Obstrucciones cohomológicas a los productos cruzados de álgebras de Hopf

Diana Carolina Castañeda Santos

Trabajo de grado para obtar al título de
Maestría en Ciencias Matemáticas

Director: César Neyit Galindo Martinez

Universidad de los Andes
Noviembre, 2013

Agradecimientos

Quiero expresar mis agradecimientos al profesor César Neyit Galindo Martinez, quien dedicó parte de su tiempo en el desarrollo y corrección de este trabajo. Agradezco también a mi familia y a Julián por todo su apoyo incondicional y a todos aquellos que de una u otra forma contribuyeron al desarrollo de este trabajo.

Índice general

Introducción

Una extensión de grupo es una manera de describir un grupo en términos de un subgrupo normal y un grupo cociente en particular. Más concretamente, una extensión de un grupo G por un grupo N es un grupo E tal que

$$0 \to N \to E \to G \to 0$$

es una sucesión exacta. En busca de estas extensiones se desarrolla la teoría de cohomología de grupos, que clasifica estas extensiones y las describe por medio de otros objetos matemáticos más sencillos de calcular.

A partir de una extensión de G por N se construye un homomorfismo de grupos $\phi : G \to Out(N)$, el cual únicamente depende de la extensión. El problema de obstrucción y clasificación de extensiones consiste en responder las siguientes preguntas: Dado un homomorfismo de grupos $f : G \to Out(N)$ ¿Existe una sucesión exacta de grupos $0 \to N \to E \to G \to 0$ tal que el homomorfismo $\phi : G \to Out(N)$ coincide con f? si existe, ¿Cuántas extensiones (salvo cierta relación de isomorfismo) existen? Para responder a estas preguntas se usa la cohomología de grupos y ésto es una parte importante de la teoría de extensiones de grupos, ver [Eil47].

En este trabajo se extiende esta teoría de extensiones de grupos a extensiones de álgebras de Hopf. Partimos de un álgebra de Hopf H y un grupo G, construimos productos cruzados de álgebras de Hopf $H\#G$. Para ello definimos homomorfismos torcidos que fundamentarán la descripción de sistemas cruzados. Verificamos las propiedades que definen sistemas cruzados de anillos y estudiamos sus características análogas en álgebras de Hopf. Bajo este lenguaje se da origen a un homomorfismo $\phi : G \to Out^{Tw}(H)$ y se estudiarán levantamientos de este mapa que conformarán un sistema cruzado recuperando así el producto cruzado $H\#G$ original.

Por otra parte, estudiamos el proceso inverso partiendo de un homomorfismo $\phi : G \to Out^{Tw}(H)$. Describimos levantamientos que bajo ciertas condiciones conformarán sistemas cruzados incoherentes y a su vez, estos levantamientos darán origen a 3-cocíclos $\alpha \in H^3(G, G_c(H))$ (donde $G_c(H)$ es el conjunto de elementos group-like centrales de H) que de manera análoga, darán origen a un producto cruzado si $[\alpha] = 0$.

A continuación presentamos una breve descripción del contenido de este trabajo.

En los *preliminares* presentamos algunas nociones y resultados sobre álgebras de Hopf, cohomología de grupos y extensiones de grupos, fundamentales en el desarrollo de este trabajo.

En el *Segundo Capítulo* presentamos resultados que son aportes nuevos a esta teoría. Damos la noción de productos cruzados y sistemas cruzados de álgebras de Hopf. Para ello partimos de la teoría ya existente de productos cruzados y sistemas cruzados de anillos y con base en la noción de homomorfismos torcidos, modificamos dicha teoría al contexto de álgebras de Hopf. Como resultado principal de este capítulo desarrollamos la teoría de obstrucción a sistemas cruzados de álgebras de Hopf. Definimos $Out^{Tw}(H)$-sistemas cruzados incoherentes y mostramos cómo a partir de sus 3-cocíclos asociados α de $Out^{Tw}(H)$ con valores en $G_c(H)$ (definidos explícitamente por la Ecuación (2.19)) podemos determinar si dichos sistemas definen propiamente sistemas cruzados y verificamos que en efecto el producto cruzado obtenido es nuevamente un álgebra de Hopf.

Por último en el *Tercer Capítulo* presentamos varios ejemplos. Analizamos en detalle el álgebra de Hopf dual del álgebra de grupo de un grupo finito $k[G]$, $\mathcal{O}_k(G)$ y calculamos explícitamente sus sistemas cruzados y productos cruzados que resultan ser álgebras de Hopf. También presentamos el álgebra de Taft como ejemplo de un álgebra de Hopf que no presenta teoría de obstrucción debido a que no posee elementos group-like centrales diferentes del elemento neutro y finalmente concluimos presentando la teoría de extensión de grupos como un caso particular de la teoría ya estudiada.

Capítulo 1

Preliminares

El objetivo principal de este capítulo es establecer brevemente los conceptos y algunos resultados en álgebras, coálgebras, álgebras de Hopf, cohomología de grupos y extensiones de grupos; que debemos tener presente para la lectura de este escrito. Así mismo fijaremos la notación que usaremos durante el desarrollo de este trabajo, entre ellas, la notación de Sweedler (7) que será de gran utilidad a la hora de describir propiedades y diagramas conmutativos de álgebras de Hopf.

Como referencia para este capítulo están los libros [Kas95], [Wei], [Sch95], [Ade94] y [Bro94].

1.1. Biálgebras

Consideremos k un campo. A partir de ello daremos la definición de una k-álgebra y expresaremos algunas de sus propiedades por medio de diagramas conmutativos, que más adelante nos permitiran definir una coálgebra y finalmente un álgebra de Hopf.

Definición 1. *Decimos que una k-álgebra es un par (A, u) donde A es un anillo y $u : k \to A$ es un homomorfismo de anillos cuya imagen esta contenida en el centro de A.*

Notemos que si A es una k-álgebra, entonces además de ser un anillo A adquiere una estructura de k-espacio vectorial, dotado de la multiplicación por escalar

$$\lambda \bullet a = u(\lambda)a$$

para todo $\lambda \in k$ y $a \in A$. Por otra parte, podemos expresar la definición de álgebra por medio de diagramas conmutativos de la siguiente manera. Una k-álgebra es una tripla (A, m, u) donde A es una anillo, $m : A \otimes A \to A$ y $u : k \to A$ son transformaciones lineales llamados multiplicación y unidad respectivamente, que hacen los siguientes diagramas conmutativos:

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \otimes A \arrow[r, "m \otimes id"] \arrow[d, "id \otimes m"'] & A \otimes A \arrow[d, "m"] \\
A \otimes A \arrow[r, "m"'] & A
\end{tikzcd}$$

Asociatividad de la multiplicación

$$\begin{tikzcd}
k \otimes A \arrow[r, "u \otimes id"] \arrow[dr] & A \otimes A \arrow[d, "m"] & A \otimes k \arrow[l, "id \otimes u"'] \arrow[dl] \\
 & A &
\end{tikzcd}$$

Axioma de unidad

El primer diagrama hace relación a la asociatividad de la multiplicación del anillo A y el segundo indica que $u(1)$ es el elemento unidad de la multiplicación en A.

Sea $\tau : A \otimes A \to A \otimes A : a \otimes a' \mapsto a' \otimes a$ el homomorfismo de intercambio. Decimos que el álgebra A es conmutativa si el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \arrow[rr, "\tau"] \arrow[dr, "m"'] & & A \otimes A \arrow[dl, "m"] \\
 & A &
\end{tikzcd}$$

Un homomorfismo de álgebras $f : (A, m, u) \longrightarrow (B, n, v)$ es un mapa lineal $f : A \to B$ que satisface

$$n \circ (f \otimes f) = f \circ m \qquad y \qquad f \circ u = v.$$

Ahora presentaremos la noción dual de álgebra associativa con unidad, que es llamada coalgebra. Formalemente, esta es una álgebra en la categoría opuesta, es decir, para definir una coalgebra simplemente debemos invertir todas las flechas y axiomas en la definición de álgebra.

Definición 2. *Una coálgebra sobre el campo k es una terna (C, Δ, ϵ) donde C es un espacio vectorial sobre k, $\Delta : C \to C \otimes C$ y $\epsilon : C \to k$ son mapas lineales llamados coproducto y counidad respectivamente que hacen los siguientes diagramas conmutativos:*

$$\begin{tikzcd}
C \otimes C \otimes C & C \otimes C \arrow[l, "\Delta \otimes id"'] \\
C \otimes C \arrow[u, "id \otimes \Delta"] & C \arrow[l, "\Delta"] \arrow[u, "\Delta"']
\end{tikzcd}$$

Axioma de coasociatividad

$$\begin{tikzcd}
k \otimes C & C \otimes C \arrow[l, "\epsilon \otimes id"'] \arrow[r, "id \otimes \epsilon"] & C \otimes k \\
 & C \arrow[ul] \arrow[u, "\Delta"'] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Axioma de counidad

De manera similar al caso de álgebra, una coálgebra es co-conmutativa si el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} C \otimes C \arrow[rr, "\tau"] & & C \otimes C \\ & C \arrow[ul, "\Delta"] \arrow[ur, "\Delta"'] & \end{tikzcd}$$

Un homomorfismo de coálgebras $f : (C, \Delta, \epsilon) \longrightarrow (D, \Delta', \epsilon')$ es un mapa lineal $f : C \to D$ que satisface

$$(f \otimes f) \circ \Delta = \Delta' \circ f \qquad y \qquad \epsilon' \circ f = \epsilon.$$

Ejemplo 3. *El campo k tiene estructura de coálgebra. Si definimos $\Delta(1) = 1 \otimes 1$ y $\epsilon(1) = 1$. Se puede verificar que:*

$$\begin{aligned} (\Delta \otimes id) \circ (\Delta(1)) &= (id \otimes \Delta) \circ (\Delta(1)) && (coproducto) \\ (\epsilon \otimes id) \circ (\Delta(1)) &= i(1) && (counidad) \\ (id \otimes \epsilon) \circ (\Delta(1)) &= i(1) && (counidad) \end{aligned}$$

Notemos además que para cualquier coálgebra (C, Δ_C, ϵ) el mapa $\epsilon : C \to k$ es un homomorfismo de coálgebras ya que se cumplen las condiciones

$$\begin{gathered} (\epsilon \otimes \epsilon) \circ \Delta_C = \Delta \circ \epsilon \\ id \circ \epsilon = \epsilon \end{gathered}$$

Ejemplo 4. *Sea S un conjunto cualquiera no vacío. Podemos formar el k-espacio vectorial con base S,*

$$k[S] = \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_i : \lambda_i \in k, s_i \in S\}.$$

Entonces $k[S]$ tiene estructura de coálgebra con $\Delta(s) = s \otimes s$ y $\epsilon(s) = 1$.

Ejemplo 5 (Coálgebra opuesta). *Para cuaquier coálgebra (C, Δ, ϵ) consideremos $\Delta^{op} = \tau \circ \Delta$. Entonces $(C, \Delta^{op}, \epsilon)$ es una coálgebra.*

Proposición 6. *El espacio vectorial dual de una coálgebra es un álgebra.*

Demostración. Sea (C, Δ, ϵ) una coálgebra. Recordemos que para espacios vectoriales U y V se tiene que $U^* \otimes V^* \cong (U \otimes V)^*$. Sea $\lambda : U^* \otimes V^* \to (U \otimes V)^*$ dicho isomorfismo que esta dado por $(\lambda(f \otimes g))(u \otimes v) = f(u) \otimes g(v)$ para $u \in U$, $v \in V$, $f \in U^*$ y $g \in V^*$. Consideremos $U = V = C$, así $\lambda : C^* \otimes C^* \to (C \otimes C)^*$y $\lambda' := \lambda \circ \tau_{C^*, C^*}$. Entonces formemos $A = C^*$, $m = \Delta^* \circ \lambda'$ y $u = \epsilon^*$. Luego (A, m, u) es el dual de C. Entonces (A, m, u) es un álgebra, usando los diagramas 1.1 y 1.1. ■

Notación 7. *(Notación de Sweedler) Si x es un elemento de una coálgebra (C, Δ, ϵ), el elemento $\Delta(x)$ en $C \otimes C$ es de la forma*

$$\Delta(x) = \sum_i x'_i \otimes x''_i,$$

o simplemente eliminaremos los subíndices en la forma

$$\Delta(x) = \sum_{(x)} x' \otimes x''.$$

La coasociatividad de Δ esta dada por

$$\sum_{(x)}\left(\sum_{(x')}(x')'\otimes(x')''\right)\otimes x''=\sum_{(x)}x'\otimes\left(\sum_{(x'')}(x'')'\otimes(x'')''\right),$$

o simplemente lo escribimos como $\sum\limits_{(x)} x'\otimes x''\otimes x'''$ *o* $\sum_{(x)} x^{(1)}\otimes x^{(2)}\otimes x^{(3)}$. *Si además aplicamos la comultiplicación a este elemento, por el axioma de coasociatividad tenemos:*

$$\sum_{(x)}\Delta(x')\otimes x''\otimes x'''=\sum_{(x)}x'\otimes\Delta(x'')\otimes x'''=\sum_{(x)}x'\otimes x''\otimes\Delta(x'''),$$

que escribimos como $\sum\limits_{(x)} x'\otimes x''\otimes x'''\otimes x''''$. *Más generalmente consideremos* $\Delta^{(n)}: C\to C^{\otimes n+1}$ *definida inductivamente por* $\Delta^{(1)}=\Delta$ *y*

$$\Delta^{(n)}=(\Delta\otimes id_{C^{\otimes(n-1)}})\circ\Delta^{(n-1)}=(id_{C^{\otimes(n-1)}}\otimes\Delta)\circ\Delta^{(n-1)}.$$

Por convención escribimos lo anterior como $\Delta^{(n)}(x)=\sum\limits_{(x)} x^{(1)}\otimes\cdots\otimes x^{(n+1)}$. *Estas convenciones y la coasociatividad de Δ implican que*

$$(id_C\otimes\Delta\otimes id_{C^{\otimes 2}})(\sum_{(x)}x^{(1)}\otimes x^{(2)}\otimes x^{(3)}\otimes x^{(4)})=\sum_{(x)}x^{(1)}\otimes x^{(2)}\otimes x^{(3)}\otimes x^{(4)}\otimes x^{(5)}.$$

La condición para la counidad puede ser reescrita para cualquier $x\in C$ como

$$\sum_{(x)}\epsilon(x')x''=x=\sum_{(x)}x'\epsilon(x'').$$

La coálgebra C es conmutativa si cumple que $\sum_{(x)} x'\otimes x''=\sum_{(x)} x''\otimes x'$ *para todo $x\in C$.*

La relación que definimos para un homomorfismo de coálgebras puede ser reformulada como:

$$\sum_{(x)}f(x')\otimes f(x'')=\sum_{(f(x))}f(x)'\otimes f(x)''.$$

- Notemos que el producto tensorial de álgebras $A\otimes B$ adquiere también estructura de álgebra con la operación de producto por componentes

  $$(a\otimes b)(a'\otimes b')=(aa')\otimes(bb')\qquad\forall a,a'\in A,\quad\forall b,b'\in B$$

  Se puede verificar que está bien definido y cumple con la propiedad de asiciatividad del producto.

- La multiplicación en $A\otimes B$, que notamos por $m_{A\otimes B}$, puede verse como la siguiente composición

  $$m_{A\otimes B}=(m_A\otimes m_B)\circ(id\otimes\tau_{B,A}\otimes id):A\otimes B\otimes A\otimes B\to A\otimes B.$$

- Si C y D son coálgebras, $C\otimes D$ también es una coálgebra con coporducto $\Delta_{C\otimes D}=(id\otimes\tau\otimes id)\circ(\Delta_C\otimes\Delta_D)$ y counidad $\epsilon_{C\otimes D}=\epsilon_C\otimes\epsilon_D$.

Definición 8. *Decimos que una terna (A,m,Δ) es una biálgebra si (A,m) es un álgebra con unidad $u:k\to A$ y (A,Δ) es una coálgebra, donde $\epsilon:A\to k$ y $\Delta:A\to A\otimes A$ son homomorfismos de álgebras que llamamos counidad y coproducto respectivamente. Un k-homomorfismo de biálgebras $\phi:A\to B$ es aquel que cumple con las condiciones de ser homomorfismo de álgebras y coálgebras.*

Notemos que el núcleo del homomorfismo ϵ de una biálgebra A es un ideal bilátero de A y se denomina el ideal de aumentación de A.

1.2. Álgebras de Hopf

Dadas un álgebra (A, m, u) y una coálgebra (C, Δ, ϵ) podemos definir el mapa **convolución** para $f, g \in Hom(A, C)$ denotador por $f * g$ y dado por la composición de los mapas:

$$C \xrightarrow{\Delta} C \otimes C \xrightarrow{f \otimes g} A \otimes A \xrightarrow{m} A.$$

Usando la notación de Sweedler (7) tenemos:

$$(f * g)(x) = \sum_{(x)} f(x')g(x''),$$

para todo $x \in C$. Claramente este mapa es bilineal.

Proposición 9. *$(Hom(C, A), *, u \circ \epsilon)$ es un álgebra.*

Demostración. Por la asociatividad del producto en A y la coasociatividad del coproducto en C, tenemos que

$$((f * g) * h)(x) = \sum_{(x)} f(x')g(x'')h(x''') = (f * (g * h))(x)$$

Así tenemos que la convolución es asociativa. Ahora veamos la unidad $u \circ \epsilon$,

$$((u\epsilon) * (f))(x) = \sum_{(x)} \epsilon(x')f(x'') = f(\sum_{(x)} \epsilon(x')x'') = f(x)$$

De manera similar podemos probar $(f * (u\epsilon))(x) = f(x)$ y así tenemos que $u\epsilon$ es unidad para el producto convolución. ■

Definición 10. *Sea $(H, m, u, \Delta, \epsilon)$ una biálgebra. Un endomorfismo S de H se llama **antípoda** para H si*

$$S * id = id * S = u \circ \epsilon.$$

Esta condición es equivalente a que el siguiente diagrama conmute:

$$\begin{tikzcd}
H \otimes H \arrow[d, "id \otimes S"'] & H \arrow[l, "\Delta"'] \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "u\epsilon"] & H \otimes H \arrow[d, "S \otimes id"] \\
H \otimes H \arrow[r, "m"'] & H & H \otimes H \arrow[l, "m"]
\end{tikzcd}$$

Definición 11. *Decimos que una biálgebra (H, m, Δ) es un **álgebra de Hopf** si existe $S : H \to H$ antípoda para H.*

Una biálgebra no necesariamente tiene antípoda, pero en caso de tenerla, ella es única. Pues si S y S' son antípodas para dicha biálgebra H, entonces

$$S = S * (u\epsilon) = S * (id_H * S') = (S * id_H) * S' = (u\epsilon) * S' = S'$$

En notación de Sweedler, decimos que para un álgebra de Hopf $(H, m, n, \Delta, \epsilon, S)$, la antípoda S satisface la relación

$$\sum_{(x)} x'S(x'') = \epsilon(x)1 = \sum_{(x)} S(x')x''$$

para todo $x \in H$.

Proposición 12. *Sea H un álgebra de Hopf de dimensión finita con antípoda S. Entonces la biálgebra H^* es un álgebra de Hopf con antípoda S^*.*

Demostración. Sean $f \in H^*$ y $x \in H$, entonces:

$$\begin{aligned}(\sum_{(f)} f'S^*(f''))(x) &= \sum_{(f)(x)} f'(x')S^*(f'')(x'') \\ &= \sum_{(f)(x)} f'(x')f''(S(x'')) \\ &= f(\sum_{(x)} x'S(x'')) \\ &= f(u\epsilon(x)) \\ &= \epsilon^* u^*(f)(x),\end{aligned}$$

y de manera similar podemos ver que $\sum_f S*(f')f'' = \epsilon^* u^*(f)$. ■

Definición 13. *Dados un grupo G y un campo k, el **álgebra de grupo** $k[G]$, se define como el espacio vectorial de base G,*

$$k[G] = \{\sum_{g \in G} k_g g | \ k_g \in k, g \in G\},$$

con el producto que resulta de extender por linealidad el producto de G, es decir:

$$(\sum_{g\in G} a_g g)(\sum_{h \in G} b_h h) = \sum_{t\in G}(\sum_{gh=t} a_g b_h)t$$

Ejemplo 14. *Consideremos un grupo G. El anillo de grupo $k[G]$ es un álgebra de Hopf de la siguiente manera para $g \in G$:*

$$\begin{aligned}\Delta(g) &= g \otimes g \\ m(g \otimes h) &= gh \\ \epsilon(g) &= 1 \\ S(g) &= g^{-1}\end{aligned}$$

Definición 15. *Consideremos V un k-espacio vectorial, definimos*

$$T(V) := \bigoplus_{i \geq 0} T^i(V), T^0(V) := k, T^i(V) := \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{i \ veces}, i > 0.$$

*A $T(V)$ se le conoce como el **álgebra tensorial** de V con producto dado por*

$$(v_1 \otimes \cdots \otimes v_i)(v_{i+1} \cdots v_{i+n}) = v_1 \otimes \cdots v_{i+n}$$

Ejemplo 16. *Sea V un espacio vectorial sobre k. El álgebra tensorial $T(V) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} T^i V$ con:*

$$\begin{aligned}\Delta(v) &= 1 \otimes v + v \otimes 1 \\ \epsilon(v) &= 0 \\ S(v) &= -v\end{aligned}$$

$T(V)$ es un álgebra de Hopf.

Definición 17. *Sea H un álgebra de Hopf, decimos que H es conmutativa si su álgebra es conmutativa y H es coconmutativa si su coálgebra es coconmutativa.*

1.3. Cohomología de grupos

Definición 18. *Sea R un anillo. Una sucesión o cadena de homomorfismos de R-módulos de la forma*

$$C: \quad \cdots \longrightarrow C^{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} C^n \xrightarrow{f_n} C^{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} C^{n+2} \longrightarrow \cdots$$

es un ***Co-complejo*** *si $Im(f_i) \subseteq Ker(f_{i+1})$ para cada $i \in \mathbb{Z}$. La sucesión se denomina* ***resolución*** *o* ***exacta*** *si $Im(f_i) = Ker(f_{i+1})$ para cada $i \in \mathbb{Z}$.*

Llamamos ***co-cíclos*** *a $Z^n := Ker(f_n)$ y* ***co-bordes*** *a $B^n = Im(f_{n-1})$ para cada $n \in \mathbb{Z}$. El cociente $H^n(C) = Z^n/B^n$ se le denomina el* ***n-ésimo grupo de Cohomología*** *del co-complejo C.*

Definición 19. *Una resolución en la que los C^i son R-módulos proyectivos para todo $i \in \mathbb{Z}$, se denomina* ***resolución proyectiva****. Si los C^i son libres para todo $i \in \mathbb{Z}$, se denomina* ***resolución libre****.*

1.3.1. Ext.

Dado un R-módulo M, podemos asociarle el R-módulo libre R_0 con base indexada por los elementos de M, $\{e_m\}_{m\in M}$ y formar el homomorfismo $f_0 : R_0 \longrightarrow M : e_m \mapsto m$ que resulta ser sobreyectivo. Luego consideremos $Ker(f_0) \subset R_0$ y de manera similar formemos R_1 el R-módulo libre con base indexada por los elementos de $Ker(f_0)$ y formemos $f_0' : R_1 \longrightarrow Ker(f_0)$ como f_0. Así podemos formar $f_1 = i \circ f_0' : R_1 \longrightarrow R_0$, donde i es la inclusión. Entonces tenemos que $Im(f_1) = Ker(f_0)$. Continuando este proceso para construir R_2, R_3, etc. Tenemos una resolución libre para M. Con esto vemos que a todo R-módulo se le puede asociar una resolución libre

$$\cdots \longrightarrow F_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} F_i \xrightarrow{f_i} F_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} \cdots \xrightarrow{f_2} F_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0.$$

Sea ahora N un R-módulo cualquiera. Aplicando el operador $Hom_R(-, N)$ a la resolución anterior tenemos el complejo

$$0 \longrightarrow Hom_R(M, N) \xrightarrow{f_0^*} Hom_R(F_0, N) \xrightarrow{f_1^*} Hom_R(F_1, N) \xrightarrow{f_2^*} \cdots$$

Esta última sucesión induce la siguiente definición:

Definición 20. *Sean M y N dos R-módulos, definimos los grupos abelianos*

$$\begin{aligned} Ext_R^0(M, N) &:= Hom_R(M, N) \\ Ext_R^n(M, N) &:= Ker(f_{i+1}^*)/Im(f_i^*), \quad i \geq 1. \end{aligned}$$

Los cuales son llamados el ***n-ésimo grupo Ext****.*

Nota 21. *La definición anterior no depende de la resolución para M. Este hecho se puede ver en [Bro94, Seccion 7, capítulo 1]*

1.3.2. Cohomología de grupos.

Sea G un grupo, decimos que A es un G-módulo si A es un grupo abeliano y G actúa sobre A por automorfismos de grupos. Notemos además que la categoría de G-módulos puede ser identificada con la categoría de $\mathbb{Z}[G]$-módulos, donde $\mathbb{Z}[G]$ es el anillo grupo de G dado por:

$$\mathbb{Z}[G] := \{\sum_{g\in G} n_g g \ \mid n_g \in \mathbb{Z}\}.$$

Definición 22. *Sea G un grupo y A un G-módulo. El **n-ésimo grupo de cohomología** de G con coeficientes en A es definido por:*

$$H^n(G, A) := Ext^n_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, A),$$

donde G actúa trivialmente sobre $\mathbb{Z}$.

Definición 23. *Sean G un grupo y A un G-módulo:*

*El subgrupo **invariante** de A esta dado por:*

$$A^G = \{a \in A | ga = a, \quad \forall g \in G, \quad a \in A\}$$

Ejemplo 24. *Consideremos $G = \langle t\rangle$ el grupo cíclico de dimensión infinita. Podemos identificar $\mathbb{Z}[G] \cong \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ más precísamente:*

$$\mathbb{Z}[G] = \{\sum_{k\in\mathbb{Z}} n_k t^k\}$$

Entonces podemos formar la sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{t-1} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Donde la segunda flecha es la multiplicación por $t-1$ y $\epsilon(\sum_{k\in\mathbb{Z}} n_k t^k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} n_k$. Ahora aplicando los operadores $-\otimes A$ y $Hom(-, A)$ tenemos

$$H^n(G, A) = H_n(G, A) = 0 \quad para \quad n > 1$$
$$H^1(G, A) \cong H_0(G, A) = A_G$$

En particular cuando $A = \mathbb{Z}$ entonces $H_1(G, \mathbb{Z}) = H^1(G, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$.

1.3.3. Resolución cíclica

Denotemos por C_m al grupo cíclico de orden m con generador σ. Así la norma en $\mathbb{Z}C_m$ es el elemento $N = 1 + \sigma + \sigma^2 + \sigma^3 + \cdots + \sigma^{m-1}$. Ahora, $\mathbb{Z}$ como C_m-módulo trivial, tiene resolución libre y periódica:

$$0 \leftarrow \mathbb{Z} \xleftarrow{\epsilon} \mathbb{Z}C_m \xleftarrow{\sigma-1} \mathbb{Z}C_m \xleftarrow{N} \mathbb{Z}C_m \xleftarrow{\sigma-1} \mathbb{Z}C_m \xleftarrow{N} \cdots$$

Donde las flechas $\sigma - 1$ y N son multiplicación por $\sigma - 1$ y N respectivamente.

Notemos además que si a esta resolución le aplicamos los operadores $Hom_{C_m}(-, A)$ y $-\otimes_{C_m} A$, obtenemos dos nuevas resoluciones a las cuales podemos calcularle $Ext^*_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, A)$ y $Tor^{\mathbb{Z}G}_*(\mathbb{Z}, A)$ respectivamente y obtenemos los grupos de homología y cohomología respectivamente.

Teorema 25. *Si A es un C_m-módulo, entonces:*

$$H^n(C_m, A) = \left\{ \begin{array}{cc} A^{C_m} & si \quad n = 0 \\ \{a \in A \mid \ Na = 0\}/(\sigma - 1)A & si \quad n = 1, 3, 5, 7, ... \\ A^{C_m}/NA & si \ n = 2, 4, 6, 8, ... \end{array} \right\}$$

$$H_n(C_m, A) = \left\{ \begin{array}{cc} A/(\sigma-1)A & si \;\; n=0 \\ A^{C_m}/NA & si \;\; n=1,3,5,7,... \\ \{a \in A \mid \;\; Na=0\}/(\sigma-1)A & si \; n=2,4,6,8,... \end{array} \right\}$$

Ejemplo 26. *Si consideramos $A = \mathbb{Z}$, entonces tenemos:*

$$H^n(C_m, \mathbb{Z}) = \left\{ \begin{array}{cc} \mathbb{Z} & si \;\; n=0 \\ \mathbb{Z}/m & si \;\; n=1,3,5,7,... \\ 0 & si \; n=2,4,6,8,... \end{array} \right\}$$

$$H_n(C_m, \mathbb{Z}) = \left\{ \begin{array}{cc} \mathbb{Z} & si \;\; n=0 \\ 0 & si \;\; n=1,3,5,7,... \\ \mathbb{Z}/m & si \; n=2,4,6,8,... \end{array} \right\}$$

1.3.4. Resolución Bar

Para cada grupo existe una resolución libre canónica del G-módulo trivial $\mathbb{Z}$ llamada la **resolución Bar**, la cual permite calcular y dar interpretaciones a la cohomología de grupos.

La resolución Bar

$$\cdots \longrightarrow B_{i+1} \xrightarrow{D} B_i \xrightarrow{D} B_{i-1} \xrightarrow{D} \cdots \xrightarrow{D} B_1 \xrightarrow{D} B_0 \xrightarrow{D} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

esta definida por el $\mathbb{Z}$-módulo libre

$$B_n = \bigoplus_{g_0, g_1, \cdots, g_n \in G} \mathbb{Z}(g_0, g_1, \cdots, g_n)$$

con G-acción definida por:

$$g(g_0, g_1, \cdots, g_n) = (gg_0, gg_1, \cdots, gg_n)$$

y con diferencial D, dado por

$$D(g_0, g_1, \cdots, g_n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (g_0, \cdots, \widehat{g_i}, \cdots, g_n),$$

donde $\widehat{g_i}$ indica que se elimina la i-ésima componente de $(g_1, \cdots, g_n)$.

Una $\mathbb{Z}(G)$-base está dada por:

$$|g_1|g_2|\cdots|g_n| = (1, g_1, g_1g_2, \cdots, g_1g_2\cdots g_n) \tag{1.1}$$

donde hacemos la identificación $g(g_0, g_1, \cdots, g_n) = g_0|g_0^{-1}g_1|g_1^{-1}g_2|\cdots|g_{n-1}^{-1}g_n|$. Notemos que el diferencial, está dado por:

$$D(|g_1|g_2|\cdots|g_n|) = g_1|g_2|\cdots|g_n| + \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i|g_1|\cdots|g_ig_{i+1}|\cdots|g_n|$$
$$+(-1)^n|g_1|g_2|\cdots|g_{n-1}|.$$

A partir de esta construcción podemos obtener una descripción explícita de los co-cíclos y co-bordes de la siguiente manera: Sea $C^n(G,A) = \{f : C^{\times n} \to A\}$, considerando el isomorfismo dado por la base (1.1)

$$Hom_{\mathbb{Z}[G]}(B_n, A) \cong C^n(G,A)$$

y el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
Hom_{Z[G]}(B_n, A) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "D"'] & C^n(G,A) \arrow[d, "D"] \\
Hom_{Z[G]}(B_{n+1}, A) \arrow[r, "\cong"'] & C^{n+1}(G,A)
\end{tikzcd}$$

tenemos el operador $D : C^n(G,A) \to C^{n+1}(G,A)$ dado por:

$$\begin{aligned} Df(g_1, g_2, \cdots, g_{n+1}) = {} & g_1 f(g_2, \cdots, g_{n+1}) + \\ & \sum_{k=1}^{n} (-1)^k f(g_1, \cdots, g_{k-1}, g_k g_{k+1}, g_{k+2}, \cdots, g_{n+1}) \\ & +(-1)^{n+1} f(g_1, \cdots, g_n) \end{aligned}$$

Por tanto tenemos el co-complejo:

$$0 \longrightarrow C^0 \xrightarrow{D} C^1 \xrightarrow{D} \cdots \xrightarrow{D} C^{n-1} \xrightarrow{D} C^n \xrightarrow{D} C^{n+1} \xrightarrow{D} \cdots$$

Ahora formemos $Z^n(G,A) := \{f \in C^n(G,A) | Df = 0\}$ el subgrupo de $C^n(G,A)$ que llamaremos **cociclos** y $B^n(G,A) := \{f \in C^n(G,A) | \exists f' \in C^{n-1}(G,A) \ con \ f = Df'\}$ que llamaremos **cobordes**. Notemos además que

$$H^n(G,A) = Z^n(G,A)/B^n(G,A).$$

Los detalles de esta construcción se pueden ver en [Wei, Sección 6.5].

1.4. Extensiones de grupos

Definición 27. *Sean G y N dos grupos, decimos que una **extensión** de G por N es una sucesión exacta corta de grupos:*

$$0 \to N \hookrightarrow E \twoheadrightarrow G \to 0. \tag{1.2}$$

Queremos determinar cuántos grupos E existen de tal manera que la sucesión anterior sea exacta, es decir, que N sea subgrupo normal de E y que $G \cong E/N$.

Primero notemos que como $N \triangleleft E$, entonces para cada $g \in E$ el homomorfismo $\tau_g : N \to N : n \mapsto gng^{-1}$ es de hecho un automorfismo de N. Asi podemos formar $\phi : E \to Aut(N)$, el homomorfismo de grupos definido por $\phi(g) = \tau_g$. Notemos además que para $n \in N$ se tiene que $\phi(n) = \tau_n$ es un automorfismo interior de N, pues $\tau_n(m) = nmn^{-1} \in N$ y que para $g \notin N$ τ_g no necesariamente es un automorfismo interior.

Proposición 28. *Sea $f : E \to H$ un homomorfismo de grupos, tales que existen subgrupos normales N y W de E y H respectivamente con $f(N) \subseteq W$. Entonces f induce un homomorfismo $f' : E/N \to H/W$*

Demostración. Consideremos $f'[g] = [f(g)]$ donde [ ] significa la clase en cada contexto. f' esta bien definida ya que si $[g] = [g']$ entonces $gg'^{-1} \in N$, luego $f(gg'^{-1}) \in W$ y como f es homomorfismo, tenemos que $[f(g)] = [f(g')]$ y f' es un homomorfismo ya que f lo es. ■

Como $Inn(E) \triangleleft Aut(E)$, el homomorfismo ϕ que definimos anteriormente induce un homomorfismo $\phi' : G \cong E/N \to Out(N) = Aut(N)/Inn(N)$.

Veamos que si tenemos $\lambda : G \to Aut(N)$ un homomorfismo de grupos, existe un grupo E con N como subgrupo normal, tal que $E/N \cong G$, más aún, el mapa asociado $\phi' : G \to Out(N)$ es precísamente el mapa inducido $\pi \circ \lambda$, con π la proyección canónica de $Aut(N)$ en $Out(N)$. Este grupo E es $N \times G$ dotado del producto $(n, g)(m, h) = (n\lambda(g)(m), gh)$, para todo $n, m \in N$ y $g, h \in G$. A este grupo E con esta operación se le conoce como el **producto semidirecto torcido por** λ y se denota por $N \times_\lambda G$.

Con el estudio anterior, vemos una forma de caracterizar las extensiones de G en N, considerando ternas (N, G, λ) como en la definición anterior. Así las extensiones serán dadas por el grupo $E = N \times_\lambda G$.

Definición 29. *Sea $N \triangleleft E$, entonces tenemos la suceción exacta corta 1.2 donde la flecha $\pi : E \twoheadrightarrow E/N$ es la proyección canónica. Decimos que un homomorfismo de grupos $s : E/N \to E$ es una **sección** si $\pi \circ s = id_{E/N}$. Si para dicha extensión, existe una sección, decimos que la extensión se **escinde**.*

Proposición 30. *Las siguientes condiciones son equivalentes para la extensión $(*)$*

i) $(*)$*se escinde.*

ii) *E tiene un subgrupo G' tal que $\pi \restriction_{G'}: G' \to G$ es un isomorfismo que satisface que $E = i(A)G'$ y $i(A) \cap G' = \{1\}$.*

iii) *E tiene un subgrupo G' tal que para todo $e \in E$, $e = i(a)g'$ para $a \in A$, $g' \in G'$ únicos.*

iv) $(*)$ *es equivalente a una extensión*

$$0 \to A \hookrightarrow A \rtimes G \twoheadrightarrow G \to 0$$

Demostración.

i) $\Leftrightarrow$ *ii)* $\Leftrightarrow$ *iii)* Se tiene por el hecho que si se escinde existe $s : G \to E$ tal que $\pi \circ s = id$. Entonces $G' = s(G)$ y se cumplen las condiciones. Recíprocamente, si existe dicho G' como π restringido a G' es isomorfismo, entonces tiene inversa y esta inversa será la sección.

i) $\Rightarrow$ *iv)* Tenemos $s : G \to E$ con $\pi \circ s = id$, entonces $f : A \times G \to E : (a, g) \mapsto i(a)s(g)$ es una biyección. Para que resulte un isomorfismo, debemos dotar a $A \times G$ de un producto adecuado. Éste, está dado por

$$(a, g)(b, h) = (a(gb), gh)$$

Y puede verificarse que con esta operación, se tiene el isomorfismo y $E \cong A \rtimes G$

iv) $\Rightarrow$ *i)* Como ambas extensiones son equivalentes y una se escinde, se puede verificar que la otra también lo es.

■

Definición 31. *Sean G_1, G_2 y G_3 grupos y $f_1 : G_1 \to G_3$, $f_2 : G_2 \to G_3$, homomorfismos. Definimos el pull-back $G_1 \times_{G_3} G_2 \subset G_1 \times G_2$ como:*

$$G_1 \times_{G_3} G_2 := \{(g_1, g_2) : f_1(g_1) = f_2(g_2) \in G_3\}$$

En otras palabras, el pull-back, es el que hace el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} G_1 \times_{G_3} G_2 \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"'] & G_1 \arrow[d, "f_1"] \\ G_2 \arrow[r, "f_2"'] & G_3 \end{tikzcd}$$

donde p_1 y p_2 son las proyecciones en la primera y segunda componente respectivamente.

Nota 32. *Puede verificarse que en efecto $G_1 \times_{G_3} G_2$ es un grupo con multiplicación por componentes y además cumple la propiedad universal de ser el mayor grupo que hace el diagrama conmutativo. Es decir, si existe L grupo que hace el diagrama de la definición anterior conmutativo, entonces existe un único homomorfismo $h : L \to G_1 \times_{G_3} G_2$ que hace conmutar el nuevo diagrama.*

Ejemplo 33. *Sean $G_1 = \mathbb{Z}_4 = \langle t \rangle$, $G_2 = D_8 = \{a,\ b|\ \ a^2 = b^4 = 1,\ aba^{-1} = b^{-1}\}$ y $G_3 = \mathbb{Z}_2 = \langle t \rangle$, $f_1(t) = 1$, $f_2(a) = t$ y $f_2(b) = 1$. Entonces tenemos que $G_1 \times_{G_3} G_2$ esta generado por las parejas (t, a) y $(1, b)$ y se tienen las relaciones*

$$(t, a)^4 = (1, 1)$$
$$(t, a)(1, b)(t^3, a) = (1, b^3)$$

Así, si llamamos $c = (t, a)$ y $d = (1, b)$ tenemos una presentación para el pullback:

$$G_1 \times_{G_3} G_2 = \langle c, d \mid c^4 = d^4 = 1, \quad cdc^{-1} = d^{-1} \rangle$$

Además podemos pensar a $G_1 \times_{G_3} G_2$ como extensión de G_2 en $\mathbb{Z}_2$ ya que $p_2 : G_1 \times_{G_3} G_2 \to G_2$ es sobreyectiva.

Teorema 34. *Sea f_1 sobreyectiva con $N := ker(f_1)$, entonces p_2 es sobreyectiva con $N' := ker(p_2)$ y $N \cong N'$. Es decir que tenemos la extensión:*

$$N' \longrightarrow G_1 \times_{G_3} G_2 \longrightarrow G_2 \cong (G_1 \times_{G_3} G_2)/N'$$

Donde $N' = (N, 1)$. Además si $\phi : G_3 \to Out(N)$ está asociada a G_1 entonces la inducida $\phi' : G_2 \longrightarrow Out(N)$ para $G_1 \times_{G_3} G_2$ es de la forma $\phi' = \phi \circ f_2$.

Demostración.

Si f_1 es sobreyectiva, para $g_2 \in G_2$ $f_2(g_2) \in G_3$, luego existe $g_1 \in G_1$ tal que $f_1(g_1) = f_2(g_2)$. Entonces tenemos que p_2 es sobreyectiva y además $N' = \{(g_1, 1)|\ f_1(g_1) = 1\}$ es decir que $N' = (N, 1)$.

Finalmente tenemos que $\phi'(g_2) = \phi'(p_2(g_1, g_2)) = \phi(f_1(p_1(g_1, g_2))) = \phi(f_1(g_1)) = \phi(f_2(g_2))$, para $g_1 \in G_1$ y $g_2 \in G_2$. Por lo tanto se tiene que $\phi' = \phi \circ f_2$. ■

Proposición 35. *El homomorfismo sobreyectivo $c : G \to Inn(G)$ con núcleo $Z(G)$ el centro de G induce homomorfismos $\mu : Aut(G) \to Aut(Inn(G))$, $\mu' : Out(G) \to Out(Inn(G))$, tal que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} Aut(G) \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\pi"'] & Aut(Inn(G)) \arrow[d, "\pi"] \\ Out(G) \arrow[r, "\mu'"'] & Out(Inn(G)) \end{tikzcd}$$

Además en la extensión para $Aut(G) \times_{Out(G)} G_2$, el mapa torcido esta dado por $\phi = \mu' \circ f_2 : G_2 \longrightarrow Out(Inn(G))$.

Demostración. Cualquier automorfismo $\alpha : G \to G$ envía al centro de G en sí mismo. Por tanto α induce un homomorfismo $\alpha' : Int(G) \to Int(G)$. Entonces podemos definir $\mu(\alpha) = \alpha'$. Si $\alpha(g) = hgh^{-1}$, entonces $\alpha'(f_g) = f_h \circ f_g \circ f_{h^{-1}}$ para todo $f_g \in Int(G)$. Entonces μ envia a $Int(G)$ en $Int(Int(G))$ y por tanto existe μ'. Además notemos que si $f \in Aut(G)$ y $f_n \in Int(N)$, entonces $f \circ f_n \circ f^{-1} = f_{f(n)}$, luego μ' se identifica con el mapa torcido de la extensión $Int(G) \rhd Aut(G) \longrightarrow Out(G)$. La segunda parte de la proposición se tiene usando el teorema anterior. ■

Teorema 36. *Si $Z(G) = \{1\}$, entonces dada una tripla $(G, G_2, \phi : G_2 \to Out(G))$, entonces hay una única extensión E que tiene a ϕ como mapa torcido.*

Demostración. Como $Z(G) = \{1\}$, entonces tenemos que $G = Int(G)$, así por el lema anterior sabemos que la extensión $G \rhd Aut(G) \times_{Out(G)} G_2 \longrightarrow G_2$ tiene mapa torcido ϕ. Ahora supongamos que existe otra extensión $G \rhd E' \xrightarrow{p} G_2$ asociada a ϕ. Entonces tenemos el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r] & E' \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\lambda"] & G_2 \arrow[d, "\phi"] \\
Int(G) \arrow[r] & Aut(G) \arrow[r, "\pi"'] & Out(G)
\end{tikzcd}$$

Entonces tenemos que $\pi\lambda = \phi p$. Con lo que podemos formar $e(p, \lambda) : E' \longrightarrow Aut(G) \times_{Out(G)} G_2 : e \mapsto (\lambda(e), p(e))$ y puede verificarse que $e(p, \lambda)$ es un isomorfismo. ■

Definición 37. *Sean $\phi : G \to Out(N)$ un homomorfismo de grupos y $L : G \to Aut(N)$ un levantamiento de ϕ (es decir que $\phi = \pi \circ L$, para $\pi : Aut(G) \to Out(G)$ la proyección canónica), entonces la **obstrucción** para L es la función $f : G \times G \to Aut(N)$ que cumple con:*

$$f(g, h) = L(g)^{-1} L(h)^{-1} L(gh).$$

En adelante consideramos L un mapa normalizado. Es decir que $L(1) = 1$.

Nota 38. *La función f que acabamos de definir tiene las siguientes propiedades:*

- *$f(1, g) = f(g, 1) = 1$, para todo $g \in G$.*
- *$f(g, h) = 1$ para todo $g, h \in G$ si y sólo si L es un homomorfismo.*
- *$f(g, h) \in Inn(N)$ para todo $g, h \in G$. Esto se tiene gracias a que ϕ y π son homomorfismos de grupos, pues para $g, h \in G$ tenemos:*

$$\begin{aligned}
\phi(gh) &= \phi(g)\phi(h) \\
\pi(L(gh)) &= \pi(L(g))\pi(L(h)) = \pi(L(g)L(h)) \\
f(g, h) &= L(g)^{-1} L(h)^{-1} L(gh) \in Inn(N)
\end{aligned}$$

- *Para cualquier tripla $(g_1, g_2, g_3) \in G^3$ se cumple la relación:*

$$(L(g_3))^{-1} f(g_1, g_2) L(g_3) f(g_1 g_2, g_3) f(g_1, g_2 g_3)^{-1} f(g_2, g_3)^{-1} = 1$$

Que se tiene directamente de la definición de f.

Como $im(f) \subset Inn(N)$, entonces podemos levantar f a un mapa $f' : G \times G \to N$, este levantamiento esta dado por $Inn(f') = f$, donde $Inn(n) : N \longrightarrow N : m \mapsto nmn^{-1}$. Por conveniencia escogeremos f' que cumpla que si $f(g,h) = 1$ entonces $f'(g,h) = 1$. Así podemos formar el mapa $\mu : G \times G \times G \to Z(N)$, dada por:

$$\mu(g,h,k) = L(k)^{-1}[f'(g,h)]f'(gh,k)(f'(g,hk))^{-1}(f'(h,k))^{-1} \tag{1.3}$$

Este mapa, de hecho, tiene imagen en $Z(N)$. Esto último lo tenemos gracias a que $Inn(\mu) = id_N$.

En conclusión, lo que hemos hecho es construir un mapa $\mu : G \times G \times G \longrightarrow Z(N)$ que depende de ϕ, L (Levantamiento de ϕ) y f' (Levantamiento de f).

Teorema 39. *Una extensión $N \triangleright E \longrightarrow G$ con mapa torcido ϕ existe si y sólo si es posible escoger L y f' de tal manera que μ sea el mapa trivial.*

Demostración.

$\Rightarrow$) Tenemos el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "In"] \arrow[d, "p"] & Aut(N) \arrow[d, "\pi"] \\
G \arrow[r, "\phi"'] & Out(N)
\end{tikzcd}$$

para $g \in G$ sea $l_g \in p^{-1}(g)$, entonces escojamos $L : G \longrightarrow Aut(N) : g \mapsto Inn(l_g)$. Así como $Inn(f') = f$, entonces $f' : G \times G \longrightarrow N : (g_1, g_2) \mapsto l_{g_2}^{-1} l_{g_1}^{-1} l_{g_1 g_2}$, que efectivamente esta en N ya que p es un homomorfismo y además $ker(p) = N$. Luego tenemos que con esta escogencia de L y f',

$$L(g_3)^{-1}[f'(g_1,g_2)]f'(g_1g_2,g_3)(f'(g_1,g_2g_3))^{-1}(f'(g_2,g_3))^{-1} = 1_N$$

Es decir que μ es el mapa trivial.

$\Leftarrow$) Asumimos que existen L y f' tales que μ es trivial. Definamos en $N \times G$ el producto:

$$(n,g) \odot (n',g') = (f'^{-1}(g,g')L(g')^{-1}(n)n', gg')$$

Para $n, n' \in N$ y $g.g' \in G$. Así, podemos verificar que $(N \times G, \odot)$ define un grupo que forma una extensión de G por N.

$\blacksquare$

Ahora veamos que si f' y f'' son dos levantamientos asociados al mismo L, entonces ellos difieren por un elemento en $Z(N)$, es decir que para todo $(g_1,g_2) \in G \times G$, se tiene que $f'(g_1,g_2)f''(g_1,g_2)^{-1} \in Z(G)$. Es decir que existe $h : G \times G \longrightarrow Z(N)$, tal que $f''(g_1,g_2) = f'(g_1,g_2)h(g_1,g_2)$. Donde además h cumple que $h(g,1) = h(1,g) = 1$. Así podemos verificar que para (L, f') y (L, f'') dos levantamientos asociados al mismo ϕ, existe el mapa h que acabamos de definir de tal manera que:

$$\mu'(g_1,g_2,g_3) = \mu(g_1,g_2,g_3)L(g_3)^{-1}(h(g_1,g_2))h(g_1g_2,g_3)h(g_1,g_2g_3)^{-1}h(g_2,g_3)^{-1}$$

Donde μ esta asociado a (L, f') y μ' esta asociado a (L, f''). Notemos que esta última ecuación nos esta diciendo que μ y μ' varían por el coborde de h como se definió en la sección anterior, solo que aquí esta expresado con la operación producto.

Teorema 40. *Sea $\mu \in C^3$ la obstrucción asociada a $\phi : G \to Out(N)$, entonces $\delta(\mu) = 0$.*

Demostración. La idea de la prueba es calcular directamente $\delta(\mu)$ y sar el hecho de que $\mu(g_1, g_2, g_3) \in Z(N)$ para todo $g_1, g_2, g_3 \in G$.

$$\begin{aligned}\delta\mu(g_1, g_2, g_3, g_4) = L(g_4)^{-1}(\mu(g_1, g_2, g_3))\mu(g_2, g_3, g_4)\\ \mu(g_1, g_2g_3, g_4)\mu(g_1g_2, g_3, g_4)^{-1}\mu(g_1, g_2, g_3g_4)^{-1}\end{aligned}$$

Usando la definición de μ dada en 1.3 podemos verificar que

$$\mu(g_1, g_2, g_3) = f(g_2, g_3)^{-1}L(g_3)^{-1}[f(g_1, g_2)]f(g_1g_2, g_3)f(g_1, g_2g_3)^{-1}$$

y reorganizando los elementos se obtiene que $\delta(\mu) = 0$. Pueden verificarse los detalles de la prueba en [Ade94, Teorema 7.2]. ■

En conclusión, hemos definido $\mu \in C^3(G, Z(N))$, que es de hecho un cocíclo, $\mu \in Z^3(G, Z(N))$, asociado a un $\phi : G \to Out(N)$, de tal manera que $\mu \in H^3(G, Z(N))$ si y sólo si su sistema asociado (N, G, ϕ) define una extensión.

Definición 41. *Decimos que dos extensiones son* ***equivalentes*** *si existe $\sigma : E \to E'$ que hace el siguiente diagrama conmutativo:*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d, "id"] & E \arrow[r] \arrow[d, "\sigma"] & G \arrow[r] \arrow[d, "id"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] & E' \arrow[r] & G \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Consideremos el caso en que N es un grupo abeliano A. Entonces la extensión:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"] & E \arrow[r, "\pi"] & G \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Da lugar a una acción de G en A, convirtiendo a A en un G-módulo. La acción, es la acción por conjugación ya que como A es abeliano, $i(A)$ es un subgrupo normal de E y la acción de conjugación en A es trivial.

Por otro lado como $G \cong E/A$ y $A \subset ker(\pi)$, hay una acción inducida de E/A en A. Si $g \in G$, sea $h \in E$ tal que $\pi(h) = g$, entonces la acción de G en A es $i(ga) := ga = hi(a)h^{-1}$ o lo que es igual $hi(a) = i(ga)h$, para $a \in A$. Esto último quiere decir que la $i(A)$ es central en E si la G-acción es trivial.

Proposición 42. *Cualquier homomorfismo $\tau : (N \times G, \mu_{(L,f)}) \longrightarrow (N \times G, \mu_{(L,f)})$ tal que $\tau \restriction N = id$ y el mapa cociente $\tau' : G \longrightarrow G$ también es la identidad, es de la forma $\tau(n, g) = (\kappa(g)n, g)$. Donde $\kappa(g) = c_g n_g^{-1}$ y $c_g \in Z(N)$.*

Demostración. Tenemos que $\tau(n, 1) = (n, 1)$ y $\tau(1, g) = (\kappa(g), g)$ para algún $\kappa(g) \in N$. Por lo tanto $\tau(n, g) = \tau(n, 1)\tau(1, g)$. Usando las dos condiciones anteriores, el hecho de que τ es un homomorfismo y las respectivas multiplicaciones en $(N \times G, \mu_{(L,f)})$ y $(N \times G, \mu_{(L,f)})$ se tiene la igualdad

$$\kappa(g)L(g)^{-1}(n) = L'(g)^{-1}(n)\kappa(g).$$

■

Teorema 43. *$(N \times G, \mu_{(L,f)}) \sim (N \times G, \mu_{(L,f')})$ si y sólo si $f'(g_1, g_2) = f(g_1, g_2)k(g_1, g_2)$ para todo $g_1, g_2 \in G$. Tal que $k : G \times G \longrightarrow Z(N)$ y tiene la propiedad de que existe $\lambda : G \longrightarrow Z(G)$ con*

$$k(g_1, g_2) = L(g_2)^{-1}(\lambda(g_1))\lambda(g_1 g_2)^{-1}\lambda(g_2).$$

Demostración. Supongamos que existe τ el isomorfismo de grupos. Entonces $\tau((1, g)(1, g')) = \tau(f^{-1}(g, g'), gg') = (\kappa(gg')f^{-1}(g, g'), gg')$ Por la proposición anterior. Así usando el hecho de que τ es homomorfismo llegamos a la relación:

$$f'(g, g') = L(g')^{-1}(\kappa(g))\kappa(g')\kappa(gg')^{-1}f(g, g') \tag{1.4}$$

Solo basta hacer $\lambda(g) = \kappa(g)$ para tener la conclusión del teorema.

En la otra dirección si definimos f' como en la ecuación 1.4 tenemos entonces que el μ asociado a f' es trivial y por tanto se tiene el isomorfismo. ■

Capítulo 2

Productos Cruzados

Este capítulo contiene los resultados principales de este trabajo. La mayoría de los resultados son ideas originales del autor y su orientador basadas en ideas desarrolladas en los artículos [Gal12] y [Dav10]. Se da a conocer la teoría de obtrucción de productos cruzados de álgebras de Hopf. Se Desarrolla la teoría de extensiones de grupos en el contexto de álgebras de Hopf y se muestran los reslutados más importantes que se obtienen durante este estudio.

2.1. Producto cruzado de anillos

Definición 44. *Sean G un grupo escrito en forma multiplicativa con identidad e y R un anillo. Decimos que R es G-**graduado** si existe una familia $\{R_\sigma \mid \sigma \in G\}$ de subgrupos aditivos R_σ de R, tal que $R = \bigoplus_{\sigma\in G} R_\sigma$ y $R_\sigma R_\tau \subseteq R_{\sigma\tau}$ para todo $\sigma, \tau \in G$.*

*A cada R_σ se le llama **componente homogénea de grado** σ.*

*Si se tiene que $R_\sigma R_\tau = R_{\sigma\tau}$ para todo $\sigma, \tau \in G$, decimos que R es **fuertemente graduado por** G.*

Definición 45. *Sean R un anillo G-graduado y $U(R)$ las unidades de R. Se dice que R es un **producto cruzado** si $U(R) \cap R_\sigma \neq \emptyset$ para todo $\sigma \in G$.*

Ejemplo 46. *El anillo de polinomios $R[x]$ es $\mathbb{Z}$-graduado. $R[x] = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} R_k$, donde $R_k = \{p(x) \in R[x] | deg(p(x)) = k\}$ para $k \geq 0$ y $R_k = 0$ para $k < 0$. Este anillo es graduado pero no es fuertemente graduado.*

Ejemplo 47. *El anillo de polinomios de Laurent. Sea A un anillo.Formemos $R := A[x, x^{-1}]$. Así, $R = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} R_k$, con $R_k = Ax^k$ para $k \in \mathbb{Z}$ y así R es $\mathbb{Z}$-graduado.*

Definición 48. *Sean A un anillo y G un grupo con elemento unidad e. Decimos que (A, G, σ, α) es un **sistema cruzado** si $\sigma : G \longrightarrow Aut(A)$, $\alpha : G \times G \longrightarrow U(A)$ son dos mapas con las siguientes propiedades para todo $x, y, z \in G$ y $a \in A$:*

(i) $^x(^y a) = \alpha(x, y)\ {}^{xy}a\alpha(x, y)^{-1}$.

(ii) $\alpha(x, y)\alpha(xy, z) = {}^x\alpha(y, z)\alpha(x, yz)$.

(iii) $\alpha(x, e) = \alpha(e, x) = 1$.

*donde ${}^x a := \sigma(x)(a)$. Al mapa σ se le llama una **acción débil** de G en A y a α se le llama σ-**cocíclo**.*

Sea $\overline{G} := \{\bar{g} \mid g \in G\}$ una copia de G como conjunto. Denotamos por $A^\sigma_\alpha[G]$ al A-módulo izquierdo libre con base $\overline{G}$ y definimos la multiplicación en este conjunto como:

$$(a_1\bar{x})(a_2\bar{y}) = a_1 \, {}^x a_2 \alpha(x,y)\overline{xy}$$

para $a_1, a_2 \in A$ y $x, y \in G$. Así podemos verificar que $A^\sigma_\alpha[G]$ con la operación que acabamos de definir, es un anillo, es G-graduado con componentes homogéneas $(A^\sigma_\alpha[G])_g = A\bar{g}$ y es un producto cruzado.

Nota 49.

1. *Si $\alpha(g_1, g_2) = 1$ para todo $g_1, g_2 \in G$, entonces las condiciones (ii) y (iii) se cumplen trivialmente y la condición (i) nos dice que σ es un homomorfismo. En este caso $A^\sigma_\alpha[G]$ se denota por $A *_\sigma G$ y se llama el **skew groupring** asociada a σ con multipliación:*

$$a\overline{x}b\overline{y} = a \, {}^x b\overline{xy} = a\sigma(b)(x)\overline{xy}.$$

2. *Si ahora hacemos $\sigma(g) = id_A$ para todo $g \in G$, entonces de (i) tenemos que:*

$$a = \alpha(x,y)a\alpha(x,y)^{-1}$$

*Es decir que $a\alpha(x,y) = \alpha(x,y)a$ para todo $x, y \in G$ y por tanto $\alpha(x,y) \in U(Z(A))$. Las condiciones (ii) y (iii) nos dicen que α es un 2-cocíclo clásico, es decir que $\alpha \in Z^2(G, U(Z(A)))$. Al anillo A con σ el mapa trivial lo notamos por $A_\alpha[G]$ y se denomina el **anillo de grupo torcido** asociado al cocíclo α, con multiplicación dada por:*

$$(a\overline{x})(b\overline{y}) = ab\alpha(x,y)\overline{xy}$$

para todo $a, b \in A$ y $x, y \in G$.

Por otra parte, notemos que el anillo G-graduado $R = \bigcup_{\sigma \in G} R_\sigma$ es producto cruzado si y sólo si la sucesión

$$1 \longrightarrow U(R_e) \xrightarrow{i} U^{gr}(R) \xrightarrow{deg} G \longrightarrow 1$$

es exacta, con $U^{gr}(R) = \bigcup_{\sigma \in G} R_\sigma \cap U(R)$, el conjunto de elementos homogéneos invertibles, i la inclusión y $deg : U^{gr}(R) \longrightarrow G$ la función que envía a cada $x \in U^{gr}(R)_g$ en $deg(x) = g$.

Proposición 50. *Todo G-producto cruzado R es de la forma $A^\sigma_\alpha[G]$ para algún anillo A y algunos mapas α y σ.*

Demostración. Sea $A := R_e$. Como R es un producto cruzado, para todo $g \in G$ escojamos $u_g \in R_g \cap U(R) \neq \emptyset$. En particular para e, $u_e = 1$. Entonces $R_g = R_e u_g = u_g R_e$ y así $\{u_g | d \in G\}$ es una base para R como R_e-módulo. Entonces podemos definir:

$$\sigma : G \longrightarrow Aut(R_e) \text{ por } \sigma(g)(a) = u_g a u_g^{-1}$$

y

$$\alpha : G \times G \longrightarrow U(R_e) \text{ por } \alpha(x,y) = u_x u_y u_{xy}^{-1}$$

para $a \in A$, $g, x, y, z \in G$. Podemos verificar que con estos mapas σ y α se cumplen las condiciones (i), (ii) y (iii) y finalmente para $a, b \in A$ tenemos que

$$\begin{aligned} ab = (a_1u_x)(b_1u_y) &= a_1u_xb_1(u_x^{-1}u_x)u_y(u_{xy}^{-1}u_{xy}) \\ &= a_1(u_xb_1u_x^{-1})(u_xu_yu_{xy}^{-1})u_{xy} \\ &= a_1 \, {}^x b_1\alpha(x,y)u_{xy} \end{aligned}$$

Con lo que tenemos que $R \cong (R_e)^{\sigma}_{\alpha}[G]$ ∎

2.2. Sistema cruzado de álgebras de Hopf

Definición 51. *Un **homomorfismo torcido** entre álgebras de Hopf (H, Δ, ϵ) y (H', Δ', ϵ'), es una pareja (f, J) donde $f : H \longrightarrow H'$ es un homomorfismo de álgebras y J es un elemento invertible de $H' \otimes H'$ que cumplen las siguientes condiciones:*

$$(\Delta' \otimes id)(J)(J \otimes 1) = (id \otimes \Delta')(J)(1 \otimes J) \tag{2.1}$$
$$(\epsilon \otimes id)(J) = (id \otimes \epsilon)(J) = 1 \tag{2.2}$$
$$\epsilon'(f(a)) = \epsilon(a) \tag{2.3}$$
$$\Delta'(f(a))J = J((f \otimes f)(\Delta(a))), \quad \forall a \in H \tag{2.4}$$

Definimos la categoría $End^{Tw}(H_1, H_2)$, cuyos objetos son homomorfismos torcidos de H_1 en H_2 y un *morfismo* entre dos homomorfismos torcidos $(f, J_f), (f', J_{f'}) : H_1 \longrightarrow H_2$ es un elemento $c \in H_2$ tal que $\epsilon(c) = 1$, $cf(h) = f'(h)c$, para todo $h \in H_1$ y $\Delta(c)J_f = J_{f'}(c \otimes c)$. La composición de $a : f \longrightarrow g$ y $b : g \longrightarrow k$ es precisamente $ba : f \longrightarrow k$. Así, si $(f, J_f) : H_1 \longrightarrow H_2$ y $(g, J_g) : H_2 \longrightarrow H_3$ son automorfismos torcidos, definimos la composición como $(gf, J_g(g \otimes g)J_f) : H_1 \longrightarrow H_3$.

Dada un álgebra de Hopf H denotamos por $Aut^{Tw}(H)$ a la subcategoría de $End^{Tw}(H, H)$, donde los objetos son automorfismos torcidos de H y las flechas son isomorfismos de automorfismos torcidos.

Sean G un grupo y (H, Δ, ϵ) un álgebra de Hopf. Definimos un G-**sistema cruzado** como una pareja (τ, θ) con τ y θ mapas; $\tau : G \longrightarrow Aut^{Tw}(H) : g \mapsto (g_*, J_g)$ y $\theta : G \times G \longrightarrow U(H)$, que cumplen:

$$\epsilon(\theta(g, h)) = 1 \tag{2.5}$$
$$\tau(e) = (id, 1 \otimes 1) \tag{2.6}$$
$$\theta(g, h)(gh)_*(a) = g_*(h_*(a))\theta(g, h) \tag{2.7}$$
$$\theta(g, h)\theta(gh, k) = g_*(\theta(h, k))\theta(g, hk) \tag{2.8}$$
$$\theta(e, g) = \theta(g, e) = 1 \tag{2.9}$$
$$\Delta(\theta(g, h))J_{gh} = J_g(g_* \otimes g_*)(J_h)(\theta(g, h) \otimes \theta(g, h)) \tag{2.10}$$

Para todo $g, h, k \in G$ y para todo $a \in H$.

Notemos que esta es justamente la definición de sistema cruzado de anillos con condiciones adicionales para trabajar en álgebras de Hopf. Aquí τ es el análogo a σ y θ el análogo de α en la definición 48, pues como vemos, las condiciones (2.7), (2.8) y (2.9) son justamente las condiciones (i) (ii) y (iii) respectivamente.

A $H^{\tau}_{\theta}[G]$ lo notaremos por $H\#G$ con el producto y coproducto:

$$(x\#g)(y\#h) = xg_*(y)\theta(g, h)\#gh$$

y

$$\Delta(x\#g) = \Delta(x)J_g\#g \otimes g = x_{(1)}J^1_g\#g \otimes x_{(2)}J^2_g\#g$$

para $x, y \in H$ y $h, g \in G$.

Proposición 52. *El espacio vectorial $H\#G$ con las operaciones que acabamos de definir es una biálgebra, con counidad $\epsilon(x\#g) = \epsilon(x)$.*

Demostración. Veamos que es asociativa:

$$\begin{aligned}
((x\#g)(y\#h))(z\#k) &= (xg_*(y)\theta(g,h)\#gh)(z\#k) \\
&= xg_*(y)\theta(g,h)(gh)_*(z)\theta(gh,k)\#ghk \\
&= xg_*(y)g_*(h_*(z))\theta(g,h)\theta(gh,k)\#ghk \\
&= xg_*(y)g_*(y)g_*(h_*(z))g_*(\theta(h,k))\theta(g,hk)\#ghk \\
&= xg_*(yh_*(z)\theta(h,k))\theta(g,hk)\#ghk \\
&= (x\#g)(yh_*(z)\theta(h,k)\#hk) \\
&= (x\#g)((y\#h)(z\#k))
\end{aligned}$$

Además tiene elemento unidad $1\#e$

$$\begin{aligned}
(1\#e)(x\#g) &= x\theta(e,g)\#g = x\#g \\
(x\#g)(1\#e) &= xg_*(e)\theta(g,e)\#g = x\#g
\end{aligned}$$

Para probar que $(id\otimes\Delta)(\Delta) = (\Delta\otimes id)(\Delta)$, usamos la ecuación 2.1 y el hecho de que $\Delta : H \to H\otimes H$ cumple la propiedad $(\Delta \otimes id)(\Delta) = (id \otimes \Delta)(\Delta)$:

$$\begin{aligned}
(\Delta \otimes id)(\Delta)(x\#g) &= (\Delta \otimes id)(\Delta(x)J_g\#g \otimes g) \\
&= (\Delta \otimes id)(\Delta(x))(\Delta \otimes id(J_g))(J_g \otimes 1)\#g \otimes g \\
&= (id \otimes \Delta)(\Delta(x))(id \otimes \Delta)(J_g)(1 \otimes J_g)\#g \otimes g \\
&= (id \otimes \Delta)(\Delta(x)J_g\#g \otimes g) \\
&= (id \otimes \Delta)(\Delta)(x\#g)
\end{aligned}$$

Finalemente Δ es un homomorfismo de álgebras:

$$\begin{aligned}
\Delta(x\#g)\Delta(y\#h) &= (\Delta(x)J_g\#g \otimes g)(\Delta(y)J_h\#h \otimes h) \\
&= \Delta(x)J_g(g_* \otimes g_*)(\Delta(y))(g_* \otimes g_*)(J_h)\theta(g \otimes g, h \otimes h)\#gh \otimes gh \\
&= \Delta(x)J_g\Delta(g_*(y))(g_* \otimes g_*)(J_h)\theta(g,h) \otimes \theta(g,h)\#gh \otimes gh \\
&= \Delta(x)\Delta(g_*(y))\Delta(\theta(g,h))J_{gh}\#gh \otimes gh \\
&= \Delta(xg_*(y)\theta(g,h)\#gh) \\
&= \Delta((x\#g)(y\#h)),
\end{aligned}$$

que se cumple usando las definiciones de producto, coproducto y la condición 2.10 de la definición de G-sistema cruzado. ∎

Proposición 53. *La biálgebra $H\#G$ es conmutativa si y sólo si*

- *G es abeliano.*
- *H es conmutativa.*
- *$g_* = id_H$, para todo $g \in G$.*
- *$\theta(g,h) = \theta(h,g)$, para todo $g,h \in G$.*

Demostración. Para que la biálgebra sea conmutativa, necesitamos que se cumpla que $m(a\#g\otimes b\#h) = m(b\#h \otimes a\#g)$, para todo $a,b \in H$ y $g,h \in G$. Es decir que queremos que:

$$m(a\#g \otimes b\#h) = ag_*(b)\theta(g,h)\#gh = bg_*(a)\theta(h,g)\#hg = m(b\#h \otimes a\#g)$$

Para que esto se cumpla necesitamos que $gh = hg$ para todo $g,h \in G$ con lo que tenemos que G es un grupo abeliano.

Por otro lado queremos

$$\begin{aligned} m(a\#e \otimes 1\#g) &= m(1\#g \otimes a\#e) \\ a\#g &= g_*(a)\#g \end{aligned}$$

para todo $a \in H$ y $g \in G$, es decir que $g_* = id_H$ para todo $g \in G$. Finalmente queremos que

$$\begin{aligned} m(1\#g \otimes 1\#h) &= m(1\#h \otimes 1\#g) \\ \theta(g,h)\#gh &= \theta(h,g)\#hg \end{aligned}$$

Es decir que debe tenerse que $\theta(g,h) = \theta(h,g)$ para todo $g,h \in G$, cumpliendo así la última condición de la proposición.

Recíprocamente, si tenemos las tres condiciones enunciadas, podemos verificar facilmente que $H\#G$ resulta una biálgebra conmutativa. ■

2.3. Producto cruzado de álgebras de Hopf

Definición 54. *Sean (H, m, Δ) un álgebra de Hopf y G un grupo. Decimos que H es un G-**producto cruzado** si hay una descomposición $H = \bigoplus_{g \in G} H_g$, donde*

(i) $H_g H_h \subseteq H_{gh}$, *para todo* $g,h \in G$.

(ii) H_g *tiene un elemento invertible para cada* $g \in G$.

(iii) $\Delta(H_g) \subseteq H_g \otimes H_g$.

(iv) $S(H_g) \subseteq H_{g^{-1}}$

Sean G un grupo, (H, Δ, ϵ, S) un álgebra de Hopf y $(g_*, \theta(g,h), J_g)_{g,h \in G}$ un G-sistema cruzado sobre H. Notemos que por la condición (iv) de la definición 54, debemos tener que $S(a\#g) = a'\#g^{-1}$, para algún $a' \in H$. En particular para $x\#e$ y $1\#g$ tenemos que $S(x\#e) = S(x)\#e$ y $S(1\#g) = \nu_g\#g^{-1}$ donde $\nu_g \in U(H)$, debido a que S es un homomorfismo y como $1\#g$ es unidad, su imagen por S también debe ser unidad.

Así, si queremos construir una antípoda S para el sistema cruzado $H\#G$, S debe ser un antimorfismo,

$$\begin{aligned} S(x\#g) &= S((x\#e)(1\#g)) \\ &= S(1\#g)S(x\#e) \\ &= (\nu_g\#g^{-1})(S(x)\#e) \\ &= \nu_g(g^{-1})_*(S(x))\#g^{-1} \end{aligned}$$

A partir de este resultado, S es antípoda para el sistema $(g_*, \theta(g,h), J_g)_{g,h \in G}$ definida por el mapa $\nu : G \longrightarrow U(H)$, que cumple las siguientes condiciones:

$$\nu_{gh}(gh)_*(S(\theta(g,h))) = \nu_h(h^{-1})_*(\nu_g)\theta(h^{-1}, g^{-1}) \tag{2.11}$$

$$\nu_g^{-1}S(x)\nu_g = (g^{-1})_*(S(g_*(x))) \tag{2.12}$$

$$\nu_g(g^{-1})_*(S(J_g^1)J_g^2)\theta(g^{-1}, g) = 1 \tag{2.13}$$

$$J_g^1 g_*(\nu_g(g^{-1})_*(S(J_g^2)))\theta(g, g^{-1}) = 1 \tag{2.14}$$

para todo $x \in H$, $g,h \in G$, donde $J_g = J_g^1 \otimes J_g^2$.

Proposición 55. *Sea $\nu : G \longrightarrow U(H)$ la antípoda del sistema $(g_*, \theta(g,h), J_g)_{g,h\in G}$, entonces para $x \in H$ y $g \in G$*

$$S(x\#g) = \nu_g(g^{-1})_*(S(x))\#g^{-1}$$

Es una antípoda para $H\#G$.

Demostración. Las condiciones para ν, se obtienen usando que S es antimorfismo y aplicando S a productos particulares como:

- 2.11 se obtiene de $S((1\#g)(1\#h))$.
- 2.12 se obtiene de $S((1\#g)(x\#e))$.
- 2.13 se obtiene de $m \circ (S \otimes id) \circ \Delta(1\#g) = \epsilon(1\#g) = 1$.
- 2.14 se obtiene de $m \circ (id \otimes S) \circ \Delta(1\#g) = \epsilon(1\#g) = 1$.

■

Nota 56. *Podemos verificar al igual que se hizo en la proposición 50, que cualquier producto cruzado de H es de la forma $B\#G$, para $B = H_e$. Además como H es un producto cruzado, en cada H_g hay un elemento t_g invertible. Entonces podemos definir $g_* : H \longrightarrow H : a \mapsto t_g a t_g^{-1}$, para cada $g \in G$ y cada $a \in H_e$, y $\theta : G \times G \longrightarrow U(H) : (g,h) \mapsto t_g t_h t_{gh}^{-1}$.*

Por otro lado tenemos que $\Delta(t_g) \in H_g \otimes H_g$ puede ser expresado unívocamente como $\Delta(t_g) = J_g(t_g \otimes t_g)$ con $J_g \in H_e \otimes H_e$. Así como Δ es un homomorfismo de álgebras, J_g es un elemento invertible y ϵ es normalizada ($\epsilon(t_g) = 1$), tenemos que $(\epsilon \otimes id)(J_g) = (id \otimes \epsilon)(J_g) = 1$.

Así podemos ver que $(g_*, \theta(g,h), J_g)_{g,h\in G}$ define un G-sistema cruzado de una sub-biálgebra H_e de H y $H_e\#G$ es isomorfa a H como biálgebras.

Finalmente la antípoda $S : H \longrightarrow H$ es un anti-isomorfismo de álgebras y la condición de $S(H_g) \subseteq H_{g^{-1}}$ indica que existe un único mapa $\nu : G \longrightarrow U(H_e)$ tal que $S(t_g) = \nu_g t_{g^{-1}}$

2.4. Obstrucción al sistema cruzado

Sea H una biálgebra, el conjunto de todos los automorfismos torcidos de H que denotamos por $Aut^{Tw}(H)$, es un grupo con la composición de automorfismos torcidos. Ahora, definimos el conjunto:

$$Inn^{Tw}(H) = \{(f, J_f) \in Aut^{Tw}(H) | \exists a \in U(H) : f(x) = axa^{-1},\ J_f = \Delta(a^{-1})a \otimes a\}$$

Notemos que $(f, J_f) \in Inn^{Tw}(H)$ si y sólo si es isomorfo al elemento identidad en la categoría $Aut^{Tw}(H)$. Además podemos verificar que $Inn^{Tw}(H)$ es un subgrupo normal de $Aut^{Tw}(H)$ y por tanto podemos formar

$$Out^{Tw}(H) = Aut^{Tw}(H)/Inn^{Tw}(H),$$

el grupo de automorfismos torcidos exteriores.

Definición 57. *Sea H una biálgebra, notamos por $G(H)$ al grupo de elementos **group-like**:*

$$G(H) := \{a \in U(H) \mid \Delta(a) = a \otimes a\}$$

*y notaremos por $G_c(H)$ al grupo de elementos **group-like centrales**:*

$$G_c(H) := \{a \in U(H) \ |\Delta(a) = a \otimes a, ab = ba, \forall b \in H\}$$

Proposición 58. *El grupo $G_c(H)$ es un $Out^{Tw}(H)$-módulo, con la acción $f \cdot a := f_*(a)$, para todo $f \in Out^{Tw}(H)$, $a \in G_c(H)$, donde (f_*, J_f) es un automorfismo torcido de H tal que $f = \overline{(f_*, J_f)}$ es la clase de (f_*, J_f) en $Inn^{Tw}(H)$.*

Demostración. Sean $(f*, J_f)$ un automorfismo torcido de H y $a \in G_c(H)$. Entonces como $a \in U(H)$ y f_* es un homomorfismo, entonces $f_*(a) \in U(H)$. Ahora, $\Delta(f_*(a)) = (f_* \otimes f_*)(\Delta(a)) = f_*(a) \otimes f_*(a)$, de donde tenemos que $f_*(a) \in G_c(H)$.

Ahora si (f, J_f) y (g, J_g) son automorfismos torcidos tales que $\overline{(f, J_f)} = \overline{(g, J_g)}$, entonces existe $x \in U(H)$ tal que $f(b) = xf(b)x^{-1}$ para todo $b \in H$, así, si $a \in G_c(H)$, entonces $f(a) = g(a)$. Es decir que $Out^{Tw}(H)$ actúa en $G_c(H)$. ∎

Ahora consideremos para cada $g \in Out^{Tw}(H)$ un automorfismo torcido (g_*, J_g) tal que $\overline{(g_*, J_g)} = g$ y $(e_*, J_e) = (id, 1 \otimes 1)$. Como $\overline{((gh)_*, J_{gh})} = \overline{(g_*, J_g) \circ (h_*, J_h)}$, entonces existe una familia $\{\theta(g, h) | g, h \in Out^{Tw}(H)\}$ tal que cumple las condiciones:

$$\epsilon(\theta(g, h)) = 1 \tag{2.15}$$

$$\theta(g, h)(gh)_*(a) = g_*(h_*(a))\theta(g, h) \tag{2.16}$$

$$\theta(e, g) = \theta(g, e) = 1 \tag{2.17}$$

$$\Delta(\theta(g, h))J_{gh} = J_g(g_* \otimes g_*)(J_h)(\theta(g, h) \otimes \theta(g, h)) \tag{2.18}$$

para todo $g, h \in Out^{Tw}(H)$. A este sistema $(g_*, J_g, \theta(g, h))_{g,h \in Out^{Tw}(H)}$ lo llamamos un $Out^{Tw}(H)$-**sistema torcido incoherente**.

Proposición 59. *Sean (f, J_f) un automorfismo torcido y $a \in H$ un automorfismo de (f, J_f). Entonces $a \in G_c(H)$.*

Demostración. Por definición $\Delta(a)J_f = J_f(a \otimes a)$ y $af(x) = f(x)a$, para todo $x \in H$, entonces como f es automorfismo, $a \in Z(H)$ y $\Delta(a) = a \otimes a$, es decir que $a \in G_c(H)$. ∎

Corolario 60. *Dados dos sistemas cruzados incoherentes $(g_*, J_g, \theta(g, h))_{g,h \in Out^{Tw}(H)}$ y $(g_*, J_g, \theta'(g, h))_{g,h \in Out^{Tw}(H)}$, entonces $\theta'(g, h)^{-1}\theta(g, h) \in G_c(H)$ para todo $g, h \in Out^{Tw}(H)$.*

Demostración. Notemos que el elemento $\theta'(g, h)^{-1}\theta(g, h)$ es un automorfismo de $((gh)_*, J_{gh})$, entonces por la proposición anterior tenemos que $\theta'(g, h)^{-1}\theta(g, h) \in G_c(H)$ para todo $g, h \in Out^{Tw}(H)$. ∎

Ahora consideremos un $Out^{tw}(H)$-sistema incoherente $(g_*, J_g, \theta(g, h))_{g,h \in Out^{Tw}(H)}$ y formemos $\alpha : Out^{Tw}(H)^{\times 3} \longrightarrow G_c(H)$ por:

$$\alpha(g, h, k) := g_*(\theta(h, k))\theta(g, hk)\theta(gh, k)^{-1}\theta(g, h)^{-1} \tag{2.19}$$

Proposición 61. *El mapa α define un 3-cocíclo en $Out^{Tw}(H)$ con coeficientes en $G_c(H)$.*

Demostración. Recordemos que $\theta(g, h)$ define un isomorfismo entre $((gh)_*, J_{gh})$ y $(g_*, J_g) \circ (h_*, J_h)$. Así el elemento α hace el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
g_* \circ h_* \circ k_* \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[d, "\theta(g,h)^{-1} \otimes id_{k_*}"'] & & g_* \circ h_* \circ k_* \arrow[d, "id_{g_*} \otimes \theta(h,k)"] \\
(gh)_* \circ k_* \arrow[r, "\theta(gh,k)^{-1}"] & (ghk)_* \arrow[r, "\theta(g,hk)"] & g_* \circ (hk)_*
\end{tikzcd}$$

Entonces tenemos que α es un automorfismo de $g_* \circ h_* \circ k_*$, entonces por proposición 59, tenemos que $\alpha \in G_c(H)$. ■

La siguiente proposición describe la relación que hay entre sistemas cruzados incoherentes y entre sus 3-cocíclos asociados. También muestra cómo dado un 3-cocíclo en $H^3(Out^{Tw}(H), G_c(H))$ podemos formar encontrar un sistema cruzado incoherente que tendrá asociado dicho 3-cocíclo.

Proposición 62. *Sean $(g_*, J_g, \theta(g,h))_{g,h\in Out^{Tw}(H)}$ un sistema incoherente y α el 3-cocíclo asociado, entonces:*

1. *Si $(g_*, J_g, \theta'(g,h))_{g,h\in Out^{Tw}(H)}$ es otro sistema incoherente con 3-cocíclo asociado α', entonces α y α' son cohomólogos.*
2. *Si α' es un 3-cocíclo cohomólogo a α, entonces existe un $Out^{Tw}(H)$-sistema cruzado $(g_*, J_g, \theta'(g,h))_{g,h\in Out^{Tw}(H)}$ que tiene a α' como 3-cocíclo asociado.*
3. *Sea $\{(g'_*, J_{g'})\}_{g'\in Out^{Tw}(H)}$ una familia de homomorfismos torcidos, tales que $\overline{(g'_*, J_{g'})} = g$ para todo $g \in Out^{Tw}(H)$, entonces el sistema $(g'_*, J_{g'}, \theta'(g,h))_{g,h\in Out^{Tw}(H)}$ es un sistema cruzado incoherente con 3-cocíclo asociado α.*

Demostración.

1. Se cumple por el corolario 60. Pues $\alpha\alpha'^{-1} = g_*(\theta(h,k))\theta(g,hk)\theta(gh,k)^{-1}\theta(g,h)^{-1}(g_*(\theta'(h,k))$ $\theta'(g,hk)\theta'(gh,k)^{-1}\theta'(g,h)^{-1})^{-1}$, así cada término pertenece a $G_c(H)$ y así $\alpha\alpha' \in G_c(H)$.
2. Como α y α' son cohomólogos, existe $s : Out^{Tw}(H) \times Out^{Tw}(H) \longrightarrow G_c(H)$ tal que $\alpha\delta(s) = \alpha'$. Podemos además tomar s tal que $s(g,e) = s(e,g) = 1$. Entonces definamos $\theta'(g,h) = \theta(g,h)s(g,h)$. Veamos que $(g_*, J_g, \theta'(g,h))_{g,h\in Out^{Tw}(H)}$ es un Out^{Tw}-sistema cruzado incoherente:

   - $\epsilon(\theta'(g,h)) = \epsilon(\theta(g,h)s(g,h)) = 1$.
   - $\theta'(g,h)(gh)_*(a) = \theta(g,h)s(g,h)(gh)_*(a) = \theta(g,h)(gh)_*(a)s(g,h) = g_*(h_*(a))\theta'(g,h)$, ya que $s(g,h) \in G_c(H)$.
   - $\theta'(e,g) = \theta(e,g)s(e,g) = 1 = \theta(g,e)s(g,e) = \theta'(g,e)$. Ya que s es normalizada.
   - $\Delta(\theta'(g,h))J_{gh} = \Delta(\theta(g,h)s(g,h))J_{gh} = \Delta(\theta(g,h))(s(g,h)\otimes s(g,h))J_{gh} = \Delta(\theta(g,h))$ $J_{gh}(s(g,h)\otimes s(g,h)) = J_g(g_*\otimes g_*)J_h(\theta(g,h)\otimes\theta(g,h))(s(g,h)\otimes s(g,h)) = J_g(g_*\otimes g_*)J_h(\theta'(g,h)\otimes\theta'(g,h))$.

   Finalmente veamos qué 3-cocíclo asociado tiene este sistema cruzado incoherente que acabamos de definir:

$$\begin{aligned}
\beta(g,h,k) &= g_*(\theta'(h,k))\theta'(g,hk)\theta'(gh,k)^{-1}\theta'(g,h)^{-1}\\
&= g_*(\theta(h,k)s(h,k))\theta(g,hk)s(g,hk)s(gh,k)^{-1}\\
&\quad\ \theta(gh,k)^{-1}s(g,h)^{-1}\theta(g,h)^{-1}\\
&= g_*(\theta(h,k))\theta(g,hk)\theta(gh,k)^{-1}\theta(g,h)^{-1}g_*(s(h,k))s(g,hk)\\
&\quad\ s(gh,k)^{-1}s(g,h)^{-1}\\
&= \alpha(g,h,k)\delta(s)\\
&= \alpha'(g,h,k)
\end{aligned}$$

3. Como tenemos que $\overline{(g'_*, J_{g'})} = \overline{(g_*, J_g)} = g$ para todo $g \in Out^{Tw}(H)$. Entonces existe una función $t : G \longrightarrow U(A)$ tal que t_g define un homomorfismo $t_g : (g_*, J_g) \longrightarrow (g'_*, J_{g'})$ para todo $g \in Out^{Tw}(H)$. Definamos $\theta'(g,h)t_{gh} = t_g g_*(t_h)\theta(g,h)$. Así, $(g'_*, J_{g'}, \theta'(g,h))_{g,h\in Out^{Tw}(H)}$ es un Out^{Tw}-sistema cruzado incoherente. Además podemos verificar que con esta definición,

$$g'_*(\theta'(h,k))\theta'(g,hk)t_{ghk} = \alpha(g,h,k)\theta'(g,h)\theta'(gh,k)t_{ghk}$$

∎

Con las dos proposiciones 61 y 62 acabamos de probar el siguiente teorema:

Teorema 63. *Sea $(g_*, J_g, \theta(g,h))_{g,h\in Out^{Tw}(H)}$ un $Out^{Tw}(H)$-sistema cruzado incoherente. Entonces α define un 3-cocíclo en $Out^{Tw}(H)$ con valores en $G_c(H)$ y la clase de cohomología de α no depende del $Out^{Tw}(H)$-sistema cruzado incoherente.*

Notemos que dado un G-sistema cruzado $(g_*, \theta(g,h), J_g)_{g,h\in G}$ induce un homomorfismo de grupos $\pi : G \longrightarrow Out^{Tw}(H) : g \mapsto \overline{(g_*, J_g)}$. Decimos además que π es **realizable** si existe un G-producto cruzado tal que el homomorfismo de grupos inducido sea π.

Cualquier homomorfismo de grupos $\pi : G \longrightarrow Out^{Tw}(H)$ induce una estructura de G-módulo sobre $G_c(H)$ y un morfismo $\pi^* : H^3(Out^{Tw}(H), G_c(G)) \longrightarrow H^3(G, G_c(H)) : \beta \mapsto \beta \circ \pi^{\times 3}$

Definición 64. *Decimos que dos G-sistemas cruzados $(g_*, \theta(g,h), J_g)_{g,h\in G}$ y $(g'_*, \theta'(g,h), J_{g'})_{g,h\in G}$ son* ***equivalentes*** *si existe una mapa $t : G \longrightarrow U(H)$ tal que:*

(i) $t(e) = 1$.

(ii) *Cada t_g define un morfismo $t_g : (g_*, J_g) \longrightarrow (g'_*, J_{g'})$ en $Aut^{Tw}(H)$. Más precísamente $g'_*(h) = \phi_{t_g} g_*(h)$, donde $\phi_{t_g}(a) = t_g a t_g^{-1}$, para todo $a \in H$ y $h \in G$.*

(iii) *$\theta'(g,h)t_{gh} = t_g g_*(t_h)\theta(g,h)$, para todo $h, g \in G$.*

Proposición 65. *Sea $(g_*, \theta(g,h), J_g)_{g,h\in G}$ un G-sistema cruzado incoherente. Entonces se cumplen las siguientes propiedades:*

1. *Sea $(g'_*, J_{g'})$ un conjunto de automorfismos torcidos de H, tal que $\overline{(g'_*, J_g)} = \overline{(g_*, J_g)}$ en $Out^{Tw}(H)$ para todo $g \in G$, entonces existe un G-sistema cruzado $(g'_*, \theta'(g,h), J_{g'})_{g,h\in G}$ equivalente a $(g_*, \theta(g,h), J_g)_{g,h\in G}$.*

2. *Si $\beta \in Z^2(G, G_c(H))$ es un 2-cocíclo entonces $(g_*, \theta(g,h)\beta(g,h), J_g)_{g,h\in G}$ es otro G-sistema cruzado. Más aún, si $\beta, \beta' \in Z^2(G, G_c(H))$ son dos cocíclos, entonces los G-sitemas cruzados $(g_*, \theta(g,h)\beta(g,h), J_g)_{g,h\in G}$ y $(g_*, \theta(g,h)\beta'(g,h), J_g)_{g,h\in G}$ son equivalentes si y sólo si β y β' son cohomólogos.*

3. *Si $(g_*, \theta(g,h), J_g)_{g,h\in G}$ y $(g_*, \theta'(g,h), J_g)_{g,h\in G}$ son dos G-sistemas cruzados equivalentes, entonces existe un único $\beta \in Z^2(G, G_c(H))$ tal que $\theta'(g,h) = \theta(g,h)\beta(g,h)$.*

Demostración.

1. Tenemos que $\overline{(g'_*, J_g)} = \overline{(g_*, J_g)} = g$ en $Out^{Tw}(H)$ para todo $g \in G$. Entonces existe una función $t : G \longrightarrow U(G)$ tales que $t(g)$ define un morfismo $t(g) : (g_*, J_g) \longrightarrow (g'_*, J_{g'})$ para todo $g \in Out^{Tw}(H)$. Así, definamos $\theta'(g,h) = t_g g_*(t_h)\theta(g,h)t_{gh}^{-1}$. Luego por la parte (iii) de la proposición 62, tenemos que $(g'_*, \theta'(g,h), J_{g'})_{g,h\in G}$ es un G-sistema cruzado y por definición es equivalente a $(g_*, \theta(g,h), J_g)_{g,h\in G}$.

2. Podemos verificar que $(g_*, \theta(g,h)\beta(g,h), J_g)_{g,h\in G}$ es un G-sistema cruzado ya que como β es un 2-cocíclo, $\theta\beta$ cumple las condiciones para que tengamos un G-sistema cruzado.

Por otro lado sabemos que los sistemas $(g_*, \theta(g,h)\beta(g,h), J_g)_{g,h\in G}$ y $(g_*, \theta(g,h)\beta'(g,h), J_g)_{g,h\in G}$ son equivalentes si y sólo si existe una función $t : G \longrightarrow U(H)$ que cumple:

(i) $t(e) = 1$.

(ii) Cada t_g define un morfismo $t_g : (g_*, J_g) \longrightarrow (g'_*, J_{g'})$ en $Aut^{Tw}(H)$.

(iii) $\theta(g,h)\beta'(g,h)t_{gh} = t_g g_*(t_h)\theta(g,h)\beta(g,h)$, para todo $h, g \in G$.

Notemos que si t_g define un morfismo de automorfismos torcidos (g_*, J_g) y $(g'_*, J_{g'})$ entonces usando la proposición 59 tenemos que $t(g) \in G_c(H)$ para todo $g \in G$. Así podemos reescribr la condición (iii) como:

$$\beta'(g,h)t_{gh} = t_g g_*(t_h)\beta(g,h)$$

Es decir que tenemos que $t : G \longrightarrow G_c(H)$ y $\beta' = \delta(t)\beta$.

3. Recordemos que el elemento $\theta'(g,h)\theta^{-1}(g,h)$ define un automorfismo de $((gh)_*, J_{gh})$ así por el corolario 60 $\theta'(g,h)\theta^{-1}(g,h) \in G_c(H)$ para todo $g, h \in G$, por lo tanto existe una única función $\beta : G \times G \longrightarrow G_c(H)$ tal que $\theta'(g,h) = \theta(g,h)\beta(g,h)$ y como θ y θ' son 2-cocíclos no abelianos, β es un 2-cocíclo.

■

Teorema 66. *Un homomorfismo de grupos $\pi : G \longrightarrow Out^{Tw}(H)$ es realizable si y sólo si $\pi^*([\alpha]) = 0$ donde $[\alpha] \in H^3(Out^{Tw}(H), G_c(H))$ es la clase de cohomología definida en el Teorema 63.*

Demostración. Sea $(g_*, \theta(g,h)\beta(g,h), J_g)_{g,h\in G}$ el G-sistema cruzado que realiza a π. Entonces tenemos que $\overline{(g_*, J_g)} = \pi(g)$ para todo $g \in G$ y además

$$\alpha(\pi(g), \pi(h), \pi(k)) = g_*(\theta(h,k))\theta(g,hk)\theta(gh,k)^{-1}\theta(g,h)^{-1} = 1$$

Por tanto la clase de cohomología de $\pi^*([\alpha]) = 0$.

Recíprocamente, sea $\pi : G \longrightarrow Out^{Tw}(H)$ un homomorfismo de grupos tal que $\pi^*([\alpha]) = 0$. Sea $(g_*, \theta(g,h)\beta(g,h), J_g)_{g,h\in Out^{Tw}(H)}$ un $Out^{Tw}(H)$-sistema cruzado incoherente, así la clase de cohomología del 3-cocíclo

$$\begin{aligned}\alpha \circ \pi^{\times 3}(\pi(g), \pi(h), \pi(k)) = {} & \pi(g)_*(\theta(\pi(h), \pi(k)))\theta(\pi(g), \pi(hk)) \\ & \theta(\pi(gh), \pi(k))^{-1}\theta(\pi(g), \pi(h))^{-1}\end{aligned}$$

Es cero, es decir que existe una función $t : G \times G \longrightarrow G_c(H)$ tal que $\delta(t) = \alpha \circ \pi^{\times 3}$. Entonces podemos verificar que $((\pi(g))_*, \theta(\pi(g), \pi(h))t(g,h)^{-1}, J_{\pi(g)})_{g,h\in G}$ es un G-sistema cruzado que realiza a π ■

Capítulo 3

Ejemplos

En este capítulo, damos a conocer algunos ejemplos en los cuales desarrollaremos explícitamente la teoría que hemos estudiado en el capítulo anterior. Aquí veremos algunas propiedades y aplicaciones de resultados probados anteriormente.

La mayoría de los resultados aquí presentados son ideas del autor y su orientador. Es por ello que no se cita un artículo o un libro en particular, salvo en algunas partes donde se usan algunas cuentas que se han hecho en algunos artículos como en el artículo [Sch95].

3.1. El álgebra $\mathcal{O}_k(G)$

Sean G un grupo y k un campo. Entonces, como vimos en el primer capítulo podemos dotar a $k[G]$ de estructura de coálgebra con $\Delta(x) = x \otimes x$ y $\epsilon(x) = 1$ para todo $x \in G$. Ahora formamos el ágebra dual $O_k(G) := k[G]^*$, el álgebra de funciones de G con valores en k con operación producto puntual de funciones. Es decir, si $f, g \in \mathcal{O}_k(G)$ y $x \in G$

$$(fg)(x) = f(x)g(x)$$

Así como k es un campo, $\mathcal{O}_k(G)$ resulta ser álgebra conmutativa.

Recordemos que $k[G]$ tiene como base a G y así $k[G] \otimes k[G]$ tiene base $\{x \otimes y | x, x \in G\}$. Entonces podemos formar el isomorfismo $\varphi : k[G] \otimes k[G] \longrightarrow k[G \times G] : x \otimes y \mapsto (x, y)$. Así tenemos en el espacio dual $\mathcal{O}_k(G) \otimes \mathcal{O}_k(G) \cong \mathcal{O}_k(G \times G)$.

Ahora podemos dar a $\mathcal{O}_k(G)$ de estructura de coálgebra con $\Delta : \mathcal{O}_k(G) \longrightarrow \mathcal{O}_k(G \times G)$ donde $\Delta(f)(x, y) = f(xy)$ y $\epsilon : \mathcal{O}_k(G) \longrightarrow k : f \mapsto f(e)$, para todo $f \in \mathcal{O}_k(G)$ y $x, y \in G$.

Por otra parte veamos si $k[G]$ tiene antípoda S, se debe cumplir que para todo $x \in G$

$$xS(x) = S(x)x = \epsilon(x)1 = 1,$$

es decir, $S(x) = x^{-1}$ para todo $x \in G$. Así $k[G]$ es de hecho un álgebra de Hopf. Entonces por la proposición 12, tenemos que $\mathcal{O}_k(G)$ es un álgebra de Hopf con antípoda $S^* : \mathcal{O}_k(G) \longrightarrow \mathcal{O}_k(G)$ que para $f \in \mathcal{O}_k(G)$ y $x \in G$, $S^*(f)(x) = f(S(x)) = f(x^{-1})$.

Notación 67. *En este capítulo, la letra e representa el elemento neutro del grupo G; 1 la unidad del campo k, 1_O la unidad de $\mathcal{O}_k(G)$ y $k^\times$ las unidades de k, es decir $k^time s = k - \{0\}$.*

- Una base para $\mathcal{O}_k(G)$ esta dada por $\{\delta_x | x \in G\}$ donde δ_x es de Kronecker. Es decir que

$\delta_x(x) = 1$ y $\delta_x(y) = 0$ para todo $y \neq x$. Así, dada una función $f \in \mathcal{O}_k(G)$ y $x \in G$,

$$f(x) = \sum_{y \in G} f(y)\delta_y.$$

- En particular, para Δ tenemos que

$$\Delta(f) = \sum_{x,y \in G} f(xy)\delta_x \otimes \delta_y$$

$$\Delta(\delta_x) = \sum_{y,z \in G} \delta_x(yz)\delta_y \otimes \delta_z$$

o más precísamente,

$$\Delta(\delta_x) = \sum_{yz=x} \delta_y \otimes \delta_z$$

- Podemos expresar al elemento unidad de $\mathcal{O}_k(G) \otimes \mathcal{O}_k(G)$ como $1_O \otimes 1_O = \sum_{x,y \in G} \delta_x \otimes \delta_y$.

3.2. Automorfismos torcidos de $\mathcal{O}_k(G)$

Consideremos un elemento $J \in U(\mathcal{O}_k(G) \otimes \mathcal{O}_k(G)) \cong \{f : G \times G \longrightarrow k^\times\}$. J esta determinado por una función $\omega : G \times G \longrightarrow k^\times$ de la forma

$$J = \sum_{x,y \in G} \omega(x,y)\delta_x \otimes \delta_y.$$

Estudiemos la condición 2.2 de homomorfismos torcidos:

$$\begin{aligned}
1_O \otimes 1_O &= (\epsilon \otimes id)(J) \\
&= (\epsilon \otimes id)(\sum_{x,y \in G} \omega(x,y)\delta_x \otimes \delta_y) \\
&= \sum_{x,y \in G} \omega(x,y)\epsilon(\delta_x) \otimes \delta_y \\
&= \sum_{x,y \in G} \omega(x,y)\delta_x(e) \otimes \delta_y \\
&= \sum_{y \in G} \omega(e,y)1 \otimes \delta_y
\end{aligned}$$

es decir, $\omega(e,y) = 1$ para todo $y \in G$. Ahora, veamos la segunda parte de la condición 2.2.

$$\begin{aligned}
1_O \otimes 1_O &= (id \otimes \epsilon)(J) \\
&= (id \otimes \epsilon)(\sum_{x,y \in G} \omega(x,y)\delta_x \otimes \delta_y) \\
&= \sum_{x,y \in G} \omega(x,y)\delta_x \otimes \epsilon(\delta_y) \\
&= \sum_{x,y \in G} \omega(x,y)\delta_x \otimes \delta_y(e) \\
&= \sum_{x \in G} \omega(x,e)\delta_x \otimes 1
\end{aligned}$$

por lo tanto tenemos que $\omega(e,x) = \omega(x,e) = 1$ para todo $x \in G$.

La condición 2.1 de homomorfismos torcidos nos da la siguiente información:

$$\begin{aligned}(\Delta \otimes id)(J)(J \otimes 1_O) &= (\sum_{g,h\in G} \omega(g,h)\Delta(\delta_g) \otimes \delta_h)(\sum_{s,t\in G} \omega(s,t)\delta_s \otimes \delta_t \otimes 1_O)\\ &= \sum_{g,h\in G}\sum_{s,t\in G}\sum_{ab=g} \omega(g,h)\omega(s,t)(\delta_a \otimes \delta_b \otimes \delta_h)(\delta_s \otimes \delta_t \otimes 1_O)\\ &= \sum_{h\in G}\sum_{ab=g} \omega(ab,h)\omega(a,b)\delta_a \otimes \delta_b \otimes \delta_h\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(id \otimes \Delta)(J)(1_O \otimes J) &= (\sum_{g,h\in G} \omega(g,h)\delta_g \otimes \Delta(\delta_h)(1_o \otimes \sum_{s,t\in G} \omega(s,t)\delta_s \otimes \delta_t)\\ &= (\sum_{g,h\in G}\sum_{xy=h} \omega(g,h)\delta_g \otimes \delta_x \otimes \delta_y)(1_o \otimes \sum_{s,t\in G} \omega(s,t)\delta_s \otimes \delta_t)\\ &= \sum_{g\in G}\sum_{xy=h} \omega(g,xy)\omega(x,y)\delta_g \otimes \delta_x \otimes \delta_y\end{aligned}$$

Así, igualando los términos de los últimos resultados y cambiando el nombre de las variables $a := g$, $b = x$ y $h = y$ tenemos

$$\omega(gx,y)\omega(g,x) = \omega(g,xy)\omega(x,y)$$

es decir, ω es un 2-cocíclo, $\omega \in Z^2(G,k^\times)$.

Por último, consideremos $F \in Aut(\mathcal{O}_k(G))$, luego, como $\mathcal{O}_k(G)$ es un álgebra conmutativa, las condiciones 2.3 y 2.4 estan dadas por

$$\epsilon(F(f)) = \epsilon(f)$$

$$\Delta(F(f)) = (F \otimes F)(\Delta(f))$$

Para todo $f \in O_k(G)$. Es decir que las condiciones 2.3 y 2.4 hacen de F un automorfismo de álgebras de Hopf.

Nota 68.

1. *$Aut(\mathcal{O}_k(G)) \cong Aut(G)$. Recordemos que una base para $\mathcal{O}_k(G)$ es $\{\delta_g | g \in G\}$. Entonces, ese isomorfismo está dado por $\alpha : Aut(G) \longrightarrow Aut(\mathcal{O}_k(G))$, donde $\alpha(F)(\delta_g) = \delta_{F(g)}$ para todo $F \in Aut(G)$ y $g \in G$. Pues justamente como F es automorfismo, $\alpha(F)$ está bien definido y es homomorfismo. Se puede verificar que es de hecho un isomorfismo.*

2. *Los automorfismos torcidos de $\mathcal{O}_k(G)$ están en correspondencia biyectiva con parejas (ω, F), donde $F \in Aut(G)$ y $\omega \in Z^2(G,k^\times)$. Bajo esta correspondencia, el producto de automorfismos torcidos de $\mathcal{O}_k(G)$, (ω, F) y (ω', F') está dado por:*

$$(\omega, F) \circ (\omega', F') = (\omega \quad {}^F(\omega'), F \circ F')$$

donde ${}^F(\omega')(x,y) = \omega'(F(x), F(y))$.

Con el estudio que acabamos de hacer concluimos que:

Proposición 69.

$$Aut^{Tw}(\mathcal{O}_k(G)) \cong Z^2(G,k^\times) \rtimes Aut(G).$$

Ahora, estudiaremos los isomorfismos entre dos automorfismos torcidos (ω, F) y (ω', F'). Sea $c \in U(\mathcal{O}_k(G))$, tal que $\epsilon(c) = 1$, $cF = F'c$ y $\Delta(c)J_\omega = J_{\omega'}(c \otimes c)$. Como $\mathcal{O}_k(G)$ es un álgebra conmutativa, las dos primeras condiciones son:

$$c(e) = 1 \tag{3.1}$$
$$F = F' \tag{3.2}$$

Ahora, para la tercera condición, tenemos que

$$\begin{aligned}
\Delta(c)J_\omega &= J_{\omega'}(c \otimes c)\\
\Delta(c)(c^{-1} \otimes c^{-1}) &= J_{\omega'}J_\omega^{-1}\\
(\sum_{g,h\in G} c(gh)\delta_g \otimes \delta_h)(\sum_{g\in G} c(g)^{-1}\delta_g) \otimes (\sum_{h\in G} c(h)^{-1}\delta_h) &= \sum_{g,h\in G} \omega'(g,h)\omega(g,h)^{-1}\delta_g \otimes \delta_h\\
\sum_{g,h\in G} c(gh)c(g)^{-1}c(h)^{-1}\delta_g \otimes \delta_h &= \sum_{g,h\in G} \omega'(g,h)\omega(g,h)^{-1}\delta_g \otimes \delta_h
\end{aligned}$$

Igualando los coeficientes de la última igualdad tenemos que $\omega\delta(c) = \omega'$. Es decir que ω y ω' son cohomólogas. Así de esto último y de la igualdad 3.2. Tenemos:

Proposición 70. *Dados (ω, F) y (ω', F') dos automorfismos torcidos de $\mathcal{O}_k(G)$. Ellos son ismomorfos si y sólo si $[\omega] = [\omega']$ y $F = F'$.*

3.3. Productos cruzados de $\mathcal{O}_k(G)$

En esta sección E es un grupo arbitrario y con él estudiaremos E-sistemas cruzados de $\mathcal{O}_k(G)$.

Recordemos que $Aut^{Tw}(\mathcal{O}_k(G)) = Z^2(G, k^\times) \rtimes Aut(G)$. Para definir un E-sistema cruzado, necesitamos dos transformaciones lineales $\tau : E \longrightarrow Aut^{Tw}(\mathcal{O}_k(G))$ y $\theta : E \times E \longrightarrow Fun(G, k^\times)$, donde $Fun(G, k^\times)$ es el espacio de funciones de G en las unidades de k.

Notemos que τ se puede representar como una pareja (ω, τ) con $\tau : E \longrightarrow Aut(G)$ y $\omega : E \times G \times G \longrightarrow k^\times$, tal que $\omega(t, -, -) \in Z^2(G, k^\times)$ para todo $t \in E$. De forma análoga, θ también se puede representar como una función $\theta : G \times E \times E \longrightarrow k^\times$, donde

$$\begin{aligned}
\omega(g,h) &= \sum_{t\in E} \omega(t,g,h)\delta_t\\
\theta(s,t) &= \sum_{g\in G} \theta(g,s,t)\delta_g
\end{aligned}$$

Para la condición 2.5, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\epsilon(\theta(r,s)) &= 1,\\
\sum_{g\in G} \epsilon(\theta(g,r,s)\delta_g) &= 1,\\
\theta(e,r,t) &= 1, \quad \forall r,s \in E
\end{aligned}$$

Ahora, la condición 2.6 para $g, h \in G$, nos dice

$$\begin{aligned}
\tau(e) &= id_G\\
\omega(e,g,h) &= 1
\end{aligned}$$

La ecuación 2.9, en este caso, para $g \in G$, $r \in E$ es:

$$\begin{aligned}
1_O &= \sum_{g\in G} \theta(g,e,r)\delta_g = \sum_{g\in G} \theta(g,r,e)\delta_g\\
1 &= \theta(g,e,r) = \theta(g,r,e)
\end{aligned}$$

En la condición 2.7, como $\mathcal{O}_k(G)$ es conmutativa, es de la siguiente forma para $r, s \in E$

$$\theta(r,s)\tau(rs) = \tau(r)\tau(s)\theta(r,s)$$
$$\tau(rs) = \tau(r)\tau(s)$$

Lo que nos quiere decir que τ es un homomorfismo de grupos.

Usando la notación $r(g) := \tau(r)(g)$, la condición 2.8 para $r, s, t \in E$, es precísamente,

$$\theta(r,s)\theta(rs,t) = r(\theta(s,t))\theta(r,st)$$
$$\sum_{g,h\in G} \theta(g,r,s)\theta(h,rs,t)\delta_g\delta_h = \sum_{x,y\in G} \theta(x,s,t)\theta(y,r,st)\delta_{r(x)}\delta_y$$
$$\sum_{g\in G} \theta(g,r,s)\theta(g,rs,t) = \sum_{g\in G} \theta(r^{-1}(g),s,t)\theta(g,r,st)\delta_g$$

Igualando los coeficientes de la última igualdad tenemos que:

$$\theta(g,r,s)\theta(g,rs,t) = \theta(r^{-1}(g),s,t)\theta(g,r,st)$$

Es decir que $\theta(g,-,-) \in Z^2(E, Fun(G,k^\times))$ para todo $g \in G$, donde E actúa en $Fun(G,k^\times)$ de la forma:

$$r \cdot f(g) = f(\tau_1^{-1}(r)(g)),$$

para todo $g \in G$, $r \in E$ y $f \in Fun(G,k^\times)$.

Ahora, analizando la condición 2.10, notemos que $J_s = \sum_{g,h\in G} \omega(r,g,h)\delta_g \otimes \delta_h$, para todo $s \in E$.

$$\Delta(\theta(r,s))J_{rs} = \sum_{x,y\in G} \theta(xy,r,s)\omega(r,x,y)\delta_x \otimes \delta_y$$

Y por otra lado

$$\begin{aligned} J_r[(r\otimes r)(J_s)](\theta(r,s)\otimes\theta(r,s)) &= J_r(\sum_{g,h\in G} \omega(s,g,h)\delta_{r(g)}\otimes\delta_{r(h)})(\theta(r,s)\otimes\theta(r,s)) \\ &= \sum_{x,y\in G} \omega(r,x,y)\omega(s,r^{-1}(x),r^{-1}(y))\theta(x,r,s)\theta(y,r,s)\delta_x\otimes\delta_y \end{aligned}$$

Ahora, igualando las dos ecuaciones y usando que $k^\times$ es conmutativa, tenemos que:

$$\omega(r,x,y)\omega(s,r^{-1}(x),r^{-1}(y))\theta(x,r,s)\theta(y,r,s) = \theta(xy,r,s)\omega(r,x,y)$$

$$\omega(s,r^{-1}(x),r^{-1}(y))\theta(x,r,s)\theta(y,r,s) = \theta(xy,r,s)$$

Así con el estudio anterior podemos definir bajo qué condiciones $\mathcal{O}_k(G)$ es un E-sistema cruzado para E un grupo arbitrario.

Definición 71. *Sea E un grupo. Decimos que un E-sistema cruzado para $\mathcal{O}_k(G)$ es una tripla (τ,ω,θ), donde $\tau : E \longrightarrow Aut(G)$, $\omega : E\times G\times G \longrightarrow k^\times$ tal que $\omega(s,-,-) \in Z^2(G,k^\times)$ para todo $s \in E$ y $\theta : G\times E\times E \longrightarrow k^\times$ que cumplen las siguientes condiciones:*

1. *$\theta(e,r,t) = 1$.*
2. *$\tau(e) = id_G$ y $\omega(e,g,h) = 1$.*
3. *τ es un homomorfismo de grupos.*

4. $\theta(g,-,-) \in Z^2(E, Fun(G,k^\times))$*, donde* E *actúa en* $Fun(G,k^\times)$ *de la forma:*

$$r \cdot f(g) = f(\tau_1^{-1}(r)(g))$$

5. $1 = \theta(g,e,r) = \theta(g,r,e)$.

6. $\omega(s, r^{-1}(x), r^{-1}(y))\theta(x,r,s)\theta(y,r,s) = \theta(xy,r,s)$.

Para todo $r,s,t \in E$*,* $x,y,g,h \in G$ *y* $f \in Fun(G,k^\times)$*.*

Así, construimos $\mathcal{O}_k(G)\#E$ con producto, coproducto y antípoda definidos en la base $\{\delta_g\#r | g \in G, r \in E\}$:

$$\begin{aligned}(\delta_g\#r)(\delta_h\#s) &= \delta_g\tau_1(r)(\delta_h)\theta(r,s)\#rs \\ &= \delta_g\delta_{r(h)}(\sum_{x\in G}\theta(x;r,s)\delta_x)\#rs \\ &= \sum_{x\in G}\theta(x;r,s)\delta_g\delta_{r(h)}\delta_x\#rs \\ &= \delta_g\delta_{r(h)}\theta(r(h),r,s)\#rs,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta(\delta_g\#r) &= \sum_{xy=g}\sum_{x',y'\in G}\omega(r,x',y')\delta_x\delta_{x'}\#r\otimes\delta_y\delta_{y'}\#r \\ &= \sum_{xy=g}\omega(r,x,y)\delta_x\#r\otimes\delta_y\#r,\end{aligned}$$

$$S(\delta_g\#r) = \theta(g^{-1},r^{-1},r)\omega(r,g,g^{-1})^{-1}\delta_{r(g^{-1})}\#r^{-1}.$$

Ejemplo 72. ***(Doble de Drinfeld de un grupo finito)***

Sean G *un grupo finito, actuando sobre sí mismo por conjugación y* $H = \mathcal{O}_k(G)$*. Consideremos el sistema cruzado dado por* $\theta : G\times G \longrightarrow U(H)$*,* $\theta(g,h) = 1$*;* $\tau : G \longrightarrow Aut(G)$*, donde* $\tau(g)(h) = ghg^{-1}$ *y* $\omega : G^{\times 3} \longrightarrow k^\times$*, con* $\omega(g,h,k) = 1$ *para todo* $g,h,k \in G$*. Definimos* $D(G) := \mathcal{O}_k(G)\#G$*, con base* $\{\delta_x\#g | g,h \in G\}$*, con producto, coproducto y antípoda dados por:*

$$\begin{aligned}(\delta_x\#g)(\delta_y\#h) &= \delta_x g(\delta_y)\theta(g,h)\#gh \\ &= \delta_x\delta_{gyg^{-1}}\#gh\end{aligned}$$

$$\Delta(\delta_g\#h) = \sum_{xy=g}\delta_x\#r\otimes\delta_y\#r$$

$$S(\delta_g\#h) = \delta_{ghg^{-1}}\#g^-1$$

A está álgebra de Hopf $D(G)$ *se le conoce como el doble de Drinfeld del grupo* G*.*

3.4. Obstrucción al sistema cruzado

En la sección 2.4 definimos los automorfismos interiores torcidos para un álgebra de Hopf H. Ahora, considerando a $O_k(G)$, tenemos que $(\omega, F) \in Inn^{Tw}(\mathcal{O}_k(G))$ si y sólo si existe $f \in U(\mathcal{O}_k(G))$ tal que

$$F(x) = fxf^{-1},\ \forall x \in \mathcal{O}_k(G) \quad y \quad J_\omega = \Delta(f^{-1})(f \otimes f)$$

Como el álgebra es conmutativa, la primera condición nos dice que $F(x) = x$ para todo $x \in \mathcal{O}_k(G)$, es decir que $F = id_{\mathcal{O}_k(G)}$. Para la segunda condición veamos:

$$\begin{aligned}\sum_{g,h\in G} \omega(g,h)\delta_g \otimes \delta_h &= (\sum_{g,h\in G} f^{-1}(gh)\delta_g \otimes \delta_h)(\sum_{x\in G} f(x)\delta_x \otimes \sum_{y\in G} f(y)\delta_y)\\ &= (\sum_{g,h\in G} f^{-1}(gh)\delta_g \otimes \delta_h)(\sum_{x,y\in G} f(x)f(y)\delta_x \otimes \delta_y)\\ &= \sum_{g,h\in G} f^{-1}(gh)f(g)f(h)\delta_x \otimes \delta_y\end{aligned}$$

Es decir que $\omega = \delta(f)$. Entonces $\omega \in B^2(G, k^\times)$. Así tenemos que:

$$Inn^{Tw}(\mathcal{O}_k(G)) = B^2(G, k^\times)$$

Así, podemos formar los automorfismos exteriores torcidos de $\mathcal{O}_k(G)$:

$$Out^{Tw}(\mathcal{O}_k(G)) = Aut^{Tw}(\mathcal{O}_k(G))/Inn^{Tw}(\mathcal{O}_k(G)) = H^2(G, k^\times) \rtimes Aut(G)$$

Por otra parte también necesitamos definir los elementos group-like de $\mathcal{O}_k(G)$. La condición de conmutatividad se tiene ya que el álgebra es conmutativa, la otra condición dice que si $f \in \mathcal{O}_k(G)$ entonces:

$$\Delta(f) = f \otimes f$$
$$\sum_{g,h\in G} f(gh)\delta_g \otimes \delta_h = \sum_{g,h\in G} f(g)f(h)\delta_g \otimes \delta_h$$

Es decir que $f(gh) = f(g)f(h)$, entonces f es además un homomorfismo de grupos.

$$G_c(\mathcal{O}_k(G)) := \{f \in U(\mathcal{O}_k(G)) | f \in Hom_{Gr}(G, k^\times)\}$$

Finalmente, consideremos $\tau : E \longrightarrow H^2(G, k^\times) \rtimes Aut(G)$. Un sistema incoherente, esta dado por $\tau : E \longrightarrow Aut(\mathcal{O}_k(G))$ y $\theta : E \times E \longrightarrow U(\mathcal{O}_k(G))$, o mas aun $\theta : E \times E \times E \longrightarrow k^\times$, donde $\theta(r, -, -) \in Z^2(G, k^\times)$ para todo $r \in E$ y $[\tau] = [\theta]$.

Así, se define el 3-cocíclo $\alpha : E^{\times 3} \longrightarrow G_c(\mathcal{O}_k(G))$, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\alpha(r,s,t) &= \tau_1(\theta(s,t))\theta(r,st)\theta(rs,t)^{-1}\theta(r,s)^{-1}\\ &= \tau_1(\sum_{x\in G}\theta(x;s,t)\delta_x)(\sum_{y\in G}\theta(y;r,st)\delta_y)(\sum_{y\in G}\theta(y;rs,t)^{-1}\delta_y)(\sum_{y\in G}\theta(y;r,s)^{-1}\delta_y)\\ &= \sum_{x\in G}\theta(r(x),s,t)\theta(x,r,st)\theta(x,rs,t)^{-1}\theta(x,r,s)^{-1}\delta_x\end{aligned}$$

Entonces, α define la obstrucción $[\alpha]$ y además una función para cada terna $(r, s, t) \in Out^{Tw}(\mathcal{O}_k(G))^{\times 3}$ dada por $\alpha(r, s, t) : G \to k^\times : g \mapsto \theta(r(g), s, t)\theta(g, r, st)\theta(g, rs, t)^{-1}\theta(g, r, s)^{-1}$.

3.5. El álgebra de Hopf $k[G]$

Sea H un álgebra de Hopf y $(J, F) \in Aut^{Tw}(H)$. Si en particular consideramos $J = 1 \otimes 1$. Las condiciones para que $(1 \otimes 1, F)$ sea un automorfismo torcido, son simplemente que F sea un automorfismo de álgebras de Hopf. Es decir que $Aut_{Hopf}(H) \subseteq Aut^{Tw}(H)$, por medio de la inclusión

$F \hookrightarrow (1 \otimes 1, F)$, para todo $f \in Aut_{Hopf}(H)$.

Así, tenemos que $f \in Inn(H) = Aut_{Hf}(H) \cap Inn^{Tw}(H)$ si y sólo si existe $c \in U(H)$ tal que $f(x) = cxc^{-1}$, para todo $x \in H$ y $\Delta(c)^{-1}c \otimes c = 1 \otimes 1$, o más precísamente, $\Delta(c) = c \otimes c$. Esta última condición nos dice que c es un group-like de H. Es decir que

$$Inn(H) = \{f \in Aut_{Hf}(H) | \exists c \in G(H), f(x) = cxc^{-1}\}$$

Entonces $Out(H) = Aut_{Hf}(H)/Inn(H)$.

Por otro lado, si tenemos $\tau' : E \longrightarrow Out(H)$ y $\theta' : E \times E \longrightarrow$, podemos escoger levantamientos $\tau : E \longrightarrow Aut_{Hf}(H)$ y $\theta : E \times E \longrightarrow U(H)$ respectivamente y ellos cumplen que

$$\tau(r)\tau(s) = \theta'(r,s)\tau(rs)$$

$$\theta'(r,s) = \tau(r)\tau(s)\tau(rs)^{-1}$$

Podemos así definir la obstrucción dada por la ecuación 2.19

$$\alpha(r,s,t) = r_*(\theta(s,t))\theta(r,st)\theta(rs,t)^{-1}\theta(r,s)^{-1}.$$

En particular, para $H = k[G]$, tenemos que

$$Aut_{Hf}(k[G]) \cong Aut_{Gr}(G) \subseteq Aut^{Tw}(k[G])$$

Recordemos que para todo $x \in G$, $\Delta(x) = x \otimes x$. Es decir que $G(k[G]) = G$. Luego,

$$Inn(k[G]) = \{f \in Aut_{Hf}(k[G]) | \exists c \in G, f(x) = cxc^{-1}\} = Inn(G),$$

$$G_c(k[G]) = Z(G).$$

En este caso α define un 3-cocíclo con valores en el centro del grupo G y recuperamos la teoría de extensiones del grupo G.

3.6. Álgebras de Taft

Sean k un campo algebraicamente cerrado de característica cero, $n \in \mathbb{Z}_{>1}$ y ξ una n-ésima raíz primitiva de la unidad en k. Definimos el álgebra de Taft $T_n(\xi)$ como el álgebra generada por los elementos g y x, sujetos a las relaciones

$$x^n = 0, \quad g^n = 1, \quad gx = \xi xg.$$

Así, $T_n(\xi)$ es un álgebra no conmutativa con base $\{x^i g^j | 0 \leq i, j \leq n-1\}$. Más aún, $T_n(\xi)$ es un álgebra de Hopf, con coproducto, counidad y antípoda definidas por:

$$\begin{matrix} \Delta(g) = g \otimes g \\ \Delta(x) = 1 \otimes x + x \otimes g \end{matrix}, \quad \begin{matrix} \epsilon(g) = 1 \\ \epsilon(x) = 0 \end{matrix}, \quad \begin{matrix} S(g) = g^{-1} \\ S(x) = -xg^{-1} \end{matrix}$$

Del lema probado en el artículo [Sch95, Quantum binomial formula] tenemos que:

$$\begin{aligned} \Delta(x^i g^j) &= \Delta(x)^i \Delta(g)^j \\ &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}_\xi (x \otimes g)^i (1 \otimes x)^{n-i} \Delta(g)^j \\ &= (x \otimes g)^n + (1 \otimes x)^n \Delta(g)^j \\ &= x^n \otimes g^n + 1 \otimes x^n \Delta(g)^j \\ &= 0 \end{aligned}$$

Es decir que los elementos group-like de esta álgebra son justamente

$$T_\xi(n) = \{g^i | i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}.$$

Debido a que x no conmuta con g, entonces esta álgebra no tiene elementos group-like centrales no triviales, es decir que $G_c(T_n(\xi)) = 1$ y por tanto en esta álgebra no hay obstrucción, es decir que todo sistema incoherente se levanta a un único sistema cruzado.

3.7. Grupos cíclicos

Sean $G = \langle \sigma \rangle$ con $\sigma^n = e$ y H un álgebra de Hopf. Dado un homomorfismo $\tau' : G \longrightarrow Out(H)$, podemos tomar un levantamiento $\tau : G \longrightarrow Aut(H)$ de τ', tal que $\tau(\sigma) = F$, para $F \in Aut(G)$ y $F^n \in Inn(H)$. Es decir que, existe $c \in G(H)$ tal que $F^n(x) = cxc^{-1}$ para todo $x \in H$.

Así, los sistemas incoherentes, están dados por parejas (F, c) y $\theta : G \times G \longrightarrow U(H)$ se define:

$$\theta(\sigma^i, \sigma^j) = \left\{ \begin{array}{cc} 1 & si \;\; i+j < n \\ c^{i+j-n} & si \;\; i+j \geq n \end{array} \right\}$$

Ahora, para calcular la obstrucción, tenemos

$$\begin{aligned} \alpha(\sigma^i, \sigma^j, \sigma^k) &= \sigma_*^i(\theta(\sigma^j, \sigma^k))\theta(\sigma^i, \sigma^{j+k})\theta(\sigma^{i+j}, \sigma^k)^{-1}\theta(\sigma^i, \sigma^j)^{-1} \\ &= F^i(\theta(\sigma^j, \sigma^k))\theta(\sigma^i, \sigma^j)^{-1}. \end{aligned}$$

Más precísamente,

$$\alpha(\sigma^i, \sigma^j, \sigma^k) = \left\{ \begin{array}{cc} c^{k-j} & si \;\; i = n \\ 1 & si \;\; i+k < n, i+j < n \\ c^{n-i-j} & si \;\; i+k < n, i+j \geq n \\ F^i(c^{i+k-n}) & si \;\; i+k \geq n, i+j < n \\ F^i(c^{i+k-n})c^{n-i-j} & si \;\; i+k \geq n, i+j \geq n \end{array} \right\}$$

Bibliografía

[Ade94] R. James Adem, Alejandro y Milgram. *Cohomology of finite groups*, volume 309 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1994. [9, 23]

[Bro94] Kenneth S. Brown. *Cohomology of groups*, volume 87 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1994. Corrected reprint of the 1982 original. [9, 15]

[Dav10] A. Davydov. Twisted automorphisms of Hopf algebras. In *Noncommutative structures in mathematics and physics*, pages 103–130. K. Vlaam. Acad. Belgie Wet. Kunsten (KVAB), Brussels, 2010. [25]

[Eil47] Saunders Eilenberg, Samuel y MacLane. Cohomology theory in abstract groups. ii. *Annals of Mathematics*, 48(2):326–341, 1947. [7]

[Gal12] Martín Galindo, César y Mombelli. Module categories over finite pointed tensor categories. *Selecta Math. (N.S.)*, 18(2):357–389, 2012. [25]

[Hil10] Michael John Hilgemann. *On finite-dimensional Hopf algebras and their classifications*. ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 2010. Thesis (Ph.D.)–Iowa State University. [-]

[Kas95] Christian Kassel. *Quantum groups*, volume 155 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1995. [9]

[Lyn48] Roger C. Lyndon. The cohomology theory of group extensions. *Duke Math. J.*, 15:271–292, 1948. [-]

[Mon93] Susan Montgomery. *Hopf algebras and their actions on rings*, volume 82 of *CBMS Regional Conference Series in Mathematics*. Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC, 1993. [-]

[NVO04] Constantin Năstăsescu and Freddy Van Oystaeyen. *Methods of graded rings*, volume 1836 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2004. [-]

[Rot09] Joseph J. Rotman. *An introduction to homological algebra*. Universitext. Springer, New York, second edition, 2009. [-]

[Sch95] Hans-Jürgen Schneider. *Lectures on Hopf algebras*, volume 31/95 of *Trabajos de Matemática [Mathematical Works]*. Universidad Nacional de Córdoba, Facultad de Matemática, Astronomía y Física, Córdoba, 1995. Notes by Sonia Natale. [9, 35, 42]

[Wei] Charles A. Weibel. *An introduction to homological algebra*, volume 38 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge. [9, 18]

[Yam02] Shigeru Yamagami. Polygonal presentations of semisimple tensor categories. *J. Math. Soc. Japan*, 54(1):61–88, 2002. [-]