Gelaki y Davydov construyeron familias de ejemplos de orden mucho mayor. Adicionalmente Etingof y Gelaki mostraron que si 2^{2m} no divide al orden de G, entonces todo grupo isocategórico a G es isomorfo a G. En este caso se dice que G es *categóricamente rígido*. El estudio de los grupos isocategóricos se reduce entonces a los grupos cuyo orden es divisible por 2^{2m} con $m \geq 1$.

El objetivo de este trabajo es estudiar los grupos isocategóricos de orden 32 y 64, los primeros órdenes en los que se pueden encontrar ejemplos. El estudio se basa en una descripción dada por Davydov de grupos isocategóricos: dos grupos G y G' son isocategóricos si y sólo si G' es isomorfo al grupo $Aut_G(A)$ de isomorfismos G-equivariantes sobre cierta G-álgebra de Galois A, la cual se construye a partir de un subgrupo normal y abeliano H de G y cierto 2-cociclo no degenerado sobre H. La descripción de los 2-cociclos no degenerados sobre H en términos de formas bilineales alternantes no degeneradas, y algunas porpiedades del álgebra de grupo torcida y las álgebras inducidas, permiten construir el grupo de automorfismos $Aut_G(A)$ por medio de herramientas computacionales.

Implementamos un algoritmo en GAP cuya variable de entrada es un grupo G de orden 32 o 64 y cuya variable de salida es la lista de grupos isocategóricos a G. El programa permite verificar que todo grupo de orden 32 es isocategóricamente rígido y que el único par de grupos isocategóricos sobre los complejos, de orden 64, corresponde al par construido por Izumi y Kosaki en [8]. Las construcciones que permiten traducir el mencionado resultado de Davydov al lenguaje computacional, son producto de trabajos previos de César Galindo y Manuel Medina.

Adicionalmente estudiamos las formas reales de las G-álgebras de Galois complejas y su relación con las categorías de representaciones sobre los reales, lo cual permite verificar que la categoría de representaciones reales, de cualquier grupo de orden menor o igual que 64, determina al grupo salvo isomorfismo.

El texto está estructurado de la siguiente manera. En el primer capítulo recordamos algunas definiciones fundamentales a lo largo del texto.

En el segundo capítulo, recordamos algunos conceptos básicos de representaciones de grupos finitos, categorías tensoriales y simétricas. Enunciamos el teorema principal (Teorema 8) demostrado por Davydov [2], que describe a todo grupo isocategóricos a un grupo finito G en términos del grupo de automorfísmos $Aut_G(A)$ de una G-álgebra de Galois A. Más específicamente, A resulta ser la G-álgebra inducida por la H-álgebra de grupo torcida $\mathbb{C}_\alpha H$. Estudiamos además algunos hechos útiles en la descripción del grupo $Aut_G(Ind_H^G(\mathbb{C}_\alpha H))$.

En el tercer capítulo presentamos la correspondencia entre clases de cohomología de 2-cociclos no degenerados sobre un gurpo finito abeliano H y los bicaracteres alternantes en H. Esta correspondencia facilita la construcción del grupo $Aut_G(Ind_H^G(\mathbb{C}_\alpha H))$, la cual presentamos paso a paso. Finalmente presentamos los pseudocódigos de los algoritmos implementados en GAP y los resultados obtenidos tras la ejecución de los programas.

Por último, en el capítulo 4 estudiamos las formas reales de las G-álgebras de Galois y su relación con las equivalencias entre categorías de representaciones sobre los reales, lo cual permite concluir que las categorías de representaciones reales determinan a los grupos de orden menor o igual que 64.

CAPÍTULO 1

Preliminares

Dado un grupo finito G, es posible caracterizar los grupos isocategóricos a G mediante la construcción de estructuras llamadas G-álgebras de Galois. Dichas álgebras se construyen a partir de 2-cociclos no degenerados definidos en ciertos subgrupos de G. Introducimos en este capítulo estos y otros conceptos útiles para la comprensión de esta caracterización. A lo largo del texto nos referiremos por G a un grupo finito.

1.1. Bicaracteres y 2-cociclos

Definición: Sea G un grupo y sea A un grupo abeliano. Usaremos notación multiplicativa. Un **2-cociclo** en G con coeficientes en A es una función $\alpha : G \times G \to A$ tal que

1. $\alpha(\sigma,\tau)\alpha(\sigma\tau,\rho) = \alpha(\sigma,\tau\rho)\alpha(\tau,\rho)$
2. $\alpha(e,\sigma) = \alpha(\sigma,e) = 1$

para todo $\sigma, \tau \in G$.

El conjunto de todos los 2-cociclos, en un grupo G es un grupo abeliano con el producto de funciones, al cual denotaremos por $Z^2(G,A)$.

Definición: Sean G un grupo y A un grupo abeliano. Un **bicarácter** en G es una funcion $f : G \times G \to A$ tal que

1. $f(\sigma\tau,\rho) = f(\sigma,\rho)f(\tau,\rho)$
2. $f(\sigma,\tau\rho) = f(\sigma,\tau)f(\sigma,\rho)$.

para todo $\sigma, \tau \in G$.

Notemos que estas propiedades implican que $f(e,\sigma) = f(\sigma,e) = 1$ y que un bicarácter es un 2-cociclo. A partir de un bicarácter, es posible construir otros 2-cociclos. Por ejemplo, sea $G = H \times H$ un grupo y sea f un bicarácter en H. La aplicación

$$\begin{aligned} w_f : G \times G &\to A \\ ((\sigma_1, \tau_1), (\sigma_2, \tau_2)) &\mapsto f(\sigma_1, \tau_2). \end{aligned}$$

es un 2-cociclo. Al escoger $((\sigma_1, \tau_1), (\sigma_2, \tau_2)) \mapsto f(\tau_1, \sigma_2)$ también se obtiene un 2-cociclo.

Notación: Nos referiremos por ζ_n a una raíz primitiva n-ésima de la unidad en $\mathbb{C}$.

La aplicación

$$\begin{aligned} f : \quad \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n &\to \mathbb{C} \\ (s, t) &\mapsto \zeta_n^{st}, \end{aligned}$$

en donde $\mathbb{Z}_n$ denota el grupo cíclico de los enteros módulo n, es otro ejemplo de 2-cociclo.

Ahora damos la definición de 2-cociclo no degenerado. Sean G un grupo, $\sigma \in G$ y sea $C_G(\sigma)$ el centralizador de σ en G. Si α es un 2-cociclo en G, la aplicación

$$\begin{aligned} \alpha_\sigma : C_G(\sigma) &\to \mathbb{C}^* \\ \tau &\mapsto \alpha_\sigma(\tau) = Alt(\alpha)(\sigma, \tau), \end{aligned}$$

en donde

$$Alt(\alpha)(\sigma, \tau) = \frac{\alpha(\sigma, \tau)}{\alpha(\tau, \sigma)}, \tag{1.1}$$

es un homomorfismo.

Definición: Sea G un grupo. Dieremos que un 2-cociclo α con valores en $\mathbb{C}^*$ es **no degenerado** si, para todo $s \in G$, $s \neq e$, la aplicación α_s es no trivial.

Veremos más adelante que este concepto es fundamental en el estudio de las equivalencias entre las representaciones de grupos finitos y veremos que, en el caso de grupos abelianos, está relacionado con el concepto que conocemos en álgebra lineal.

1.2. El segundo grupo de cohomología

Sea $C^1(G, A)$ el conjunto de todas las funciones $\lambda : G \to A$, tales que $\lambda(e) = 1$, y consideremos la aplicación

$$\begin{aligned} \delta : C^1(G, A) &\to Z^2(G, A) \\ \gamma &\mapsto \delta(\gamma)(\sigma, \tau) = \frac{\gamma(\sigma\tau)}{\gamma(\sigma)\gamma(\tau)}. \end{aligned}$$

Definición: Sea G un grupo y A un grupo abeliano. El **segundo grupo de cohomología** de G con coeficientes en A es el grupo cociente

$$H^2(G, A) = \frac{Z^2(G, A)}{B^2(G, A)},$$

en donde $B^2(G, A) = Im(\delta)$.

Estamos interesados en el grupo de cohomología de algunos grupos abelianos finitos, los cuales, como bien sabemos, se descomponen en producto de grupos cíclicos. Por eso serán de utilidad los siguientes resultados.

Definición: Sean G_1 y G_2 grupos. Diremos que una aplicación $f : G_1 \times G_2 \to A$, es un **pairing** de G_1 y G_2 en A si

$$f(\sigma\tau, \rho) = f(\sigma, \rho)f(\tau, \rho)$$
$$f(\sigma, \tau\rho) = f(\sigma, \tau)f(\sigma, \rho).$$

El conjunto de los pairings en G_1 y G_2 es un grupo abeliano al cual denotaremos por $P(G_1, G_2; A)$.

Lema 1. *Sea $G = G_1 \times G_2$ y sea $\alpha \in Z^2(G, A)$. Sea*

$$\begin{aligned} \phi_\alpha :& G_1 \times G_2 \to A \\ &(x, y) \mapsto \frac{\alpha(x, y)}{\alpha(y, x)}. \end{aligned}$$

Entonces $\phi_\alpha \in P(G_1, G_2; A)$ y la aplicación

$$\begin{aligned} H^2(G, A) &\to P(G_1, G_2; A) \\ \bar{\alpha} &\mapsto \phi_\alpha \end{aligned}$$

es un homomorfismo.

Demostración. (Tomada de [9]) Sea $\alpha \in Z^2(G, A)$. Entonces para todo $\sigma \in G_1$, y para todo $\tau, \rho \in G_2$, tenemos que

$$\alpha(\sigma, \tau)\alpha(\sigma\tau, \rho) = \alpha(\sigma, \tau\rho)\alpha(\tau, \rho) \Rightarrow 1 = \alpha(\tau, \rho)\alpha(\sigma, \tau\rho)\alpha(\sigma, \tau)^{-1}\alpha(\sigma\tau, \rho)^{-1}.$$

De la misma forma,

$$1 = \alpha(\sigma, \rho)^{-1}\alpha(\tau, \sigma\rho)^{-1}\alpha(\tau, \sigma)\alpha(\tau\sigma, \rho)$$
$$1 = \alpha(\rho, \sigma)\alpha(\tau, \rho\sigma)\alpha(\tau, \rho)^{-1}\alpha(\tau\rho, \sigma)^{-1},$$

por lo tanto, al multiplicar las tres igualdades obtenemos

$$1 = (\alpha(\sigma, \rho)\alpha(\rho, \sigma)^{-1})^{-1}(\alpha(\sigma, \tau\rho)\alpha(\tau\rho, \sigma)^{-1})(\alpha(\sigma, \tau)\alpha(\tau, \sigma)^{-1})^{-1}$$
$$1 = (\phi_\alpha(\sigma, \rho))^{-1}\phi_\alpha(\sigma, \tau\rho)(\phi(\sigma, \tau))^{-1}$$
$$\phi_\alpha(\sigma, \tau\rho) = \phi_\alpha(\sigma, \tau)\phi_\alpha(\sigma, \rho).$$

De manera análoga se cumple para el lado izquierdo, luego $\phi_\alpha \in P(G_1, G_2; A)$. En segundo lugar, sean $\alpha, \beta \in Z^2(G, A)$ tales que $\bar{\alpha} = \bar{\beta}$, es decir, $\beta(\sigma, \tau) = \alpha(\sigma, \tau)\lambda(\sigma)\lambda(\tau)\lambda(\sigma\tau)^{-1}$ para alguna función $\lambda : G \to A$. Entonces, para $\sigma \in G_1$ y $\tau \in G_2$ y teniendo en cuenta que, en este caso $\sigma\tau = \tau\sigma$, entonces

$$\beta(\sigma, \tau)\beta(\tau, \sigma)^{-1} = \alpha(\sigma, \tau)\alpha(\tau, \sigma)^{-1}.$$

Luego la aplicación está bien definida.
Veamos, por último, que ϕ es un homomorfismo de grupos. Si $\bar{\alpha_1}, \bar{\alpha_2} \in H^2(G, A)$, entonces

$$\begin{aligned}\phi_{\alpha_1\alpha_2}(\sigma,\tau) &= (\alpha_1\alpha_2(\sigma,\tau))(\alpha_1\alpha_2(\tau,\sigma))^{-1} \\ &= (\alpha_1(\sigma,\tau)\alpha_1(\sigma,\tau)^{-1})(\alpha_2(\sigma,\tau)\alpha_2(\sigma,\tau)^{-1}) \\ &= \phi_{\alpha_1}\phi_{\alpha_2}(\sigma,\tau).\end{aligned}$$

■

Teorema 1. *Sean G_1 y G_2 dos grupos arbitrarios y A un grupo abeliano. Entonces*

$$H^2(G_1 \times G_2, A) \cong H^2(G_1, A) \times H^2(G_2, A) \times P(G_1, G_2; A)$$

Demostración. (Tomada de [9])Sea $\alpha \in Z^2(G, A)$, llamaremos α_1 y α_2 a las restricciones de α a $G_1 \times G_1$ y $G_2 \times G_2$ respectivamente. Debido al Lema 1, la aplicación

$$H^2(G, A) \to H^2(G_1, A) \times H^2(G_2, A) \times P(G_1, G_2; A) \tag{1.2}$$
$$\alpha \mapsto (\alpha_1, \alpha_2, \phi_\alpha) \tag{1.3}$$

es un homomorfismo. Ahora veamos la sobreyectividad. Sean $\alpha_i \in H^2(G_i, A)$ y sea $\phi \in P(G_1, G_2; A)$. Definimos

$$\alpha(\sigma_1\sigma_2, \sigma_1'\sigma_2') = \alpha_1(\sigma_1, \sigma_1')\alpha_2(\sigma_2, \sigma_2')\phi(\sigma_1, \sigma_2').$$

Las restricciones de α son, en efecto, α_1 y α_2. Además $\phi_\alpha = \phi$.

Sea $\alpha \in Z^2(G, A)$ tal que sus restricciones α_i pertenezcan a $B^2(G_i, A)$ y ϕ_α sea trivial. Entonces $\alpha_i = \delta t_i$ para algúna función $t_i : G_i \to A$.

Definimos $t : G \to A$ por $t(\sigma_1\sigma_2) = t_1(\sigma_1)t_2(\sigma_2)$, para $\sigma_1 \in G_1$ y $\sigma_2 \in G_2$. Sea $\beta = \delta t$. Al restringir β a $G_1 \times G_1$ tenemos

$$\beta(\sigma_1, \sigma_1') = \frac{t(\sigma_1)t(\sigma_1')}{t(\sigma_1\sigma_1')} = \frac{t_1(\sigma_1)t_1(\sigma_1')}{t_1(\sigma_1\sigma_1')} = \alpha_1(\sigma_1, \sigma_1').$$

De la misma forma, $\beta(\sigma_2, \sigma_2') = \alpha_2(\sigma_2.\sigma_2')$, por lo tanto, al hacer $f = \beta/\alpha$ tenemos que las restricciones f_i de f a $G_i \times G_i$ son triviales, es decir, $f(\sigma_1, \sigma_1') = f(\sigma_2, \sigma_2') = 1$ para todo $\sigma_1, \sigma_1' \in G_1$ y $\sigma_2, \sigma_2' \in G_2$. Usando las propiedades del 2-cociclo, como en la demostración del Lema 1, tenemos las igualdades

$$\begin{aligned}1 &= f(\sigma_1', \sigma_2')^{-1} f(\sigma_1\sigma_2\sigma_1', \sigma_2') f(\sigma_1\sigma_2, \sigma_1'\sigma_2')^{-1} f(\sigma_1\sigma_2, \sigma_1') \\ 1 &= f(\sigma_2, \sigma_2') f(\sigma_1\sigma_1'\sigma_2, \sigma_2')^{-1} f(\sigma_1\sigma_1', \sigma_2\sigma_2') f(\sigma_1\sigma_1', \sigma_2)^{-1} \\ 1 &= f(\sigma_1, \sigma_1') f(\sigma_2\sigma_1, \sigma_1')^{-1} f(\sigma_2, \sigma_1\sigma_1') f(\sigma_2, \sigma_1)^{-1}\end{aligned}$$

también se tiene

$$\begin{aligned}1 &= \phi(\sigma_1\sigma_1', \sigma_2) = f(\sigma_1\sigma_1', \sigma_2) f(\sigma_2, \sigma_1\sigma_1')^{-1} \\ 1 &= \phi(\sigma_1, \sigma_2)^{-1} = f(\sigma_1, \sigma_2)^{-1} f(\sigma_2, \sigma_1).\end{aligned}$$

Multiplicando las cinco igualdades,

$$1 = f(\sigma_1\sigma_2, \sigma_1'\sigma_2')^{-1} f(\sigma_1', \sigma_2')^{-1} f(\sigma_1\sigma_1', \sigma_2\sigma_2') f(\sigma_1, \sigma_2)^{-1},$$

luego, definiendo $\lambda : G \to A$ por $\lambda(\sigma_1\sigma_2) = f(g_1, g_2)^{-1}$, se tiene $f = \delta s$ y el homomorfismo es inyectivo. ■

1.3. G-álgebras e inducción de G-álgebras

Nos referiremos permamentemente a álgebras sobre las cuales actúa un grupo. Entre ellas, son fundamentales las álgebras de Galois, que están estrechamente relacionadas con funtores tensoriales entre categorías de representaciones [2]. A lo largo de este capítulo nos referiremos por k a un campo algebráicamente cerrado.

Definición: Una **G-álgebra** es un par (π, A) donde A es un álgebra asociativa con unidad sobre k y π es un homomorfismo de grupos $\pi : G \to Aut(A)$.

Ejemplo: Sea $\alpha \in Z^2(G, \mathbb{C}^*)$ donde G es un grupo finito. Definimos el **álgebra de grupo torcida por** α sobre $\mathbb{C}$ como

$$\mathbb{C}_\alpha G := span\{u_\sigma \mid \sigma \in G\},$$

con el producto dado por $u_\sigma u_\tau = \alpha(\sigma, \tau) u_{\sigma\tau}$. La acción por conjugación de G sobre $\mathbb{C}_\alpha G$, dada por $\sigma(u_\tau) := u_\sigma u_\tau u_\sigma^{-1}$, convierte a $\mathbb{C}_\alpha G$ en una G-álgebra. De ahora en adelante, siempre el álgebra de grupo torcida $C_\alpha G$ será considerada como una $G-$álgebra con la acción por conjugación.

Sea A una G-álgebra, llamaremos $Aut_G(A)$ al grupo de **automorfismos G-equivariantes de** A, es decir, automorfismos F, de álgebras asociativas, tales que $F(g \cdot a) = g \cdot F(a)$ para todo $g \in G$ y todo $a \in A$.

Definición 1. *Una G-álgebra A sobre un campo k, con $A^G = 1_A k$ es un álgebra de Galois si la aplicación*

$$\begin{aligned} \theta : A \otimes k[G] &\to End(A) \\ a \otimes u_\sigma &\to \theta(a, \sigma)(b) = a(\sigma \cdot b) \end{aligned}$$

es un isomorfismo lineal.

Observación: Una G-álgebra también se dice de Galois si su dimensión es igual a el orden de G y además no posee ideales invariantes izquierdos no triviales. La equivalencia entre las dos definiciones se puede ver en [5] (Prop. 3.1)

Proposición 1. *El álgebra de grupo torcida $\mathbb{C}_\alpha H$ es una H-álgebra de Galois, si y sólo si α es no degenerado*

Demostración. Ver [2], Prop. 3.5 ■

Sea G un grupo y sea H un subgrupo de G. A partir de una H-álgebra B podemos construir una G-álgebra de la siguiente manera:

$$Ind_H^G(B) := \{f : G \to B \mid f(h\sigma) = hf(\sigma)\ \forall\sigma \in G, \forall h \in H\}.$$

Ésta es un álgebra con producto dado por $fg(\sigma) = f(\sigma)g(\sigma)$, el cual es asociativo por la asociatividad de B, y su unidad es la función con valor constante 1_B, la unidad de B.

Definimos ahora $\sigma \cdot f = f_\sigma$, donde $f_\sigma(\tau) = f(\tau\sigma)$. Es evidente a partir de la definición que $\sigma \cdot f \in Ind_H^G(B)$. Además, para cada σ en G la aplicación

$$\begin{aligned} F_\sigma : Ind_H^G(B) &\to Ind_H^G(B) \\ f &\mapsto f_\sigma \end{aligned}$$

es un automorfismo de álgebras, pues $(fg)_\sigma = f_\sigma g_\sigma$ y $(f_\sigma)_{\sigma^{-1}} = f$. Entonces tenemos una aplicación

$$\begin{aligned} \pi : G &\to Aut_G(Ind_H^G(B)) \\ \sigma &\mapsto F_\sigma \end{aligned}$$

la cual es un morfismo de grupos. Por lo tanto $Ind_H^G(B)$ es una G-álgebra.

Observación: De ahora en adelante llamaremos B a la H-álgebra $\mathbb{C}_\alpha H$, en donde H es un grupo y su acción en B está dada por $h \cdot u_g = u_h u_g u_h^{-1}$.

Una propiedad importante de $Ind_H^G(B)$ es que ésta es una G-álgebra de Galois si y sólo si B es un álgebra de Galois. (Ver [2] 3.2)

Describimos ahora una base para $Ind_H^G(B)$, cuando G es un grupo finito. Para esto fijamos un conjunto $X = \{\sigma_0 = e, \sigma_1, ..., \sigma_m\}$ de representantes de $G\backslash H := \{Hg \mid g \in G\}$ y definimos funciones $\chi_h^{\sigma_i} : G \to \mathbb{C}_\alpha H$ como

$$\chi_h^{\sigma_i}(\sigma) = \begin{cases} u_h & \text{si } \sigma = \sigma_i \\ h_0 \cdot u_h & \text{si } \sigma = h_0\sigma_i \\ 0 & \text{si } \sigma \notin H\sigma_i \end{cases},$$

para los demás elementos de G, es decir, aquellos de la forma $h\sigma_i$ con $h \neq e$, definimos $\chi_h^{\sigma_i}(h\sigma_i) = hf(\sigma_i)$. De esta manera $\chi_h^\sigma \in Ind_H^G(\mathbb{C}_\alpha H)$.

Proposición 2. *Sea G un grupo finito y sea H un subgrupo de G. Las funciones $\{\chi_h^{\sigma_i} \mid h \in H, 0 \leq i \leq n\}$ forman una base para $Ind_H^G(\mathbb{C}_\alpha H)$.*

Demostración. Sea $H = \{h_1, ..., h_n\}$ y consideremos una combinación lineal de las funciones $\chi_{h_j}^{\sigma_i}$

$$\sum_{i,j} k_{ij}\chi_{h_j}^{\sigma_i} = 0.$$

Al evaluar cada lado en σ_i obtenemos

$$\sum_j k_{ij} u_{hj} = 0,$$

lo cual, debido a la independencia lineal de los elementos u_h, implica que $k_{ij} = 0$ para todo j. Veamos ahora que las funciones $\chi_h^{\sigma_i}$ generan $Ind_H^G(B)$. Sea $f \in Ind_H^G(\mathbb{C}_\alpha H)$. Para cada clase $H\sigma_i \in G\backslash H$ tenemos $f(h\sigma_i) = h \cdot f(\sigma_i)$, por lo tanto, f está determinada por sus valores en los elementos σ_i. Éstos son de la forma

$$f(\sigma_i) = \sum_j k_{ij} u_{h_j}.$$

Luego

$$f = \sum_{i,j} k_{ij} \chi_{h_j}^{\sigma_i}.$$

Tenemos entonces que $Ind_H^G(\mathbb{C}_\alpha H)$ es generado por las funciones $\chi_h^{\sigma_i}$, lo cual prueba que $\left\{\chi_{h_i}^{\sigma_j}\right\}$ es una base para Ind_H^G. ■

Conviene mencionar otras propiedades importantes de las funciones $\chi_h^{\sigma_i}$. La primera es que aquellas de la forma $\chi_e^{\sigma_i}$ son idempotentes, centrales y ortogonales, en efecto,

$$\chi_e^{\sigma_i} \cdot \chi_e^{\sigma_i}(\sigma_i h) = u_h^{-1} u_e u_h \cdot u_h^{-1} u_e u_h = u_h^{-1} u_e u_h = \chi_e^{\sigma_i}(\sigma_i h).$$

La ortogonalidad es clara a partir de la definición, así como el hecho de que son centrales.

La segunda propiedad es

$$\chi_e^{\sigma_1} + \cdots + \chi_e^{\sigma_m} = 1_A,$$

donde 1_A es la funcion cuyo valor constante es u_e. Esto se sigue inmediatamete al evaluar en σ_i.

Será útil, adicionalmente, describir la acción de G sobre $Ind_H^G(\mathbb{C}_\alpha H)$ en términos de la base. Sabemos que G actúa sobre X mediante la multiplicación a derecha. Dado $g \in G$, existe entonces algún $\sigma_k \in X$ tal que $\sigma_k \cdot g = \sigma_i$, es decir, $\sigma_k g = \hat{h}\sigma_i$. Por lo tanto

$$g \cdot \chi_h^{\sigma_i}(\sigma_k) = \chi_h^{\sigma_i}(\sigma_k g) = \chi_h^{\sigma_i}(\hat{h}\sigma_i)$$

$$= u_{\hat{h}} u_h u_{\hat{h}}^{-1} = \alpha(\hat{h}, h)\alpha(\hat{h}h, \hat{h}^{-1})\alpha(\hat{h}, \hat{h}^{-1})^{-1} u_{\hat{h}h\hat{h}^{-1}}$$

y la función se anula en las demás coclases, por lo tanto

$$g \cdot \chi_h^{\sigma_i} = \lambda \chi_{\hat{h}h\hat{h}^{-1}}^{\sigma_k} \tag{1.4}$$

donde $\lambda = \alpha(\hat{h}, h)\alpha(\hat{h}h, \hat{h}^{-1})\alpha(\hat{h}, \hat{h}^{-1})^{-1}$.

Para terminar, es importante notar que existe una inclusión $i : B \to Ind_H^G(B)$ dada por $u_h \mapsto \chi_h^e$. Veamos que éste es un homomorfismo de álgebras. Basta con verificar que preserva el producto de elementos en la base mencionada en la Proposición 2:

$$i(u_g u_k)(h) = i(\alpha(g,k)u_{gk})(h) = \alpha(g,k)\chi_{gk}^e(h) = \alpha(g,k)u_h^{-1} u_{gk} u_h$$

$$= u_h^{-1} u_g u_k u_h = u_h^{-1} u_g u_h^{-1} u_h u_k u_h = \chi_g^e(h) \chi_k^e(h) = i(u_g) i(u_k)(h).$$

CAPÍTULO 2

Grupos isocategóricos

Enunciamos el teorema principal (Teorema 8) que nos permite clasificar los grupos isocategóricos de orden pequeño. Para esto introducimos algunos conceptos básicos en teoría de representaciones y categorías tensoriales.

2.1. Representaciones de grupos finitos

Definición: Sea G un grupo finito. Una **representación lineal** de un grupo finito G sobre un campo k es un homomorfismo de grupos

$$\rho : G \to Gl(V),$$

en donde V es un espacio vectorial sobre k.

Definición: Sean ρ_1 y ρ_2 representaciones lineales de un grupo finito G sobre V_1 y V_2 respectivamente. Diremos que ρ_1 y ρ_2 son **isomorfas** si existe un isomorfismo $\phi : V_1 \to V_2$ tal que $\phi(\rho_1(\sigma)(v)) = \rho_2(\sigma)(\phi(v))$ para todo $\sigma \in G, v \in V$.

Sea G un grupo finito, llamaremos $k[G]$ al álgebra de grupo, es decir, al k-espacio vectorial de base $\{u_g \mid g \in G\}$, dotado de un producto inducido por la operación del grupo, el cual convierte a $k[G]$ en un álgebra sobre k.

Si $\rho : G \to Gl_n(V)$ es una representación lineal, entonces V posee estructura de $k[G]$-módulo por la izquierda, con acción dada por $\sigma \cdot v = \rho(\sigma)(v)$. De manera recíproca, dado un $k[G]$-módulo V, hay una representación lineal asociada a V dada por $\rho(\sigma)(v) = \sigma \cdot v$. Es inmediato a partir de la definición que dos representaciones son isomorfas si y sólo si los $k[G]$-módulos asociados son isomorfos. Tenemos entonces una correspondencia entre representaciones lineales de un grupo finito G y $k[G]$-módulos por izquierda.

Definición: Una representación $\rho : G \to Gl(V)$ se llama **irreducible** si no tiene $k[G]$-submódulos no triviales.

Si se considera un campo k cuya característica no divide al orden del grupo G, toda representación se puede descomponer en suma directa de representaciones irreducibles. Esto se debe al siguiente teorema.

Teorema 2. *Sea $\rho : G \to Gl_n(V)$ una representación de un grupo finito G sobre un campo k cuya característica no divida al orden del grupo. Sea W un $k[G]$-submódulo de V. Entonces existe un $k[G]$-submódulo W_0 tal que $V = W \oplus W_0$, como $k[G]$-módulos.*

Demostración. Ver [11]. ■

Nos referiremos, a lo largo de este capítulo, por k a un campo algebraicamente cerrado. A continuación describimos algunos ejemplos de representaciones lineales.

Ejemplo: La representación lineal asociada al $k[G]$-módulo $k[G]$ es llamada la **representación regular** de G sobre k.

Ejemplo: Dadas dos representaciones lineales $\rho_1 : G \to V_1$ y $\rho_2 : G \to V_2$ de G, se define su **producto tensorial** como la representación asociada al espacio $V_1 \otimes_k V_2$, con la estructura de $k[G]$-módulo dada por

$$\sigma(v_1 \otimes v_2) = (\sigma \cdot v_2) \otimes (\sigma \cdot v_2).$$

Gran parte del estudio de las representaciones de grupos finitos se realiza a través de sus caracteres, de los cuales se puede extraer información importante sobre el grupo.

Definición: Sea $\rho : G \to Gl_n(V)$ una representación de un grupo finito G. La función

$$\begin{aligned} \chi_\rho : G &\to k \\ \sigma &\mapsto Tr(\rho(\sigma)), \end{aligned}$$

en donde Tr denota la traza de la respectiva matriz, es el **carácter** asociado a ρ. El **grado** del carácter es la dimensión del espacio V. Un caracter se dice **irreducible** si está asociado a una representación irreducible.

Como la traza se preserva bajo semejanza de matrices, los carácteres no dependen de la representación elegida. Estos dependen únicamente de su clase de isomorfismo. A continuación mencionamos propiedades importantes de los caracteres. Para esto definimos un producto en el conjunto de caracteres.

$$\langle \chi, \psi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} \chi(\sigma)\psi(\sigma^{-1})$$

Teorema 3. *Si χ_1 y χ_2 son caracteres irreducibles de un grupo finito G, entonces*

$$\langle \chi_1, \chi_2 \rangle = \begin{cases} 1 & si\ \chi_1 = \chi_2 \\ 0 & si\ \chi_1 \neq \chi_2 \end{cases}.$$

Demostración. Ver [7] 2.13. ■

Teorema 4. *Un grupo finito G tiene un número finito de caracteres irreducibles $\chi_1, ..., \chi_m$ cuyos grados n_i cumplen la ecuación*

$$n_1^2 + \cdots + n_m^2 = |G|$$

Demostración. Consideremos el carácter de la representación regular de G, al cual denotaremos por r_G. Entonces

$$r_G(\sigma) = \begin{cases} |G| & \text{si } \sigma = e \\ 0 & \text{si } \sigma \neq e \end{cases}.$$

Ahora, sea χ un carácter irreducible. Entonces

$$< r_G, \chi >= \chi(e).$$

Si $r_G = n_1\chi_1 + \cdots \chi_m$, donde χ_i son caracteres irreducibles de G, entonces los caracteres χ_i resultan ser todos los caracteres irreducibles de G. Además $n_i = \chi_i(e)$ y , como $< r_G, r_G >= |G|$, entonces

$$n_1^2 + \cdots + n_m^2 = |G|.$$

■

Serán de interés las representaciones de grupos finitos abelianos. Para ello es útil recordar el siguiente hecho.

Proposición 3. *El número de caracteres irreducibles de un grupo G es igual a su número de clases de conjugación.*

Demostración. Ver [7] (2.5). ■

Teorema 5. *Un grupo finito es abeliano si y sólo si todos sus caracteres irreducibles tienen grado 1.*

Demostración. Sea m el número de clases de conjugación de G. Entonces G es abeliano si y sólo si $|G| = m$. Si $n_1, ..., n_m$ son los grados de los caracteres irreducibles de G, sabemos que

$$n_1^2 + \cdots + n_m^2 = |G|.$$

Luego, $|G| = m$ si y sólo si $n_i = 1$ para todo i. ■

Observación: Notemos que una representación de grado 1 es un homomorfismo de grupos $G \to k$, y todo homomorfismo es un carácter, es decir, los caracteres de grado 1 son exactamente los homomorfismos de grupos $G \to k$.

2.2. Categorías tensoriales

Definición: Una **categoría tensorial** es una tupla $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbf{1}, \alpha, \lambda, \rho)$, en donde $\mathcal{C}$ es una categoría y $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ es un funtor. Además,

$$\alpha_{X,Y,Z} : (X \otimes Y) \otimes Z \to X \otimes (Y \otimes Z)$$
$$\lambda_X : \mathbf{1} \otimes X \to X$$
$$\rho_X : X \otimes \mathbf{1} \to X$$

son isomorfismos naturales tales que los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd}
((X \otimes Y) \otimes Z) \otimes T \arrow[rr, "\alpha_{X,Y,Z} \otimes id_T"] & & (X \otimes (Y \otimes Z)) \otimes T \arrow[rr, "\alpha_{X,Y \otimes Z,T}"] & & X \otimes ((Y \otimes Z) \otimes T) \\
(X \otimes Y) \otimes (Z \otimes T) \arrow[u, "\alpha_{X \otimes Y,Z,T}"] \arrow[r] & {} \arrow[rr] & & {} \arrow[r] & X \otimes (Y \otimes (Z \otimes T)) \arrow[u, "id_X \otimes \alpha_{Y,Z,T}"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(X \otimes \mathbf{1}) \otimes Y \arrow[r, "\alpha_{X,\mathbf{1},Y}"] \arrow[d, "\rho_X \otimes id_Y"'] & X \otimes (\mathbf{1} \otimes Y) \arrow[d, "id_X \otimes \lambda_Y"] \\
X \otimes Y \arrow[r, equal] & X \otimes Y
\end{tikzcd}$$

A partir de esos dos diagramas se sigue que todos los diagramas construidos con la identidad y estos morfismos conmutan por el teorema de coherencia de MacLane [10]. El ejemplo que nos concierne es la categoría $Rep_k(G)$ de representaciones, sobre un campo k, de un grupo finito G, con el producto tensorial. La unidad es la representación trivial.

Definición: Un **funtor tensorial** entre dos categorías tensoriales $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbf{1}, \alpha, \lambda, \rho)$ y $(\mathcal{C}', \otimes', \mathbf{1}', \alpha', \lambda', \rho')$ consiste de un funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$, un isomorfismo $e^F : F(\mathbf{1}) \to \mathbf{1}$, y una familia de isomorfismos naturales $d_{X,Y} : F(X) \otimes F(Y) \to F(X \otimes Y)$ para los cuales los siguentes diagramas conmutan.

$$\begin{tikzcd}
(F(X) \otimes' F(Y)) \otimes' F(Z) \arrow[r, "d_{X,Y} \otimes id"] \arrow[d, "\alpha'_{F(X),F(Y),F(Z)}"'] & F(X \otimes Y) \otimes' F(Z) \arrow[r, "d_{X \otimes Y,Z}"] & F((X \otimes Y) \otimes Z) \arrow[d, "VVV"', "F(\alpha_{X,Y,Z})"] \\
F(X) \otimes' (F(Y) \otimes' F(Z)) \arrow[r, "id \otimes d_{X,Z}"'] & F(X) \otimes' F(Y \otimes Z) \arrow[r, "d_{X,Y \otimes Z}"'] & F(X \otimes (Y \otimes Z))
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
F(X) \otimes F(\mathbf{1}) \arrow[r, "id \otimes d_{X,Z}"] \arrow[d, "d_{X,\mathbf{1}}"'] & F(X) \otimes \mathbf{1}' \arrow[d, "\rho'_{F(X)}"] \\
F(X \otimes \mathbf{1}) \arrow[r, "F(\rho_X)"'] & F(X)
\end{tikzcd}$$

Se requiere también la conmutatividad del diagrama análogo para λ_X.

Definición: Sean $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbf{1}, \alpha, \lambda, \rho)$ y $(\mathcal{C}', \otimes', \mathbf{1}', \alpha', \lambda, \rho')$ categorías tensoriales y (F, d, e) y $(F', d', e') : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ funtores tensoriales. Una transformación natural $\alpha : F \to F'$ es **monoidal** si

$$\begin{tikzcd}
F(X) \otimes' F(Y) \arrow[r, "d_{X,Y}"] \arrow[d, "\alpha_X \otimes \alpha_Y"'] & F(X \otimes Y) \arrow[d, "\alpha_{X \otimes Y}"] \\
F'(X) \otimes F'(Y) \arrow[r, "d'_{X,Y}"] & F'(X \otimes Y)
\end{tikzcd}$$

Definición: Un funtor tensorial $F : (\mathcal{C}, \otimes, \mathbf{1}, \alpha, \lambda, \rho) \to (\mathcal{C}', \otimes', \mathbf{1}', \alpha', \lambda', \rho')$ es una **equivalencia** si existe un funtor tensorial $G : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ y existen isomorfismos naturales monoidales $\alpha : G \circ F \to id_C$ y $\beta : F \circ G \to id_{C'}$.

Definición: Sea $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbf{1}, \alpha, \rho, \lambda)$ una categoría tensorial. Una **simetría** es un isomorfismo natural $c : \otimes \to \otimes \circ \sigma$, en donde $\sigma : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ es el automorfismo que intercambia los tensores en $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$. En otras palabras, para todos los objetos X, Y, existe un isomorfismo natural $c_{X,Y} : X \otimes Y \to Y \otimes X$ tal que $c_{Y,X} \circ c_{X,Y} = id_{X \otimes Y}$, de manera que los respectivos diagramas de coherencia conmuten. Una **categoría tensorial simétrica** es una categoría tensorial dotada de una simetría.

Definición: Un **funtor simétrico** es un funtor tensorial F tal que $F(c_{X,Y}) = c'_{F(X),F(Y)}$.

La equivalencia entre categorías tensoriales simétricas se define de manera análoga a la equivalencia entre categorías tensoriales.

El ejemplo que nos concierne es la categoría $Rep_{\mathbb{C}}(G)$ de representaciones complejas de G, sobre la cual hablaremos en el siguiente capítulo. La simetría en $Rep_{\mathbb{C}}(G)$ está dada por $x \otimes y = y \otimes x$.

2.3. Grupos isocategóricos

Sean G_1 y G_2 dos grupos finitos. Si $Rep_{\mathbb{C}}(G_1)$ y $Rep_{\mathbb{C}}(G_2)$ son equivalentes como categorías tensoriales simétricas, entonces, como consecuencia de [3] (Teor. 3.2), se tiene $G_1 \cong G_2$. Lo mismo no ocurre si se consideran $Rep_{\mathbb{C}}(G_1)$ y $Rep_{\mathbb{C}}(G_2)$ únicamente como categorías tensoriales. Este hecho fue estudiado por Etinfof-Gelaki [4], Izumi-Kosaki [8] y Davydov [2] y motiva la siguiente definición y el desarrollo del resto de este texto.

Definición: Dos grupos G_1 y G_2 se llaman **isocategóricos** si $Rep_{\mathbb{C}}(G_1)$ y $Rep_{\mathbb{C}}(G_2)$ son tensorialmente equivalentes.

Definición: Un grupo finito G se dice **categóricamente rígido**, si todo grupo isocategórico a G es isomorfo a G.

Davydov, en [2] da una condición necesaria y suficiente para que dos grupos G_1 y G_2 sean isocategóricos, la cual enunciaremos en el teorema 8. Conviene mencionar un par de hechos precedentes a este resultado. El primero de ellos establece una correspondencia entre funtores tensoriales entre categorías de representaciones y álgebras de Galois.

Teorema 6. *Sean G, H grupos finitos. Entonces la categoría de funtores tensoriales $\mathbb{C}$-lineales entre $Rep_{\mathbb{C}}(G)$ y $Rep_{\mathbb{C}}(H)$ es equivalentes a la categoría de pares (A, τ), en donde A es una G-álgebra de Galois y $\tau : H \to Aut_G(A)$ es un homomorfismo de grupos.*

Demostración. Ver [2](Corolario 2.3) ∎

El siguiente teorema clasifica las G-álgebras de Galois sobre $\mathbb{C}$.

Teorema 7. *Sea A una G-álgebra de Galois sobre $\mathbb{C}$. Entonces existen un subgrupo H de G y un 2-cociclo no degenerado en H, tales que $A \cong Ind_H^G(\mathbb{C}_\alpha H)$.*

Demostración. Ver [2] (Teor. 3.8) ∎

Teorema 8. *Las categorías de representaciones sobre $\mathbb{C}$ de dos grupos finitos G_1 y G_2 son tensorialmente equivalentes si y sólo si existe un subgrupo normal y abeliano H de G_1 y existe un 2-cociclo no degenerado α sobre H tal que $[\alpha] = [\alpha^\sigma]$ para todo $\sigma \in G_1$, y un isomorfismo $G_2 \cong Aut_{G_1}(Ind_H^{G_1}(\mathbb{C}_\alpha H))$.*

Demostración. Ver [2](Corol. 6.2) ∎

Dado un grupo arbitrario G, y gracias al Teorema 8, un estudio detallado del grupo $Aut_G(Ind_H^G(\mathbb{C}_\alpha H))$ facilita la búsqueda de los grupos isocategóricos a un grupo dado G. Utilizaremos herramentas computacionales para realizar dicha búsqueda.

En lo que resta del capítulo nos referiremos por H a un subgrupo de G y por α a un 2-cociclo no degenerado sobre H. Llamaremos B al álgebra de grupo torcida $\mathbb{C}_\alpha H$ y llamaremos A al álgebra inducida $Ind_H^G(B)$. Los siguientes resultados nos permiten describir el grupo $Aut_G(B)$.

Proposición 4. *La aplicación:*

$$\begin{aligned} i : Aut_H(B) &\to Aut_G(A) \\ f &\mapsto i(f) : A \to A \end{aligned}$$

en donde $i(f)(\phi) = f \circ \phi$ es un homomorfismo inyectivo de grupos.

Demostración. Como la operación de los automorfismos es la composición, i es un morfismo de grupos. Para ver la inyectividad, supongamos que $i(f) = id$, es decir, $f \circ \phi = \phi$ para todo $\phi \in Aut_G(A)$. Si e es la identidad en G, entonces para todo $h \in H$ tenemos

$$f \circ \chi_h^e = \chi_h^e.$$

Evaluando en e obtenemos $f(u_h) = u_h$. Esto implica $f = id$ y por lo tanto i es inyectiva. ∎

Ahora consideremos nuevamente el conjunto $X = \{e = \sigma_0, ..., \sigma_n\}$ de representantes de las coclases en $G \backslash H$. Sabemos que G ejerce una acción transitiva sobre X dada por $g \cdot \sigma_i = \sigma_k$ si $g \cdot \sigma_i \in H\sigma_k$. Consideremos la aplicación

$$\begin{aligned} \Phi : Aut_G(A) &\to Aut_G(X) \\ F &\mapsto \bar{F} : X \to X, \end{aligned}$$

en donde $\bar{F}(\sigma_i) = \sigma_j$ si $F(\chi_e^{\sigma_i}) = \chi_e^{\sigma_j}$.

Lema 2. $Ker(\Phi) = Aut_H(B)$

Demostración. Sea $F \in Aut_G(A)$ con $F = i(f)$. Como f es automorfismo de álgebras, entonces $f(u_e) = u_e$. Por lo tanto $F(\chi_e^{\sigma_i})(\sigma_i) = f(\chi_e^{\sigma_i}(\sigma_i)) = u_e$ y $F(\chi_e^{\sigma_i})(g) = 0$ para $g \notin H\sigma_i$, lo que quiere decir $\bar{F}(\sigma_i) = \sigma_i$ por lo tanto $F \in Ker(\Phi)$. Es decir, $Aut_H(B) \subseteq Ker(\Phi)$.

Ahora, sea $F \in Ker(\Phi)$, es decir $F(\chi_e^{\sigma_i}) = \chi_e^{\sigma_i}$ para todo i. En primer lugar notemos que

$$\chi_h^{\sigma_i}\chi_e^{\sigma_i} = \chi_e^{\sigma_i}.$$

Aplicando F tenemos entonces

$$F(\chi_h^{\sigma_i}\chi_e^{\sigma_i}) = F(\chi_e^{\sigma_i}) \Rightarrow F(\chi_h^{\sigma_i})\chi_e^{\sigma_i} = F(\chi_e^{\sigma_i})$$

luego, al evaluar $F(\chi_h^{\sigma_i})$ en cualquier elemento $g \notin H\sigma_i$, obtenemos el valor 0, lo que quiere decir que en $F(\chi_h^{\sigma_i})$ sólo aparecen términos de la forma $\chi_{h_j}^{\sigma_i}$.

Sea $f : B \to B$ la función definida por $f(u_h) = F(\chi_h^e)(e)$. Éste es un homomorfismo de álgebras, veamos que es un isomorfismo. Gracias a que $F(\chi_h^e)$ sólo tiene términos de la forma $\chi_{h_i}^e$, f es inyectiva. Como las dos álgebras tienen la misma dimensión entonces f es sobreyectiva.

Veamos ahora que $i(f) = F$, es decir, $(F(\chi_h^{\sigma_i}))(g) = f(\chi_h^{\sigma_i}(g))$ para todo $g \in G$
<u>*Caso*1</u>: Si $g \notin H\sigma_i$, entonces $f(\chi_h^{\sigma_i}(g)) = f(0) = 0$. Por otro lado, se tiene

$$(F(\chi_h^{\sigma_i}))(g) = \left(\sum_k a_k \chi_{h_k}^{\sigma_i}\right)(g) = 0$$

<u>*Caso*2</u>: Si $g = h\sigma_i$ tenemos,

$$\begin{aligned}
F(\chi_h^{\sigma_i})(h_0\sigma_i) &= F(\chi_h^{\sigma_i})(h_0\sigma_i)\\
&= \sigma_i^{-1}F(\chi_h^e)(h_0\sigma_i)\\
&= F(\chi_h^e)(h_0)\\
&= h_0 \cdot F(\chi_h^e)(e)\\
&= h_0 \cdot f(u_h)\\
&= f(h_0 \cdot u_h)\\
&= f(h_0 \cdot \chi_h^{\sigma_i}(\sigma_i))\\
&= f(\chi_h^{\sigma_i}(h_0\sigma_i))
\end{aligned}$$

■

Teorema 9. $Aut_G(X) = N_G(H)/H$

Demostración. Dado $\bar{n} \in N_G(H)/H$, definamos $\phi_n : X \to X$ como $\phi_n(\sigma_i) = \sigma_j$ si $H\sigma_i n = H\sigma_j$, la cual es una biyección y además es G-equivariante porque $\phi_n(g \cdot \sigma_i)$ es el representante de $Hg\sigma_i n$ y éste es igual a $g \cdot \phi_n(\sigma_i)$.

Tenemos entonces definida $\phi : N_G(H) \to Aut_G X$ por $n \mapsto \phi_n$, cuyo kernel es H. Para ver que ϕ es sobreyectiva, sean $f \in Aut_G(X)$ y $\sigma_i = f(e)$. Consideremos los estabilizadores $St(e)$ y $St(\sigma_i)$ y veamos que son iguales:

$$\begin{aligned} g \in St(\sigma_i) &\Leftrightarrow g \cdot \sigma_i = \sigma_i \\ &\Leftrightarrow f(g \cdot \sigma_i) = f(\sigma_i) \\ &\Leftrightarrow g \cdot f(\sigma_i) = f(\sigma_i) \\ &\Leftrightarrow g \in St(\sigma_i). \end{aligned}$$

Luego $St(e) = St(\sigma_i)$. Sabemos que $St(e) = H$ y $St(\sigma_i) = \sigma_i^{-1} H \sigma_i = St(e)$. Como son iguales, entonces $\sigma_i^{-1} H \sigma_i = H$ y $f = \phi_{\sigma_i}$ donde $\sigma_i \in N_G(H)$. Luego ϕ es sobreyectiva y se sigue el resultado. ■

Dada una H-álgebra B, definimos

$$B_h = \{b \in B \mid ab = (h \cdot b)a\}$$

Lema 3. *Si α es un 2-cociclo no degenerado, entonces*$(\mathbb{C}_\alpha H)_h = \mathbb{C} u_h$

Demostración. Por la teoría general de extensiones Hopf-Galois, $\mathbb{C}_\alpha H = \oplus_{h \in H} (\mathbb{C}_\alpha H)_h$. Puesto que $u_h \in \mathbb{C}_\alpha H$ y los elementos u_h forman una base de $\mathbb{C}_\alpha H$, entonces $(C_\alpha H)_h = \mathbb{C} u_h$. ■

Lema 4. *Sea $\alpha \in Z^2(H, \mathbb{C}^*)$ un 2-cociclo no degenerado, entonces*

$$Aut_H(\mathbb{C}_\alpha H) \cong \hat{H} := Hom(H, \mathbb{C}^*).$$

Demostración. Consideremos la aplicación

$$\begin{aligned} \phi : \hat{H} &\to Aut_H(\mathbb{C}_\alpha H) \\ \lambda &\mapsto \hat{\lambda} : \mathbb{C}_\alpha H \to \mathbb{C}_\alpha H \end{aligned}$$

en donde $\hat{\lambda}(u_h) = \lambda(h) u_h$. Este es un homomorfismo de grupos ya que

$$\phi(\lambda\mu)(u_h) = \lambda\mu(h) u_h = \phi(\lambda) \circ \phi(\mu)(u_h).$$

Además, si $\phi(\lambda) = id$ claramente $\lambda(h) = 0$ para todo $h \in H$. Luego es inyectivo. La sobreyectividad se sigue del Lema 3. ■

Consideremos ahora la cadena de morfismos

$$Hom(H, \mathbb{T}) \xrightarrow{\cong} Aut_H(B) \xrightarrow{i} Aut_G(A) \xrightarrow{\mu} Aut_G(X) \xrightarrow{\cong} N_G(H)/H$$

en donde $\mu(F)(\sigma_i) = \sigma_j$ si $F(\chi_e^{\sigma_i}) = \sigma_j$. Utilizando la composición obtenemos la siguiente sucesión de grupos, exacta en $Aut_G(A)$ y en $Hom(H, \mathbb{T})$.

$$0 \to Hom(H, \mathbb{T}) \xrightarrow{i} Aut_G(A) \xrightarrow{\nu} N_G(H)/H. \tag{2.1}$$

Observación: Debido al Teorema 8, estamos interesados en estudiar el grupo $Aut_G(A)$ en el caso en el que H es un subgrupo normal y abeliano de G. Por lo tanto asumiremos de ahora en adelante esas condiciones.

Notemos que para H abeliano existe un isomorfismo entre H y $Hom(H, \mathbb{C}^*)$ y, si además H es normal, la sucesión 2.1 es equivalente a

$$0 \to H \xrightarrow{i} Aut_G(A) \xrightarrow{\nu} G/H. \tag{2.2}$$

Estudiaremos la sobreyectividad de ν. Sea $g \in G$, si α y α^σ son cohomólogos, veremos que existe un automorfismo $F_g \in Aut_G(A)$ tal que $F_g(\chi_e^e) = \chi_e^\sigma$. Para esto, son necesarias ciertas consideraciones.

En primer lugar, dado $g \in G$ y $\sigma_i \in X$, existen $h \in H$ y $\sigma_k \in X$ únicos tales que $g\sigma_i = h\sigma_k$. Denotaremos al elemento h por $\gamma(g, \sigma_i)$ y al elemento σ_k por $g \rightharpoonup \sigma_i$. Tenemos entonces aplicaciones

$$\begin{aligned} \rightharpoonup &: G \times X \to X \\ \gamma &: G \times X \to H \end{aligned}$$

tales que $g\sigma_i = \lambda(g, \sigma_i) g \rightharpoonup \sigma_i$. De manera análoga, para la acción por derecha de G sobre X tenemos aplicaciones

$$\begin{aligned} \leftharpoonup &: X \times G \to X \\ \omega &: X \times G \to H \end{aligned}$$

tales que $\sigma_i g = \omega(\sigma_i, g)\sigma_i \leftharpoonup g$.

Proposición 5. *Las aplicaciones $\rightharpoonup, \leftharpoonup, \gamma$ y ω cumplen las siguientes propiedades:*

1. $g_1 \rightharpoonup (g_2 \rightharpoonup \sigma_i) = g_1 g_2 \rightharpoonup \sigma_i$
2. $(\sigma_i \leftharpoonup g_1) \leftharpoonup g_2 = g_1 \rightharpoonup g_1 g_2$
3. $(g_1 \rightharpoonup \sigma_i) \leftharpoonup g_2 = g_1(\sigma_i \leftharpoonup g_2)$
4. ${}^{g_1}\omega(\sigma_i, g_2)\gamma(g_1, \sigma_i \leftharpoonup g_2) = \gamma(g_1, \sigma_i)\omega(g_1 \rightharpoonup \sigma_i, g_2)$

en donde, por ${}^\sigma h$ nos referimos a $\sigma h \sigma^{-1}$.

Demostración. 1. En primer lugar

$$(g_1 g_2)\sigma_i = \gamma(g_1 g_2, \sigma_i)(g_1 g_2 \rightharpoonup \sigma_i).$$

por otro lado, tenemos

$$\begin{aligned} g_1(g_2\sigma_i) &= g_1(\gamma(g_2, \sigma_i) g_2 \rightharpoonup \sigma_i) \\ &= g_1\gamma(g_2, \sigma_i) g_1^{-1} g_1(g_2 \rightharpoonup \sigma_i) \\ &= g_1\gamma(g_2, \sigma_i) g_1^{-1}\gamma(g_1, g_2 \rightharpoonup \sigma_i) g_1 \rightharpoonup (g_2 \rightharpoonup \sigma_i). \end{aligned}$$

Debido a la unicidad de la factorización $g = h\sigma_i$, obtenemos

$$(g_1 g_2 \rightharpoonup \sigma_i) = g_1 \rightharpoonup (g_2 \rightharpoonup \sigma_i).$$

2. La demostración es análoga.
3. Por un lado

$$\begin{aligned}(g_1\sigma_i)g_2 &= \gamma(g_1, \sigma_i)(g_1 \rightharpoonup \sigma_i)g_2 \\ &= \gamma(g_1, \sigma_i)\omega(g_1 \rightharpoonup \sigma_i, g_2)(g_1 \rightharpoonup \sigma_i) \leftharpoonup g_2.\end{aligned}$$

Por otro lado tenemos

$$\begin{aligned}g_1(\sigma_i g_2) &= g_1\omega(\sigma_i, g_2)\sigma_i \leftharpoonup g_2 \\ &= g_1\omega(\sigma_i, g_2)g_1^{-1}g_1(\sigma_i \leftharpoonup g_2) \\ &=^{g_1} \omega(\sigma_i, g_2)g_1(\sigma_i \leftharpoonup g_2) \\ &=^{g_1} \omega(\sigma_i, g_2)\gamma(g_1, \sigma_i \leftharpoonup g_2)g_1 \rightharpoonup (\sigma_i \leftharpoonup g_2).\end{aligned}$$

Nuevamente, por la unicidad de la factorización, obtenemos 3 y 4.

■

Recordemos ahora la fórmula 1.4, que expresa la acción de G en B. Dados $\sigma_i \in X$ y $g \in G$, existen elementos $\sigma_k \in X$ y $h \in H$ tales que $\sigma_k g = \hat{h}\sigma_i$.

$$g \cdot \chi_h^{\sigma_i} = \lambda \chi_{\hat{h}h\hat{h}^{-1}}^{\sigma_k}.$$

y $\lambda = \alpha(\hat{h}, h)\alpha(\hat{h}h, \hat{h}^{-1})\alpha(\hat{h}, \hat{h}^{-1})^{-1}$. Notemos que, en el caso en el que H es abeliano el subíndice de χ es simplemente h y, en el caso en el que α es un bicarácter, la expresión λ se puede simplificar de la siguiente manera.

$$\begin{aligned}\nu &= \alpha(\hat{h}, \hat{h}^{-1})^{-1}\alpha(\hat{h}, h)\alpha(\hat{h}h, \hat{h}^{-1}) \\ &= \alpha(\hat{h}, \hat{h})\alpha(\hat{h}, h)\alpha(\hat{h}, \hat{h}^{-1})\alpha(h, \hat{h}^{-1}) \\ &= \alpha(\hat{h}, \hat{h})\alpha(\hat{h}, h)\alpha(\hat{h}, \hat{h})^{-1}\alpha(h, \hat{h}w^{-1}) \\ &= \alpha(\hat{h}, h)\alpha(h, \hat{h}^{-1}) \\ &= \alpha(\hat{h}, h)\alpha(h, \hat{h})^{-1} \\ &:= Alt(\alpha)(\hat{h}, h)\end{aligned}$$

Obtenemos entonces

$$g \cdot \chi_h^{\sigma_i} = Alt(\alpha)(\hat{h}, h)\chi_h^{\sigma_k}.$$

En términos de las funciones ω y $\leftharpoonup$, esta expresión se convierte en

$$g \cdot \chi_h^{\sigma_i} = Alt(\alpha)(\omega(\sigma_i, g^{-1})^{-1}, h)\chi_h^{\sigma_i \leftharpoonup g^{-1}}.$$

Como $Alt(\alpha)$ es un bicaracter antisimétrico, entonces

$$g \cdot \chi_h^{\sigma_i} = Alt(\alpha)(h, \omega(\sigma_i, g^{-1}))\chi_h^{\sigma_i \leftharpoonup g^{-1}}. \tag{2.3}$$

Observación: De ahora en adelante denotaremos las expresiónes $\sigma h \sigma^{-1}$ y $\sigma^{-1} h \sigma$ por ${}^{\sigma}h$ y h^{σ} respectivamente. También, dado un 2-cociclo α, denotaremos por α^{σ} al 2-cociclo definido por $\alpha^{\sigma}(a,b) = ({}^{\sigma}a, {}^{\sigma}b)$.

Teorema 10. *Sea H un subgrupo abeliano y normal de G, sea α un bicaracter en H y $g \in G$. Sea $\lambda : H \to \mathbb{C}$ tal que*

$$\frac{\alpha(h,h')}{\alpha^{g}(h,h')} = \frac{\lambda(h)\lambda(h')}{\lambda(hh').}$$

Entonces, la aplicación $F_g : A \to A$ definida por

$$F_g(\chi_h^{\sigma_i}) = Alt(\alpha)({}^{g}h, \gamma(g,\sigma_i))\lambda(h)\chi_{{}^{g}h}^{g \rightharpoonup \sigma_i} \tag{2.4}$$

es un automorfismo de G-álgebras que cumple $F_g(\chi_e^e) = \chi_e^{g \rightharpoonup e}$.

Demostración. Por un lado

$$\begin{aligned} F_g(\chi_h^{\sigma_i}\chi_{h'}^{\sigma_i}) &= \alpha(h,h')F_g(\chi_{hh'}^{\sigma_i}) \\ &= \alpha(h,h')Alt(\alpha)({}^{g}(hh'), \gamma(g,\sigma_i))\lambda(hh')\chi_{{}^{g}(hh')}^{g \rightharpoonup \sigma_i}. \end{aligned}$$

Por otro lado tenemos

$$\begin{aligned} F_g(\chi_h^{\sigma_i})F_g(\chi_{h'}^{\sigma_i}) &= Alt(\alpha)({}^{g}h, \gamma(g,\sigma_i))\lambda(h)Alt(\alpha)({}^{g}h', \gamma(g,\sigma_i)) \\ &\lambda(h')\chi_{{}^{g}h}^{g \rightharpoonup \sigma_i}\chi_{{}^{g}h'}^{g \rightharpoonup \sigma_i} \\ &= Alt(\alpha)({}^{g}(hh'), \gamma(g,\sigma_i))\lambda(h')\lambda(h)\alpha({}^{g}h, {}^{g}h')\chi_{{}^{g}(hh')}^{g \rightharpoonup \sigma_i}. \end{aligned}$$

Como $\frac{\alpha}{\alpha^g} = \delta(\lambda)$, entonces las dos expresiones son iguales. Por lo tanto F_g es morfismo de álgebras. Veamos que preserva la acción de G.

$$\begin{aligned} s \cdot F_g(\chi_h^{\sigma_i}) &= Alt(\alpha)({}^{g}h, \gamma(g,\sigma_i))\lambda(h)s \cdot \chi_{{}^{g}h}^{g \rightharpoonup \sigma_i} \\ &= Alt(\alpha)({}^{g}h, \gamma(g,\sigma_i))\lambda(h)Alt(\alpha)({}^{g}h, \omega(g \rightharpoonup \sigma_i, s^{-1}))\chi_{{}^{g}h}^{(g \rightharpoonup \sigma_i) \leftharpoonup s^{-1}}. \end{aligned}$$

Por otro lado se tiene

$$\begin{aligned} F_g(s \cdot \chi_h^{\sigma_i}) &= Alt(\alpha)(h, \omega(\sigma_i, s^{-1}))F_g(\chi_h^{\sigma_i \leftharpoonup s^{-1}}) \\ &= Alt(\alpha)(h, \omega(\sigma_i, s^{-1}))Alt(\alpha)({}^{g}h, \gamma(g, \sigma_i \leftharpoonup s^{-1}))\lambda(h)\chi_{{}^{g}h}^{g \rightharpoonup (\sigma_i \leftharpoonup s^{-1})}. \end{aligned}$$

Como $Alt(\alpha)(h,h') = Alt(\alpha^g)(h,h')$ para todo h, h', entonces las dos expresiones son iguales si

$$Alt(\alpha)({}^{g}h, \gamma(g,\sigma_i)\omega(g \rightharpoonup \sigma_i, s^{-1}) = Alt({}^{g}h, {}^{g}\omega(\sigma_i, s^{-1})\gamma(g, \sigma_i \leftharpoonup s^{-1})),$$

lo cual se sigue de la Proposición 4.

■

Corolario 1. *Sea H un subgrupo normal y abeliano de G y α un 2-cociclo no degenerado tal que $\alpha^{\sigma} \cong \alpha$ para todo $\sigma \in G$. Entonces la aplicación ν en la sucesión 2.2 es sobreyectiva. Como consecuencia, $|Aut_G(A)| = |G|$.*

Demostración. Como para todo $\sigma \in G$ los 2-cociclos α^σ y α son cohomólogos, entonces, para cada σ hemos visto que existe un automorfismo $F_\sigma$en $Aut_G(A)$ tal que $F_\sigma(\chi_e^e) = \chi_e^\sigma$, lo que implica que μ es sobreyectiva y por tanto ν también lo es.
De la sucesión exacta

$$1 \to H \xrightarrow{i} Aut_G(A) \xrightarrow{\nu} G/H \to 1 \tag{2.5}$$

se concluye $|Aut_G(A)| = |G|$. ■

Observación: Dadas las condiciones del Corolario 1, y debido a la exactitud de la sucesión (2.5), para calcular el grupo $Aut_G(A)$ basta con buscar una preimagen bajo v de $\bar{\sigma}$ para cada $\bar{\sigma} \in G/H$. Definamos por $\nu^{-1}(G/H)$ a este conjunto de preimágenes. Entonces $Aut_G(A) =< \nu^{-1}(G/H) \cup i(H) >$. Notemos que, como H es abeliano, entonces $H \cong \hat{H}$. Debido a la observación al final de la Sección 2.1, el grupo $\hat{H}$ consiste de todos los caracteres irreducibles c en H. El automorfismo asociado $i(c)$ está dado por

$$i(c)(\chi_h^\sigma) = c(h)\chi_h^\sigma. \tag{2.6}$$

CAPÍTULO 3

Grupos isocategóricos de orden 32 y 64

Obtenemos aquí la construcción explícita del grupo $Aut_G(A)$. Esto nos permite encontrar todos los grupos isocategóricos de órdenes 32 y 64, mediante un algoritmo que implementamos en GAP, cuyos pseudocódigos presentamos al final del capítulo. Comenzamos con una caracterización de los 2-cociclos no degenerados sobre H, cuando H es abeliano.

3.1. Bicarácteres y $2-$cociclos sobre grupos abelianos finitos

Es posible estudiar los 2-cociclos no degenerados, sobre un grupo abeliano finito G a través de los bicarácteres sobre G. Denotaremos por T al círculo unitario en $\mathbb{C}$. Sean

$$\begin{aligned}
\chi^2(G,\mathbb{T}) &= \{f : G\times G \to \mathbb{T} \mid f \text{ es un bicarácter } \}\\
\chi^2_s(G,\mathbb{T}) &= \{f : G\times G \to \mathbb{T} \mid f\text{es un bicaracter tal que } f(a,b)=f(b,a)\}\\
\chi^2_a(G,\mathbb{T}) &= \{f : G\times G \to \mathbb{T} \mid f\text{es un bicaracter tal que } f(a,b)=f(b,a)^{-1}\}.
\end{aligned}$$

Definimos la aplicación $Alt : Z^2(G,\mathbb{T}) \to \chi^2_a(G,\mathbb{T})$ como

$$Alt(\alpha)(x,y) = \frac{\alpha(x,y)}{\alpha(y,x)}.$$

Proposición 6. *La inclusión $\chi^2(G,\mathbb{T})/\chi^2_s(G,\mathbb{T}) \subseteq H^2(G,\mathbb{T})$ y la aplicación Alt inducen isomorfismos*

$$\chi^2(G,\mathbb{T})/\chi^2_s(G,\mathbb{T}) \cong H^2(G,\mathbb{T}) \cong \chi^2_a(G,\mathbb{T})$$

Demostración. Primero veamos que $Alt(\alpha)$ es un bicarácter.

$$\begin{aligned} Alt(\alpha)(ab,c) &= \frac{\alpha(ab,c)}{\alpha(c,ab)} \\ &= \frac{\alpha(a,bc)\alpha(b,c)\alpha(a,b)^{-1}}{\alpha(ca,b)\alpha(c,a)\alpha(a,b)^{-1}} \\ &= \frac{\alpha(a,cb)\alpha(b,c)}{\alpha(ca,b)\alpha(c,a)} \\ &= \frac{\alpha(ac,b)\alpha(a,c)\alpha(c,b)^{-1}\alpha(b,c)}{\alpha(ca,b)\alpha(c,a)} \\ &= Alt(\alpha)(a,c)Alt(\alpha)(b,c). \end{aligned}$$

Es claro que además $Alt(\alpha)$ es alternante. Como toda cofrontera es simétrica, puesto que G es abeliano, entonces π está bien definida. Por otro lado, dado $\alpha \in Z^2$, consideremos la sucesión exacta

$$0 \to \mathbb{T} \xrightarrow{\phi} A \rtimes_\alpha \mathbb{T} \xrightarrow{\pi} A \to 0.$$

Aquí, la multiplicación en $A \rtimes_\alpha \mathbb{T}$ está dada por

$$(a_1, k_1) \cdot (a_2, k_2) = (a_1 a_2, k_1 k_2 \alpha(a_1, a_2)^{-1})$$

y los morfismos están dados por $\phi(k) = (e, k + 1)$, y $\pi(a, k) = a$. Ésta es una extensión central de A por $\mathbb{T}$. Si α es simétrico, la extensión es abeliana y, como $\mathbb{T}$ es un grupo divisible, entonces la extensión se escinde. Sea $f : A \to A \times \mathbb{T}$ tal que $\pi \circ f = id_A$ y sean $a, b \in A$. Entonces $f(a) = (a, k_a)$ y $f(b) = (b, k_b)$ para algunos $k_a, k_b \in \mathbb{T}$. Como f es un morfismo de grupos, tenemos

$$(ab, k_a k_b \alpha(a, b)^{-1}) = f(a)f(b) = f(ab) = (ab, k_{ab}),$$

por lo tanto $\alpha(a, b) = k_a k_b k_{ab}^{-1}$, es decir α es una cofrontera. Esto prueba, en primer lugar, que la aplicación

$$\chi^2(G, \mathbb{T})/\chi^2_s(G, \mathbb{T}) \to H^2(G, \mathbb{T})$$

está bien definida y, en segundo lugar, que π es inyectiva. Como toda cofrontera es simétrica, ϕ también es inyectiva.

Para ver la sobreyectividad de ambos morfismos, tengamos en cuenta que $G = G_1 \times \cdots \times G_n$, donde cada G_i es cíclico. Dado $a_i \in G_i$, denotaremos por $a_i e_i$ al elemento en G que tiene la identidad en todas las componentes, excepto en la i-ésima, en la cual está a_i. Para cualquier bicarácter $f \in \chi^2(G, \mathbb{T})$, su restricción a G_i es un bicarácter en $\chi^2(G_i, \mathbb{C})$ y, para grupos cíclicos, se tiene que todo bicarácter es simétrico, por lo tanto,

$$f(a_i e_i, b_i e_i) = f(b_i e_i, a_i e_i) \text{ para todo } i.$$

El hecho de que G_i sea cíclico, implica también que, dado $f \in \chi^2_a(G, \mathbb{T})$, entonces

$$f(a_i e_i, b_i e_i) = 1.$$

Veamos que $\pi \circ \phi$ es una aplicación sobreyectiva. Sea $f \in \chi_a^2(G, \mathbb{T})$, definamos un bicarácter $f_1 \in \chi^2(G, \mathbb{T})$ por

$$f_1((a_1, ..., a_n), (b_1, ..., b_n)) = \prod_{i<j} f(a_i e_i, b_j e_j).$$

Entonces,

$$\begin{aligned} Alt(f_1)((a_1, ..., a_n), (b_1, ..., b_n)) &= \frac{f_1((a_1, ..., a_n), (b_1, ..., b_n))}{f_1((b_1, ..., b_n), (a_1, ..., a_n))} \\ &= \frac{\prod_{i<j} f(a_i e_i, b_j e_j)}{\prod_{i<j} f(b_i e_i, a_j e_j)} \\ &= \prod_{i<j} (a_i e_i, b_j e_j) \prod_{i<j} (a_j e_j, b_i e_i) \prod_{i} (a_i e_i, b_i e_i) \\ &= f((a_1, ..., a_n), (b_1, ..., b_n)). \end{aligned}$$

Por lo tanto ϕ y π son sobreyectivos, luego son isomorfismos. ■

Podemos, entonces, identificar clases de cohomología de 2-cociclos sobre G con bicaracteres alternantes sobre G. Debido a que un 2-cociclo sobre G es nodegenerado si y sólo si su imagen bajo Alt es un bicarácter no degenerado, podemos en particular identificar clases de 2-cociclos no degenerados con formas alternantes no degenerados. Esto nos permitirá utilizar resultados del álgebra lineal para estudiarlos. Recordemos algunos hechos importantes.

Dada una forma bilineal alternante no degenerada en un espacio V y dados $u, v \in V$ con $B(u, v) \neq 0$, entonces u y v son linealmente independientes. Supongamos que $B(u, v) = b \neq 0$ y sean $u_1 = b^{-1}u, v_1 = v$. Entonces $B(u_1, v_1) = 1$. El espacio generado por u_1 y v_1 se llama **espacio hiperbólico**.

Teorema 11. *Sea B una forma alternada y no degenerada sobre V. Entonces*

$$V = W_1 \oplus ... \oplus W_n$$

en donde cada W_i es un espacio hiperbólico. Como consecuencia V tiene una base de la forma $\{u_1, ..., u_m, v_1, ..., v_m\}$, en donde $2m = n$ y la matriz asociada tiene la forma

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & I_m \\ -I_m & 0 \end{pmatrix}.$$

Demostración. Ver [6] (Teor. 2.10) ■

En estas condiciones se dice que V es un **espacio simpléctico** y a la base mencionada se le llama **base simpléctica**. Una transformación lineal invertible τ en V se dice simpléctica si $B(\tau(u), \tau(v)) = B(u, v)$ para todo $u, v \in V$. El grupo de transformaciones simplécticas en V se denomina **grupo simpléctico** y se denota $Sp(V)$. Sea τ una transformación invertible en V y T su matriz representante, con respecto a la base simpléctica, entonces $\tau \in Sp(V)$ si y solo si $T^t J T = J$.

Conviene recordar que, dadas dos formas bilineales B_1 y B_2 sobre un espacio V, estas se dicen **equivalentes** si existe una transformación lineal invertible τ tal que $B_2(\tau(x), \tau(y)) = B_1(x, y)$.

Proposición 7. *Si B_1 y B_2 son equivalentes, existen bases con respecto a las cuales la matriz que representa a B_1 y a B_2 es la misma.*

Demostración. Sea $\{u_1, ..., u_n\}$ una la base de V y $\hat{B_1}$ la matriz de B_1 con respecto a esa base. Sea τ tal que $B_2(\tau(x), \tau(y)) = B_1(x, y)$ y definamos $w_i = \tau(v_i)$. Entonces

$$B_1(v_i, v_j) = B_2(\tau(x), \tau(y)) = B_2(w_i, w_j). \qquad \blacksquare$$

Recordemos un último hecho útil.

Proposición 8. *El grupo $Gl(V)$ actúa transitivamente en el conjunto de las matrices antisimétricas no degeneradas.*

Demostración. Sean M_1 y M_2 antisimétricas no degeneradas. Éstas representan dos formas B_1 y B_2 no degeneradas y antisimétricas. Luego existe una base simpléctica para V. Por lo tanto B_1 y B_2 son equivalentes, es decir, existe una isometrría entre ellas, es decir, un isomorfismo τ en V tal que $B_1(\tau(u), \tau(v)) = B_2(u, v)$, es decir $T^t\hat{B}_1T = \hat{B}_2$, donde T es la matriz que representa a τ. Esto hace que la acción de $Gl_n(V)$ dada por T^tMT sea transitiva. $\blacksquare$

3.2. Cálculo de grupos isocategóricos de orden 32 y 64

Sea G un grupo finito y H un subgrupo normal y abeliano. Teniendo en cuenta el Teorema 8, y con el fin de encontrar grupos isocategóricos a G, nos interesa

1. Encontrar representantes de las clases de cohomología de los 2-cociclos no degenerados en H.

2. Para cada uno de dichos representantes α, queremos verificar si α y α^σ son cohomólogos para todo $\sigma \in G$. Basta con verificar si α y α^σ son cohomólogos para todo $\bar{\sigma} \in G/H$.

3. Para cada representante α que cumpla 1 y 2, calcular el grupo $G' = Aut_G(Ind_H^G(\mathbb{C}_\alpha H))$. Si $G' \ncong G$, entonces G' y G son isocategóricos.

Se sabe ([4] (1.4)) que todo grupo de orden n tal que para todo m, $2^{2m} \nmid n$, es categóricamente rígido. Por esta razón nos interesan los grupos cuyo orden sea múltiplo de una potencia de dos. También se conoce ([12] Teor. 6.3) que todo grupo de orden menor que 32 es categóricamente rígido. Esta es la razón por la cual nos concentramos, en primer lugar, en grupos de orden 32 y 64.

Con respecto a los subgrupos de G, tengamos en cuenta que según Etingof y Gelaki ([4] (1.4)), si G no es isocategóricamente rígido, entonces G admite un subgrupo normal y abeliano de orden 2^{2m}. A partir de este subgrupo se construye el álgebra de Galois que hace a G isocategórico a otro grupo G' no isomorfo a G. Por esta razón, estamos interesados únicamente en subgrupos cuyo orden sea una potencia de 2. Adicionalmente, es importante tener en cuenta que no todo subgrupo de G admite 2-cociclos no degenerados. Debido a un teorema de Yamasaki ([9] Teor 4.8), dado un grupo finito y abeliano H, entonces existe un 2-cociclo no degenerado si y sólo si $H = B \times B$, para algún grupo B.

Por esta razón, para grupos de orden 32 y 64, los únicos subgrupos a tener encuenta son aquellos isomorfos a

- $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
- $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$
- $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

Abordaremos los tres pasos mencionados de la siguiente manera:

PASO 1

Según la Proposición 6, a cada $[\alpha] \in H^2(H, \mathbb{T})$ le corresponde la clase de un bicaracter en $\chi^2(H, \mathbb{T})/\chi_s^2(H, \mathbb{T})$. Consideramos los subgrupos H de la forma $(\mathbb{Z}_2)^2$ y $(\mathbb{Z}_2)^4$ como espacios vectoriales sobre $\mathbb{Z}_2$ y aquellos de la forma $(\mathbb{Z}_4)^2$ como $\mathbb{Z}_4$-módulos. En ambos casos los bicarácteres son formas bilineales. Denotaremos por M_α a la matriz que representa la clase de equivalencia de la forma bilineal correspondiente a α.

La Propisición 6 también da una correspondencia entre clases de cohomología de 2-cociclos no degenerados y bicaracteres alternantes no degenerados. La correspondencia está dada por $\bar{\alpha} \to Alt(\alpha)$. De nuevo, en los casos que nos conciernen, los bicarácteres alternantes no degenerados son formas bilineales representadas por matrices antisimétricas no degeneradas. La matriz antisimétrica no degenerada correspondiente a un 2-cociclo no degenerado α es, entonces, $Alt(M_\alpha) = M_\alpha - M_\alpha^T$.

Notemos que, sobre $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ la única matriz antisimétrica no degenerda es J_2, y sobre $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$ las únicas matrices con estas características son J_4 y $-J_4$. Consideremos la matriz

$$R_m = \begin{pmatrix} 0 & I_m \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

y notemos, adicionalmente, que $Alt(R_m) = J_{2m}$. Aquí, $R_m = M_\alpha$, con $\alpha(x, y) = x^T R_m y$.

Para encontrar todas las matrices no degeneradas y antisimétricas sobre $(\mathbb{Z}_2)^n$, será útil el siguiente hecho.

Proposición 9. *Sea p un número primo arbitrario. Sea $G = Gl_n(\mathbb{Z}_p)$, sea $S = Sp_n(\mathbb{Z}_p)$ y sea $Y = \{e = Y_0, Y_1, ..., Y_m\}$ un conjunto de representantes de G/S. Sea $u_1, ..., u_n$ la base canónica para el espacio $(\mathbb{Z}_p)^n$. Entonces*

1. *Existe una correspondencia biyectiva entre las matrices antisimétricas no degeneradas con entradas en $\mathbb{Z}_p$ y los elementos de Y.*

2. *Dada una matriz antisimétrica no-degenerada M, hay una base con respecto a la cual, la forma bilineal asociada a M está representada por la matriz simpléctica J_n. Dicha base está dada por $\{Y_i^{-1}u_1, ..., Y_i^{-1}u_n\}$ para cada $Y_i \in Y$.*

Demostración. Para cada $Y_i \in Y$, definimos $M_i = Y_i^T J_n Y_i$. Entonces

$$M_i = M_j \Leftrightarrow (M_j M_i^{-1})^T J_n M_j M_i^{-1} = J \Leftrightarrow M_j M_1^{-1} \in Sp(\mathbb{Z}_2).$$

Además, para cualquier matriz antisimétrica no degenerada M, por la proposición 8, existe Y_i tal que $Y_i^T J_n Y_i = M$.
Esto significa que Y_i es una isometría entre J_n y M. Por lo tanto, de acuerdo con la proposición 7, la forma asociada a M con la base $\{Y_i^{-1}u_1, ..., Y_i^{-1}u_n\}$ tiene como matriz a J_n. ■

Para $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ hay 28 matrices antisimétricas no degeneradas. Esto fué posible de calcular utilizando GAP, el cual tiene implementado el cálculo del grupo simpléctico y el grupo especial lineal para un campo finito dado.

Observación: La importancia de la Proposición 9 radica en que, en lugar de realizar cálculos con las diferentes 28 matrices antisimétricas no degeneradas, basta con cambiar la base en cada caso y realizar los cálculos únicamente con la matriz simpléctica.

PASO 2

Veamos ahora cómo verificar fácilmente si $[\alpha] = [\alpha^\sigma]$, para el caso en que $H \cong (\mathbb{Z}^4)$.

Proposición 10. *Sea α un 2-cociclo nodegenerado sobre $H = (\mathbb{Z}_2)^4$ y sea $\sigma \in G$. Sea $B_1 = \{u_1, ..., u_n\}$ la base canónica y sea $B_2 = \{Y_i^{-1}u_1, ..., Y_i^{-1}u_n\}$ el cambio de base mencionado en la Proposición 9. Sea S_σ a la matriz que representa el automorfismo de conjugación por σ, con respecto a B_1. Entonces,*

$$[\alpha] = [\alpha^\sigma] \Leftrightarrow (S_\sigma)_{[B_2]} \in Sp(\mathbb{Z}_p)$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
[\alpha] = [\alpha^\sigma] &\Leftrightarrow [\frac{\alpha}{\alpha^\sigma}] = [1] \\
&\Leftrightarrow S_\sigma^T (M_\alpha)_{[B_1]} S_\sigma - M_\alpha = 0. \\
&\Leftrightarrow ((S_\sigma)_{[B_2]})^T J (S_\sigma)_{[B_2]} - J = 0 \\
&\Leftrightarrow (S_\sigma)_{[B_2]} \in Sp(\mathbb{Z}_2).
\end{aligned}$$

■

PASO 3

Teniendo en cuenta la observación al final de la sección 2.3, nos concentramos en calcular el grupo $Aut_G(A) = \langle \nu^{-1}(G/H) \cup i(H) \rangle$. Describimos los automorfismos en $i(H)$ y en $\nu^{-1}(G/H)$ mediante las matrices que los representan.

En primer lugar, debido a la igualdad (2.6), $i(H)$ consiste de matrices diagonales: una por cada representación irreducible en H.

Por otro lado, dado $\bar{\sigma} \in G/H$, y α alternante y no degenerado en H, entonces el automorfismo $\nu^{-1}(\bar{\sigma})$ está dado por (2.4). Por tanto necesitamos calcular explícitamente la función λ.

Con este fin recordemos algunas consideraciones en la demostracón del Teorema 1. Sea $\alpha \in Z^2(G_1 \times G_2, A)$ tal que sus restricciones $\alpha_i : G_i \times G_i \to A$ son cofrontera en $Z^2(G_1, A)$ y $Z^2(G_2, A)$ respectivamente, digamos

$$\alpha_i = \delta(t_i) \text{ con } t_i : G_i \to A.$$

Sea $t : G_1 \times G_2 \to A$ definida por $t(g_1 g_2) \to t_1(g_1)t_2(g_2)$ y sea $\beta = \delta t$. Al restringir β a $G_1 \times G_1$ tenemos

$$\beta(g_1, g_1') = \frac{t(g_1)t(g_1')}{t(g_1 g_1')} = \frac{t_1(g_1)t_1(g_1')}{t_1(g_1 g_1')} = \alpha_1(g_1, g_1').$$

De la misma forma, $\beta(g_2, g_2') = \alpha_2(g_2.g_2')$. Por lo tanto, al hacer $f = \beta/\alpha$ tenemos que las restricciones f_i de f a $G_i \times G_i$ son triviales.

De acuerdo con el teorema, entonces $f = \delta s$, donde $s(g_1 g_2) = f(g_1, g_2)^{-1}$. Luego,

$$\alpha = \frac{\beta}{f} = \frac{\delta t}{\delta s} = \delta(\frac{t}{s})$$

y la función buscada es $\lambda = t/s$.

Proposición 11. *Sea $G = \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_m$ (con $m = 2, 4$) y sea α un bicaracter simétrico (el cual, entonces, visto como 2-cociclo es cofrontera de $Z^2(G, \mathbb{C}^*)$), cuya matriz está dada por*

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}.$$

Entonces, una función $\lambda_M : G \to \mathbb{C}^*$ tal que $\delta(\lambda_M) = \alpha$ está dada por

$$\lambda_M((x, y)) = \frac{t_a(x, 0)t_a(0, y)}{\alpha((x, 0), (0, y))}, \tag{3.2}$$

en donde $t_a(x, 0) = \zeta_{2m}^{-ax^2}$ y $t_c(0, y) = \zeta_m^{-cy^2}$, con ζ_m raíz m-ésima de la unidad.

Demostración. Sea $G = G_1 \times G_2$, en donde $G_1 = G_2 = \mathbb{F}_2$. Sea α cofrontera en $Z^2(\mathbb{F}_m \times \mathbb{F}_m, \mathbb{C}^*)$, entonces la matriz que representa a α como bicaracter es simétrica, digamos

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}.$$

Debido al teorema 1, las restricciones de α_i a $G_1 \times G_1$ y $G_2 \times G_2$ son cofrontera. Sea $\alpha_1 : G_1 \times G_1 \to \mu_2$ la restricción de α. Entonces $\alpha_1 = \delta t_1$ y se tiene

$$\begin{aligned}\zeta_m^{ax^2} &= \alpha((x,0),(x,0)) = \alpha_1((x,0),(x,0)) \\ &= \frac{t_1(x,0)t_1(x,0)}{t_1(2x,0)}\end{aligned}$$

entonces,

$$\zeta_m^{ax^2} t_1(2x,0) = t_1(x,0)^2$$

Utilizando esta fórmula recusivamente obtenemos $t_1(x,0) = \zeta_{2m}^{-ax^2}$. Análogamente se tiene $t_1(x,0) = \zeta_{2m}^{-cx^2}$.

Observación: Llamaremos $t_a := t_1$ y $t_c := t_2$, por conveniencia de notación.

Definamos $t : \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{C}^*$ por $t((x,y)) = t_a(x,0)t_c(0,y)$ y sea $\beta = \delta t$. Entonces, $f = \frac{\beta}{\alpha}$ tiene restricciones triviales y, de acuerdo con el Teorema 1, $f = \delta s$ con $s((x,y)) = f((x,0),(0,y))^{-1}$, es decir,

$$s(x,y) = \left(\frac{\beta((x,0),(0,y))}{\alpha((x,0),(0,y))}\right)^{-1}$$

lo cual, de acuerdo a la definición de β, es igual a

$$s(x,y) = \left(\frac{1}{\alpha((x,0),(0,y))}\right)^{-1} = \alpha((x,0),(0,y))$$

De nuevo, de acuerdo al teorema, y siendo M la matriz que representa a α, se tiene $\alpha = \delta\lambda_M$ donde $\lambda_M = \frac{t}{s}$. Más explícitamente

$$\lambda_M((x,y)) = \frac{t_a(x,0)t_b(0,y)}{\alpha((x,0),(0,y))}$$

■

Proposición 12. *Sea $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Sea $\chi_s^2(G,\mathbb{C}^*)$, es decir, α bicaracter simétrico cuya matriz asociada está dada por*

$$M_\alpha = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & b_1 & b_2 \\ a_2 & a_3 & b_3 & b_4 \\ b_1 & b_3 & c_1 & c_2 \\ b_2 & b_4 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

entonces, una función $\lambda : G \to \mathbb{C}^*$ talque $\alpha = \delta(\lambda)$ está dada por

$$\lambda(a,b,c,d) = \frac{\lambda_A(a,b)\lambda_C(c,d)}{(-1)^{(a,b,0,0)^t M(0,0,c,d)}} \tag{3.3}$$

$$= \frac{\lambda_A(a,b)\lambda_C(c,d)}{(-1)^{(a,b)^t B(c,d)}} \tag{3.4}$$

en donde

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_2 & c_4 \end{pmatrix}$$

y $\lambda_M((x,y))$ está definida como en la Proposición 11.

Demostración. Sea $\alpha \in Z^2(G,\mathbb{C}^*)$, entonces, las restricciones α_i de α a $G_i \times G_i$ son cofronteras en $Z^2(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$. Consideremos la matriz que representa a α como forma bilineal.

$$M_\alpha = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & b_1 & b_2 \\ a_2 & a_3 & b_3 & b_4 \\ b_1 & b_3 & c_1 & c_2 \\ b_2 & b_4 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

El primer bloque corresponde a la restricción α_1 de α a $G_1 \times G_1$, la cual es cofrontera en $H^2(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, \mathbb{C}^*)$ luego $\alpha_1 = \delta\lambda_A$, donde A es el primer bloque de M_α y λ_A está dada por (3.1). De la misma forma, $\alpha_2 = \delta\lambda_C$ donde C es el bloque inferior derecho de M_α.

Definamos entonces $t : G_1 \times G_2 \to \mathbb{F}_2$ por $t(g_1g_2) = \lambda_A(g_1)\lambda_C(g_2)$ y sea $\beta = \delta t$. De nuevo, $f = \beta/\alpha$ tiene restricciones triviales y $f = \delta s$, con $s(g_1g_2) = f(g_1,g_2)^{-1} = (\beta/\alpha)^{-1}(g_1,g_2)$. La matriz que representa a β es

$$M_\beta = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ a_2 & a_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_1 & c_2 \\ 0 & 0 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

entonces la matriz que representa a $s = f^{-1} = \alpha\beta^{-1}$ es

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b_1 & b_2 \\ 0 & 0 & b_3 & b_4 \\ b_1 & b_3 & 0 & 0 \\ b_2 & b_4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Así, como $\alpha = \beta/f = \delta(t/s)$, entonces la cofrontera buscada es $\lambda = t/s$ y está dada por

$$\begin{aligned} \lambda(a,b,c,d) &= \tfrac{\lambda_A(a,b)\lambda_C(c,d)}{(-1)^{(a,b,0,0)^t M(0,0,c,d)}} && (3.5) \\ &= \tfrac{\lambda_A(a,b)\lambda_C(c,d)}{(-1)^{(a,b)^t B(c,d)}} && (3.6) \end{aligned}$$

en donde

$$B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}.$$

■

3.3. Algoritmos GAP

A continuación presentamos los códigos que permiten calcular los grupos isocategóricos de orden menor o igual que 64. El algoritmo se divide en tres partes. Cada una de ellas corresponde a los subgrupos isomorfos a uno de los tres grupos $(\mathbb{Z}_2)^4$, $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ y $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4$. Primero presentamos el algoritmo implementado para los subgrupos de la forma $(\mathbb{Z}_2)^4$ y luego explicamos las variaciones que se le hicieron para estudiar los otros dos casos.

El proceso se basa en los cuatro pasos descritos en la sección anterior. En primer lugar, la función TodasBases busca las posibles matrices antisimétricas no degeneradas sobre $(\mathbb{Z}_2)^4$, y devuelve la lista de bases con respecto a las cuales la matriz asociada, a cada una de ellas, es la matriz simpléctica J. Por esta razón, las demás funciones tienen como variable de entrada la base, y realizan los cálculos usando la matriz J.

Este código se desarrolló en GAP, el cual maneja principalmente la estructura de *lista* y los elementos de las listas se denotarán por $[i]$. Es decir, dada una lista l, su primer elemento es $l[1]$, etc.

Utilizamos varias funciones que GAP tiene implementadas. Describimos brevemente, para comenzar, la función de cada una:

Length(L): Longitud de la lista L.
SmallGroup(m, n): El n-ésimo grupo de orden m en la librería *SmallGroup* de GAP. La pareja corresponde al n-ésimo grupo de orden m.
NormalSubgroups(G): Lista de subrupos normales del grupo G.
IdGroup(G): Devuelve la pareja (m, n) que identifica al grupo G en la librería *SmallGroup* de GAP.
Add(L, a): Añade el elemento a al final de la lista L.
GeneratorsOfGroup(G): Lista de generadores del grupo G. No necesariamente un conjundo minimal.
GroupHomomorphismByImages(G_1, G_2): Homomorfismo entre G_1y G_2. La imagen de cada elemento de la lista L_1 se define como el elemento correspondiente en la lista L_2.
Kernel(h): Kernel del hommorfismo h.
SubGroup(G, L): Subgrupo de G generado por los elementos en la lista L.
Order(G):Orden del grupo G.
DiagonalMat(v): Matriz diagonal asociada al vector v.
RightTransversal(G, N): Lista de representantes de las coclases a derecha en G con respecto al subgrupo N.
ConjugatorIsomorphism(N, g): Dado N normal, automorfismo en el grupo N de conjugación por g..
Image(f, x): Imagen de x bajo el homomorfismo f.
Cartesian(L_1, L_2): lista de parejas ordenadas de $L_1 \times L_2$.
IrreducibleRepresentations(G):Lista de representaciones irreducibles del grupo G.
TranspodedMat(M): Matriz traspuesta de M.
Inverse(g): Inverso de un elemento g en un grupo.
ImageElm(f, x): Imagen de x bajo el homomorfismo f.
RightCoset(H, g): Coclase en $G\backslash H$ de la forma Hg.
List$([1, .., n], x \rightarrow f(x))$: Genera una lista de n elementos en cuya posición i-ésima está $f(i)$.

Group(L): Calcula el subgrupo generado por una lista L de matrices.

Hay dos funciones adicionales que implementamos en GAP, cuya programación es sencilla y el código es irrelevante. Se trata de las siguientes

deltaKr(a, b): Típica finción delta de Kroenecker.
Coord$(a, base)$: Calcula las coordenadas de un elemento a, con respecto a 'base', en donde 'base' es un conjunto de generadores de un grupo abeliano.

Adicionalmente hemos implementado la función **Descomp**, la cual descompone un grupo abeliano finitamente generado en grupos cíclicos. La presentamos en el Apéndice.

3.3.1. Pseudocódigo principal

Presentamos las funciones que hemos implementado en GAP. Dado un subgrupo H de un grupo G, la variable "Repre" siempre corresponderá a una lista de representantes de las coclases $G\backslash H$. La variable "Cart" representará al producto cartesiano entre los elementos del grupo H y la lista "Repre". Cada pareja ordenada en "Cart" corresponde a un elemento χ_h^σ en $Ind_H^G(\mathbb{C}_\alpha H)$.

La primera función, como mencionamos anteriormente, calcula todas las bases de la forma $\{Y_i^{-1}u_1, ..., Y_i^{-1}u_n\}$ mencionadas en la proposición 9. Tiene como entrada la base canónica y su longitud n. La variable de entrada e es la identidad del grupo. La variable de salida es la lista de todas las bases.

función TodasBases($Base, n, e$)
$G :=$ GL($4, integersmod2$)\\Grupo lineal en $\mathbb{F}_2$
$H := Sp(4, integersmod2)$\\Grupo simpléctico en $\mathbb{F}_2$
$l :=$ RightTransversal(G, H)
$Lengthl :=$ Length(l)
para i en $\{1, ..., Lengthl\}$ **hacer**
    $BasesCoord :=$ lista vacía
    $Bases :=$ lista vacía
    para i en $\{1, ..., n\}$ **hacer**
        $BasesCoord[j] :=$ Inverse($l[i]$) $* Base[j]$
        $prod := e$
        para k en $\{1, ..., n\}$ **hacer**
            $prod := prod * (Base[k]^{\mathrm{BasesCoord}[j][k]})$
        fin para
        $Bases[j] := prod$
    fin para
    $BasesComp[i] := Bases$
fin para
devolver($BasesComp$)

La función 'Normales' calcula la lista de subgrupos normales de G, que son isomorfos a $\mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2$.

función Normales(G)
$A :=$ SmallGroup($16, 14$)
$n :=$ NormalSubgroups(G)
$Ln :=$ Length(n)
para i en $\{1, ..., Ln\}$ **hacer**
    si IdGroup($n[i]$) =IdGroup(A) **entonces**
        Add($m, n[i]$)
    fin si
finpara
devolver(m)

Dado un subgrupo H de G, la siguiente función calcula la columna m-ésima de la matriz del automorfismo en H de conjugación por el n-ésimo elemento de la lista Repre, con respecto a la base Base.

función Columna($Repre, H, m, Base, n$)
\\ Repre y Base son listas, H es un grupo y m,n son enteros.
$s := Repre[n]$
$Ad :=$ ConjugatorIsomorphism(H, s)
$d := 0, i := 0, j := 0, k := 0, l := 0$
mientras $d = 0$ **y** $i <$ Order($Base[1]$) **hacer**
  $j = 0$
  mientras $d = 0$ **y** $j <$ Order($Base[2]$) **hacer**
    $k = 0$
    mientras $d = 0$ **y** $k <$ Order($Base[3]$) **hacer**
      $l = 0$
      mientras $d = 0$ **y** $l <$ Order($Base[4]$) **hacer**
        si ImageElm($Ad, Base[m]$) $= Base[1]^i Base[2]^j Base[3]^k Base[4]^l$ **entonces**
          $Col = (i, j, k, l)$
          $d = 1$
        fin si
        $l := l + 1$
      fin mientras
      $k := k + 1$
    fin mientras
    $j := j + 1$
  fin mientras
  $i := i + 1$
fin mientras
devolver(Col)

Dados dos elementos a y b del grupo G, la función 'Prod' calcula el representante de la coclase del producto ab.

función Prod($H, Repre, a, b$)
para x en $Repre$ **hacer**
  si $x \in$RightCoset($H, a * b$) **entonces**
    $r := x$
  fin si
fin para
devolver(r)

La función TodasDiag calcula la lista de matrices de los automorfismos $F \in Aut_G(A)$, definidos por $F(\chi_h^\sigma) = \rho(h)\chi_h^\sigma$, en donde ρ es una representación irreducible de H sobre $\mathbb{C}$. En otras palabras, TodasDiag calcula la imagen de i en (2.2).

función TodasDiag($G, H, Repre, Cart$)
$lCart = \text{Length}(Cart)$
$Irr := \text{IrreducibleRepresentations}(H)$
$lIrr := \text{Length}(Irr)$
para i en $\{1, ..., lIrr\}$ **hacer**
  $D :=$ lista vacía
  para j en $\{1, ..., lCart\}$ **hacer**
    $D[j] := \text{Image}(Irr[i], Cart[j][1])[1][1]$
  fin para
  $Diag[i] := \text{DiagonalMat}(D)$
fin para
devolver$Diag$

La función 'PermAut' recibe como entrada un elemento g de 'Repre' y la posición m, en la lista Cart, de un elemento $\chi_h^{\sigma_i}$. Con esto, calcula la posición en 'Cart' de $F_g(\chi_h^{\sigma_i})$, donde F_g es el automorfismo asociado a g, definido por la fórmula 2.4. La función devuelve también el elemento $\omega(\sigma_i, g^{-1})$ en la misma fórmula.

Es importante aclarar que $Cart[i][j]$ representa la coordenada j-ésima de la pareja ordenada i-ésima.

función PermAut($g, H, Cart, Repre, Mt, Base, m$)
\\El elemento g es alguno de la lista Repre
\\El entero m es la posición de $\chi_h^{\sigma_i}$, H es un subgrupo de G
\\Mt es la matriz del automorfismo en H de conjugación por s, con respecto a $Base$.
$lCart := \text{Length}(Cart)$
$a := \text{Image}(\text{ConjugatorIsomorphism}(H, g), Cart[m][1])$
$b := \text{Prod}(H, Repre, Sigma, Cart[m][2])$
$w_= g * Cart[m][2] * b^{-1}$
$i := 1$
$ind := 0$
mientras ($i < lCart$ **ó** $i = lCart$) **y** $ind = 0$ **hacer**
  si $Cart[i][1] = a$ y $Cart[i][2] = b$ **entonces**
    $ind := 1$
  fin si
  $i := i + 1$
fin mientras
devolver$(i - 1, w)$

La función AltAlpha calcula $Alt(\alpha)(x,y)$, en donde α es el 2-cociclo asociado a la matriz R. Es decir, dados $x, y \in \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2$, se calcula $x^T(R - R^T)y = x^T J_4 y$.

fucnión AltAlpha$(x, y, Base)$
$m :=$ Coord$(x, Base)[1] *$ Coord$(y, Base)[3] +$ Coord$(x, Base)[2] *$ Coord$(y, Base)[4]$
$-$ Coord$(y, Base)[1] *$ Coord$(x, Base)[3] -$ Coord$(y, Base)[2] *$ Coord$(x, Base)[4])$
return$((-1)^m)$

Las dos funciones siguientes son auxiliares de la función Cofrontera, la cual calcula la fórmula (3.3). La función Lambda$_M$ calcula λ_M en la fórmula. Tiene como entrada la matriz M y el vector v.

función Lambda$_M(M, v)$
$d := (v[1], 0)^T * M * (0, v[2])$
$r := \dfrac{\zeta^{M[1][1]*v[1]}\zeta^{M[2][2]} * v[2]}{\zeta^d}$
return(r)

La función Bloque, recibe una matriz 4×4 y devuelve uno de los 4 bloques que la conforman.

función Bloque(M, n)
si $n = 1$ **entonces**
  $B := ((M[1][1], M[1][2]), (M[2][1], M[2][2]))$
si no si $n = 2$ **entonces**
  $B := ((M[1][3], M[1][4]), (M[2][3], M[2][4]))$
si no
  $B := ((M[3][1], M[3][2]), (M[4][1], M[4][2]))$
fin si
devolver(B)

función Cofrontera(M, v)
$x := (v[1], v[2])$
$y := (v[3], v[4])$
$f := \dfrac{\text{Lambda}_M(\text{Bloque}(M,1), x) * \text{Lambda}_M(\text{Bloque}(M,3), y)}{\zeta^{x^T * \text{Bloque}(M,2) * y}}$
devolver(f)

La función TT es auxiliar para el llamado de la función Cofrontera, en las funciones principales.

función TT$(M, Base, x)$
$v :=$ Coord$(x, Base)$
devolver(Cofrontera(M, v))

La siguiente función calcula la matriz del automorfismo dado por la fórmula (2.4). La variable Mt a la matriz del automorfismo conjuación por g. R es la matriz que representa a α como bicarácter. Las demás variables son iguales a las de la función PermAut.

función Matriz$(g, N, Cart, Repre, Mt, Base, R)$
$lCart :=$ Length$(Cart)$
para i en $\{1, ..., lCart\}$ **hacer**
  $ColCeros :=$ List$([1, ..., lCart], x \to 0)$\\Lista de ceros, de tamaño $lCart$
  $Colceros$[PermAut$(g, N, Cart, Repre, i)[1]] :=$ Lambda(TransposedMat$(Mt)*R*Mt-R$,
    $Base, Cart[i][1])$
    $*$ AltAlpha$(g * Cart[i][1] * g^{-1}$, PermAut$(g, N, Cart, Repre, i)[2], Base)$
  Add$(Filas, Colceros)$
fin para

La función Automorfismos verifica, de acuerdo con la Proposición 10, si la matriz $S_{[B_1]} \in Sp(\mathbb{F}_2)$ para todo σ. Esto para verificar si $[\alpha] = [\alpha^\sigma]$. En caso afirmativo, calcula el grupo de automorfismos $Aut_G(A) = \langle \nu^{-1}(G/H) \cup i(H) \rangle$, de acuerdo con la observación al final del capítulo 2. Devuelve el Id de dicho grupo, de lo contrario devuelve 0.

función Automorfismos($G, N, base$)
$Repre :=$ RightTransversal(G, N)
$Cart :=$ Cartesian(Elements(N), $Repre$)
$lCart =$ Length($Cart$)
$lRepre =$ Length($Repre$)
$lDiag =$ Length(TodasDiag(G, N))
para j en $\{1, ..., lRepre\}$ **hacer**
  $M[j] :=$ TransposedMat(Columna($Repre, N, 1, base, j$),Columna($Repre, N, 2, base, j$), Columna($Repre, N, 3, base, j$),Columna($Repre, N, 4, base, j$))
  si TransposedMat($M[j]$) $* J * M[j] \neq J$ **entonces**
    $a = 0$
  fin si
fin para
si $a = 1$ **entonces**
  para i en $\{1, ..., lRepre\}$ **hacer**
    $MatricesAut[i] :=$ Matriz($Repre[i], N, Cart, Repre, M[i], base, MatrizR(2)$)
  fin para
  para i en $\{1, .., lDiag\}$ **hacer**
    Add($MatricesAut$,TodasDiag($G, N, Repre, Cart$)$[i]$)
  fin para
  $Gp :=$ Group($MatricesAut$)
  devolver(IdGroup(Gp))
si no entonces
  devovler(0)
fin si

La función Isogroups devuelve la lista de grupos isocategóricos al grupo IdG, verificando si la función 'Automorfismos' ha devuelto el Id de un grupo no isomorfo al inicial.

función IsoGroups(IdG)
$G :=$ SmallGroup(IdG)
$L :=$ Normales(G)
$l :=$ Length(L)
para i en $\{1, ..., l\}$ **hacer**
  $base :=$ Descomp($L[i]$)
  $lBases :=$ Length(TodasBases)($base, 4, e$)
  para j en $\{1, .., lBases\}$ **hacer**
    $base2 :=$ TodasBases($base, 4, e$)$[j]$
    $a :=$ Mat($G, L[i], base2$)
    si $a \neq 0$ y $a \neq Idg$ **entonces**
      Add($Iso, [IdG, a]$)
    fin si
  fin para
fin para
devolver(Iso)

Por último, esta es la lista completa de los grupos isocategóricos a los primeros n grupos de orden m en la librería SmallGroup de GAP

función IsoCat(n, m)
para i en $\{1, ..., n\}$ **hacer**
  Add(Iso, Isogroups)((m, i))
fin para
devolver(Iso)

3.3.2. Variaciones para los casos $H = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ y $H = \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$

Al realizar la construcción de las posibles álgebras $Ind_H^G(\mathbb{C}_\alpha H)$ a partir de subgrupos de G de la forma $H = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ o de la forma $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$, se puede utilizar el mismo algoritmo descrito en la sección anterior realizando pequeñas variaciones.

En primer lugar, en la función 'Normales' (segunda línea), se escribe 'SmallGroup(4, 2)' o 'SmallGroup(16, 2)' según sea el caso.

En segundo lugar, la función TT, de la función λ que hace cohomólogos a los 2-cociclos α y α^σ, cambia de acuerdo al subgrupo H. La fórmula en el caso $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ y $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$ está dada por (3.1).

Por último, la función 'AltAlpha', se calcula haciendo el producto $x^T J_2 y$, en lugar de $x^T J_4 y$.

Adicionalmente, las funciones *Columna* y *Prod* tienen versiones para bases con dos elementos, en lugar de cuatro.

3.3.3. Resultados

Como hemos visto en la sección anterior, desarrollamos tres versiones del algoritmo, una para cada uno de los casos $H = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, $H = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ y $H = \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$. Después de poner en ejecución la función 'IsoCat' en cada una de las 3 versiones, con $m = 32$ y $n = 51$ (existen 51 grupos de orden 32), ésta devuelve únicamente listas vacías, lo cual verificaría el siguiente hecho

Teorema 12. *Los grupos de orden 32 son categóricamente rígidos.*

Por otro, al poner en ejecución 'Isocat' con $m = 64$ y $n = 267$, en cada una de las 3 versiones, ésta devuelve:

- En el caso $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$, devuelve listas de la forma $[[64, 236], [64, 232]]$ y de la forma $[[64, 232], [64, 232]]$
- En los otros dos casos, devuelve listas vacías.

Lo cual verifica el siguiente hecho

Teorema 13. *Existe una única pareja de grupos isocategóricos de orden 64.*

Dicha pareja de grupos de orden 64, aquellos con Id 232 y 236 en la librería SmallGroup de GAP, corresponde al elejemplo ya conocido gracias a [4], [2].

CAPÍTULO 4

Grupos isocategóricos sobre los reales

En los capítulos anteriores consideramos las representaciones de grupos finitos sobre un campo algebraicamente cerrado, el cual, sin pérdida de generalidad se puede asumir isomorfo a $\mathbb{C}$. El objetivo de este capítulo es desmostrar que todo par de grupos isocategóricos de orden menor o igual a 64 que son isocategóricos sobre $\mathbb{R}$, son isomorfos.

El siguiente teorema es una versión general del teorema 6 y motiva gran parte del desarrollo de este capítulo. Su demostración está en [13]

Teorema 14. *Sean G_1 y G_2 grupos finitos sobre un campo arbitrario k. Entonces, G_1 y G_2 son isocategóricos sobre k si y sólo si existe una G_1-álgebra de Galois A sobre k tal que $G_2 \cong Aut_{G_1}(A)$ y $|G_1| = |G_2|$.*

Estudiemos algunas relaciones importantes entre G-álgebras reales y G-álgebras complejas. En primer, dada una G-álgebra de Galois A sobre $\mathbb{R}$, hemos visto que se puede construir facilmente una G-álgebra de Galois sobre $\mathbb{C}$. Definimos la G-álgebra

$$A_{\mathbb{C}} = A \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}.$$

El producto componente a componente. Definimos la acción de G en A por $g \cdot a \otimes \lambda = (g \cdot a) \otimes \lambda$ y el producto por escalar por $\beta(a \otimes \lambda) = a \otimes (\beta)\lambda$.

Proposición 13. *Si A es una G-álgebra de Galois sobre $\mathbb{R}$, entonces $A_{\mathbb{C}}$ es una G-álgebra de Galois sobre $\mathbb{C}$.*

Demostración. Como A es una G-álgebra de Galois, la aplicación $\theta : A \otimes_{\mathbb{R}} [G] \to End_{\mathbb{R}}(A)$ es un isomorfismo. Al definir la aplicación correspondiente a $A_{\mathbb{C}}$, $\theta : A_{\mathbb{C}} \otimes_{\mathbb{R}} [G] \to End_{\mathbb{C}}(A_{\mathbb{C}})$ tenemos que θ_2 es inyectiva tambiíen pues, si $u_1, ..., u_n$ es una base de A, entonces $1 \otimes u_1, ..., 1 \otimes u_n$ es una base de $A_{\mathbb{C}}$. Como $\theta(i \otimes u_n) = \theta(u_n)$, entonces la aplicación compleja es inyectiva, luego es un isomorfismo por la igualdad de las dimensiones. ■

Definición: Sea A una G-álgebra compleja. Una **forma real** de A es una G-subálgebra real $B \subseteq A$ tal que

$$\begin{aligned} m : B \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} &\to A \\ x \otimes a &\to xa \end{aligned}$$

es un isomorfismo.

Dada una G-álgebra compleja A, definimos el álgebra $\bar{A}$ como el grupo abeliano A con el mismo producto que tiene A y la misma acción de G, pero cuyo producto por escalar está dado por $za = \bar{z}a$.

Definición: Sea A una G-álgebra compleja. Una **estructura real** en A es una morfismo de álgebras $J : A \to \bar{A}$, lineal sobre $\mathbb{C}$ y G-equivariante, tal que $J^2 = id_A$.

Teorema 15. *Sea A una G-álgebra compleja. Existe una biyección entre formas reales de A y estructuras reales de A.*

Demostración. Sea B una forma real de A. Consideremos la aplicación

$$\begin{aligned} J_B : \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} B &\to \overline{\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} B} \\ z \otimes b &\to \bar{z} \otimes b. \end{aligned}$$

Es evidente a partir de la definición que J es una estructura real de A. Recíprocamente, sea J una estructura real en A. Definimos el conjunto

$$B = \{a \in A \mid J(a) = a\}$$

Ésta es una subálgebra compleja de A, por tanto es una subálgebra real de A. Veamos que

$$\begin{aligned} \mu : \mathbb{C} \otimes B &\to A \\ z \otimes a &\to za \end{aligned}$$

es un isomorfismo. En primer lugar, sea $t \in \mathbb{C} \otimes B$ tal que $\mu(t) = 0$. El elemento t es de la forma $t = \sum z_i \otimes a_i$, sin embargo, a_i se puede escribir como combinación de elementos linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$, digamos $t = \sum r_1 \otimes b_i$. Veamos que cualquier combinación de elementos linealmente independientes que pertenezcan a B son linealmente indendientes sobre $\mathbb{C}$.

Supongamos que existe una combinación de elementos de B que es linealmente independiente sobre $\mathbb{R}$, pero linealmente dependiente sobre $\mathbb{C}$. Consideremos una combinación de tamaño mínimo con estas características,

$$s_1 b_1 + \cdots s_n b_n = 0,$$

y asumamos $s_n = 1$. Aplicando J obtenemos $J(s_1)b_1 + \cdots J(s_n)b_n = 0$. Al restar las dos igualdades obtenemos

$$(J(s_1) - s_1)b_1 + \cdots (J(s_n) - s_n)b_n = 0.$$

El cohefíciente de b_n es nulo. Por lo tanto, por la minimalidad de n, tenemos $J(s_i) = s_i$ para $1 \leq i \leq n-1$. Entonces s_i son fijos por J. Como la acción de J sobre los escalares complejos está dada por la conjugación, entonces $s_i \in \mathbb{R}$. Luego $s_1 b_1 + \cdots s_n b_n$ es una combinación nula, de escalares reales no todos nulos, lo cual contradice el hecho del que partimos. Por lo tanto los elementos b_i son linealmente independientes sobre $\mathbb{C}$, luego $r_i = 0$. Entonces $t = 0$ y la función es inyectiva.

Para ver la sobreyectividad de μ, sea $a \in A$, entonces $a = \mu(1 \otimes \frac{a+J(a)}{2} + i \otimes \frac{a-J(a)}{2})$.

Verifiquemos que la composicion de estas dos aplicaciones es la identidad. En primer lugar, notemos que, dada una forma real B de A, y si J es la estructura real correspondiente, entonces

$$J(x) = x \Leftrightarrow x_n = 0 \Leftrightarrow x \in B.$$

Entonces $A^J = B$. Por otro lado, consideremos una estructura real J y su forma real correspondiente $B = A^J$. Llamaremos μ al isomorfismo $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} B \to A$. La estructura real asociada a B está dada por

$$\begin{aligned} J_B : \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} A^J &\to \overline{\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} A^J} \\ z \otimes a &\to \bar{z} \otimes a. \end{aligned}$$

Entonces tenemos $J_B(\sum z_i a_i) = \mu(J_B(\sum z_i \otimes a_i)) = \sum \bar{z}_i a_i = J(\sum z_i a_i)$ ∎

Proposición 14. *Si A es una G-álgebra de Galois real tal que $|Aut_G(A)| = |G|$, entonces $Aut_G(A) \cong Aut_G(A_{\mathbb{C}})$*

Demostración. Notemos que, si $f : A \to A$ es un automorfismo real G-lineal, entonces

$$\begin{aligned} \hat{f} : A_{\mathbb{C}} &\to A_{\mathbb{C}} \\ 1 \otimes u &\mapsto 1 \otimes f(u) \end{aligned}$$

es G-lineal y $\mathbb{C}$-lineal, entonces $\hat{} : Aut_G(A) \to Aut_G(A_{\mathbb{C}})$ es un homorfismo inyectivo. Como $|Aut_G(A_{\mathbb{C}})| \leq G$ y $|Aut_G(A)| = G$, entonces $\hat{}$ es un isomorfismo. ∎

Lema 5. *Sea A una G-álgebra de Galois real. Entonces*

1. *El álgebra A es conmutativa si y sólo si $A_{\mathbb{C}}$ es conmutativa.*

2. *Si A es conmutativa entonces $Aut_G(A) \cong G$.*

Demostración.

1. $\Leftarrow$ Si A es conmutativa, es evidente que $A_{\mathbb{C}}$ también lo es.
   $\Rightarrow$ Si $A_{\mathbb{C}}$ es conmutativa, entonces por ser A subálgebra de $A_{\mathbb{C}}$, también es conmutativa.

2. En primer lugar, una G-álgebra de Galois compleja es conmutativa si y sólo si $H = \{e\}$. Luego $B = Ind_H^G(k) = Fun(G, k)$. Para este caso es evidente que $Aut_G(A) \cong Aut_G(A_{\mathbb{C}})$. Gracias a la Proposición 13, tenemos

$$Aut_G(A) \cong Aut_G(A_{\mathbb{C}}) = Aut(Fun(G, \mathbb{C})) \cong G.$$

∎

Será de utilidad el siguiente hecho, cuya demostración es evidente a partir de la definición.

Lema 6. *Sean G un grupo finito, H cualquier subgrupo de G y $\alpha \in Z^2(H, \mathbb{C})$ cualquier 2-cociclo. Entonces la aplicación*

$$F : \overline{Ind_H^G(\mathbb{C}_\alpha H)} \to Ind_H^G(\mathbb{C}_{\bar{\alpha}} H)$$
$$\alpha\chi_h^\sigma \mapsto \bar{\alpha}\chi_h^\sigma$$

es un isomorfismo de álgebras.

El siguiente teorema establece una relación entre las álgebras inducidas por las álgebras de grupo torcidas, para diferentes 2-cociclos sobre un subgrupo H de un grupo G.

Teorema 16. *Sean α y α' 2-cociclos no degenerados sobre H. Entonces $Ind_H^G(\mathbb{C}_\alpha H) \cong Ind_H^G(\mathbb{C}_{\alpha'} H)$ si y sólo si existe $\sigma \in N_G(H)$ tal que $[\alpha] = [\alpha'^\sigma]$.*

Demostración. Ver [5]. ■

Lema 7. *Sea H un grupo abeliano y $\alpha \in Z^2(H, \mathbb{C}^*)$ un 2-cociclo no degenerado en H. Entonces el orden de $[\alpha] \in H^2(H, \mathbb{C}^*)$ es igual al exponente de H*

Demostración. Como H es abeliano, todo 2-cociclo no degenerado en H puede construirse, salvo isomorfismo, de la siguiente manera:

Sean B un grupo abeliano y $\langle , \rangle : B \times B^* \to \mathbb{C}$ el pairing canónico. entonces, si $H = B \oplus B^*$, la función $\alpha(a \otimes \gamma, b \otimes \delta) = \gamma(b)$ es un 2-cociclo no degenerado en H.

El orden del 2-cociclo α es el exponente de B, que es igual al exponente de H. ■

Teorema 17. *Sea $A = Ind_H^G(\mathbb{C}_\alpha H)$ G-álgebra de Galois, con $H \neq \{e\}$, tal que $|Aut_G(A)| = G$. Si A tiene una forma real, entonces H es un 2-subgrupo abeliano elemental, es decir, $H = \mathbb{Z}_2^n$ para algún n.*

Demostración. Como consecuencia del Teorema 6 tenemos $[\alpha] = [\alpha^\sigma]$ para todo $\sigma \in G$. Si existe una forma real en A, ésta corresponde a una esructura real J, a partir de la cual se obtiene un isomorfismo $A \to \bar{A}$.

Gracias al Lema 5, tenemos $\bar{A} \cong Ind_H^G(\mathbb{C}_{\bar{\alpha}} H)$. Por lo tanto $A \cong Ind_H^G(\mathbb{C}_{\bar{\alpha}})$. Entonces $|Aut_G(Ind_H^G(\mathbb{C}_{\bar{\alpha}}))| = G$, luego, $[\bar{\alpha}] = [\bar{\alpha}^\sigma]$ para todo $\sigma \in G$. Debido al Teorema 14, obtenemos $[\bar{\alpha}] = [\alpha^\sigma]$. Se sigue que $[\alpha] = [\bar{\alpha}] = [\alpha]^{-1}$, es decir $[\alpha]$ tiene orden 2. Como consecuencia del Lema 6, el exponente de H es 2. Pero H es abeliano, entonces H es 2-elemental. ■

Teorema 18. *Sea (G, G') un par de grupos isocategóricos sobre $\mathbb{R}$ tales que $|G| \leq 64$. Entonces $G \cong G'$*

Demostración. Sea A una G-álgebra de Galois real tal que $G' \cong Aut_G(A)$. Entonces $A_{\mathbb{C}}$ es G-álgebra de Galois con forma real tal que $|Aut_G(A_{\mathbb{C}})| = |G|$. Debido al teorema 15, tenemos que $A_{\mathbb{C}} \cong Ind_H^G(\mathbb{C}_\alpha H)$, en donde $H = \{e\}$ o H es un 2-grupos elemental.

Utilizando el programa hemos verificado que sólo hay un par de grupos isocategóricos sobre $\mathbb{C}$ de orden menor o igual a 64. Más específicamente son los grupos que se identifican por $(64, 232)$ y $(64, 236)$ en la librería de grupos pequeños de GAP. En el caso de estos dos grupos $H \cong \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$. Como $A_{\mathbb{C}}$ tiene una forma real, entonces $H = \{e\}$. Luego $A_{\mathbb{C}}$ es conmuativa y, por lo tanto, A también lo es. Entonces $G \cong G'$. ■

APÉNDICE A

La función Descomp

Una función adicional que se utiliza en el algoritmo principal, es la que descompone grupos abelianos finitamente generados en producto de grupos cíclicos. Esta se implementó siguiendo el algoritmo planteado en [1] que tiene complejidad polinomial. Presentamos el código, cuya función principal se encuentra al final.

En primer lugar, la función 'AbelianoLibre' construye un grupo abeliano libre de orden n, mediante el producto directo de n copias de $\mathbb{Z}$.

función AbelianoLibre(n)
$A :=$ FreeGroup(1)
para i en $\{2, ..., n\}$ **hacer**
    $A :=$ DirectProduct(A, FreeGroup(1))
fin para
devolver(A)

La función 'VecCanon' recibe como entrada dos enteros n, i y el grupo libre F generado por un elemento. La función devuelve un vector de tamaño n, cuya i-ésima componente es el elemento generador de F y las demás componentes contienen a la identidad.

función VecCanon(n, i, F)
$f :=$ GeneratorsOfGroup(F)[1]
para j en $\{1, ..., n\}$ **hacer**
    Add($L, f^{\text{DeltaKr}(i,j)}$)
fin para
devolver(L)

La función 'Proy' recibe como entrada un grupo A y su lista de generadores $GenA$, el grupo libre F generado por un elemento y un entero i. Devuelve el homomorfismo en A definido por la proyección en la i-ésima componente, con respecto a sus generadores $GenA$.

función Proy$(A, GenA, F, i)$
$L := VecCanon(GenA, i, F)$
$h :=$ GroupHomomorphismByImages$(A, F, GenA, L)$
devolver(h)

La función 'Exp' tiene como entrada el grupo abeliano libre F generado por un elemento f, y un elemento a de F. Devuelve el exponente n tal que $a = f^n$.

función Exp(F, a)
$f :=$ GeneratorsOfGroup$(F)[1]$
$N :=$ Subgroup$(F, [a])$
si $a = f^0$ **entonces** $n = 0$
si no $n :=$ Order(FactorGroup(F, N))
fin si
si $a = f^n$ **entonces**
  devolver(n)
si no
  devolver$(-n)$
fin si

Sea G un grupo abeliano finitamente generado. Sean $\{g_1, ..., g_n\}$ sus generadores. Entonces existe una aplicación sobreyectiva $\phi : \mathbb{Z}_n \to G$. Sea B el kernel de ϕ. Entonces B también es finitamente generado. Si un conjunto de generadores tiene m elementos, entonces existe una función $f : \mathbb{Z}_m \to \mathbb{Z}_n$ tal que $\gamma(e_i)$ es el i-ésimo generador de B. La función 'Columna', calcula, en la matriz de la función f, la columna correspondiente al generador a del Kernel de ϕ.

función Columna$(A, GenA, a)$
$l :=$ Length$(GenA)$
$F :=$ AbelianoLibre(1)
$f :=$ GeneratorsOfGroup$(F)[1]$
$L := List(\{1, ...l\}, i \to$ Exp$(F,$ Image(Proy$(A, GenA, F, i), a)))$
return(L)

La función principal 'Descomp' recibe como entrada un grupo G finitamente generado y devuelve una lista $\{g_1, ..., g_n\}$ tales que $G =< g_1 > \oplus \cdots \oplus < g_n >$.

función Descomp(G)
$genG :=$ GeneratorsOfGroup(G)
$n := Length(genG)$
$Zn :=$ AbelianoLibre(n)
$genZn :=$ generatorsOfGroup(Zn)
$h :=$ GroupHomomorphismByImages($Zn, G, genZn, genG$)
$Ker :=$ Kernel(h)
$genKer :=$ GeneratorsOfGroup(Ker)
para i en $\{1, ..., n\}$ **hacer**
    Add(M, Columna($Zn, genZn, genKer[i]$))
fin para
$M :=$ TransposedMat(M)
$N :=$ SmithNormalFormIntegerMatTransforms(M)
$M :=$ N.normal
$U :=$ Inverse(N.rowtrans)
para i en $\{1, ..., n\}$ **hacer**
    $Ap[i] := e$
    para j en $\{1, ..., n\}$ **hacer**
        $Ap[i] := Ap[i] * genG[j]^{U[j][i]}$
    fin para
fin para
$j_1 := 1$
$j := 1$
$p := 1$
mientras $j = 1$ **hacer**
    $j :=$ N.normal$[p][p]$
    $p := p + 1$
fin mientras
$j_1 := p - 1$
$l = n - j_1 + 1$
para i en $\{1, ..., l\}$ **hacer**
    $g[i] := Ap[i + j_1 - 1]$
fin para
devolver(g)

Bibliografía

[1] K. Cheung and M. Moscav, *Decomposing finite abelian groupss*, J. Quantum Inf. Comp. **1** (2001), no. 2, 26–32.

[2] A.A. Davidov, *Galois algebras and monoidal functors between categories of representations of finite groups*, Journal of Algebra **244** (2001).

[3] P. Deligne and J. Milne, *Tannakian Categories*, Lecture Notes in Mathematics **900** (1982).

[4] P. Etingof and S. Gelaki, *Isocategorical Groups*, Int. Math. Res. Not. **2** (2001).

[5] C. Galindo and M. Medina, *On the classification of Galois objects for finite groups*, Communications in algebra **40** (2012).

[6] L. Grove, *Classical Groups and Geometric Algebra*, American Mathematical Society, 2002.

[7] I.M. Isaacs, *Character Theory of Finite Groups*, Academic Press, 1976.

[8] M. Izumi and H. Kosaki, *On a subfactor analogue of the second cohomology*, Rev. Math. Phys. **14** (2002).

[9] Gregory Karpilovsky, *Projective Representations of Finite Groups*, M. Dekker, 1995.

[10] Sauders Mac Lane, *Categories for the working mathematician*, Springer, 1971.

[11] J.P. Serre, *Linear Representations of Finite Groups*, Springer, 1979.

[12] K. Shimizu, *Monoidal Morita invariants for finite group algebras*, J. Algebra **323** (2010).

[13] C. Galindo y J. Ochoa, *Real isocatecorical groups*, Artículo en desarrollo.