

Proyección Markoviana en Procesos de Volatilidad Estocástica con Saltos

Por

Pablo García Jaramillo

Una tesis

presentada al Departamento de Matemáticas

como parte de los requisitos

para el grado de

Magíster en Matemáticas

Director: Mauricio J. Junca Peláez

Codirector: Adolfo J. Quiroz Salazar

Universidad de los Andes

Bogotá, Colombia

Junio, 2013

Contents

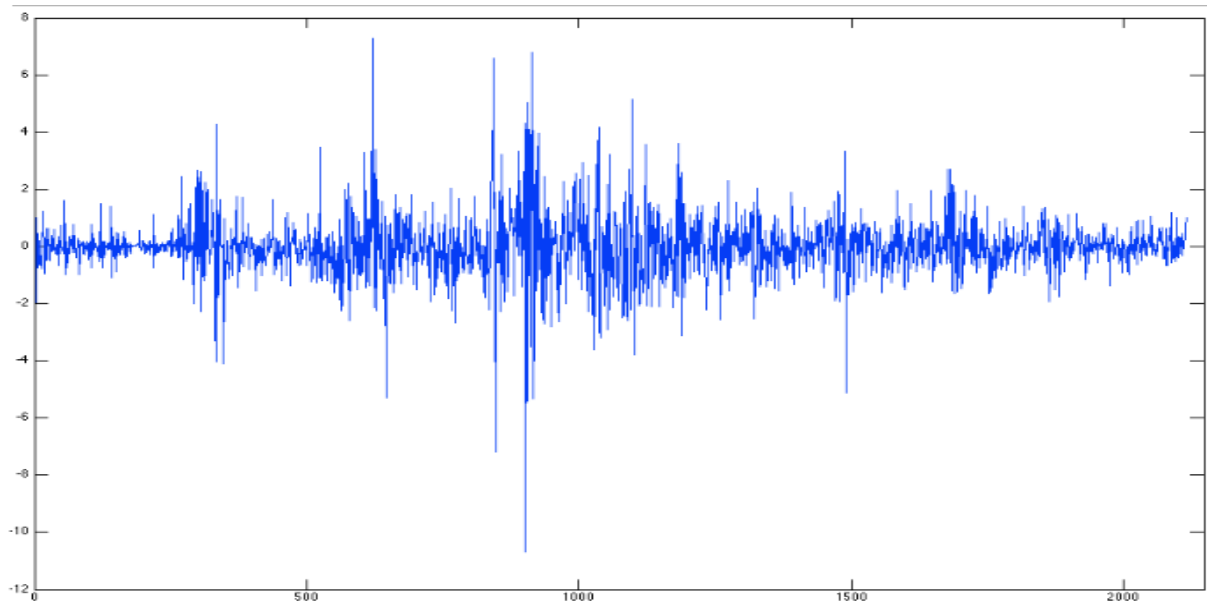
1	Introducción	3
2	Preliminares	7
2.1	Dupire y la volatilidad local	7
2.2	Teoría de distribuciones y fórmula de Tanaka	11
3	Proyección Markoviana	16
3.0.1	Proyección Markoviana Multidimensional	19
4	Volatilidad estocástica y saltos	20
4.1	Tasas de interés, dividendos e intensidad del salto Log-normal	21
4.2	Fórmula en función de volatilidad implícita	27
5	Modelo de Heston con saltos	30
5.1	Modelo de Heston	30
5.2	Incorporando saltos	33
5.3	Calibración	41
5.4	COP/USD	43
6	Conclusiones	48
7	Anéxos	49
7.1	Código	49
7.1.1	Función principal	49
7.1.2	Funciones secundarias	58

Chapter 1

Introducción

El modelo de Black-Scholes (1973) propone la valoración de opciones en un contexto libre de arbitraje, el cual conlleva a que la valoración dependa principalmente de la volatilidad del subyacente durante el periodo de vida del derivado. De esta forma, en el lenguaje de quienes transan y manipulan estos instrumentos, las cotizaciones se dan en términos de su volatilidad implícita, más que de su valor monetario. La volatilidad implícita es aquella que al insertarse en la fórmula de valoración de opciones derivada por los mismos autores, más parámetros de mercado como tasas de interés y del contrato como vencimiento y strike, se obtiene la valoración del instrumento.

Para que el modelo de Black-Scholes y en consecuencia las fórmulas de valoración derivadas apliquen indiscutiblemente, para cualquier vencimiento y strike de una opción dada, la volatilidad implícita debería ser la misma, ya que en el modelo se presupone que el subyacente sigue un proceso con volatilidad constante a través del tiempo. Este es un supuesto totalmente refutable con sólo observar la gráfica de los retornos estandarizados de un activo. Como ejemplo, a continuación se muestra la gráfica de los retornos diarios estandarizados de los últimos 5 años del COP/USD.



Como se puede observar en la gráfica, además de que la volatilidad no es constante a través del tiempo, se pueden notar lo que se denominan clusters de volatilidad: fenómenos en los cuales movimientos grandes del subyacente, son seguidos por movimientos grandes, y movimientos pequeños, por movimientos pequeños.

Independiente a lo anteriormente mencionado, el modelo de Black-Scholes con su supuesto de volatilidad constante, operó relativamente bien hasta antes del crash de 1987; las cotizaciones que se ejecutaban hasta este momento reflejaban expectativas sobre la dinámica del subyacente ajustables al modelo, sin embargo, a partir de este año las condiciones del mercado cambiaron: para distintos vencimientos y strikes se reflejaban diferentes volatilidades implícitas. Esta diferenciación entre volatilidades para diferentes plazos y strikes, dio origen a la sonrisa de volatilidad y estructura de vencimiento, dos atributos que componen lo que se conoce como la superficie de volatilidad.

Dadas las recientes sonrisa de volatilidad y estructura de vencimiento presentes en la valoración de opciones, debían considerarse modelos que extendieran el propuesto por Black-Scholes y justificaran estos atributos. Merton en 1973 (Merton 1973), había estudiado y propuesto un modelo que incorporara la estructura de vencimiento. Esto lo logró incorporando una función de volatilidad determinística la cual depende del tiempo; de

esta forma si la volatilidad implícita de una opción a 6 meses es por ejemplo 8%, y la de un año 12%, la función de volatilidad se adaptaría para que la volatilidad realizada los primero 6 meses fuera del 8%, y los siguientes 6, ajustada de tal forma que la de 1 año resultara siendo del 12%, lo que se denominó “forward relationship”.

Una vez modelada la estructura de vencimiento, era momento de incorporar la sonrisa de volatilidad en los modelos. Para esto algunos autores introdujeron elementos no transables como saltos, volatilidad estocástica o costos de transacción perdiendo la completitud del modelo. Bruno Dupire en su artículo ‘pricing with a smile” (Dupire 1994), dedujo un proceso que incorporaba tanto la estructura temporal como la sonrisa de volatilidad, consistente con la valoración neutral al riesgo y manteniendo la completitud del mercado. Aunque este modelo ofrece una fórmula cerrada para la obtención de la volatilidad, haciendo de la calibración un proceso mucho mas sencillo, la dinámica resultante del subyacente no es para nada realista y es por lo que muchos autores acuden a procesos de volatilidad estocástica que de una forma autocontenida, explican la estructura de la sonrisa de volatilidad, convirtiendose en una alternativa atractiva para la dinámica del subyacente. Autores que han explorado este tipo de modelos son Heston (1993), Carr Madan (1999), Lewis (2000) y Gatheral (2006).

Aparte de las bondades que introdujeron los modelos de volatilidad estocástica en el mercado, también contienen defectos que no los hacen infalibles. La falla principal en este tipo de modelos, es que no se ajustan bien a sonrisa de volatilidad en el corto plazo; esto se debe a que no reflejan el alto nivel de pendiente descendiente (skewness negativa), posiblemente producto del fenómeno conocido como crash-o-fobia (percepción del mercado a que en el corto plazo el spot tenga altas caídas). Para que un modelo de volatilidad estocástica logre ajustarse a este atributo del corto plazo, debería incorporarse una correlación negativa irrealmente grande. Dado lo anterior, una alternativa que ha sido mejor acogida y se adapta a las necesidades del modelaje, es la de incorporar saltos en el subyacente a modelos de volatilidad estocástica. Los saltos podrían justificar la alta ponderación que le da el mercado a eventos extremos y así configurar un modelo que se ajuste tanto en el corto como largo plazo. Autores que han estudiado este tipo de modelos son Bates (1996), y Yang - Hanson(2006).

Al momento de calibrar un modelo a mercado, se busca que este se ajuste lo más posible a las cotizaciones de las opciones europeas para todo vencimiento y strike. A partir del resultado de Gyongy (1986) y Dupire (1997) se establece la proyección Markoviana (término acuñado por Piterbarg (2004)): un método de calibración que busca simplificar este proceso para modelos sofisticados. El método permite relacionar un modelo de volatilidad estocástica con uno de volatilidad local, o dos modelos de volatilidad estocástica de tal forma que ambos generen la misma superficie de volatilidad. También se ha aplicado para simplificar modelos que dependen de una canasta de subyacentes en donde cada uno de estos subyacentes sigue su propio proceso de difusión.

Dada la conveniencia de un modelo de volatilidad estocástica con saltos, Bates en Bates (1996), estudia este tipo de modelo y lo implementa para el índice S&P 500, calibrando por medio de la función característica, un método que aunque confiable, requiere de recursos numéricos sofisticados para el cálculo de integrales complejas que surgen en el proceso. Como otra alternativa de calibración y dado el método de la proyección Markoviana, en este documento se extiende este resultado para un modelo de volatilidad estocástica con saltos, cuya frecuencia sigue un proceso de poisson, se desarrolla para el modelo de Heston con saltos y se aplica en la calibración del COP/USD.

Chapter 2

Preliminares

2.1 Dupire y la volatilidad local

Como se mencionó en la introducción, para incorporar la sonrisa de volatilidad en los modelos, algunos autores introdujeron elementos no transables como saltos, volatilidad estocástica o costos de transacción perdiendo la completitud del modelo. Bruno Dupire en su artículo *pricing with a smile* (Dupire 1994), dedujo un proceso que incorporaba tanto la estructura temporal como la sonrisa de volatilidad, consistente con la valoración neutral al riesgo y manteniendo la completitud del modelo. De esta forma establece una difusión para el proceso del spot de la siguiente forma:

$$\frac{dS_t}{S_t} = r(t)dt + \sigma(S_t, t)dW \quad (2.1)$$

En donde $r(t)$ es la tasa forward instantánea aplicada en el tiempo t implícita de la curva yield, y $\sigma(S, t)$ que corresponde a la volatilidad, es una función determinística del spot y el tiempo. Este proceso se desarrolla de tal forma que sea consistente con la superficie de volatilidad como se verá mas adelante.

El modelo permite valorar y gestionar cualquier opción camino-dependiente una vez calibrado. Al spot seguir un proceso de difusión unidimensional, el modelo es completo, por lo tanto se sigue la capacidad de replicar y se procede a valorar los derivados descontando el valor esperado de la función de pago en vencimiento. Esta valoración se hace

a través de la medida neutral al riesgo, en la cual el spot descontado no tiene drift pero mantiene el mismo coeficiente de difusión. El resultado mostrado por Dupire, es que al restringirse el modelo a las difusiones neutrales al riesgo, se puede obtener a partir de las leyes condicionales del proceso dado el spot actual (que proporcionan las opciones europeas), el proceso de difusión único del cual provienen estas leyes condicionales.

A continuación se mostrara el procedimiento llevado por Dupire para obtener la función de volatilidad, de acuerdo al proceso neutral al riesgo. Se asumen tasas de interés igual a cero, y dado el precio de las opciones para todo strike K , y vencimiento T se obtiene la función de densidad neutral al riesgo ϕ_T del spot en el tiempo T . Partiendo de la fórmula de valoración de la opción call, en donde $C(K, T)$ es el precio de la call con strike K y vencimiento T se tiene que:

$$C(K, T) = E^Q[\max\{S_T - K, 0\}] = \int_{-\infty}^{\infty} \max(s - K, 0) \phi_T(s) ds \quad (2.2)$$

En donde Q es la medida neutral al riesgo. Se define $(S - K)^+ := \max\{S - K, 0\}$ y derivando parcialmente respecto a K dos veces se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 C}{\partial K^2}(K, T) &= \frac{\partial^2}{\partial K^2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} (S - K)^+ \phi_T(S) dS \right) \\ &= \frac{\partial^2}{\partial K^2} \left(\int_K^{\infty} (S - K) \phi_T(S) dS \right) \\ &= \frac{\partial^2}{\partial K^2} \left(\int_K^{\infty} S \phi_T(S) dS - \int_K^{\infty} K \phi_T(S) dS \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial K} \left(-K \phi_T(K) - \int_K^{\infty} \phi_T(S) dS + K \phi_T(K) \right) \\ &= \phi_T(K) \end{aligned}$$

En donde para $T = t_0$, $\phi_{t_0} = \delta_{S_0}(K)$, siendo δ_{S_0} el delta de dirac centrado en S_0 . Esto tiene sentido ya que en el presente, la probabilidad que se trance una opción a un strike diferente al spot es cero. De esta forma se obtiene la función de densidad del spot en el tiempo T .

Dado que las opciones europeas proveen las densidades condicionales en un tiempo dado, y las camino dependientes el proceso de difusión, la pregunta es si a partir de las densidades condicionales para todo $t \in [t_0, T]$, existe una única difusión $dx = a(x, t)dt + b(x, t)dW$ que genere estas densidades dado un estado inicial (x_0, t_0) . Dupire demostró que aunque en general esta no es única, en el espacio de las difusiones neutrales al riesgo y bajo algunos supuestos técnicos (ver Dupire 1993 para estos detalles) sí lo es. A continuación se mostrara el procedimiento llevado por Dupire para demostrar la unicidad de este proceso.

Teorema 2.1 (Dupire 1993): Existe un único proceso neutral al riesgo de la forma $dx = a(x, t)dt + b(x, t)dW$, que genere la superficie de volatilidad.

Proof. Se toma la demostración original dispuesta por Dupire. Para mayor ilustración y sencillez, se asume $a(x, t) = 0$, y se trabaja sólo la martingala, i.e: $b(x, t)dW$. A partir de la difusión $dx = b(x, t)dW$, se pueden generar las distribuciones condicionales $\phi_t(S)$ del proceso a través de la ecuación de Fokker-Planck obteniendo (se define $f(x, t) := \phi_t(x)$):

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 (b^2 f)}{\partial S^2} = \frac{\partial f}{\partial t}$$

pero $f(x, t) = \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$ entonces, intercambiando el orden de derivada parciales a la derecha (teo. de Clairaut) se obtiene

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 (b^2 f)}{\partial S^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial C}{\partial t} \right)$$

Se integra dos veces respecto a x para obtener

$$\frac{1}{2} b_{\alpha, \beta}^2 f = \frac{\partial C}{\partial t} + \alpha(t)x + \beta(t)$$

asumiendo $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\partial C}{\partial t} = 0$ (razonable ya que $\lim_{x \rightarrow \infty} C = 0$ las constantes con respecto a

x , $\alpha(t)$ y $\beta(t)$ son cero, por lo tanto

$$\frac{1}{2}b_{\alpha,\beta}^2 f = \frac{\partial C}{\partial t}$$

como $f = \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$ se obtiene:

$$\frac{1}{2}b^2 \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = \frac{\partial C}{\partial t}$$

Ambas derivadas son positivas por arbitraje (butterfly para la convexidad y conversión para la madurez), por lo tanto la única solución es

$$b(x, t) = \sqrt{\frac{2 \frac{\partial C(x, t)}{\partial t}}{\frac{\partial^2 C(x, t)}{\partial x^2}}} \quad (2.3)$$

□

Volviendo al proceso del Spot (2.1), se obtiene una volatilidad instantánea igual a

$$\sigma(S_t, t) = \frac{b(S_t, t)}{S_t}$$

Partiendo de un modelo de volatilidad local, el anterior resultado demuestra la existencia de un proceso de difusión neutral al riesgo único, cuyas distribuciones condicionales coinciden con la valoración de las opciones europeas para todo vencimiento. La fórmula 2.3 se conoce como la fórmula de volatilidad local de Dupire, y será fundamental para establecer la veracidad de la proyección Markoviana al relacionarla con modelos de volatilidad estocástica. En este contexto se va a usar el hecho mostrado tanto por Dupire como Gyongy que si dos subyacentes, cada uno gobernado por su propia ecuación diferencial estocástica, cumplen que los valores esperados de sus coeficientes condicionados a los subyacentes apropiados, son iguales, entonces la superficie de volatilidad que ambos generan (equivalentemente, las distribuciones unidimensionales para cada vencimiento de los subyacentes) coinciden. A partir de este hecho, se busca reemplazar un modelo con elaborada dinámica para el subyacente con una más simple, tomando su proyección, entendida como los valores esperados condicionados de los parámetros.

Para obtener estos resultados, primero se debe explorar la teoría de distribuciones y la

fórmula de Tanaka.

2.2 Teoría de distribuciones y fórmula de Tanaka

Lema de ito: Dado un proceso de difusión, $dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t$ y una función $f(t, X_t)$ dos veces continuamente diferenciable, el lema de ito nos dice que

$$df(t, X_t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, X_t)dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, X_t)\sigma_t^2 dt$$

Para los casos en que $f(t, X_t)$ no cumple estas condiciones de diferenciability o si quiera de continuidad, como son el payoff de una call: $\max(S_T - K, 0)$, o la masa de Dirac: $\delta_K(x)$, definida por la propiedad

$$\int f(s)\delta_K(s)ds = f(K)$$

Se propone entonces la teoría de distribuciones para darle sentido a expresiones como

$$\frac{\partial}{\partial S} \max\{S - K, 0\}$$

De esta forma, se dice que “la función es diferenciable en el sentido de distribuciones”. Para esta parte se seguirá el lineamiento planteado en Savine (2001)

Dadas las funciones $C_K := \max\{S - K, 0\}$ se definen sus derivadas en distribución de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_K}{\partial S}(S) &= d_k(S) = 1_{\{S > K\}} \\ \frac{\partial^2 C_K}{\partial S^2}(S) &= \frac{\partial d_k}{\partial S}(S) = \delta_K(S) \end{aligned}$$

Para la masa de Dirac, se define la derivada n -ésima en distribución ($\delta_K^{(n)}$) de la siguiente forma: para cualquier función suave f con soporte compacto

$$\int f(x)\delta_K^{(n)}(s)ds = (-1)^n f^{(n)}(K)$$

Las derivadas en distribuciones cumplen entre otras, las siguientes propiedades:

- (i) Una función es diferenciable en distribución, si cumple que para toda región compacta K , existe un entero p y una constante c , tal que para toda función suave g ,

$$\left| \int_K f(x)g(x)dx \right| \leq c \sup_{x \in K, |\alpha| \leq p} |g^{(\alpha)}(x)|$$

- (ii) Si una función es diferenciable convencionalmente, su derivada en ese sentido y en distribución coinciden.
- (iii) Si una función f no es diferenciable en el sentido convencional, y sí lo es en distribución, entonces es posible definir una serie de funciones (f_n) suaves, tal que $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ y su derivada en distribución $\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial f_n}{\partial x}$.
- (iv) La derivada en distribución es lineal.
- (v) La derivada satisface la integración por partes: si f es una distribución y g función suave con soporte compacto, entonces

$$\int f(x) \frac{\partial g}{\partial x}(x) dx = - \int \frac{\partial f}{\partial x}(x) g(x) dx$$

El involucrar la derivada en distribución, permite extender la fórmula de Ito a funciones que no son diferenciables en el sentido convencional (no son suaves). Esta fórmula cuyas derivadas parciales son en el sentido de distribución, es conocida como la fórmula de Tanaka. De esta forma, para $C_K(T) := \max\{S_T - K, 0\}$ su **fórmula de Tanaka** es la siguiente:

$$\begin{aligned} C_K(T) &= C_K(0) + \int_0^T \frac{\partial C_K(t)}{\partial S}(t, S) dS + \frac{1}{2} \int_0^T \frac{\partial^2 C_K}{\partial S^2}(t, S) \sigma_t^2 dt \\ &= C_K(0) + \int_0^T 1_{\{S > K\}} dS + \frac{1}{2} \int_0^T \delta_K(s) \sigma_t^2 dt \end{aligned}$$

Si se asume que no hay costos de transacción ni dividendos y se toma σ_t como la volatilidad instantánea del valor absoluto del subyacente (esta puede ser constante, determinística o estocástica), entonces el lado derecho de la fórmula de Tanaka tiene el siguiente significado en el contexto de valoración de opciones:

- (i) $C_K(0)$ es el valor intrínseco de la opción, el cual corresponde al valor de ejercer hoy la opción.
- (ii) $\int_0^T 1_{\{S > K\}} dS_t$ el resultado de una estrategia autofinanciable que consiste en tener una unidad del subyacente cuando el spot está por encima del strike, y ninguna unidad cuando esta por debajo.
- (iii) $\frac{1}{2} \int_0^T \delta_K(s) \sigma_t^2 dt$ es el error de replicación, llamado, *tiempo local en el strike*. Este representa el tiempo que permanece el proceso en el strike, ponderado por la varianza del momento. Este termino cobija el hecho que siempre que el spot cruce el strike superandolo, se va a comprar una unidad del spot, un poco mas caro que K , y cada vez que lo cruce hacia abajo, se va a vender la unidad, a un costo mas bajo de K . Esto se debe a que el movimiento browniano se mueve muy rápido (en un orden de la raíz cuadrada del tiempo).

Dadas las propiedades de la derivada en distribución, se expondrá a continuación de una forma muy directa y consistente usando esta herramienta, el resultado obtenido anteriormente sobre la densidad neutral al riesgo como derivada del precio de la opción:

Denotando como $C(t, K)$ el valor de una opción en el tiempo t con strike K , y siendo este igual al valor esperado bajo la medida neutral al riesgo del payoff, i.e:

$$C(t, K) = E^Q [(S_t - K)^+]$$

derivando parcialmente dos veces con respecto a K a ambos lados, e intercambiando la derivada con la integral se obtiene:

$$\frac{\partial^2 C}{\partial K^2}(t, K) = E^Q \left[\frac{\partial^2}{\partial K^2} (S_t - K)^+ \right] = E^Q [\delta_K(S_t)] = \phi_t(K)$$

A continuación también obtendrá el resultado de Dupire en su modelo de volatilidad local, de forma muy directa usando la fórmula de Tanaka. Es muy conveniente hacer esto ya que ilustra un procedimiento que será muy recurrente en la obtención de los resultados mas adelante en este documento. De nuevo se considera el caso en que la tasa de interés es cero. Partiendo de la difusión:

$$dS_t = \sigma(t, S_t) dW_t$$

se aplica la fórmula de tanaka sobre la función de pago $(S_t - K)^+$ obteniendo:

$$d(S_t - K)^+ = 1_{\{S_t > K\}} dS_t + \frac{1}{2} \delta_K(S_t) \sigma(t, S_t)^2 dt$$

se aplica el valor esperado a ambos lados e intercambiando con el diferencial

$$dE [(S_t - K)^+] = 0 + \frac{1}{2} \phi_t(K) \sigma(t, K)^2 dt$$

ya que $E(dS_t) = 0$. Reemplazando $E[(S_t - K)^+]$ por $C(t, K)$, $\phi_t(K)$ por $\frac{\partial^2 C}{\partial K^2}(t, K)$ y reorganizando resulta

$$\frac{\partial}{\partial t} C(t, K) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial K^2}(t, K) \sigma(t, K)^2$$

Despejando $\sigma(t, K)^2$ se obtiene la fórmula de Dupire para la volatilidad:

$$\sigma(t, K) = \sqrt{\frac{2 \frac{\partial C(t, K)}{\partial t}}{\frac{\partial^2 C(t, K)}{\partial K^2}}}$$

La idea de esta demostración y en general, de este resultado, es ilustrar que la misma técnica, puede usarse aplicada a los precios de las opciones europea obtenidas a partir de otro modelo, como se verá más adelante en la demostración detrás del concepto de la proyección markoviana.

Para el fin de este documento, es necesario estudiar una difusión cuya dinámica contiene saltos i.e. la “fórmula de ito” para una función que tiene como variable un proceso de la forma

$$dS_t = \eta_t dt + \sigma_t dW_t + J_t d\pi_t \quad (2.4)$$

en donde η_t y σ_t son procesos adaptados, π_t es un proceso de poisson con intensidad del salto igual a λ_t y J_t una secuencia de saltos independientes idénticamente distribuidos con media $m(t)$ y desviación estándar $s(t)$. Para esto se usa la extensión Doleans-Dade-Meyer de la fórmula de ito, la cual junto a la estructura dispuesta en la fórmula de tanaka, queda planteada de la siguiente forma (ver Krishnan 1984): Dada una función $F(S_t, t)$ dos veces

diferenciable, en donde S_t sigue la dinámica anterior, el diferencial $dF(S_t, t)$ esta dado por

$$dF(S_t) = \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{\partial F}{\partial S} \eta_t dt + \frac{\partial F}{\partial S} \sigma(t, S_t) dW_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} \sigma(t, S_t)^2 dt + [F(S_t + J_t, t) - F(S_t, t)] d\pi_t$$

Reemplazando $F(S_t)$ por $(S_t - K)^+$ se obtiene el diferencial para la función de pago de la call, dada la versión de la fórmula de tanaka para el caso del subyacente sigue la difusión 2.4:

$$d(S_t - K)^+ = 1_{\{S_t > K\}} \eta_t dt + 1_{\{S_t > K\}} \sigma_t dW_t + \frac{1}{2} \delta_K(S_t) \sigma_t^2 dt + [(S_t + J_t - K)^+ - (S_t - K)^+] d\pi_t \quad (2.5)$$

Oservación 1.1. Aunque hay toda un abanico en procesos de saltos, este documento tratará el caso en que los saltos siguen un proceso de poisson.

Chapter 3

Proyección Markoviana

Recapitulando el resultado de Dupire, este nos dice que la condición necesaria y suficiente para que cualquier modelo de volatilidad local valore de forma correcta hoy, todas las opciones europeas, debe necesariamente cumplir la fórmula de volatilidad local dada por:

$$h(t, K) := \sqrt{\frac{2 \frac{\partial C(t, K)}{\partial t}}{\frac{\partial^2 C(t, K)}{\partial K^2}}}$$

Ahora se quiere explorar la relación entre las varianzas condicionada de dos modelos y la fórmula de volatilidad local, relación que fundamenta la proyección markoviana. Para esto se expondrá una versión particular del resultado propuesto por Gyongy, el cual establece esta relación. Para la presentación de este resultado se seguirá la notación dispuesta en Piterbarg (2006).

Teorema 2.1. Sea $S(t)$ un proceso dado por

$$dS(t) = \alpha(t)dt + \sigma(t)dW(t) \tag{3.1}$$

en donde $\alpha(t)$ y $\sigma(t)$ son procesos estocásticos tal que (2.1) admita una solución única. Se definen $a(t, s)$ y $b(t, s)$ como

$$\begin{aligned} a(t, s) &= E(\alpha(t)|S(t) = s) \\ b^2(t, s) &= E(\sigma^2(t)|S(t) = s) \end{aligned}$$

Entonces la EDE dada por

$$\begin{aligned} dY(t) &= a(t, Y(t))dt + b(t, Y(t))dW(t) \\ Y(0) &= X(0) \end{aligned}$$

admite para todo t , una solución débil $Y(t)$ que tiene la misma distribución unidimensional que $S(t)$.

Observacion 2.1. El que ambos procesos tengan la misma distribución unidimensional para todo t , implica que la valoración que generarían cada uno de los dos procesos de cualquier opción europea coincidirían. Este hecho motiva a que si se esta calibrando un modelo muy complejo a precios de mercado de las opciones europeas, este podría ser reemplazado por el proceso de Markov $Y(t)$ mucho más simple: la proyección markoviana de $X(t)$.

Observacion 2.2. A la expresión $E(\sigma^2(t)|S(t) = s)$ se le denomina volatilidad local de Dupire, ya que fue el el primero en establecer la relación entre este término y las valoraciones de las opciones europeas (Dupire 1997). Bajo esta definición se extiende la conclusión del teorema en que si dos procesos cualquiera, poseen la misma volatilidad local, entonces generan la misma superficie de volatilidad. La conclusión anterior motiva el hecho que al pretender calibrar un modelo sofisticado, esta tarea puede ser simplificada calibrando uno de menor complejidad e igualando sus volatildiades locales, en su defecto, a un modelo de volatilidad local.

A continuación se dará una demostración inspirada en Savine (2001) y recurriendo a la fórmula de Tanaka, de un modelo simplificado en donde $\alpha(t) = 0$. Para la versión original y general del resultado, junto con la demostracion formal se recomienda ver Gyongy

(1986).

Proof. : Realizando la demostración en un contexto financiero, se asumirá tasas de interés igual a cero, no costos de transacción o dividendos. De esta forma se considera el proceso general dado por

$$dS_t = \sigma_t dW_t$$

en donde σ_t puede ser estocástica, determinista o seguir cualquier proceso continuo. La demostración sigue aplicando la fórmula de Tanaka a la función de pago $(S_t - K)^+$ obteniendo:

$$d(S_t - K)^+ = 1_{\{S_t > K\}} dS_t + \frac{1}{2} \delta_K(S_t) \sigma_t^2 dt$$

aplicando valor esperado y asumiendo intercambio entre el diferencial y el operador se obtiene:

$$dE[(S_t - K)^+] = 0 + \frac{1}{2} E[\delta_K(S_t) \sigma_t^2] dt$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{dE[(S_t - K)^+]}{dt} &= \frac{1}{2} [\delta_K(S_t) \sigma_t^2] \\ &= \frac{1}{2} E[\delta_K(S_t) E(\sigma_t^2 | S_t)] \\ &= \frac{1}{2} \phi_t(K) E(\sigma_t^2 | S_t = K) \end{aligned}$$

despejando $E(\sigma_t^2 | S_t = K)$ y haciendo las sustituciones usuales, obtenemos:

$$E(\sigma_t^2 | S_t = K) = \frac{2 \frac{\partial E[(S_t - K)^+]}{\partial t}}{\phi_t(K)} = \frac{2 \frac{\partial C(t, K)}{\partial t}}{\frac{\partial^2 C(t, K)}{\partial K^2}} = h^2(t, K)$$

□

Lo anterior demuestra que la varianza condicional, debe ser igual a la fórmula de volatilidad local en orden para que el modelo se ajuste a los precios de las opciones europeas.

A continuación se expondrá levemente la proyección markoviana multidimensional, una extensión de esta método de calibración muy útil en el sector financiero. El siguiente contenido se tomó de Misirpashaev, Antonov y Piterbarg (2007).

3.0.1 Proyección Markoviana Multidimensional

Una situación muy recurrente en la valoración de derivados, es encontrarse con una canasta de subyacentes que determinan esta valoración. Cada uno de estos subyacentes siguiendo su propio proceso de difusión, se busca encontrar una ecuación que rijan la cantidad de interés, como la volatilidad, que constituyen el agregado de las volatilidades individuales de la canasta. Una forma de estudiar la variable de interés es por medio de simulación de Montecarlo para cada uno de los activos y después agregar los resultados, sin embargo esto involucra gran esfuerzo computacional. Otra alternativa es desarrollar una aproximación de baja dimensión que se ahorre el trabajo computacional y la simulación de cada uno de los factores de riesgo. Por medio de la proyección markoviana se puede desarrollar esta alternativa.

A continuación se presenta sin demostración (ver Misirpashaev 2007 para la demostración), el resultado de Gyongy al caso multidimensional:

Sea $x(t) = \{x_1(t), \dots, x_N(t)\}$ un proceso generalmente no Markoviano generado por K movimientos brownianos independientes $W(t) = W_1(t), \dots, W_K(t)$ con EDE

$$dx_n(t) = \mu_n(t)dt + \sigma_n(t) \cdot dW(t)$$

entonces el proceso puede ser aproximado por uno markoviano tal que la distribución conjunta de todos los componentes en el tiempo t sea la misma. La proyección es de la forma:

$$dx_n^*(t) = \mu_n^*(t, x_n^*(t))dt + \sigma_n^*(t, x_n^*(t))dW(t)$$

$$x_n^*(0) = x_n(0)$$

en donde

$$\mu_n^*(t, y) = E[\mu_n(t) | x(t) = y, n = 1, 2, \dots, N]$$

$$\sigma_n^*(t, y) \dot{\sigma}_m^*(t, y) = E[\sigma_n(t) \cdot \sigma_m(t) | x(t) = y, n = 1, 2, \dots, N]$$

Chapter 4

Volatilidad estocástica y saltos

Como se mencionó anteriormente, un modelo de volatilidad estocástica con saltos es una muy buena alternativa para ajustarse a las condiciones de mercado: a las sonrisas de volatilidad para cualquier vencimiento y a la dinámica real del activo. En capítulos posteriores se dará mayor énfasis en las evidencias y necesidad de este tipo de modelos. En este capítulo, se extenderán los resultados expuestos anteriormente sobre la proyección markoviana, a procesos de volatilidad estocástica con saltos (VES).

A continuación se desarrollará la expresión para la volatilidad local, que permita ajustar el proceso VES a la superficie de volatilidad. Para esto se realizará el procedimiento análogo al realizado en el capítulo 3, para el modelo de volatilidad estocástica.

Inicialmente se estudia el caso en que no hay dividendos, tasas de interés o dividendos. De esta forma el proceso a considerar es el siguiente:

$$dS_t = -\lambda(t)m(t)dt + \sigma(t, S_t)dW_t + J_t d\pi_t$$

en donde π_t es un proceso de poisson con intensidad del salto igual a $\lambda(t)$ y J_t una secuencia de saltos independientes idénticamente distribuidos con media $m(t)$ y desviación estándar $s(t)$. Para que el proceso sea una martingala, se presenta el término $-\lambda(t)m(t)dt$ como corrección a la expectativa que agrega el proceso de salto. Aplicando la extensión Doleans-

Dade-Meyer de la fórmula de Ito en este contexto se obtiene:

$$d(S_t - K)^+ = 1_{\{S_t > K\}}[dS_t - J_t d\pi_t] + \frac{1}{2}\delta_K(S_t)\sigma(t, S_t)^2 dt + [(S_t + J_t - K)^+ - (S_t - K)^+]d\pi_t$$

al aplicar el valor esperado y hacer las sustituciones usuales se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{dE(S_t - K)^+}{dt} &= -E(1_{S_t > K})\lambda(t)m(t) + \frac{1}{2}\phi_t(K)\sigma(t, K)^2 + \lambda(t)E[(S_t + J_t - K)^+ - (S_t - K)^+] \\ &= -\lambda(t)m(t) \int_K^\infty \phi_t(s)ds + \frac{1}{2}\phi_t(K)\sigma(t, K)^2 + \dots \\ &\quad \dots + \lambda(t)E[(S_t + J_t - K)^+] - \lambda(t)E[(S_t - K)^+] \\ &= -\lambda(t)m(t) \int_K^\infty \frac{\partial^2 C}{\partial s^2}(t, s)ds + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial K^2}(t, K)\sigma(t, K)^2 + \dots \\ &\quad \dots + \lambda(t)E[(S_t + J_t - K)^+] - \lambda(t)C(t, K) \\ &= \lambda(t)m(t)\frac{\partial C}{\partial K}(t, K) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial K^2}(t, K)\sigma(t, K)^2 + \dots \\ &\quad \dots + \lambda(t)E[(S_t + J_t - K)^+] - \lambda(t)C(t, K) \end{aligned}$$

Por lo tanto, la fórmula de volatilidad local para este proceso tiene la forma:

$$\sigma(t, K)^2 = \frac{\frac{\partial C}{\partial t}(t, K) - \lambda(t)m(t)\frac{\partial C}{\partial s}(t, K) - \lambda(t)E[(S_t + J_t - K)^+] + \lambda(t)C(t, K)}{\frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial K^2}(t, K)}$$

4.1 Tasas de interés, dividendos e intensidad del salto Log-normal

La anterior demostración aplica para un proceso de difusión, sin tasas de interés o dividendos, con salto aritmético (el salto se suma al spot). A continuación se llegará al mismo resultado, modificando el proceso con el objetivo de hacerlo más realista.

En primer lugar se considerará un proceso con salto geométrico (el salto se da en los retornos del spot). El salto geométrico es más frecuentemente usado en la literatura y permite que el subyacente nunca toque valores negativos, además de hacer el tratamiento más directo al hacer los saltos multiplicativos sobre el spot. De esta forma, el término

$J_t d\pi_t$ será reemplazado por uno de la forma $(J_t - 1)S_t d\pi_t$, en donde J_t es una secuencia de variables aleatorias positivas independientes e idénticamente distribuidas y π_t un proceso de poisson de tasa λ_t . La nueva forma adoptada, como se mencionó anteriormente, interviene en el spot de forma multiplicativa. En una versión simplificada del proceso esto es fácilmente observable: Tomando la volatilidad constante σ y definiendo

$$S_t^- := \lim_{u \uparrow t} S(u)$$

obtenemos que si un salto ocurre en el tiempo $t = \tau$ el incremento del spot sería

$$S_\tau - S_\tau^- = S_\tau^- (J_\tau - 1) = S_\tau^- J_\tau - S_\tau^-$$

por lo tanto $S_\tau = S_\tau^- J_\tau$, o sea, J_τ es la proporción de cambio antes y después del salto. La anterior expresión también muestra porque se escribe $J_t - 1$ en vez de solamente J_t .

Finalmente la solución a la EDE

$$dS_t = \mu_t S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

es :

$$S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t} \prod_{j=1}^{N(t)} J_j$$

(para detalles de esta demostración ver Glasserman 2003) en donde se puede notar como los $N(t)$ saltos que ocurrieron en el periodo considerado, cada uno de tamaño Y_j , afectan multiplicativamente al spot. De esta forma, el modelo que se va a considerar, es una versión extendida del movimiento browniano geométrico. El modelo con evolución neutral al riesgo, queda dado de la siguiente forma:

$$dS_t = (\mu_t - \lambda_t m_t) S_t dt + \sigma_t S_t dW_t + (J_t - 1) S_t d\pi_t \quad (4.1)$$

en donde J_t sigue siendo la intensidad del salto, $m_t := E[J_t - 1]$, y el drift μ_t depende del tipo de activo que se este modelando. Generalmente μ_t tiene la forma $r_t - q_t$, en donde r_t es la tasa de interés libre de riesgo local, y q_t dependiendo del activo es: la tasa de interés

libre de riesgo local, para el caso de una tasa de cambio; la yield de los dividendos para una acción, y la tasa de almacenaje para una materia prima. σ_t puede ser estocástica, determinista o seguir cualquier proceso continuo.

Basados en la demostración del teorema de Gyongy, se propone el siguiente teorema el cual extiende el resultado y por consiguiente la metodología de la proyección markoviana a procesos de la forma 4.1.

Teorema 4.1: El proceso 4.1 y el proceso

$$\frac{dS_t}{S_t} = (\mu_t - \lambda_t m_t) dt + \sqrt{E(\sigma_t^2 | S_t = K)} dW_t + (J_t - 1) d\pi_t$$

tienen las mismas distribuciones unidimensionales para todo t , en consecuencia, generan la misma superficie de volatilidad.

Proof. :Para el caso en que hay presencia de tasas de interés, el valor de opción se modifica agregando un factor de descuento de la siguiente manera:

$$C(t, K) = DF(0, t) E^Q[(S_t - K)^+] \quad (4.2)$$

Dada esa función de pago, aplicando la derivada en distribución, se obtienen las siguientes equivalencias:

$$\frac{\partial C}{\partial K}(t, K) = -DF(0, t) E[1_{\{S_t > K\}}] \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial K^2}(t, K) = DF(0, t) \phi_t(K) \quad (4.4)$$

y reemplazando en 4.2

$$\begin{aligned} C(t, K) &= DF(0, t) E^Q[(S_t - K)^+] = DF(0, t) E^Q[1_{\{S_t > K\}}(S_t - K)] \\ &= DF(0, t) E^Q[1_{\{S_t > K\}} S_t] - DF(0, t) K E^Q[1_{\{S_t > K\}}] \\ &= DF(0, t) E^Q[1_{\{S_t > K\}} S_t] + K \frac{\partial C}{\partial K}(t, K) \end{aligned}$$

por lo que

$$DF(0, t) E^Q[1_{\{S_t > K\}} S_t] = C(t, K) - K \frac{\partial C}{\partial K}(t, K) \quad (4.5)$$

También se tiene que

$$DF(0, t) = e^{-r_t t}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} DF(0, t) E^Q[(S_t - K)^+] &= \frac{d}{dt} e^{-r_t t} E^Q[(S_t - K)^+] \\ &= -r_t e^{-r_t t} E^Q[(S_t - K)^+] \\ &= -r_t DF(0, t) E^Q[(S_t - K)^+] \end{aligned}$$

Contando con estos resultados y tomando a $\mu_t = r_t - q_t$, se aplica la extensión Doleans-Dade-Meyer de la fórmula de Ito sobre $DF(0, t)(S_t - K)^+$ para obtener:

$$\begin{aligned} dDF(0, t)(S_t - K)^+ &= -r_t DF(0, t)(S_t - K)^+ + 1_{\{S_t > K\}} DF(0, t)(r_t - q_t - \lambda_t m_t) S_t dt + \dots \\ &\dots + \frac{1}{2} DF(0, t) \delta_K(S_t) S_t^2 \sigma_t^2 dt + DF(0, t) [(S_t + (J_t - 1)S_t - K)^+ - (S_t - K)^+] d\pi_t \\ &= -r_t DF(0, t)(S_t - K)^+ + 1_{\{S_t > K\}} DF(0, t)(r_t - q_t - \lambda_t m_t) S_t dt + \dots \\ &\dots + \frac{1}{2} DF(0, t) \delta_K(S_t) S_t^2 \sigma_t^2 dt + DF(0, t) [(J_t S_t - K)^+ - (S_t - K)^+] d\pi_t \end{aligned}$$

Al ser π un proceso de Poisson con tasa λ_t , se tiene que

$$E[d\pi_t] = \sum_{h=0}^{\infty} h P(d\pi = h) = 0 + 1(\lambda_t dt + o(dt)) + o(dt) = \lambda_t dt$$

Con esto en mente, se aplica el valor esperado a la ecuación para obtener

$$\begin{aligned} E[dDF(0, t)(S_t - K)^+] &= -r_t DF(0, t) E[(S_t - K)^+] + DF(0, t) E[1_{\{S_t > K\}} S_t] (r_t - q_t - \lambda_t m_t) dt \dots \\ &\dots + \frac{1}{2} DF(0, t) E[\delta_K(S_t) S_t^2 \sigma_t^2] dt + DF(0, t) E[(J_t S_t - K)^+ - (S_t - K)^+] \lambda_t dt \end{aligned}$$

Asumiendo intercambio del operado con el diferencial (E con d) y haciendo las sustitu-

ciones 4.2, 4.3, 4.4 y 4.5 se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t}(t, K) &= -r_t C(t, K) + \left(C(t, K) - K \frac{\partial C}{\partial K}(t, K) \right) (r_t - q_t - \lambda_t m_t) + \frac{1}{2} DF(0, t) E [\delta_K(S_t) S_t^2 \sigma_t^2] \dots \\ &\quad \dots + DF(0, t) \lambda_t E[(J_t S_t - K)^+] - \lambda_t C(t, K) \\ &= C(t, K)(-q_t - \lambda_t(m_t + 1)) - K \frac{\partial C}{\partial K}(t, K)(r_t - q_t - \lambda_t m_t) \dots \\ &\quad \dots + \frac{1}{2} DF(0, t) E [\delta_K(S_t) S_t^2 \sigma_t^2] + DF(0, t) \lambda_t E[(J_t S_t - K)^+] \end{aligned}$$

se desarrolla $\frac{1}{2} E[\delta_K(S_t) S_t^2 \sigma_t^2]$ como se hizo en el caso anterior, para obtener:

$$E [\delta_K(S_t) S_t^2 \sigma_t^2] = E [\delta_K(S_t) S_t^2 E(\sigma_t^2 | S_t)] = \phi_t(K) K^2 E(\sigma_t^2 | S_t = K)$$

reemplazando la anterior igualdad

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t}(t, K) &= C(t, K)(-q_t - \lambda_t(m_t + 1)) - K \frac{\partial C}{\partial K}(t, K)(r_t - q_t - \lambda_t m_t) \\ &\quad + \frac{1}{2} DF(0, t) K^2 \phi_t(K) E(\sigma_t^2 | S_t = K) + DF(0, t) \lambda_t E[(J_t S_t - K)^+] \end{aligned}$$

Reemplazando $\frac{\partial^2 C}{\partial K^2}(t, K) = DF(0, t) \phi_t(K)$ y despejando de la ecuación $E(\sigma_t^2 | S_t = K)$ se obtiene el resultado deseado:

$$E(\sigma_t^2 | S_t = K) = \frac{num}{\frac{1}{2} K^2 \frac{\partial^2 C}{\partial K^2}(t, K)} \quad (4.6)$$

en donde

$$\begin{aligned} num &= \frac{\partial C}{\partial t}(t, K) + (q_t + \lambda_t(m_t + 1))C(t, K) \dots \\ &\quad \dots + K \frac{\partial C}{\partial K}(t, K)(r_t - q_t - \lambda_t m_t) - DF(0, t) \lambda_t E[(J_t S_t - K)^+] \end{aligned}$$

□

Para futuras referencias, se define como $L_K^T(\alpha, m, b) := E(\sigma_t^2 | S_t = K)$, la volatilidad local del proceso con salto.

Como se ilustró en la demostración del teorema de Gyongi y en la obtención de la fórmula local para un proceso sin saltos, en el anterior procedimiento si se hubiera partido de una volatilidad local $\sigma(t, S_t)$, en vez del termino $E(\sigma_t^2 | S_t = K)$ se hubiera obtenido $\sigma(t, K)$; esto nos lleva a concluir que para que el modelo se ajuste a la superficie de volatilidad, su volatilidad local debe coincidir con la fórmula 4.6 . Este hecho se puede considerar como la versión de la proyección markoviana para procesos de la forma 4.1, y siendo así, nos da una idea de calibración: dado el modelo de volatilidad estocástica con saltos de la forma 4.1, igualar el valor esperado condicionado de su varianza, a la fórmula de volatilidad local 4.6.

Este resultado también puede extenderse en el sentido que si dos procesos de la forma 4.1, con igual proceso de salto, poseen la misma fórmula de volatilidad local 4.2, entonces generan la misma superficie de volatilidad. Esto permite proponer la calibración de un modelo de esta forma, partiendo de otro de igual forma pero de más fácil calibración, igualando sus varianzas esperadas condicionales.

La ecuación 4.6 tiene muchos grados de libertad. Para fines prácticos, es necesario restringir algunos términos vía parametrización. Generalmente la dirección que se toma en estas circunstancias, y ha mostrado ser mas efectiva, es la de parametrizar el proceso del salto, en particular, uno en que los saltos se distribuyan lognormal. Tomando además λ_t , y los parámetros de J_t como constantes; sin embargo, en posteriores capítulos, y en el modelo a implementar, se tomará una forma funcional de la tasa del salto, la cual contribuya a que el modelo se ajuste mejor a mercado. Por ahora no es necesario especificar estos detalles, ya que no interviene en el siguiente proceso de resolución de la fórmula 3.2.

Al tomarse J_t como un proceso lognormal, se puede expresar como $J_t = e^{m+bn_t}$ en donde N_t es una normal estándar. Con esto en mente, se desarrolla el término

$$DF(0, t)\lambda_t E[(J_t S_t - K)^+]$$

de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 DF(0, t)E[(J_t S_t - K)^+] &= DF(0, t)E \left[J_t \left(S_t - \frac{K}{J_t} \right)^+ \right] \\
 &= E \left[J_t DF(0, t) \left(S_t - \frac{K}{J_t} \right)^+ \right] \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{m+by} C \left(t, \frac{K}{e^{m+by}} \right) G_t(y) dy
 \end{aligned}$$

en donde $C(t, K)$ es el precio de la call europea en el tiempo t con strike K y $G_t(\cdot)$ es la función de densidad normal estándar. Esta integral se puede resolver por métodos numéricos, en este documento en particular con la regla del trapecoide. Conviene señalar que $\lim_{K \rightarrow \infty} C(t, K) = 0$, tomando valores despreciables muy rápido al avanzar el strike.

4.2 Fórmula en función de volatilidad implícita

La fórmula 4.6 esta en términos del precio de las opciones, pero estas cotizaciones en el mercado se dan en términos de su volatilidad implícita. Es por esto que es conveniente expresar esta ecuación en función de $\sigma_i := \sigma_i(t, K)$, la volatilidad implícita.

Para esto, se recuerda que el precio de la opción $C^{BS}(t, K)$ esta dado por la fórmula de Black-Scholes de la siguiente manera:

$$C^{BS}(t, K) = S_0 e^{-qt} N(d_1) - K e^{-rt} N(d_2)$$

en donde

$$d_2 = d_1 - \sigma_i \sqrt{t}, \quad n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2}, \quad N(x) = \int_{-\infty}^x n(s) ds$$

y

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r_t - q_t + \sigma_i^2/2)t}{\sigma_i \sqrt{t}}$$

Aplicando la regla de la cadena se obtienen las siguientes derivadas (en adelante se omitirá en la notación la dependencia en las variables (t, K)):

$$\begin{aligned}\frac{\partial C}{\partial t} &= \frac{\partial C^{BS}}{\partial t} + \frac{\partial C^{BS}}{\partial \sigma_i} \frac{\partial \sigma_i}{\partial t} \\ \frac{\partial C}{\partial K} &= \frac{\partial C^{BS}}{\partial K} + \frac{\partial C^{BS}}{\partial \sigma_i} \frac{\partial \sigma_i}{\partial K} \\ \frac{\partial^2 C}{\partial K^2} &= \frac{\partial^2 C^{BS}}{\partial K^2} + 2 \frac{\partial^2 C^{BS}}{\partial K \partial \sigma_i} \frac{\partial \sigma_i}{\partial K} + \frac{\partial^2 C^{BS}}{\partial \sigma_i^2} \left(\frac{\partial \sigma_i}{\partial K} \right)^2 + \frac{\partial C^{BS}}{\partial \sigma_i} \frac{\partial^2 \sigma_i}{\partial K^2}\end{aligned}$$

Las derivadas de la derecha en las expresiones anteriores, corresponden a las griegas de la opción, las cuales están dadas por:

$$\begin{aligned}\frac{\partial C^{BS}}{\partial t} &= \frac{\sigma_i S_0 e^{-q_i t} n(d_1)}{2\sqrt{t}} - q_t S_0 N(d_1) e^{-q_i t} + r_t K e^{-r_t t} N(d_2) \\ \frac{\partial C^{BS}}{\partial K} &= -e^{-r_t t} N(d_2) \\ \frac{\partial^2 C^{BS}}{\partial K^2} &= \frac{e^{-r_t t} n(d_2)}{K \sigma_i \sqrt{t}} \\ \frac{\partial C^{BS}}{\partial \sigma_i} &= S_0 e^{-q_i t} n(d_1) 2\sqrt{t} \\ \frac{\partial^2 C^{BS}}{\partial K \partial \sigma_i} &= \frac{S_0 e^{-q_i t} n(d_1) d_1}{K \sigma_i} \\ \frac{\partial^2 C^{BS}}{\partial \sigma_i^2} &= S_0 e^{-q_i t} n(d_1) d_1 \sqrt{t} \frac{d_1 d_2}{\sigma_i}\end{aligned}$$

Ahora bien, la ecuación 4.6 se puede escribir como

$$E(\sigma_t^2 | S_t = K) = \text{Vol. Local} + \lambda_t (m_t + 1) C(t, K) - K \lambda_t m_t \frac{\partial C}{\partial K}(t, K) - DF(0, t) \lambda_t E[(J_t S_t - K)^+]$$

en donde Vol. Local es efectivamente, la fórmula de volatilidad local correspondiente al caso en que no hay saltos. A partir de la literatura (ver Sepp 2002 por ejemplo) se conoce la resolución de esta expresión en términos de la volatilidad implícita, que da como

resultado:

$$\text{Vol. Local} = \frac{\sigma_i + 2t \frac{\partial \sigma_i}{\partial t} + 2(r_t - q_t)tK \frac{\partial \sigma_i}{\partial K}}{K^2 t \left(\frac{\partial^2 \sigma_i}{\partial K^2} - d_1 \sqrt{t} \left(\frac{\partial \sigma_i}{\partial K} \right)^2 + \frac{1}{\sigma_i} \left(\frac{1}{K\sqrt{t}} + d_1 \frac{\partial \sigma_i}{\partial K} \right)^2 \right)}$$

Por lo tanto, se desarrollará el segundo término:

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda_t(m_t + 1)C(t, K) - K\lambda_t m_t \frac{\partial C}{\partial K}(t, K) - DF(0, t)\lambda_t E[(J_t S_t - K)^+]}{\frac{1}{2}K^2 \frac{\partial^2 C}{\partial K^2}} \\ &= \frac{\lambda_t(m_t + 1)C(t, K)}{\frac{1}{2}K^2 \frac{\partial^2 C}{\partial K^2}} - \frac{K\lambda_t m_t \frac{\partial C}{\partial K}(t, K)}{\frac{1}{2}K^2 \frac{\partial^2 C}{\partial K^2}} - \frac{DF(0, t)\lambda_t E[(J_t S_t - K)^+]}{\frac{1}{2}K^2 \frac{\partial^2 C}{\partial K^2}} \\ &= \frac{2\sigma_i \sqrt{t} \lambda_t}{Kn(d_2)} \left\{ e^{r_t t} E[J_t]C(t, K) - m_t KN(d_2) - E \left[J_t \left(S_t - \frac{K}{J_t} \right)^+ \right] \right\} \\ &= \frac{2\sigma_i \sqrt{t} \lambda_t e^{r_t t}}{Kn(d_2)} \left\{ E[J_t]C(t, K) - e^{-r_t t} m_t KN(d_2) - \int_{-\infty}^{\infty} e^{m+by} C \left(t, \frac{K}{e^{m+by}} \right) G_t(y) dy \right\} \\ &=: SVL \end{aligned}$$

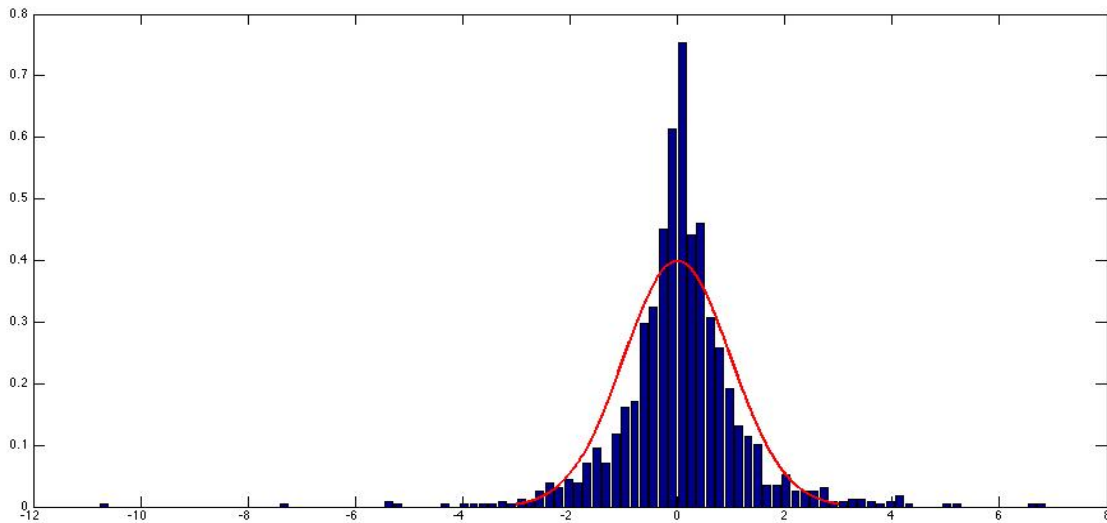
Chapter 5

Modelo de Heston con saltos

Durante el documento, ya se han señalado las bondades de un modelo de volatilidad estocástica, y la conveniencia de extenderlo a uno que contenga saltos. En este capítulo, se recapitulará y darán mayores evidencias de la necesidad de modelos más sofisticados al browniano geométrico. Se expondrá el modelo de Heston, para posteriormente extenderlo incorporando saltos, y se desarrollaran técnicas analogas de capítulos anteriores para emular los resultados contenidos en la proyección markoviana y proponer otra alternativa de calibración de este modelo.

5.1 Modelo de Heston

Son bien conocidas las bondades de un modelo de volatilidad estocástica: Aparte de la necesidad de que en una manera autocontenida, explique la estructura de la sonrisa de volatilidad, son una alternativa realista para la dinámica del subyacente (a diferencia por ejemplos de modelos de volatilidad local). En particular para el COP/USD, como lo muestra la gráfica 1.1, es notable como la volatilidad cambia durante el tiempo, y mas específicamente, como a movimientos grandes los siguen movimientos grandes, y a movimientos pequeños, movimientos pequeños, un fenómeno conocido como “volatility clustering”. Como se puede ver en la siguiente gráfica de los retornos estandarizados diarios de los últimos 8 años del COP/USD, junto a la función de densidad normal estandar (graficada desde -3 a 3 desviaciones estándar)



la distribución empírica se diferencia mucho a la normal estándar, en particular es evidente la presencia de las colas anchas y picos altos (alta kurtosis). Lo anterior, es consecuencia frecuente de característica de mezcla de distribuciones con diferentes varianzas, lo cual es motivación para modelar la varianza como una variable aleatoria. El volatility clustering implica que la varianza es autocorrelacionada, un atributo que sería conveniente modelar. Otra característica presente en el mercado, es la reversión a la media para la volatilidad. Esto se fundamenta en que si la volatilidad no tuviera regresión a la media, en que son muy infactibles volatilidades del orden de 1 o 100%, queriendo a evitar estos escenarios, se introduce la regresión a la media.

Dados los parámetros anteriores, Heston (Heston 1993) propone en 1993 un modelo de volatilidad estocástica en el cual la varianza sigue un proceso CIR. El modelo queda descrito de la siguiente forma:

$$dS_t = \mu_t S_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_1$$

$$dv_t = -\lambda(v_t - v^*)dt + \eta\sqrt{v_t}dW_2$$

con

$$\langle dW_1 dW_2 \rangle = \rho dt$$

λ es la velocidad de regresión a la media de la varianza y v^* la media de la varianza de largo plazo.

La popularidad de este modelo se debe a que a diferencia de otros modelos de volatilidad estocástica, posee una solución cerrada para la valoración de opciones europeas. Este hecho hace que calibrar el modelo a precios de mercado sea computacionalmente mucho mas eficiente.

Muchos autores han explorado e implementado el modelo de Heston, entre estos se encuentran Heston (1993), Carr y Madan (1999), Lewis (2000), Gatheral (2006). A continuación se mostrarán los resultados fundamentales del modelo. Se recomienda revisar la bibliografía anterior para ver el desarrollo detallado de estos resultados.

Se comienza por hacer el frecuente cambio de variable $x_t := \log(F_{t,T}/K)$ en donde K es el strike de la opción en T y $F_{t,T}$ el precio forward del subyacente en T , parados en t . Posteriormente se obtiene la función de distribución dispuesta de la siguiente forma:

$$Pr(x_T > x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty Re \frac{\exp\{C(u, \tau)v^* + D(u, \tau)v + iux\}}{iu} du \quad (5.1)$$

en donde

$$\begin{aligned} \tau &= T - t \\ D(u, \tau) &= r_- \frac{1 - e^{-d\tau}}{1 - ge^{-d\tau}} \\ C(u, \tau) &= \lambda r_- \tau \frac{2}{\eta^2} \log \left(\frac{1 - ge^{-d\tau}}{1 - g} \right) \end{aligned}$$

con

$$r_\pm = \frac{\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\gamma} =: \frac{\beta \pm d}{\eta^2} \text{ y } g := \frac{r_-}{r_+}$$

Cabe aclarar que el termino $C(u, \tau)$ puede variar un poco entre autores, y esto se debe a las diferentes aproximaciones que se pueden hacer al resolver los inconvenientes que surgen en la solución numérica de la integral compleja en 5.1. Como el fin de este documento no es el modelo de Heston como tal, no se ahondara en la resolución de esta integral.

Como se mencionó anteriormente, la gran ventaja del modelo de Heston, es la obtención de fórmulas cerradas para la valoración de las opciones europeas. Esto involucra la obtención de la función característica del proceso en el tiempo T : $\phi_T(u)$ la cual esta dada por la siguiente fórmula:

$$\phi_T(u) = e^{C(u,\tau)v^* + D(u,\tau)v}$$

Una vez obtenida la función característica, como lo demuestra Carr y Madan (2000) o Gatheral (2006) la valoración de las opciones se puede hacer de forma directa. Una versión simplificada de esta fórmula (asumiendo que no hay tasas de interés o dividendos) es:

$$C(S, K, T) = S - SK \frac{1}{\phi} \int_0^\infty \frac{\text{Re} [e^{-iuk} \phi_T(u - i/2)]}{u^2 + 1/4} du \quad (5.2)$$

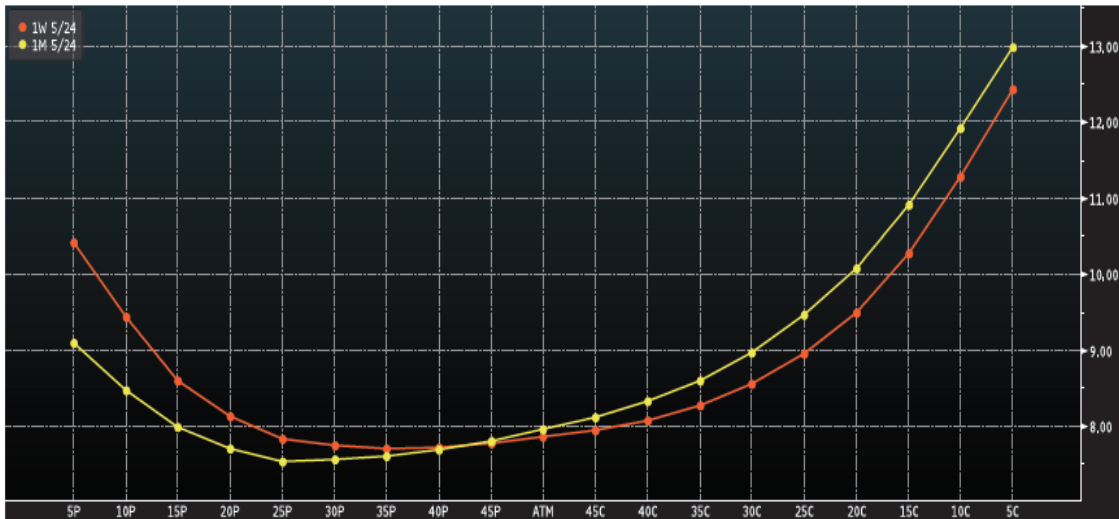
en donde $k = \log(K/S)$.

En general, este resultado aplica para cualquier proceso estocástico con función característica $\phi_T(u)$. La demostración de este resultado se sale del propósito del documento, para el interesado se recomienda revisar la bibliografía reverenciada anteriormente.

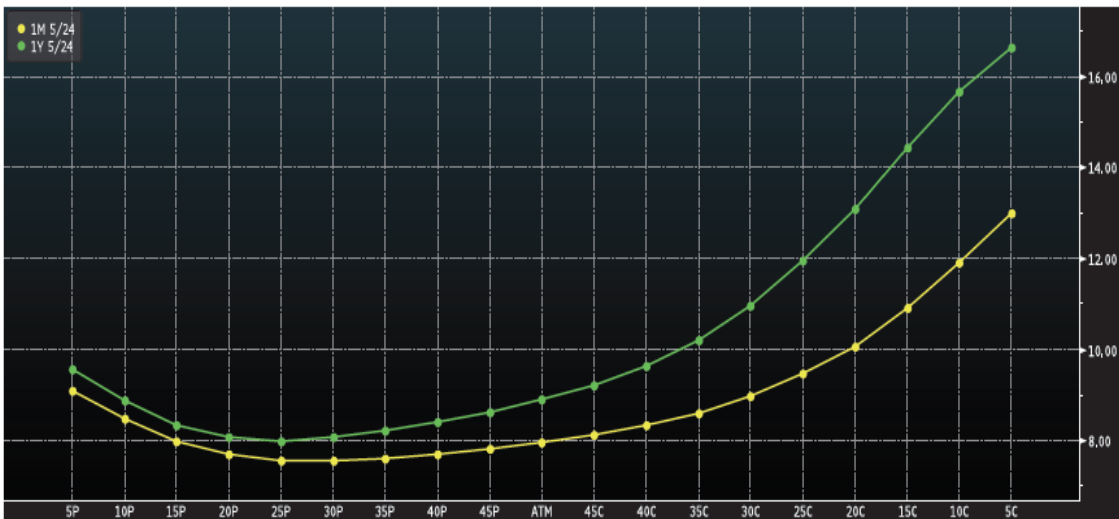
Con los resultados anteriores, se puede proceder a calibrar el modelo de Heston a precios de mercado. Superando inconvenientes como la integración numérica compleja, o explosiones en las colas al simular al largo plazo, se puede alcanzar un modelo que se ajusta muy bien a los precios de mercado e incorpora las características de la superficie en el mediano y largo plazo.

5.2 Incorporando saltos

Como lo menciona Gatheral en Gatheral (2006), los modelos de volatilidad estocástica generalmente no se ajustan bien a la sonrisa de volatilidad en el corto plazo; esto se debe a que no reflejan el alto nivel de pendiente descendiente (skewness negativa) presentes para las opciones put in the money, posiblemente producto del fenómeno conocido como crash-o-fobia, ni la fuerte convexidad de la sonrisa para estos vencimientos. A continacio, se muestran las sonrisas de volatilidad para dos vencimientos: una semana (curva naranja) y un mes (curva amarilla).



En la gráfica se puede apreciar el skewness negativo de la sonrisa de una semana, y como este se va reduciendo con el tiempo hasta volverse una curva con skew predominantemente positivo, reflejando la correlación positiva entre la volatilidad y el spot. A continuación se muestra las sonrisas a un mes (curva amarilla) y un año (curva verde), en donde se puede apreciar el comportamiento anteriormente descrito¹.



Los altos bids para movimientos extremos reflejados por la sonrisa de una semana es una manifestación de la concepción sobre la posibilidad de grandes cambios. Para que un

¹Graficos tomados de Bloomberg el 16 de Mayo.

modelo de volatilidad estocástica pueda reflejar este fenómeno debe poseer una correlación negativa irrealmente grande, además de una gran volatilidad realizada. En general las difusiones no pueden generar la convexidad reflejada por el mercado en tan poco tiempo, en vez de eso generan una sonrisa plana en el corto plazo, por lo que el proceso de salto se ve aun mas necesario.

Incorporando saltos al modelo de Heston, podría modelarse la alta ponderación de le da el mercado a eventos extremos. De esta forma, el proceso de salto “se encargaría” de reflejar las condiciones del mercado en el corto plazo, para después darle espacio al de volatilidad estocástica, que ha probado ser muy efectivo al modelar el largo plazo. Siendo asi, se considera el siguiente modelo:

$$\begin{aligned} dS_t &= \mu_t S_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_1 + (J_t - 1) S_t d\pi_t \\ dv_t &= -\lambda(v_t - v^*) dt + \eta \sqrt{v_t} dW_2 \end{aligned} \quad (5.3)$$

con

$$\begin{aligned} \langle dW_1 dW_2 \rangle &= \rho dt \\ E[d\pi_t] &= \lambda_t dt = M e^{-\alpha' t} dt \end{aligned}$$

y

$$J_t = e^{m+bN_t}$$

donde $\mu_t = r_t - q_t - \left(e^{m+\frac{1}{2}b^2} - 1 \right) \lambda_t$, siendo r_t y q_t las tasas libres de riesgo locales y extranjeras respectivamente, N_t una variable normal estándar, y los procesos J_t y π_t son independientes tanto entre ellos, como de W_t^1 y W_t^2 . La idea de definir $\lambda_t = M e^{-\alpha' t}$, en donde M es la tasa máxima de saltos anual, es incorporar un modelo cuya intensidad del salto se reduzca al transcurrir del tiempo. En el proceso de calibración se determinara el α' para que el salto tenga mayor presencia en el corto plazo, pero con el transcurrir del tiempo la tasa se aproxime a cero, haciendo converger el modelo a uno de volatilidad estocástica estrictamente. M es un parámetro que se puede establecer a partir del conocimiento del mercado; en particular se hace la sustitución $\alpha t = \alpha' t + \ln(M)$ para evitar manipular este término.

Para aplicar los resultados obtenidos en el capítulo 4 en la calibración de este modelo, es necesario hallar el valor esperado de la varianza dado un nivel del spot i.e

$$E[v_t | S_t = K]$$

Para lograr este cometido puede pretenderse hallar esta expresión analítica la cual es robusta y contiene términos e integrales cuyo cálculo numerico es sofisticado requiriendo aproximaciones numericas que comprometen la eficiencia computacional y validez de la calibración. Una aproximación a esta fórmula puede encontrarse en Ewald (2004).

En este documento, se desarrollará una aproximación inspirada en la propuesta de Gatheral (Gatheral 2006) para hallar la volatilidad local del proceso de Heston. De esta forma, y partiendo del modelo anterior, se comienza por hacer la sustitución

$$x_t = \ln(S_t/S_0) - \int_0^t \left[r_s - q_s - \left(e^{m+\frac{1}{2}b^2} - 1 \right) \lambda_s \right] ds$$

definiendo

$$\mu_t^* := \int_0^t \left[r_s - q_s - \left(e^{m+\frac{1}{2}b^2} - 1 \right) \lambda_s \right] ds$$

se obtiene la difusión para los retornos centrados que queda descrita de la siguiente forma:

$$dx_t = -\frac{v_t}{2}dt + \sqrt{v_t}dW_1 + \left\{ \ln\left(\frac{S_t J_t}{S_0}\right) - \mu_t^* - \left[\ln\left(\frac{S_t}{S_0}\right) - \mu_t^* \right] \right\} d\pi_t \quad (5.4)$$

$$= -\frac{v_t}{2}dt + \sqrt{v_t}dW_1 + \ln(J_t) d\pi_t \quad (5.5)$$

A partir de la descomposición de Cholesky para los diferenciales brownianos, se obtiene que

$$dW_2 = \rho dW_1 + \sqrt{1 - \rho^2} dW^*$$

en donde dW_1 y dW^* son ortogonales. Lo anterior se reemplaza en la difusión de la varianza:

$$\begin{aligned} dv_t &= -\lambda(v_t - v^*)dt + \eta\sqrt{v_t} \left(\rho dW_1 + \sqrt{1 - \rho^2} dW^* \right) \\ &= -\lambda(v_t - v^*)dt + \eta\sqrt{v_t}\rho dW_1 + \eta\sqrt{v_t}(1 - \rho^2) dW^* \end{aligned}$$

A partir de 5.5 se tiene que

$$\sqrt{v_t}dW_1 = dx_t + \frac{v_t}{2}dt - \ln(J_t) d\pi_t$$

Sustituyendo en la ecuación anterior

$$dv_t = -\lambda(v_t - v^*)dt + \eta\rho \left[dx_t + \frac{v_t}{2}dt - \ln(J_t) d\pi_t \right] + \eta\sqrt{v_t}\sqrt{1 - \rho^2}dW^* \quad (5.6)$$

$$= -\lambda(v_t - v^*)dt + \eta\rho dx_t + \frac{\eta\rho v_t}{2}dt - \eta\rho \ln(J_t) d\pi_t + \eta\sqrt{v_t}\sqrt{1 - \rho^2}dW^* \quad (5.7)$$

Es necesario hallar el valor esperado incondicional de la varianza instantánea en el tiempo s $E(v_s)$, el cual esta dado por

$$E(v_s) = (v_0 - v^*)e^{-\lambda s} + v^*$$

El procedimiento para hallar este valor puede encontrarse en Jeanblanc (2009) pg. 360. Una vez hallado este valor, se obtiene $E(x_t)$ aplicando el valor esperado a la ecuación (5.4) y asumiendo intercambio del diferencial con el valor esperado para obtener:

$$dE(x_t) = -\frac{E(v_t)}{2}dt + E[\ln(J_t)]\lambda_t dt \quad (5.8)$$

Se integra de 0 a t a ambos lados de la expresión anterior obteniendo

$$E(x_t) = -\frac{1}{2} \int_0^t E(v_s)ds + \int_0^t E[\ln(J_s)]\lambda_s ds$$

pues $E(x_0) = 0$. Posteriormente se resuelven las integrales reemplazando las expresiones conocidas $E(v_s) = (v_0 - v^*)e^{-\lambda s} + v^*$, $J_t = e^{m+bN_t}$ y $\lambda_t = e^{-\alpha t}$ para obtener:

$$E(x_t) = -\frac{1}{2}(v_0 - v^*) \frac{1 - e^{-\lambda t}}{\lambda} - \frac{v^*}{2} - \frac{m}{\alpha} (e^{-\alpha t} - 1) \quad (5.9)$$

$$= \frac{(v_0 - v^*)}{2\lambda} e^{-\lambda t} - \frac{m}{\alpha} e^{-\alpha t} - \left[\frac{(v_0 - v^*)}{2\lambda} + \frac{v^*}{2} + \frac{m}{\alpha} \right] \quad (5.10)$$

A continuación se hacen dos aproximaciones inspiradas por Gatheral para continuar con el desarrollo. La primera es tomando $x_0 = 0$

$$E[x_s|x_T] = x_T \frac{E(x_s)}{E(x_T)}$$

Para notar la factibilidad de esta aproximación, se toma el valor esperado a ambos lados de la ecuación obteniendo

$$\begin{aligned} E(x_s) &= E[E[x_s|x_T]] \\ &= E(x_T) \frac{E(x_s)}{E(x_T)} = E(x_s) \end{aligned}$$

Como dice Gatheral, esta aproximación sería exacta si x_t fuera un puente browniano convencional, y razonable cuando $|x_T|$ no esta muy lejos del at the money. Se define

$$\epsilon_t := E[v_t|x_T]$$

Partiendo de la aproximación anterior, se toma el valor esperado condicional en (5.7) obteniendo:

$$d\epsilon_t = -\lambda(\epsilon_t - v^*)dt + \frac{\eta\rho}{2}\epsilon_t dt + \eta\rho \frac{x_T}{E(x_T)} dE(x_t) + \eta\sqrt{1-\rho^2}E[\sqrt{v_t}dW^*|x_T] - E[\ln(J_t) d\pi_t|x_T]$$

Reemplazando a partir de (5.8)

$$\begin{aligned} &= -\lambda(\epsilon_t - v^*)dt + \frac{\eta\rho}{2}\epsilon_t dt + \eta\rho \frac{x_T}{E(x_T)} \left[-\frac{1}{2}E(v_t)dt + E[\ln(J_t)]\lambda_t dt \right] + \dots \\ &\quad \dots + \eta\sqrt{1-\rho^2}E[\sqrt{v_t}dW^*|x_T] - E[\ln(J_t) d\pi_t|x_T] \\ d\epsilon_t &= -\lambda(\epsilon_t - v^*)dt + \frac{\eta\rho}{2}\epsilon_t dt - \eta\rho x_T \frac{E(v_t)}{2E(x_T)} dt + \eta\rho x_T \frac{E[\ln(J_t)]\lambda_t}{E(x_T)} dt + \dots \\ &\quad \dots + \eta\sqrt{1-\rho^2}E[\sqrt{v_t}dW^*|x_T] - E[\ln(J_t) d\pi_t|x_T] \end{aligned}$$

Incorporando la independencia del proceso de salto con el resto de los procesos obtenemos

$$d\epsilon_t = -\lambda(\epsilon_t - v^*)dt + \frac{\eta\rho}{2}\epsilon_t dt - \eta\rho x_T \frac{E(v_t)}{2E(x_T)} dt + \eta\sqrt{1-\rho^2}E[\sqrt{v_t}dW^*|x_T] + \dots$$

$$\dots + \left(\frac{\eta\rho x_T}{E(x_T)} - 1 \right) E[\ln(J_t)]\lambda_t dt$$

La segunda aproximación propuesta por Gatheral, es que para valores altos de $|\rho|$, el termino $\eta\sqrt{1-\rho^2}E[\sqrt{v_t}dW^*|x_T]$ puede ser despreciable. Para las tasas de cambio, es un hecho la correlación altamente positiva entre los retornos y la volatilidad. En las gráficas de las sonrisas de volatilidad del COP/USD para un mes y un año, se puede evidenciar la significante correlación positiva entre el spot y la volatilidad, dada por la skew positiva. Debido a esto también se aplicara esta aproximación en la simplificación de la ecuación al prescindir de este termino para obtener finalmente.

$$d\epsilon_t = -\lambda(\epsilon_t - v^*)dt + \frac{\eta\rho}{2}\epsilon_t dt - \eta\rho x_T \frac{E(v_t)}{2E(x_T)} dt + \left(\frac{\eta\rho x_T}{E(x_T)} - 1 \right) E[\ln(J_t)]\lambda_t dt$$

por lo tanto

$$\frac{d\epsilon_t}{dt} + \lambda'\epsilon_t = \lambda'v_2^* - \eta\rho x_T \frac{E(v_t)}{2E(x_T)} + \left(\frac{\eta\rho x_T}{E(x_T)} - 1 \right) m\lambda_t$$

en donde $\lambda' = \lambda - \frac{\eta\rho}{2}$, $v_2^* = \frac{v^*\lambda}{\lambda'}$ y $E[\ln(J_t)] = E[m + bN_t] = m$.

La ecuación diferencial ordinaria resultante se resuelve para obtener

$$\epsilon_T = v_2^*(1 - e^{-\lambda'T}) - \frac{\eta\rho x_T e^{-\lambda'T}}{2E(x_T)} \int_0^T E(v_t)e^{\lambda't} dt + \left(\frac{\eta\rho x_T}{E(x_T)} - 1 \right) m e^{-\lambda'T} \int_0^T e^{(\lambda'-\alpha)t} dt$$

$$= v_2^*(1 - e^{-\lambda'T}) - C_1(x_T) \frac{e^{-\lambda'T}}{2} \int_0^T E(v_t)e^{\lambda't} dt + [C_1(x_T) - 1] m e^{-\lambda'T} \int_0^T e^{(\lambda'-\alpha)t} dt$$

En donde $C_1(x_T) = \frac{\eta\rho x_T}{E(x_T)}$

Se resuelve la integral $\int_0^T E(v_t)e^{\lambda't} dt$:

$$\begin{aligned}
\int_0^T E(v_t)e^{\lambda't} dt &= \int_0^T \left\{ \frac{(v_0 - v^*)}{2\lambda} e^{-\lambda t} - \frac{m}{\alpha} e^{-\alpha t} - \left[\frac{(v_0 - v^*)}{2\lambda} + \frac{v^*}{2} + \frac{m}{\alpha} \right] \right\} e^{\lambda't} dt \\
&= \int_0^T \frac{(v_0 - v^*)}{2\lambda} e^{-(\lambda - \lambda')t} - \frac{m}{\alpha} e^{-(\alpha - \lambda')t} - e^{\lambda't} \left[\frac{(v_0 - v^*)}{2\lambda} + \frac{v^*}{2} + \frac{m}{\alpha} \right] dt \\
&= -\frac{(v_0 - v^*)}{2\lambda(\lambda - \lambda')} \left[e^{-(\lambda - \lambda')T} - 1 \right] + \frac{m}{\alpha(\alpha - \lambda')} \left[e^{-(\alpha - \lambda')T} - 1 \right] - C_2 \left[e^{\lambda'T} - 1 \right] \\
&=: I(T)
\end{aligned}$$

en donde $C_2 = \frac{1}{\lambda'} \left[\frac{(v_0 - v^*)}{2\lambda} + \frac{v^*}{2} + \frac{m}{\alpha} \right]$.

Con la notacion anterior, se obtiene que

$$\epsilon_T = v_2^*(1 - e^{-\lambda'T}) - C_1(x_T) \frac{e^{-\lambda'T}}{2} I(T) + \frac{me^{-\lambda'T}}{\lambda' - \alpha} (C_1(x_T) - 1) \left(e^{(\lambda' - \alpha)T} - 1 \right)$$

Ahora bien, cuando $S_T = K$

$$\begin{aligned}
x_T &= \ln(K/S_0) - \int_0^T \left[r_s - q_s - \left(e^{m + \frac{1}{2}b^2} - 1 \right) \lambda_s \right] ds \\
&= \ln(K/S_0) - (r_T - q_T)T + \left(e^{m + \frac{1}{2}b^2} - 1 \right) \int_0^T e^{-\alpha s} ds \\
&= \ln(K/S_0) - (r_T - q_T)T + \left(e^{m + \frac{1}{2}b^2} - 1 \right) \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{e^{-\alpha T}}{\alpha} \right)
\end{aligned}$$

Finalmente se define la volatilidad local del modelo,

$$E[v_T | S_T = K] \text{ como } V_K^T(S_0; \lambda, v^*, \eta, \rho, \alpha, m, b) = \dots$$

$$\dots = v_2^*(1 - e^{-\lambda'T}) - C_1(x_T^*) \frac{e^{-\lambda'T}}{2} I(T) + \frac{me^{-\lambda'T}}{\lambda' - \alpha} (C_1(x_T^*) - 1) \left(e^{(\lambda' - \alpha)T} - 1 \right) \quad (5.11)$$

en donde $x_T^* := \ln(K/S_0) - (r_T - q_T)T + \frac{1}{\alpha} \left(e^{m + \frac{1}{2}b^2} - 1 \right) (1 - e^{-\alpha T})$

5.3 Calibración

Una vez obtenidas las fórmulas, para aplicar la proyección markoviana en la calibración del modelo, se debe conseguir para todo vencimiento y strike, igualar la volatilidad local encontrada en el capítulo 4 (fórmula 4.6) con la volatilidad local del modelo de Heston con saltos encontrada en el capítulo anterior (fórmula 5.11).

Claramente pretender igualar las dos fórmulas para todo vencimiento y strike es inviable, pues el mercado sólo cotiza las opciones para ciertos vencimientos y strikes. Aunque la obtención de la volatilidad local a partir de las cotizaciones de mercado, requieren interpolación de los datos, y por consiguiente una superficie ‘densa’, seguiría siendo inadecuado pretender calibrar el modelo a toda la superficie ya que vuelve la computación más dispendiosa y en el proceso de optimización se estarían ponderando opciones producto de una interpolación, en vez de las realmente tranzadas en el mercado. Lo conveniente en el proceso de calibración es tomar los benchmarks que corresponden a las opciones más líquidas en el mercado.

A partir de lo anterior, lo que se busca en el proceso de calibración es minimizar la diferencia entre las volatilidades local y la volatilidad local del Heston con saltos para un conjunto dado de strikes y vencimientos

$$C = \{(T_i, K_j) | i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n_i\}$$

generando en principio, el siguiente problema de optimización:

$$\min_{\lambda, \eta, \rho, \alpha, m, b} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{n_j} [V_K^T(S_0; \lambda, v^*, \eta, \rho, \alpha, m, b) - L_K^T(\alpha, m, b)]^2$$

Claramente en esta fórmula, solo se está considerando el agregado de la diferencia entre volatilidades, sin hacer ninguna ponderación discriminante entre vencimientos o strikes. Podría suceder que para algún subconjunto de C , los errores sean considerablemente mayores que para el resto. Para evitar este escenario podría minimizarse conjuntamente la desviación estándar de los errores, de tal forma que el modelo sea uniforme y consistente a través del tiempo y los strikes. Esa es una alternativa que no se estudiará en este docu-

mento, en vez de eso se optó por tomar como medida el cuadrado de los errores, esperando que esto contribuya a evitar la circunstancia anteriormente mencionada. Dado el caso en que ocurra, se procedería a modificar la función de error, dándole mayor ponderación a los errores que fueron mas significativos.

Dado este modelo y su estructura del salto, el componente de la fórmula de volatilidad local correspondiente quedaría descrito como:

$$SVL = \frac{2\sigma_i\sqrt{t}\lambda_t e^{r_t t}}{Kn(d_2)} \left\{ E[J_t]C(t, K) - e^{-r_t t} m_t KN(d_2) - \int_{-\infty}^{\infty} e^{a+by} C\left(t, \frac{K}{e^{a+by}}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy \right\}$$

en donde $\lambda_t = e^{-\alpha t}$, $E[J_t] = e^{(a + \frac{1}{2} * b^2)}$ y $m_t = E[J_t] - 1$.

En particular se tiene que la integral resuelta numéricamente por el método del trapecoide, queda dada por:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{a+by} C\left(t, \frac{K}{e^{a+by}}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy \approx \sum_{i=1}^{NK} [e^{a+by_{i+1}} C\left(t, \frac{K}{e^{a+by_{i+1}}}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y_{i+1}^2} \dots \\ \dots - e^{a+by_i} C\left(t, \frac{K}{e^{a+by_i}}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y_i^2}] \frac{\Delta y}{2}$$

En donde NK es el número de strikes que se están tomando para evaluar la integra. En particular se tiene que los valores de y_i van desde $\frac{1}{b} \left[\ln\left(\frac{K}{K_{-5\Delta}}\right) - a \right]$ hasta $\frac{1}{b} \left[\ln\left(\frac{K}{K_{5\Delta}}\right) - a \right]$ para cada K y vencimiento, en donde $K_{-5\Delta}$ y $K_{5\Delta}$ son respectivamente el strike correspondiente al 5 delta put y el 5 delta call.

Dependiendo del activo que se esté modelando, se pueden establecer restricciones sobre las variables de tal forma que la computación se haga mas eficiente. En particular para las tasas de cambio es conveniente restringir el coeficiente de correlación ρ a valores en $[a, 1)$ en donde a es una constante mayor que cero. Su valor depende de la certidumbre sobre el nivel de correlación positiva.

Por otro lado, y buscando que el proceso de salto explique la skewness negativa en el corto plazo, se restringe a que la media del salto sea menor que 1, por lo tanto, que $a < \frac{1}{2}b^2$.

5.4 COP/USD

Con el anterior framework, se procede a calibrar el modelo de Heston con saltos para el COP/USD a su correspondiente superficie de volatilidad. Para esto se usarán 6 vencimientos: 7, 14, 30, 91, 182 y 365 días, y 12 strikes uniformemente distribuidos entre el 5 delta put y el 5 delta call para cada vencimiento. De esta forma, se procede a encontrar el conjunto de parámetros $\lambda, \eta, \rho, \alpha, m, b$, que minimicen la suma de las diferencias al cuadrado de $V_K^T(S_0; \lambda, v^*, \eta, \rho, \alpha, m, b)$ y $L_K^T(\alpha, m, b)$ para todos los strikes y vencimientos.

Para esta calibración, se procede a interpolar cada sonrisa de volatilidad por el método Vanna-Volga (Castagna 2006), y la estructura temporal por medio de una interpolación cúbica hermite por partes.

El proceso de optimización a realizar comienza por establecer dos mallas: I: Dos mallas:

- La primera con 10 datos uniformes en el rango considerado para cada parámetro.
- La segunda considerando 11 datos uniformes en los puntos medios de los anteriores para cada parámetro.

Una vez se encuentra el mínimo entre las dos mallas, se considera como el punto semilla y de allí se procede a hacer una búsqueda por medio del gradiente: se evalúa en los 64 vértices del hipercubo generado por las 6 variables y se refina una vez a la mitad de la norma. II: Gradiente.

Dadas las funciones a considerar el éxito de la optimización proviene de hacer una eficiente programación matricial en MATLAB.

Se toma como parámetros iniciales: $S_0 = 1891.7$, $v^* = 9.8\%$ Volatilidad implícita ATM FRD 1Y $v_0 = 9.86\%$ Volatilidad implícita ATM FRD 1w.

Bajo este esquema y con datos tomados de Bloomberg el 14 de Junio, se obtienen los siguientes parámetros:

$$a = -0.166$$

$$b = 0.25$$

$$\alpha = 6.58$$

$$\lambda = 2.8611$$

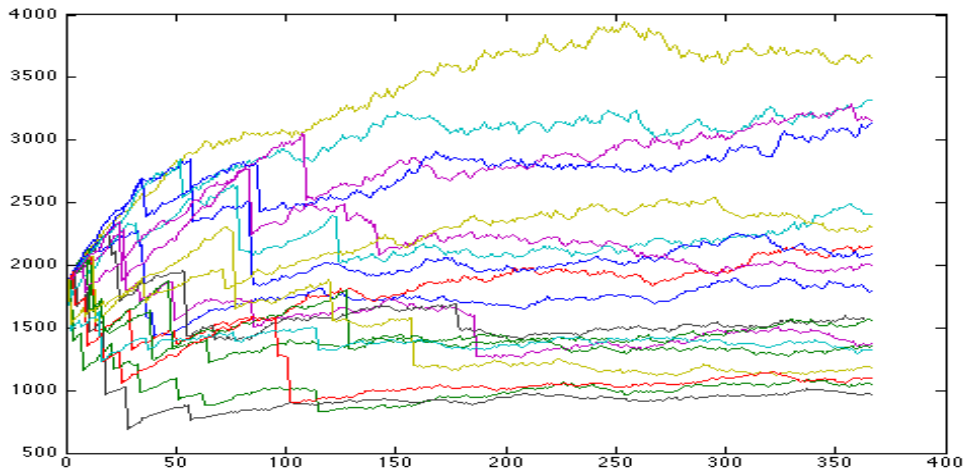
$$\eta = 0.038$$

$$\rho = 0.58$$

en un tiempo de 7.31 segundos con un error mínimo promedio por strike del 3.4%. Parámetros razonables en un tiempo bastante bueno.

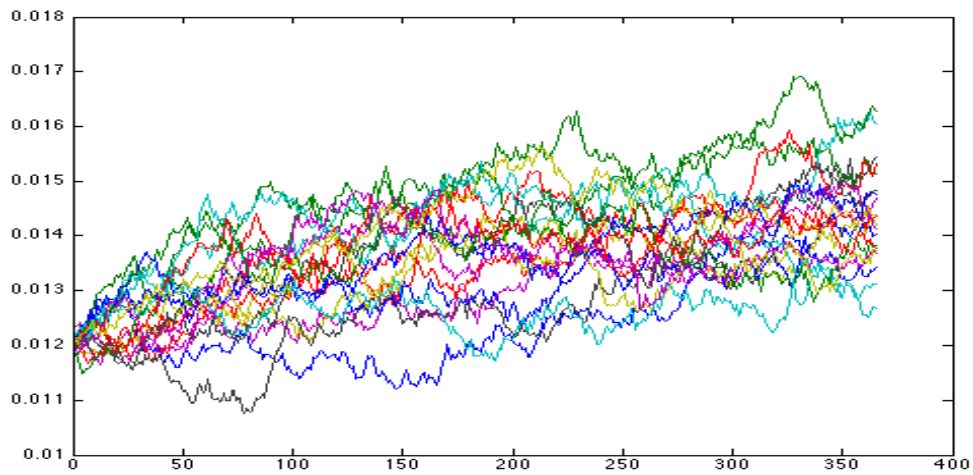
Con $\alpha = 6.58$ se tiene la frecuencia de saltos no homogénea esperada: para una semana ($t = 7$) la frecuencia de salto es 158.66 anual, o sea, aproximadamente un salto cada 2.5 días, mientras que para seis meses ($t = 180$) se tiene una tasa de 7 saltos por año, o sea, aproximadamente 1 salto cada dos meses, finalmente para un año se tiene una tasa de 0.25 saltos por año, en otras palabras, para ese vencimiento ya el modelo se comporta enteramente como volatilidad estocástica, que era lo deseado.

A continuación se muestran algunas simulaciones del proceso calibrado por medio de la discretización de Milstein (ver Gatheral 2006).

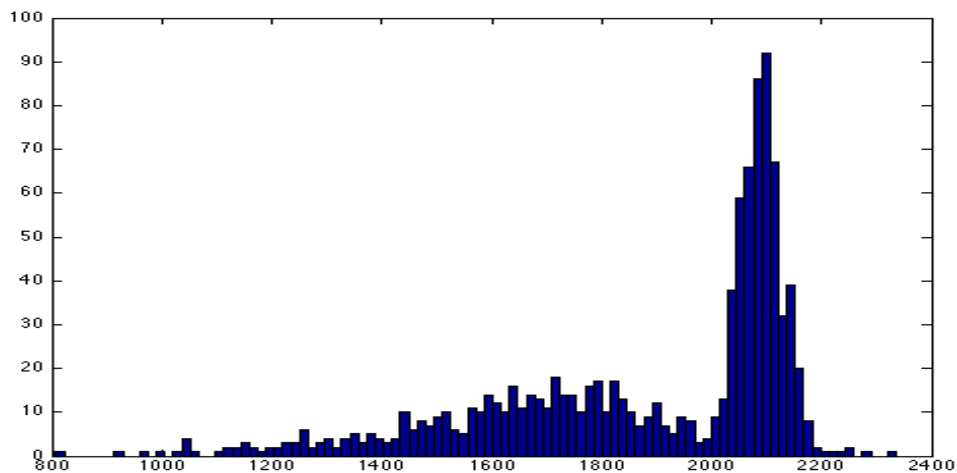


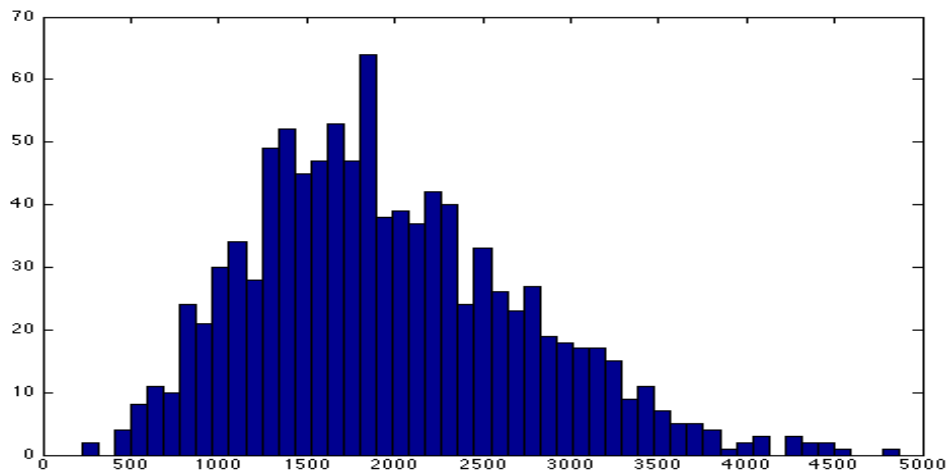
En la gráfica se puede apreciar como al comienzo la presencia del salto es significativa contribuyendo a la skewness negativa en el corto plazo, difuminándose con el paso del tiempo.

Las siguientes son las volatilidad correspondientes a los caminos anteriores; aquí se puede apreciar la reversión a la media del proceso de varianza.

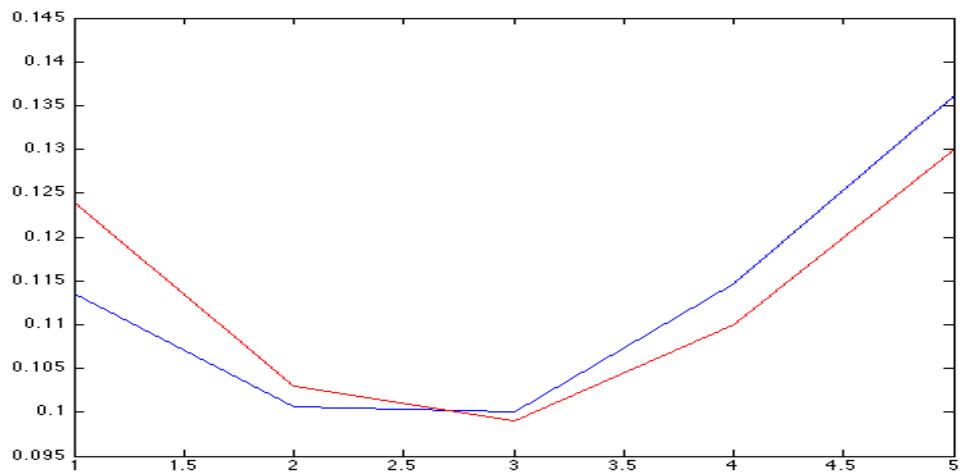


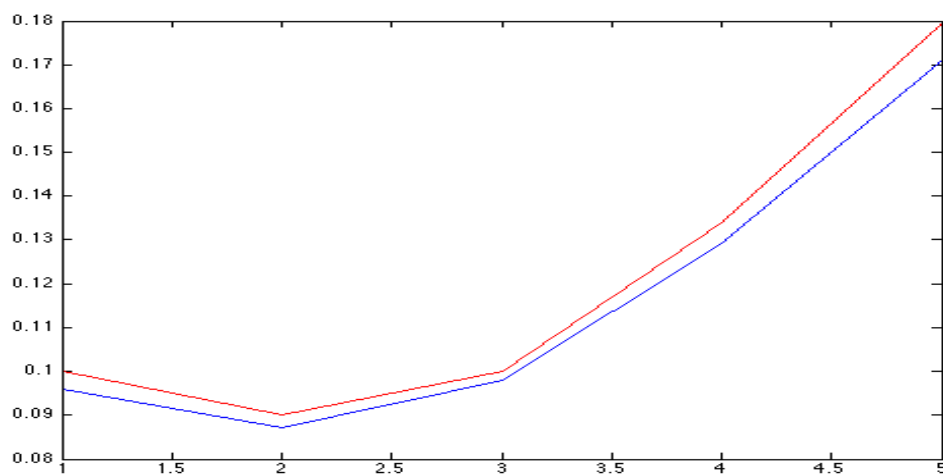
A continuación algunos histogramas de los caminos; el primero, a los 10 días, en donde se presencia la contribución del salto, y el segundo, el histograma para un año mostrando la skewness positiva presente en la sonrisa de volatilidad en el largo plazo.





Finalmente, sonrisas de volatilidad generadas con el proceso, comparadas con el mercado. La primera muestra la sonrisa a 2 semanas, y la segunda a un año. Las sonrisas generadas del modelo se obtuvieron por medio de la función característica.





Para el primer vencimiento, se obtuvo un error promedio del 4.19%, para el segundo, del 3.58%, valores bastantes admisibles.

Chapter 6

Conclusiones

- Se exponen los atributos de la superficie de volatilidad, en particular para el mercado de opciones COP/USD, y la necesidad de un modelo de volatilidad estocástica con saltos que incorpore estas características.
- Se establece el resultado análogo al de la proyección markoviana para modelos de volatilidad estocástica con la frecuencia de saltos distribuidos de acuerdo a un proceso de poisson.
- Se desarrolla el método de calibración propuesto sobre el modelo de Heston más saltos con la frecuencia de salto descrita por una función exponencial decreciente. Para este desarrollo, se obtiene la varianza condicional empleando dos aproximaciones inspiradas por Gatheral.
- Se aplican los resultados anteriores en la calibración del COP/USD, obteniendo datos ajustados al mercado en un tiempo considerablemente bueno.

Chapter 7

Anéxos

7.1 Código

7.1.1 Función principal

```
function [vectMin semerror rl rf] = markProyHpJ( VolImpl0, S0, rf, rl, rt)
```

Inputs

VolImpl: Matriz de volatilidad implícita

S0: Spot inicial

Filas: Fechas en que se toman los datos.

Columnas: 25RR 10RR ATM 10BF 25BF.

rf: Curva spot de la tasa foranea.

rl: Curva spot de la tasa local.

Output

vectMin: vector de parámetros calibrado

Puntos de calibración

interp = (1:366)';

Obtención superficie de volatilidad

```

numStrikes=1000;
vi=VolImpl0(2,3)^2;
vlongt = VolImpl0(end, 3)^2;

```

Interpolación tasas

```

rf=interp1(rt,rf,(1:366)', 'pchip');
rl=interp1(rt,rl,(1:366)', 'pchip');
[supVol4M strikes] = VolSurf(S0, VolImpl0, rf, rl, numStrikes);

```

CÁLCULO DE VOLATILIDAD LOCAL

```

and Maturity
dt=interp/365;
NK=numStrikes;
deltaTd = 1/365;

```

Cálculo derivadas parciales

```

pond=linspace(0.7,0.5,NK/2);
for j=2:NK-1
for i=2:365
if supVol4(i+1,j)==0
dwrT(i,j)=0;
else
if j=NK/2
dwrT(i,j)=((1-pond(j))*(supVol4(i+1,j-1)-supVol4(i-1,j))+pond(j)*(supVol4(i+1,j+1)-supVol4(i-1,j)))/(2*deltaTd);
dwrT(i+1,j) = 0;
else
dwrT(i,j) = ((1-pond(j-NK/2))*(supVol4(i+1,j-1)-supVol4(i-1,j))+pond(j-NK/2)*(supVol4(i+1,j+1)-supVol4(i-1,j)))/(2*deltaTd);
dwrT(i+1,j) = 0;
end
end
end

```

end

end

Theta = 0.5;

for *i* = 2 : 365

*delta*_{*K*} = *Mstrikes*(*i*, 3) - *Mstrikes*(*i*, 2);

for *j* = 2 : *NK* - 1

if *supVol4*(*i*, *j* - 1) == 0 || *supVol4*(*i*, *j* + 1) == 0 || *supVol4*(*i* + 1, *j* - 1) == 0 || *supVol4*(*i* + 1, *j* + 1) == 0 *dwrK*(*i*, *j*) = 0;

else *dwrK*(*i*, *j*) = (*Theta* * (-*supVol4*(*i*, *j* - 1) + *supVol4*(*i*, *j* + 1)) + (1 - *Theta*) * (-*supVol4*(*i* + 1, *j* - 1) + *supVol4*(*i* + 1, *j* + 1))) / (2 * *delta*_{*K*});

end

dwrK(*i* + 1, *j*) = 0;

dwrK(*i*, *j* + 1) = 0;

end

for *j* = 2 : *NK* - 1

if *supVol4*(*i*, *j*) == 0 || *supVol4*(*i*, *j* - 1) == 0 || *supVol4*(*i*, *j* + 1) == 0 || *supVol4*(*i* + 1, *j*) == 0 || *supVol4*(*i* + 1, *j* - 1) == 0 || *supVol4*(*i* + 1, *j* + 1) == 0 *sdwrK*(*i*, *j*) = 0;

else *sdwrK*(*i*, *j*) = (*supVol4*(*i*, *j* + 1) - 2 * *supVol4*(*i*, *j*) + *supVol4*(*i*, *j* - 1)) / (*delta*_{*K*} * *delta*_{*K*});

end

sdwrK(*i* + 1, *j*) = 0;

sdwrK(*i*, *j* + 1) = 0;

end

end

Construcción volatilidad local

volLocal = zeros(6,12);

BSvalue = [];

Kvalue = [];

Vimpl = [];

```

pos = [];
smileBSV=[];
smileKV= [];
venc = [7 14 30 91 182 365];
vI(7) = 1;
vI(14) = 2;
vI(30) = 3;
vI(91) = 4;
vI(182) = 5;
vI(365) = 6;

for i= venc
[BSvalKvalSbsVipvol] = BSvalT(S0,rf,rl,supVol4(i,:),Mstrikes(i,:),i);
smileBSV = [smileBSV;SbsVi];
smileKV = [smileKV;Mstrikes(i,:)];
BSvalue = [BSvalue;BSval];
Kvalue = [Kvalue;Kval];
pos = [pos;p];Vimpl = [Vimpl;vol];
dt = i/365;
forj = 1 : 12
d1 = (log(S0/Kval(j)) + (rl(i) - rf(i) + 0.5 * supVol4(i,p(j))^2) * dt)/(supVol4(i,p(j)) *
(sqrt(dt)));
num = supVol4(i,p(j)) + 2 * dt * dwrT(i,p(j)) + 2 * dt * (rl(i) - rf(i)) * Kval(j) *
dwrK(i,p(j));
den = Kval(j)^2*dt*(sdwrK(i,p(j))-d1*sqrt(dt)*dwrK(i,p(j))^2+(1/supVol4(i,p(j)))*
(1/(Kval(j) * sqrt(dt)) + d1 * dwrK(i,p(j)))^2);
volLocal(vI(i),j) = num/max(den,0.79);
end
end

```

MINIMIZACIÓN POR MALLA

```
optgm=[-2,0,1];
```

```
optgb=[0,0,1.5];
optga=[0,0,25];
optgl=[0.5,0,3];
optge=[0,0,0.3];
optgr=[0.4,0,0.9];
ref=7;
semerror=100000;
posMin = [2 2 2 2 2 2];

cont=1;
while cont < 3
if cont == 1
optgm=[-2,0,1];
optgb=[0,0,1.5];
optga=[0,0,25];
optgl=[0.5,0,3];
optge=[0,0,0.3];
optgr=[0.4,0,0.9];
ref=12;
Mi=[linspace(optgm(posMin(1))-1,optgm(posMin(1)+1),ref);
... linspace(optgb(posMin(2))-1,optgb(posMin(2)+1),ref);
... linspace(optga(posMin(3))-1,optga(posMin(3)+1),ref);
... linspace(optgl(posMin(4))-1,optgl(posMin(4)+1),ref);
... linspace(optge(posMin(5))-1,optge(posMin(5)+1),ref);
... linspace(optgr(posMin(6))-1,optgr(posMin(6)+1),ref)];
grad=[optgm(end)-optgm(end-1)optgb(end)-optgb(end-1);
... optga(end)-optga(end-1);optgl(end)-optgl(end-1);
... optge(end)-optge(end-1);optgr(end)-optgr(end-1)];
else
optgm=[-2-grad(1),0,1+grad(1)];
optgb=[0,0,1.5+2*grad(2)];
optga=[0,0,25+2*grad(3)];
```

```

optgl=[0.5-grad(4),0,3+grad(4)];
optge=[0,0,0.3+2*grad(5)];
optgr=[0.4-grad(6),0,0.9+grad(6)];
ref=13;
Mi=[linspace(optgm(1),optgm(end),ref);
... linspace(optgb(1),optgb(end),ref);
... linspace(optga(1),optga(end),ref);
... linspace(optgl(1),optgl(end),ref);
... linspace(optge(1),optge(end),ref);
... linspace(optgr(1),optgr(end),ref)];
end
for i=1:6
param=(ref-2)i;
par = (ref - 2)6/param;
vi = Mi(i,:);
forj = 1 : param
v = [v; ones(par, 1) * vi(rem(j, (ref - 2)))];
end
M = [Mv];
end
forh = 1 : (ref - 2)6
m = M(h, 1);
b = M(h, 2);
a = M(h, 3);
l = M(h, 4);
e = M(h, 5);
r = M(h, 6);
int = integral(m, b, smileBSV, smileKV, Kvalue);
fori = 1 : 6
dt = venc(i)/365;
lambdat = exp(-a * dt);
EJt = exp(m + 0.5 * b2);

```

```

m_t = EJ_t - 1;
for j = 1 : 12
d2 = (log(S0/Kvalue(i, j))+(rl(i)-rf(i)+0.5*supVol4(i, pos(i, j))^2)*dt)/(supVol4(i, p(j))*
(sqrt(dt)));
coef = 2 * Vimpl(i, j) * sqrt(dt) * lambda_t/(Kvalue(i, j) * n(d2));
volLocal(i, j) = volLocal(i, j) + coef * (EJ_t * BSvalue(i, j) - exp(-rl(i) * dt) * m_t *
Kvalue(i, j) * normcdf(d2) - int(i, j));
end
end
for i = 1 : 6
dt = venc(i)/365;
i_t = -(vi - vlongt) * (exp(-(l - lp) * dt) - 1)/(2 * l^-2 * l * lp) + m * (exp((-a + lp) * dt) -
1)/(a * (a - lp)) - C2 * (exp(lp * dt) - 1);
Ex_t = (vi - vlongt)/(2 * l) * exp(-l * dt) - (m/a) * exp(-a * dt) - (vi - vlongt)/(2 * l) -
vlongt/2 - m/a;
x_t = log(Kvalue(i, :)/S0) + (-rl(venc(i)) - rf(venc(i))) * dt + 1/a * (exp(m + 0.5 * b^2) -
1) * (1 - exp(a * dt)) * ones(1, 12);
C1x_t = e * r * x_t/Ex_t;
for j = 1 : 12
lvolHJ(i, j) = v_2 * (1 - exp(-lp * dt)) - 0.5 * C1x_t(j) * exp(-lp * dt) * i_t + (m * exp(-lp *
dt) * (C1x_t(j) - 1) * (exp(lp * dt - a * dt) - 1))/(lp - a);
end
end

```

Cálculo de errores

```

error=sum(sum((volLocal-lvolHJ).^2));
if error <= semerrorsemerror = error;
vectMin = [mbaler];
end
end
cont = cont + 1;
end

```

MINIMIZACIÓN POR GRADIENTE

```

for k=1:2
grad=0.6i * grad;
Mi = [m - grad(1), m + grad(1); b - grad(2), b + grad(2);
...a - grad(3), a + grad(3); l - grad(4), l + grad(4);
...e - grad(5), e + grad(5); r - grad(6), r + grad(6)];
fori = 1 : 6
param = 2i;
par = 64/param;
vi = Mi(i, :);
forj = 1 : param
v = [v; ones(par, 1) * vi(rem(j, 2))];
end
M = [Mv];
end
forh = 1 : 64
m = M(h, 1);
b = M(h, 2);
a = M(h, 3);
l = M(h, 4);
e = M(h, 5);
r = M(h, 6);
int = integral(m, b, smileBSV, smileKV, Kvalue);
fori = 1 : 6
dt = venc(i)/365;
lambdat = exp(-a * dt);
EJt = exp(m + 0.5 * b2);
mt = EJt - 1;
forj = 1 : 12
d2 = (log(S0/Kvalue(i, j)))+(rl(i)-rf(i)+0.5*supVol4(i, pos(i, j))2*dt)/(supVol4(i, p(j))*
(sqrt(dt)));

```



```

coef = 2 * Vimpl(i, j) * sqrt(dt) * lambda_t / (Kvalue(i, j) * n(d2));
volLocal(i, j) = volLocal(i, j) + coef * (EJ_t * BSvalue(i, j) - exp(-rl(i) * dt) * m_t *
Kvalue(i, j) * normcdf(d2) - int(i, j));
end
end
fori = 1 : 6
dt = venc(i) / 365;
i_t = -(vi - vlongt) * (exp(-(l - lp) * dt) - 1) / (2 * l^-2 * l * lp) + m * (exp((-a + lp) * dt) -
1) / (a * (a - lp)) - C2 * (exp(lp * dt) - 1);
Ex_t = (vi - vlongt) / (2 * l) * exp(-l * dt) - (m/a) * exp(-a * dt) - (vi - vlongt) / (2 * l) -
vlongt / 2 - m/a;
x_t = log(Kvalue(i, :) / S0) + (-(rl(venc(i)) - rf(venc(i))) * dt + 1/a * (exp(m + 0.5 * b^2 -
1) * (1 - exp(a * dt)))) * ones(1, 12);
C1x_t = e * r * x_t / Ex_t;
forj = 1 : 12
lvolHJ(i, j) = v_2 * (1 - exp(-lp * dt)) - 0.5 * C1x_t(j) * exp(-lp * dt) * i_t + (m * exp(-lp *
dt) * (C1x_t(j) - 1) * (exp(lp * dt - a * dt) - 1)) / (lp - a);
end
end
Cálculodeerrores
error = sum(sum((volLocal - lvolHJ).^2));
iferror <= semerror
semerror = error;
vectMin = [mbaler];
end
end
end
end

```

7.1.2 Funciones secundarias

```
function [VolSurf Mstrikes] = VolSurf( S0, VolImpl, rf, rl, numStrikes)
```

Inputs

S0: Spot del activo.

VolImplArray: Matriz de volatilidad implícita.

rl: Curva spot tasa local.

rf: Curva spot tasa foranea.

Output

VolSurf: Superficie de volatilidad interpolada.

Mstrikes: Strikes correspondientes a los puntos de la superficie de volatilidad.

```
delta = [- 0.1 -0.25 0.5 0.25 0.1];
```

```
interp = (1:366)';
```

```
tvi=[1 14 30 61 92 183 365];
```

```
intImpVol = [];
```

```
for i=1:5
```

```
intImpVol = [intImpVol interp1(tvi,VolImpl(:,i),interp,'pchip')];
```

```
end
```

```
rL=rl(interp);
```

```
rFL=rf(interp);
```

```
dt=interp/365;
```

```
intImpStrikes=[];
```

```
for i=1:5
```

```
if ij=2
```

```
alpha=-norminv(-delta(i)*exp(rFL.*dt),0,1);
```

```
intImpStrikes=[intImpStrikes S0*exp((-alpha.*intImpVol(:,i).*sqrt(dt))+(rL-rFL+0.5*intImpVol(:,i).^2).*dt)];
```

```
elseif i == 3
```

```

intImpStrikes = [intImpStrikesS0 * exp((rlL - rfL) * dt)];
else
alpha = norminv(delta(i) * exp(rfL * dt), 0, 1);
intImpStrikes = [intImpStrikesS0 * exp((-alpha * intImpVol(:, i) * sqrt(dt)) + (rlL -
rfL + 0.5 * intImpVol(:, i).^2) * dt)];
end
end

```

Interpolación por Vanna Volga

```

supVol4=[];
Mstrikes=[];
for i=1:interp(end)
limSup=intImpStrikes(i,5);
limInf=intImpStrikes(i,1);
strikes=linspace(limInf,limSup,numStrikes)';
p=length(find(strikes;intImpStrikes(i,2)));
put=strikes(1:p,1);
tempP= impVol2 (intImpStrikes(i,1),intImpStrikes(i,3),intImpStrikes(i,2),...
put,...
intImpVol(i,1),intImpVol(i,3),intImpVol(i,2),S0,rl,rf,i);
c=length(find(strikes;intImpStrikes(i,4)));
call=strikes((numStrikes+1-c):numStrikes,1);
tempC= impVol2 (intImpStrikes(i,4),intImpStrikes(i,3),intImpStrikes(i,5),... call,...
intImpVol(i,4),intImpVol(i,3),intImpVol(i,5),S0,rl,rf,i);
ATM=strikes(p+1:numStrikes-c,1);
tempATM= impVol2 (intImpStrikes(i,2),intImpStrikes(i,3),intImpStrikes(i,4), ... ATM,...
intImpVol(i,2),intImpVol(i,3),intImpVol(i,4),S0,rl,rf,i);
temp=[tempP;
tempATM;
tempC];
supVol4=[supVol4 temp];
Mstrikes=[Mstrikes;

```

```

strikes'];
end
VolSurf=supVol4';
end

```

Integración numérica

```

function int = integral( m,b,smileBSV,smileKV,Kvalue )

int=zeros(6,12);
for i = 1:6
dy=smileKV(i,2)-smileKV(i,1);
for j=1:12
smBSV=fliplr(smileBSV(i,:));
y= (log(Kvalue(i,j)./smileKV(i,:))-m)/b;
vect=(exp(b*y(2:end)).*smBSV(2:end).*exp(-0.5*y(2:end).^2) - exp(b * y(1 : end - 1)). *
smBSV(1 : end - 1). * exp(-0.5 * y(1 : end - 1).^2))/(2 * sqrt(2 * pi));
int(i, j) = exp(m) * dy * sum(exp(b * y(2 : end)). * smBSV(2 : end). * exp(-0.5 * y(2 :
end).^2) - exp(b * y(1 : end - 1)). * smBSV(1 : end - 1). * exp(-0.5 * y(1 : end - 1).^2))/(2 *
sqrt(2 * pi));
end
end
end

```

Bibliography

- [1] Bates, David S. (1996), Jumps and Stochastic Volatility: Exchange Rate Processes Implicit in Deutsche Mark Options. *Review of Financial Studies* 69 - 107
- [2] Carr, Peter y Madan, Dilip (1998), Towards a theory of volatility trading. *Volatility: New Estimation Techniques for Pricing Derivatives* pp. 417-427 Risk Books.
- [3] Castagna, Antonio y Mercurio, Fabio (2007), *The vanna-volga method for implied volatilities* Risk Books.
- [4] Dupire, Bruno (1993), *Pricing and Hedging with Smiles*. Proceede la conferencia AFFI, La Baule.
- [5] Dupire, Bruno (1994), Pricing with a smile *RISK Magazine*.
- [6] Dupire, Bruno (1997), *A unified theory of volatility*. Banque Paribas.
- [7] Ewald, Christian (2004), *Local Volatility in the Heston Model: A Malliavin Calculus Approach*. 327 - 343
- [8] Fournié, E., Lasry, J.M., Touzi, N. (1997), Monte Carlo methods for stochastic volatility models. *Numerical Methods in Finance*. L.C.G.vRogers and D. Talay, eds., Cambridge University Press, Cambridge, UK. 146-164
- [9] Gatheral, Jim (2006), *The Volatility Surface. A Practitioner's Guide*. John Wiley Sons, Inc.
- [10] Glasserman, Paul (2003), *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*. Springer
- [11] Gyongy, Istvan (1986), Mimicking the one-dimensional distributions of processes having an Ito differential. *Probability Theory and Related Fields*. 501 - 516

-
- [12] Heston, Steven (1993), A closed-form solution for options with stochastic volatility, with applications to bond and currency options. *Review of Financial Studies* 6. 327 - 343
- [13] Jeanblanc, Monique - Yor, Marc - Chesney, Marc (2009), *Mathematical Methods for Financial Markets*. Springer.
- [14] Krishnan, Venkatarama (1984), *Nonlinear Filtering and Smoothing*. John Wiley and Sons.
- [15] Lewis, Alan L (2000), *Option Valuation under Stochastic Volatility with Mathematica Code*. Newport Beach, CA: Finance Press.
- [16] Merton, Robert. C (1993), A closed-form solution for options with stochastic volatility, with applications to bond and currency options. *Review of Financial Studies* 6. 327 - 343
- [17] Misirpashaev, T - Antonov, A - Piterbarg, V (2007), *Markovian projection onto a Heston model*
- [18] Piterbarg, Vladimir (2004), *A stochastic volatility forward Libor model with a term structure of volatility smiles*. SSRN Working paper.
- [19] Piterbarg, Vladimir (2006), *Markovian Projection Method for Volatility Calibration*. Barclays Capital.
- [20] Sepp, Arthur (2002), *Pricing Barrier Options under Local Volatility*.
- [21] Savine, Antoine (2001), A theory of Volatility. *Recent Developments in Mathematical Finance*. pp. 151-167. World Scientific Publishing Co. Pe. Ltd, Singapore
- [22] Serna, Juan David. (2010) *Volatilidad en el mercado de divisas colombiano*. Departamento de Matemáticas, Universidad de los Andes.