

TEORÍA DE MORSE DISCRETA Y EQUIVARIANTE

Por

JUAN SEBASTIÁN OSORIO SALCEDO

TESIS

PRESENTADA PARA EL CUMPLIMIENTO PARCIAL DE LOS REQUISITOS

PARA OBTENER EL TÍTULO DE MÁSTER EN MATEMÁTICAS EN

LA UNIVERSIDAD DE LOS ANDES, 2013.

Índice general

Agradecimientos	4
Introducción	5
Capítulo 1. Preliminares	6
1.1. Función de Morse Discreta	7
1.2. Campo Vectorial Gradiente	14
Capítulo 2. Teoría de Morse discreta equivariante	16
2.1. CW-Complejos G -equivariantes	16
2.2. Morse Matching Generalizado	20
2.3. Colapsos Equivariantes a los complejos de Morse	23
Capítulo 3. Espacio de Árboles Filogenéticos	28
Capítulo 4. Shellings, EL-labelings y Teoría de Morse Discreta	38
4.1. Shellings	38
4.2. El orden parcial del conjunto de particiones de $[n]$	45
Capítulo 5. Ejemplos, Contraejemplos y Casos interesantes	51
5.1. Campos Vectoriales discretos.	51
5.2. Teoría de Morse Discreta Equivariante	55
5.3. Shellings, EL-Labelings y Teoría de Morse Discreta	59
Investigación a posteriori	60
Bibliografía	61

Agradecimientos

Agradezco a tantas personas en este espacio, que en verdad no tendría tanto papel y esto se convertiría en un libro de agradecimientos con un anexo en matemáticas. Pero aún así, agradezco a mi familia que siempre me ha apoyado y ha creído en todo lo que he hecho todo este tiempo, a Mauricio Velasco quien tuvo la paciencia de asesorarme y de dedicarme eternas reuniones de trabajo, a mis compañeros que me acompañaron en esta odisea y siempre supieron poner una sonrisa en la cara de este autor. A esa infame coqueta que me robó el corazón y no pudo ver este trabajo concluido.

En verdad, si alguien no aparece acá, no es que me olvide de usted, pero siempre he sido despistado con los agradecimientos, y espero que si no le dije gracias personalmente, pueda considerar esto suficiente y en caso de no serlo, hágame saber que sabré como agradecerle propiamente todo lo que aportó en todo este trabajo.

Gracias Totales.

Introducción

La teoría de Morse se basa en la observación de propiedades topológicas de variedades diferenciables \mathbf{M} a través del estudio de funciones diferenciables de \mathbf{M} a \mathbb{R} . La teoría de Morse discreta, creada recientemente por Robin Forman, es una adecuación de esta teoría desde la perspectiva de la combinatoria. Para la teoría de Morse discreta hacemos un análisis de complejos simpliciales, más precisamente, buscamos propiedades topológicas de un complejo simplicial K mediante funciones discretas de K a \mathbb{R} con ciertas hipótesis. Estas funciones permiten la construcción de un CW-complejo homotópicamente equivalente a K , más sencillo de estudiar.

Análogamente, la teoría de Morse discreta equivariante permite estudiar CW-complejos con una acción de un grupo G sobre ellos, los llamados G -CW complejos. Una función de Morse discreta equivariante permite construir un GCW -complejo G -homotópicamente equivalente al G -complejo simplicial inicial pero más simple. Como la equivalencia homotópica es equivariante, tales colapsos preservan la acción de G .

El propósito de esta tesis es hacer una revisión de los teoremas básicos de Teoría de Morse discreta y equivariante y estudiar como esta teoría puede utilizarse para analizar ejemplos concretos. Específicamente estudiamos el espacio de grafos no conexos en n vértices y el espacio de árboles filogenéticos con n hojas. La construcción explícita de funciones de Morse en el segundo caso es difícil y por eso recurrimos a un Teorema de Ardila y Klivans que demuestra que el espacio de árboles filogenéticos es homeomorfo a la parte propia del complejo de orden de las particiones del conjunto $\{1, \dots, n\}$. Construimos un colapso de este espacio utilizando la teoría de shellings y labelings propuestas por Björner y Gessel obteniendo una demostración de que el tipo de homotopia de este espacio es el de un wedge de esferas. Por último uno de los resultados de esta tesis es proponer dos preguntas abiertas de interés que serán el objeto de estudio posterior (ver el último capítulo).

Preliminares

DEFINICIÓN 1. El conjunto

$$\Delta^k = \left\{ (x_0, x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^{k+1} \mid \sum_{i=0}^k x_i = 1, 0 \leq x_i \leq 1 \right\}$$

es denominado *k-símplex* o *símplex de dimensión k*. Alternativamente, puede ser definido como

$$\Delta^k = \left\{ (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k \mid \sum_{i=1}^k x_i \leq 1, 0 \leq x_i \leq 1 \right\}$$

Observamos que estamos trabajando con una generalización de la noción de punto, recta, triángulo, tetraedro y versiones de estos para dimensiones mayores.

DEFINICIÓN 2. Decimos que (K, V) es un complejo simplicial finito si consta de un conjunto finito de vértices V , junto con K un conjunto no vacío de subconjuntos de V llamados símplexes, que cumplen las siguientes condiciones:

- $V \subseteq K$.
- Si $\alpha \in K$ y $\beta \subseteq \alpha$ entonces $\beta \in K$.

La dimensión de un símplex está determinada por $Dim(\alpha) := \alpha - 1$. Señalemos que la dimensión del complejo simplicial K está dada por sus símplexes de mayor dimensión, es decir $Dim(K) = \max \{Dim(\alpha) \mid \alpha \in K\}$.

Nos referiremos al complejo simplicial como K , a menos que se vaya a especificar el conjunto de vértices del complejo. Dados dos símplexes α y β , definimos la relación $\alpha < \beta$ o $\beta > \alpha$ para indicar que α es un subconjunto propio de β y decimos que α es una cara de β . Por notación usaremos las letras minúsculas del alfabeto griego, a menos de que se diga lo contrario, y $\alpha^{(p)}$ denotará un símplex de dimensión p .

1.1. Función de Morse Discreta

DEFINICIÓN 3. Sea K un complejo simplicial y $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ una función discreta. Decimos que f es una *función de Morse discreta* si para cualquier $\alpha^{(p)} \in K$ se tienen las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} |\{\beta^{(p+1)} > \alpha \mid f(\beta) \leq f(\alpha)\}| &\leq 1 \\ |\{\gamma^{(p-1)} < \alpha \mid f(\gamma) \geq f(\alpha)\}| &\leq 1 \end{aligned}$$

EJEMPLO 4. **a.** Consideremos una triangulación de la esfera \mathbb{S}^1 , notemos que en cada vértice y arista hay un número. Estos representan la asignación dada por una función $f : K \rightarrow \mathbb{R}$. Observamos en la figura 1.1.2, que $f^{-1}(0)$ está conectado con $f^{-1}(1)$ y $f^{-1}(3)$, lo que no permite que la segunda condición en la definición anterior se cumpla. Por otra parte, notemos que en la figura 1.1.1 ambas condiciones se cumplen para cada vértice y arista.

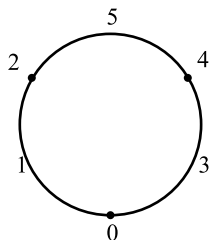


FIGURA 1.1.1. Una función de Morse discreta.

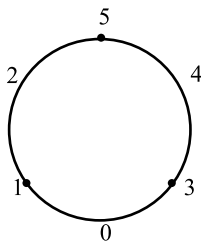


FIGURA 1.1.2. Una función que no es Morse discreta.

b. Consideremos un complejo simplicial K . Definamos una función discreta de Morse de la siguiente forma: Sea $\alpha^{(p)}$ un simplex contenido en K , veamos que la función

$$f(\alpha) = p$$

es una función de Morse discreta. Los conjuntos

$$\{\beta^{(p+1)} > \alpha \mid f(\beta) \leq f(\alpha)\}$$

y

$$\left\{ \gamma^{(p-1)} < \alpha \mid f(\gamma) \geq f(\alpha) \right\}$$

son vacíos, ya que dado cualquier $\beta^{(p+1)} > \alpha$ se tiene que $f(\beta) \geq f(\alpha)$, y $\gamma^{(p-1)} < \alpha$ se tiene que $f(\gamma) \geq f(\alpha)$. así se cumplen las condiciones para que f sea una función de Morse discreta. Luego, cualquier complejo simplicial puede ser dotado de una función de Morse discreta.

A partir de la definición de función de Morse discreta, notamos que la construcción de estas puede ser un trabajo un tanto elaborado, omitiendo el caso del segundo ejemplo; Por lo tanto buscaremos maneras más sencillas de caracterizarlas y construirlas, lo que nos lleva a la siguiente definición:

DEFINICIÓN 5. Un campo vectorial discreto \mathbb{V} en un complejo simplicial K es una colección de parejas de símplexes $\{\alpha^{(p)} < \beta^{(p+1)}\}$ de K , tales que cada símplex está a lo más en una pareja de \mathbb{V} .

Si tenemos un complejo simplicial K con una función de Morse discreta f , podemos describir un campo vectorial discreto como un conjunto de flechas que construimos de manera que cada pareja de la forma $\alpha^{(p)} < \beta^{(p+1)}$ satisface $f(\beta) \leq f(\alpha)$, existe una flecha con cabeza β y la cola empieza desde α . Observemos que cualquier símplex del complejo simplicial K con una función de Morse discreta f cumple una de las siguientes condiciones:

- Es la cabeza de exactamente una flecha.
- Es la cola de exactamente una flecha.
- No es cabeza ni cola de alguna flecha.

La tercera condición es un elemento bastante interesante en la teoría discreta de Morse, por lo que prestaremos atención a ése caso.

DEFINICIÓN 6. Sea K un complejo simplicial, y $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ una función de Morse discreta. Decimos que $\alpha \in K$ es un *símplex crítico* si las siguientes dos condiciones se tienen:

$$\begin{aligned} |\{\beta^{(p+1)} > \alpha \mid f(\beta) \leq f(\alpha)\}| &= 0 \\ |\{\gamma^{(p-1)} < \alpha \mid f(\gamma) \geq f(\alpha)\}| &= 0 \end{aligned}$$

Las condiciones de la definición junto con la definición de campo vectorial discreto nos recuerdan a una caracterización de punto crítico de una función diferenciable, puesto que notamos en ambos contextos que el gradiente en esos “puntos” se anula. La definición anterior permite inferir que la noción de “símplex crítico” no estará desligada de la idea anterior.

EJEMPLO 7. Considerando la figura 1.1.3 construimos el campo vectorial discreto a partir de la función discreta de Morse. Notemos que el campo vectorial discreto está descrito por las parejas $\{f^{-1}(2) < f^{-1}(1)\}$ y $\{f^{-1}(4) < f^{-1}(2)\}$. Además, observemos que en los elementos $f^{-1}(0)$ y $f^{-1}(5)$ el campo vectorial se “desvanece”. De hecho, no se define para estos elementos puesto que son simplices críticos en éste caso.

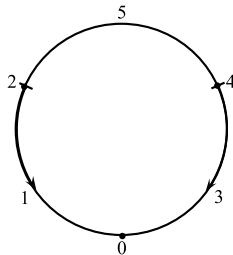


FIGURA 1.1.3. Campo vectorial discreto de la figura 1.1.1

LEMA 8. Si K es un complejo simplicial con función de Morse discreta f entonces para cualquier simplex α se tiene que:

$$\left| \left\{ \beta^{(p+1)} > \alpha \mid f(\beta) \leq f(\alpha) \right\} \right| = 0 \quad \text{o} \quad \left| \left\{ \gamma^{(p-1)} < \alpha \mid f(\gamma) \leq f(\alpha) \right\} \right| = 0$$

DEMOSTRACIÓN. Si α es un simplex crítico, se tiene a partir de la definición la propiedad. Demostremos que si α no es un simplex crítico, las dos propiedades no se pueden tener simultáneamente. En efecto, si $\dim(\alpha) = p = 0$ entonces se tiene que el conjunto $\{\gamma^{(p-1)} < \alpha \mid f(\gamma) \leq f(\alpha)\} = \emptyset$, por lo que se tiene el resultado. Consideremos el caso en que $p \geq 1$ y supongamos que el conjunto $\{\beta^{(p+1)} > \alpha \mid f(\beta) \leq f(\alpha)\}$ posee un elemento, existe $\tau^{(p+1)}$ tal que $f(\tau) \leq f(\alpha)$ y $\alpha < \tau$ y, más aún, si $\tilde{\alpha}$ es otra cara regular de τ distinta a α se tiene que $f(\tilde{\alpha}) < f(\tau)$, luego $f(\tilde{\alpha}) < f(\alpha)$.

Supongamos que también se tiene $|\{\gamma^{(p-1)} < \alpha \mid f(\gamma) \leq f(\alpha)\}| = 1$, luego existe v que es una cara regular de α y $f(v) \geq f(\alpha)$, luego tenemos $v < \alpha < \tau$, entonces existe una p -celda $\tilde{\alpha} \neq \alpha$ que es también una cara de τ , tal que

$$v < \tilde{\alpha} < \tau$$

Ya que f es una función de Morse discreta, $f(v)$ no puede ser mayor o igual a $f(\alpha)$ y $f(\tilde{\alpha})$ simultáneamente, luego $f(v) < f(\tilde{\alpha})$ y así

$$f(\alpha) \leq f(v) < f(\tilde{\alpha}) < f(\tau) \leq f(\alpha)$$

Contradicción. Luego, $|\{\beta^{(p+1)} > \alpha \mid f(\beta) \leq f(\alpha)\}| = 1$ y $|\{\gamma^{(p-1)} < \alpha \mid f(\gamma) \leq f(\alpha)\}| = 1$ no pueden darse al mismo tiempo. □

Hasta ahora revisamos características simples de la función de Morse discreta que serán útiles a la hora de mostrar otras propiedades e inclusive de construir funciones de Morse discretas para complejos simpliciales. El siguiente teorema nos da una herramienta poderosa, ya que a partir de un complejo simplicial y una función de Morse discreta, podemos obtener una estructura de CW-complejo o complejo celular que simplifica el cálculo de homologías y cohomologías.

TEOREMA. *Suponga que K es un complejo simplicial con una función de Morse discreta. Entonces K es homotópicamente equivalente a un CW-complejo con exactamente una celda de dimensión p por cada simplex crítico de dimensión p en K .*

Para poder demostrar el teorema anterior, necesitaremos más que la definición de función de Morse discreta y las proposiciones antes vistas. Ahora, la función de Morse discreta nos dará la forma de construir el complejo simplicial en el orden prescrito por la función de Morse discreta. En otras palabras, el CW-complejo se “arma” o “pega” a partir de las celdas de menor valor dado por la función de Morse discreta e incrementando los valores de manera sucesiva. Esta consideración será discutida posteriormente y motiva la siguiente definición. Para esto nos haremos de algunas definiciones, lemas y un resultado importante en [2].

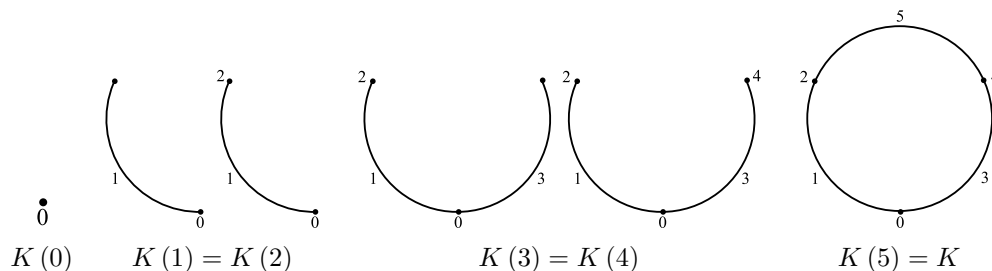
DEFINICIÓN 9. Sea K un complejo simplicial y f una función de Morse discreta de K . Para cada $c \in \mathbb{R}$ definimos

$$K(c) := \bigcup_{\substack{\alpha \in K \\ f(\alpha) \leq c}} \bigcup_{\beta \leq \alpha} \beta$$

como el subcomplejo de todos los símlices $\alpha \in K$ tales que $f(\alpha) \leq c$, con sus respectivas caras.

OBSERVACIÓN. Notemos que si $a \leq b$ entonces $K(a) \subseteq K(b)$. En efecto, sea $\alpha \in K(a)$ entonces existe $\beta \in K$ tal que $\alpha \leq \beta$ y $f(\beta) \leq a$, luego $f(\beta) \leq b$ y así, $\alpha \in K(b)$. Luego, si consideramos la aplicación que a cada número real c le asigna un subcomplejo $K(c)$ de K , nos damos cuenta que la aplicación es creciente, considerando el orden en K dado por la inclusión.

EJEMPLO 10. Utilizando la triangulación del complejo simplicial \mathbb{S}^1 en la figura 1.1.1 y su función de Morse discreta, obtenemos los subcomplejos a continuación. Notemos que $K(1) = K(2)$, $K(3) = K(4)$ y por ende $K(5) = K$.



Ahora, consideremos los siguientes lemas para demostrar el teorema antes propuesto; estos nos garantizan una manera de contraer símplices en condiciones razonables y dotar al espacio de funciones de pegado, dando así una estructura de CW-complejo.

LEMA 11. *Sea K un complejo simplicial y f una funci3n de Morse discreta para K . Si no existen símplices críticos α en la preimagen del intervalo $[a, b]$ entonces $K(b)$ es homot3picamente equivalente a $K(a)$. De hecho, $K(a)$ es un retracto de $K(b)$, denotado por $K(b) \searrow K(a)$.*

DEMOSTRACI3N. Empecemos por notar que si $\tau^{(p+1)} > \sigma^{(p)}$ satisface que $f(\tau) \leq f(\sigma)$ entonces podemos perturbar f reemplazando $f(\sigma)$ por $f(\sigma) + \varepsilon$ o $f(\tau)$ por $f(\tau) - \varepsilon$, para $\varepsilon \geq 0$ lo suficientemente pequeño. Así no alteramos las celdas críticas en el intervalo. Si $\sigma^{(p)}$ satisface que $f(\tau^{(p+1)}) \neq f(\sigma) \neq f(v^{(p-1)})$ para cualesquiera $\tau^{(p+1)} > \sigma^{(p)} > v^{(p-1)}$ entonces podemos perturbar $f(\sigma)$ por $f(\sigma) \pm \varepsilon$, sin cambiar las celdas críticas. Si combinamos estas t3cnicas podemos modificar la funci3n f sin cambiar $K(a)$ o $K(b)$ y así asegurarnos que f se puede modificar para ser una funci3n inyectiva.

Si $f^{-1}([a, b]) = \emptyset$, tenemos que $K(a) = K(b)$ ya que, por la observaci3n anterior, la contenci3n $K(a) \subseteq K(b)$ es inmediata. Además, si hubiera un símplex $\gamma \in K(b)$ y $\gamma \notin K(a)$, se tiene que existe $\eta \in K$ tal que $a < f(\eta) \leq b$ y por lo tanto $\eta \in f^{-1}([a, b])$, lo cual es un absurdo. Luego se obtiene el resultado deseado.

En caso contrario, hagamos una partici3n del intervalo $[a, b]$, para poder asumir que existe solo una celda no critica tal que $f(\sigma) \in [a, b]$, es decir, tenemos un único $\sigma \in K(b)$. Ahora, tenemos una de las dos afirmaciones:

CASO 1: Existe $\tau^{(p+1)} > \sigma^{(p)}$ tal que $f(\sigma) \geq f(\tau)$.

Si estamos en este caso, entonces sabemos que $f(\tau) < a$, porque σ es el único elemento en $f^{-1}([a, b])$. Luego $\tau \in K(a)$ y así $\sigma \in K(a)$. Tenemos entonces que $K(a) = K(b)$.

CASO 2: Existe $\tau^{(p-1)} < \sigma^{(p)}$ tal que $f(\tau) \geq f(\sigma)$.

En este caso, para todo simplex $\omega > \sigma$, con $Dim(\omega) = Dim(\sigma) + 1$, se tiene que $f(\omega) > f(\sigma)$, puesto que la condici3n

$$\tau^{(p+1)} > \sigma \text{ tal que } f(\sigma) \geq f(\tau)$$

no se puede tener y así $f(\omega) > b$. Sea $\beta > \sigma$ tal que $dim(\beta) = p+2$, tenemos que para cualquier simplex $\sigma < \omega < \beta$, entonces $f(\beta)$ debe ser mayor que b , ya que de lo contrario, tendríamos que

$f(\beta) < a$ y así

$$f(\beta) < a < b < f(\omega), \quad \text{para todo } \omega < \beta$$

lo que contradice que f sea una función de Morse discreta. De manera inductiva, cualquier $\gamma > \sigma$ cumple $f(\gamma) > b$. Luego $K(a) \cap \sigma = \emptyset$.

Ahora, como existe un único $\tau^{(p-1)} < \sigma$ tal que $f(\tau) \geq f(\sigma)$ entonces $f(\tau) > b$ y cualquier otro $\tau' \neq \tau$ con $\tau^{(p-1)} < \sigma$ cumple que $f(\tau') < f(\sigma)$, luego $f(\tau') < a$, entonces todos ellos están en $K(a)$.

Sea $\kappa^{(p)}$ tal que $\kappa > \tau$. Como $\tau < \sigma$ y $f(\tau) \geq f(\sigma)$, entonces $f(\kappa) > f(\tau)$. Luego $K(a) \cap \tau = \emptyset$. Así tenemos que $K(b)$ está escrito como la unión disjunta de $K(a)$ junto con σ unidos por τ . Luego $K(b) \searrow K(a)$. \square

LEMA 12. *Sea X un espacio normal, $A \subseteq X$ el conjunto de ceros de una función $X \rightarrow [0, 1]$ y un retracto por deformación fuerte de una vecindad de A . Si $h : Y \rightarrow Y'$ es una equivalencia homotópica, $f : A \rightarrow Y$ y $f' : A \rightarrow Y'$ y f es homotópica a $h \circ f$, entonces h se extiende a una equivalencia homotópica $H : Y \cup_f X \rightarrow Y' \cup_{f'} X$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $A \subseteq X$ y $f : A \rightarrow Y$. $X \cup_f Y$ se define como la unión disjunta de X y Y partido por la relación de equivalencia \sim definida así: Dados $a \in A$ y $y \in Y$, $a \sim y$ si y solo si $f(a) = y$. Sea $K : A \times I \rightarrow Y'$ una equivalencia homotópica entre $h \circ f$ y f' . Sea M_f el cilindro generado por f , es decir, $M_f = [(A \times I) \sqcup Y] / (a, 0) \sim f(a)$. Ahora, extendemos la función $h : Y \rightarrow Y'$ a la función $h^* : M_f \rightarrow Y'$ de la siguiente manera: $h^*([a, t]) = K(a, t)$ si $a \in A$ y $t \in I$, y $h^*([y, t]) = h(y)$ para $y \in Y$, notemos que está bien construida dicha extensión

$$\begin{aligned} h^*([a, 0]) &= K(a, 0) \\ &= h \circ f(a) \\ &= h(f(a)). \end{aligned}$$

Dado que M_f y Y tienen el mismo tipo de homotopía, h^* es una equivalencia homotópica entre M_f y Y . Definamos $f^* : A \rightarrow M_f$ como $f^*(a) = [a, 0] \in M_f$, entonces $h^* \circ f^*$ cumple

$$\begin{aligned} (h^* \circ f^*)(a) &= h^*(f^*(a)) \\ &= h^*([a, 0]) \\ &= K(a, 0) \\ &= f(a) \end{aligned}$$

Vale la pena recalcar que existe un retracto por deformación fuerte entre $M_f \cup_{f^*} Y$ al espacio $X \cup_f Y$ que es una extensión del retracto por deformación fuerte de M_f a Y . Entonces, su podemos extender a h^* a una equivalencia homotópica entonces obtendremos una equivalencia homotópica entre $X \cup_f Y$ y $X \cup_{f'} Y'$. Luego podemos asumir que $h \circ f = f'$.

Sea $j : X \rightarrow X \cup_f Y$ y $j' : X \rightarrow X \cup_{f'} Y'$ las inclusiones canónica de X en $X \cup_f Y$ y $X \cup_{f'} Y'$ respectivamente. Cuando restringimos j y j' a A obtenemos a f y f' . Consideremos a

$H : X \cup_f Y \longrightarrow X \cup_{f'} Y'$ definida como $H(y) = h(y)$ para $y \in Y$ y $H(j(x)) = j'(x)$ para $x \in X$. Para $a \in A$ se tiene que

$$\begin{aligned} H(j(a)) &= H(f(a)) \\ &= h(f(a)) \\ &= f'(a) \\ &= j'(a) \end{aligned}$$

Como H es continua, por su construcción, en X y Y , entonces es continua en $X \cup_f Y$. Luego para mostrar que H es una equivalencia homotópica entre estos espacios, se mostrará que existe un retracto por deformación entre el cilindro de la función H sobre $X \cup_f Y$. Sea M_h el cilindro de la función $h : Y \longrightarrow Y'$. Consideremos la función $F : A \times I \longrightarrow M_h$, donde F está definida por la composición de funciones

$$A \times I \xrightarrow{f \times Id_I} Y \times I \hookrightarrow (Y \times I) \cup Y' \longrightarrow M_h$$

además, tenemos que $M_H = M_h \cup_F (X \times I)$. Por las hipótesis sobre el conjunto A de X , se tiene que existe un retracto de deformación R de $X \times I$ en $(X \times \{0\}) \cup (A \times I)$. Luego construimos un retracto por deformación de M_H en $M_h \cup \left(X \cup_f Y \right)$. Considerando la inclusión natural de $N : X \times I \longrightarrow M_h \cup_F (X \times I)$ construimos el retracto R' de M_H en $M_h \cup \left(X \cup_f Y \right)$ como $R'(m, t) = z$ para $m \in M_h$ y $R'(N(x, s), t) = N(R((x, s), t))$. \square

COROLARIO 13. Sean Y, Y' y X complejos simpliciales. Sean $h : Y \rightarrow Y'$ una equivalencia homotópica, A un subcomplejo de X , y $f : A \rightarrow Y$ y $f' : A \rightarrow Y'$ tales que f' es homotópicamente equivalente a $h \circ f$. Luego h se extiende a una equivalencia homotópica de los espacios $Y \cup_f X$ y $Y' \cup_{f'} X$.

DEMOSTRACIÓN. Tenemos que los complejos simpliciales son espacios normales. A es un subcomplejo de X , como es cerrado, entonces es el conjunto de ceros de una función continua de X a $[0, 1]$. Luego, por el lema anterior, h se puede extender a una equivalencia homotópica entre los espacios $Y \cup_f X$ y $Y' \cup_{f'} X$. \square

LEMA 14. Sea K un complejo simplicial y f una función de Morse discreta para K . Si hay un único simplex crítico $\alpha \in f^{-1}([a, b])$ entonces existe una función $F : \mathbb{S}^{p-1} \longrightarrow K(a)$, con p la dimensión de α , tal que $K(b) = K(a) \cup_F B^p$.

DEMOSTRACIÓN. Asumamos que f es uno a uno, luego podemos encontrar a' y b' tales que $a < a' < b' < b$ con $\alpha = f^{-1}([a', b'])$, es decir, aislar el simplex crítico en un intervalo donde no encontremos otro simplex. Por el lema anterior, tenemos que $K(b) \searrow K(b')$ y $K(a') \searrow K(a)$, luego es suficiente mostrar que $K(b')$ es homotópicamente equivalente a $K(a') \cup_F B^p$.

Dado que α es crítico, si existe $\beta^{(p+1)} > \alpha$, entonces se tiene que $f(\alpha) < f(\beta)$ luego $f(\beta) > b'$. Si β es cualquier cara de K , con $\beta > \alpha$ entonces tenemos que $f(\beta) > b'$, por un

argumento análogo al lema 10, podemos construir una cadena descendente de símlices de β hasta α con esa característica. Luego $K(a) \cap \alpha = \emptyset$. También se sigue que para cada $\gamma^{(p-1)} < \alpha$ se tiene que $f(\gamma) < a'$, luego $\gamma \subseteq K(a')$. Así, la frontera de α está contenida en $K(a')$ y así $K(b') = K(a') \cup_{\overline{F}} \alpha$. □

1.2. Campo Vectorial Gradiente

Como observamos en la sección anterior, cada función de Morse discreta describe un campo vectorial discreto en un complejo simplicial, además que las flechas que existen entre los símlices están descritas como parejas $\{\alpha^{(p)} < \beta^{(p+1)}\}$ de símlices en \mathbb{V} , en el que cada símlice está a lo más en una pareja de \mathbb{V} . Si f es una función de Morse discreta y \mathbb{V} es el campo vectorial discreto que se deriva de la función, entonces diremos que \mathbb{V} es un campo vectorial gradiente.

Dado un campo vectorial discreto \mathbb{V} de un complejo simplicial K , se define un \mathbb{V} -camino como una sucesión de símlices

$$\alpha_0^{(p)}, \beta_0^{(p+1)}, \alpha_1^{(p)}, \beta_1^{(p+1)}, \dots, \alpha_r^{(p)}, \beta_r^{(p+1)}, \alpha_{r+1}^{(p)}$$

donde para cada $i = 0, 1, \dots, r$ se tiene que $\{\alpha_i < \beta_i\} \in \mathbb{V}$ y $\beta_i > \alpha_{i+1} \neq \alpha_i$. Decimos que dicho \mathbb{V} -camino es *no trivial cerrado* si $r \geq 0$ y $\alpha_{r+1} = \alpha_0$. Si \mathbb{V} es el campo vectorial gradiente de una función de Morse discreta f , entonces nos referimos a un \mathbb{V} -camino como un *camino gradiente de f* . Una idea detrás de esta definición es el siguiente lema:

LEMA 15. *Supongamos que \mathbb{V} es el campo vectorial gradiente relacionado a una función de Morse discreta f . Entonces una sucesión de símlices*

$$\alpha_0^{(p)}, \beta_0^{(p+1)}, \alpha_1^{(p)}, \beta_1^{(p+1)}, \dots, \alpha_r^{(p)}, \beta_r^{(p+1)}, \alpha_{r+1}^{(p)}$$

es un \mathbb{V} -camino si y solo si $\alpha_i^{(p)} < \beta_i^{(p+1)} > \alpha_{i+1}^{(p)}$ para cada $i = 0, \dots, r$ y

$$f(\alpha_0) \geq f(\beta_0) \geq f(\alpha_1) \geq f(\beta_1) \geq \dots \geq f(\alpha_r) \geq f(\beta_r) \geq f(\alpha_{r+1})$$

DEMOSTRACIÓN. \implies) Sea la sucesión antes descrita un \mathbb{V} -camino, luego tenemos que para cada índice $i = 0, \dots, r$, $\{\alpha_i < \beta_i\} \in \mathbb{V}$ y $\beta_i > \alpha_{i+1} \neq \alpha_i$. Si $\{\alpha_i < \beta_i\} \in \mathbb{V}$, se tiene que $f(\alpha_i) \geq f(\beta_i)$ para $i = 0, \dots, r$. Si se tuviera que $f(\beta_i) \leq f(\alpha_{i+1})$ entonces se contradice el hecho de que el campo vectorial discreto \mathbb{V} estuviera relacionado a una función de Morse discreta, por lo que se tiene $f(\beta_i) \geq f(\alpha_{i+1})$.

\impliedby) Como tenemos que \mathbb{V} es un campo vectorial gradiente relacionado a la función de Morse discreta f , tenemos que cada pareja $\{\alpha_i < \beta_i\} \in \mathbb{V}$ y dado que $f(\beta_i) \geq f(\alpha_{i+1})$ para $i = 0, \dots, r$, tenemos que $\beta_{i+1} > \alpha_{i+1} \neq \alpha_i$. □

Con esto, los caminos gradientes de f son precisamente aquellas sucesiones de símlices que son decrecientes bajo la función f . En particular, ese teorema implica que si \mathbb{V} es un campo

vectorial gradiente, entonces no posee \mathbb{V} -caminos cerrados no triviales. De hecho, esta propiedad es la que caracteriza los campos vectoriales discretos que vienen de funciones de Morse discretas.

TEOREMA 16. *Un campo vectorial discreto \mathbb{V} es el campo vectorial gradiente engendrado de una función de Morse discreta si y solo si no hay \mathbb{V} -caminos cerrados no triviales.*

DEMOSTRACIÓN. \implies) Supongamos que tenemos un \mathbb{V} -camino cerrado

$$\alpha_0^{(p)}, \beta_0^{(p+1)}, \alpha_1^{(p)}, \beta_1^{(p+1)}, \dots, \alpha_r^{(p)}, \beta_r^{(p+1)}, \alpha_{r+1}^{(p)}$$

es decir, $r \geq 0$ y $\alpha_0 = \alpha_{r+1}$. Entonces, por el lema anterior, se tiene que

$$f(\alpha_0) \geq f(\beta_0) \geq f(\alpha_1) \geq f(\beta_1) \geq \dots \geq f(\alpha_r) \geq f(\beta_r) \geq f(\alpha_{r+1})$$

y así $f(\alpha_0) \geq f(\alpha_{r+1})$. Contradicción. Luego no existen \mathbb{V} -caminos cerrados no triviales.

\impliedby) Sea \mathbb{V} un campo vectorial discreto en el que no hay \mathbb{V} -caminos cerrados no triviales. Podemos construir una función de Morse discreta de la siguiente forma: En cada dimensión $p \geq 0$, basta con armar una función tal que si $\{\alpha^{(p)} < \beta^{(p+1)}\} \in \mathbb{V}$ entonces $f(\alpha) \geq f(\beta)$ y de manera coherente, escoger los valores para que las cadenas sean decrecientes.

□

Dado el teorema anterior, notamos que hemos podido dar una caracterización de los campos vectoriales discretos y de como algunos, de manera contundente, generan funciones de Morse discreta. Esto facilita estas construcciones, ya que ahora no necesitamos construir una función de Morse discreta, sino un campo vectorial gradiente que no tenga caminos cerrados no triviales.

EJEMPLO 17. Dadas las triangulaciones del toro dos dimensional y $\mathbb{R}P^2$, mostramos un campo vectorial sobre estos espacios mostrados en el capítulo 5.

Teoría de Morse discreta equivariante

2.1. CW-Complejos G -equivariantes

En esta sección desarrollaremos un análogo equivariante de la teoría de Morse discreta siguiendo muy de cerca el artículo [8]. Para hablar de una teoría de Morse equivariante lo primero que tenemos que hacer es describir espacios con acciones de un grupo G fijo (mediante homeomorfismos) que por simplicidad asumiremos finito.

Nuestro mecanismo de construcción de CW-complejos con una acción de G será inductivo y consistirá de adicionar órbitas de celdas bajo la acción de manera sucesiva. A diferencia del caso no equivariante en general no adicionaremos una celda a la vez sino la totalidad de la órbita de esa celda. Para poder describir estas órbitas de manera intrínseca introducimos la siguiente definición.

DEFINICIÓN 18. Sea G un grupo finito cualquiera, y sea H un subgrupo de G que actúa sobre un espacio topológico X . Consideremos a G como un espacio topológico dotado de la topología discreta. Definamos la relación de equivalencia \sim definida por $(gh, x) \sim (g, hx)$ (o de manera equivalente $(g, x) \sim (gh^{-1}, hx)$) para $x \in X$, $h \in H$ y $g \in G$. Luego definimos el *producto torcido* de G y X bajo la acción de H como

$$G \times_H X := G \times X / \sim$$

Hay dos hechos importantes que deben tomarse en cuenta:

1. Hay una acción del grupo G en $G \times_H X$ dada por: $g' \cdot [(g, x)] = [(g'g, x)]$.
2. La acción inducida por el subgrupo H en los elementos de la forma $[(e, x)]$ es $h \cdot [(e, x)] = [(h, x)] = [(e, h(x))]$ así que H está en el subgrupo de G que deja $[e \times X]$ invariante como conjunto, mientras que los elementos de g en otras clases laterales de H mueven a $[e \times X]$ a $[g(e) \times X]$.

Intuitivamente, la acción de G sobre $G \times_H X$ actúa en la primera componente que tiene un comportamiento similar a G/H y en la segunda componente actúa con H bajo la acción que este produce en el espacio topológico. Vale la pena recalcar, que el grupo G/H no necesariamente debe existir, ya que el subgrupo H no es normal y no tenemos información de que el grupo G sea conmutativo.

EJEMPLO 19. Consideremos cualquier espacio topológico X bajo la acción trivial de un grupo G . Ahora, el producto torcido

$$G \times_G X \cong X$$

puesto que cualquier clase de equivalencia se tiene que $(g, x) \sim (e, gx) \sim (e, x)$.

Consideremos X un G -espacio topológico, tenemos que la aplicación

$$\begin{aligned} G/H \times X &\longrightarrow G \times_H X \\ ([g], x) &\longrightarrow [(g, g^{-1}x)] \end{aligned}$$

es un G -homeomorfismo.

La noción de producto torcido es esencial para la definición de G -CW complejos, ya que los mapas de pegamiento en cada nivel ya no serán esferas y bolas de la dimensión requerida, sino serán productos torcidos que respetarán la acción del grupo en cada nivel como podremos presenciar en la misma construcción que describiremos más adelante.

DEFINICIÓN 20. Sea G un grupo que actúa mediante homeomorfismos sobre dos espacios topológicos X e Y , decimos que una función $f : X \rightarrow Y$ es G -Equivariante si $f(gx) = g(f(x))$ para todo $g \in G$ y $x \in X$. Si existe un homeomorfismo G -equivariante entre X y Y , decimos que son G -Homeomorfos y lo denotamos con $X \cong_G Y$.

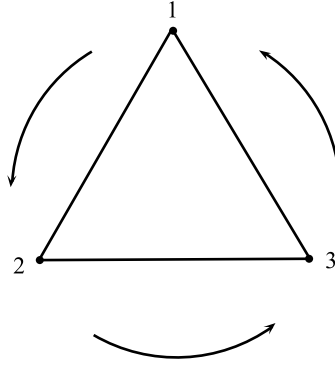
Si X y Y son homotópicamente equivalentes, y las homotopías se pueden escoger para conmutar con la acción de G , lo notamos por $X \simeq_G Y$.

Nuestra motivación será estudiar acciones de grupos sobre estructuras simpliciales y en estructuras CW, con el propósito de tratar de construir una versión equivariante de la teoría de Morse discreta, luego nos encaminamos a estudiar estas estructuras y cómo actúan los grupos sobre estas.

DEFINICIÓN 21. Sea K un complejo simplicial y sea V su conjunto de vértices. Supongamos que existe un grupo G que actúa en V de tal forma que envía símplices de K en símplices. Entonces decimos que G actúa *simplicialmente* en K , además (K, V) es un G -complejo simplicial.

EJEMPLO 22. Consideremos un complejo simplicial K con un conjunto de vértices V y con la acción trivial de un grupo G sobre el conjunto de vértices, es decir $g(v) = v$ para todo $g \in G$ y $v \in V$. Luego K es un G -complejo simplicial bajo la acción trivial.

Un ejemplo más interesante, relacionando teoría de Morse Discreta, se obtiene considerando un 2-símplex y la acción generada por el grupo cíclico de 3 elementos \mathbb{Z}_3 , que gira el 2-símplex en $\frac{2\pi}{3}$ radianes. Nos damos cuenta que esta acción envía símplices en símplices, algo que vale la pena destacar de este complejo simplicial es que tiene un punto fijo bajo la acción del grupo, su baricentro. También observemos que el campo vectorial gradiente

FIGURA 2.1.1. Acción de \mathbb{Z}_3 en un 2-símplex.

$\{\{2, (1, 2)\}, \{3, (2, 3)\}, \{(1, 3), (1, 2, 3)\}\}$ sobre este espacio no preserva los puntos fijos de la acción.

Nuestro mecanismo de construcción de CW-complejos con una acción de G será inductivo y consistirá de adicionar órbitas de celdas bajo la acción de manera sucesiva. A diferencia del caso no equivariante en general no adicionaremos una celda a la vez sino la totalidad de la órbita de esa celda. Para poder describir estas órbitas de manera intrínseca introducimos la siguiente definición

DEFINITION 23. Un G -CW complejo es cualquier espacio topológico que pueda obtenerse mediante la siguiente construcción inductiva:

1. Consideremos X_0 un conjunto de vértices o 0-celdas dotados con la topología discreta y dotados de la acción de un grupo G .
2. Para construir X_k primero necesitamos un número finito de tuplas $(\Delta_\alpha^k, \Phi_\alpha, H_\alpha)$ dónde: Dado el esqueleto X_{k-1} pegue productos torcidos $G \times_{H_\alpha} \Delta_\alpha^k$ a X_{k-1} mediante inclusiones G -equivariantes de sus fronteras, donde los H_α son subgrupos de G . Luego obtenemos X_n .

Tenemos que Δ_α^n son n -simplices que actúan “linealmente” bajo la acción de H_α , es decir, son discos de una representación de H_α . Para ser más precisos en el proceso de pegamiento tenemos que considerar estos mapas

$$i : \partial(G \times_{H_\alpha} \Delta_\alpha^n) \hookrightarrow G \times_{H_\alpha} \Delta_\alpha^n$$

$$\Phi_\alpha : \partial(G \times_{H_\alpha} \Delta_\alpha^n) \rightarrow X_{k-1}$$

el mapa i que es la inclusión natural y el mapa Φ_α que es una función G -equivariante, luego el espacio X_n es el espacio cociente de la unión disjunta $X_{n-1} \coprod_\alpha \Delta_\alpha^n$ de X_{n-1} con la colección de discos Δ_α^n bajo la identificación $i(g, x) \longleftarrow \Phi_\alpha(g, x)$ para $(g, x) \in \partial(G \times_{H_\alpha} \Delta_\alpha^n)$.

3. Tenemos las inclusiones naturales $X_0 \subseteq X_1 \subseteq \dots \subseteq X_{n-1} \subseteq \dots$ se define $X = \bigcup_n X_n$. Llamamos a X el GCW complejo o el G -complejo celular.

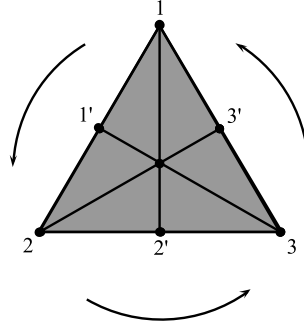
Para fines prácticos de la construcción, debemos entender la estructura $\partial(G \times_H \Delta^n)$, pero se tiene de manera razonable que $\partial(G \times_H \Delta^n) = G \times_H \partial(\Delta^n)$: En efecto, ya que el grupo H actúa sobre Δ bajo automorfismos de este espacio topológico, luego cuando actúa sobre un punto interior lo envía al interior de Δ y así mismo con sus puntos de frontera.

Ahora, con la identificación $(gh, x) \sim (g, hx)$ que se utiliza para la construcción de $G \times_H \Delta^n$ no se identifican puntos de interior con puntos de la frontera de Δ . Una vecindad de (g, x) en el espacio cociente se ve como la unión de una H -órbita de vecindades, que es la unión disjunta de $|H|$ abiertos de \mathbb{R}^n si x está en el interior de Δ . Luego la H -órbita de (g, x) está en el interior del espacio cociente si y solo si (g, x) está en el interior de $G \times X$. Similarmente, la H -órbita de (g, x) está en la frontera del espacio cociente si y solo si (g, x) está en la frontera de $G \times X$. Luego, al tener que $\partial(G \times \Delta) = G \times \partial(\Delta)$, ya que G está dotado de la topología discreta, entonces concluimos que $\partial(G \times_H \Delta^n) = G \times_H \partial(\Delta^n)$.

El paso más natural para revisar la consistencia de esta teoría es confirmar si a un G -complejo simplicial K se le puede dotar de una estructura de GCW complejo. Para convencernos de este acercamiento, tenemos:

1. Consideremos el espacio V , el conjunto de vértices de K , notemos a este espacio por K_0 .
2. Supongamos que hemos construido K_{n-1} . Hagamos la partición del conjunto de n simplices de K en sus G -órbitas, O_α^n . Sea Δ_α^n un representante de O_α^n y H_α el subgrupo de G que consiste de los elementos que dejan a Δ_α^n invariante como conjunto. Entonces H_α actúa en Δ_α^n y tenemos que una órbita O_α^n es G -homeomorfo a $G \times_{H_\alpha} \Delta_\alpha^n$. Luego el n -esqueleto K_n se obtiene al pegar $G \times_{H_\alpha} \Delta_\alpha^n$ para todo α a K_{n-1} via las inclusiones en su frontera. Estas inclusiones son G -equivariantes, por la manera en que G actúa sobre K , entonces la construcción del esqueleto que hemos determinado en la definición de GCW complejos se mantiene de manera razonable.
3. Ahora, el n -esqueleto de la realización geométrica de K es $\bigcup_{i \leq n} K_i$, luego la realización geométrica de K es el G -CW complejo $\bigcup_n K_n$.

Notemos que si G no es un grupo conmutativo, las diferentes copias de Δ_α^n en X indexadas por G/H_α no tienen que tener los mismos grupos invariantes. De hecho, si H es el grupo de invarianza del simplex Δ entonces el grupo de invarianza del grupo $g\Delta$ será gHg^{-1} . Luego las copias tendrán grupos de invarianza conjugados. Conforme a lo anterior, los grupos $H_\alpha \subseteq G$ serán determinados solamente salvo clases de conjugación por O_α^n y para determinarlos exactamente, necesitamos fijar una representación Δ_α^n . Pero se sigue de manera inmediata que $G \times_H \Delta \cong_G G \times_{gHg^{-1}} (g\Delta)$. Luego el GCW complejo construido a partir de K está bien definido (Salvo homeomorfismos G -equivariantes).

FIGURA 2.1.2. La división baricéntrica del 2-simplex bajo la acción de \mathbb{Z}_3 .

EJEMPLO 24. Consideremos la acción de \mathbb{Z}_3 sobre el 2-simplex antes descrita. Pero consideremos primero la subdivisión baricéntrica del simplex. Observemos como se compone la estructura de \mathbb{Z}_3 CW-complejo de este espacio.

El conjunto de 0-celdas del simplex, bajo la acción de \mathbb{Z}_3 , van cambiando de arista en sentido opuesto a las manecillas del reloj, con excepción del baricentro, llamémoslo b .

Ahora, para construir el conjunto X_1 tenemos en cuenta las celdas en X_0 , entonces el 1-esqueleto del complejo simplicial, partido por sus órbitas se obtiene por los conjuntos $O_1^1 = \{(1, 1'), (2, 2'), (3, 3')\}$, $O_2^1 = \{(1', 2), (2', 3), (3', 1)\}$, $O_3^1 = \{(b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$ y $O_4^1 = \{(b, 1'), (b, 2'), (b, 3')\}$, donde $H_i = \{e\}$ ya que ninguna 1-celda es invariante bajo la acción del grupo, y así

$$\begin{aligned} O_1^1 &\simeq_G \mathbb{Z}_3 \times_{\{e\}} \{(1, 1')\} \\ O_2^1 &\simeq_G \mathbb{Z}_3 \times_{\{e\}} \{(1', 2)\} \\ O_3^1 &\simeq_G \mathbb{Z}_3 \times_{\{e\}} \{(b, 1)\} \\ O_4^1 &\simeq_G \mathbb{Z}_3 \times_{\{e\}} \{(b, 1')\} \end{aligned}$$

Entonces al considerar la unión de cada una de estas órbitas con sus respectivas fronteras en X_0 , obtenemos el 1-esqueleto deseado, X_1 .

Ahora, para generar X_2 , consideremos los conjuntos de celdas: $O_1^2 = \{(1, 1', b), (2, 2', b), (3, 3', b)\}$ y $O_2^2 = \{(b, 1', 2), (b, 2', 3), (b, 3', 1)\}$. En este caso, como hemos observado, al ser b el único elemento invariante bajo \mathbb{Z}_3 , cada $H_i = \{e\}$, para todos los O_i^2 . Al hacer la unión de cada órbita con sus respectivas fronteras obtenemos la estructura de GCW-complejo de la subdivisión baricéntrica de Δ^2 bajo la acción de \mathbb{Z}_3 .

2.2. Morse Matching Generalizado

Consideremos un complejo simplicial K , y un conjunto $P(K)$ que consta de los símplexes de cada dimensión, dotado del orden parcial inducido por la inclusión de las caras de los símplexes que lo componen. Este espacio lo podemos asociar a un grafo dirigido, donde los vértices representan a los elementos de $P(K)$, y las flechas en el diagrama de Hasse muestran la relación de cubrimiento. Recordemos que un símplex τ cubre a σ , si σ es una cara propia de τ .

DEFINICIÓN 25. Sea $G = (V, A)$ un grafo, donde V es el conjunto de vértices de G y A es el conjunto de aristas de G . Un Matching de G es un subconjunto de aristas de A , no adyacentes entre sí.

Notemos que una función de Morse discreta o un campo vectorial gradiente describe un matching en el espacio $(P(K), <)$, por lo que diremos que este matching sera un *matching de Morse discreto*. De manera recíproca, de dicho matching, tenemos que un campo vectorial gradiente puede ser generado a partir de un matching haciendo las parejas $\{\sigma < \tau\}$ si existe un emparejamiento de σ y τ en $P(K)$. Análogamente al caso de las funciones de Morse discretas, surge una pregunta importante: ¿cualquier matching puede generar una función de Morse discreta (o un campo vectorial gradiente)?

Consideremos un grafo dirigido $G = (V, A)$ con V su conjunto de vértices y A el conjunto de parejas ordenadas de vértices, que dan pie a las aristas y a la relación de orden. Sea \leftrightarrow una relación de equivalencia en V . Construyamos el grafo G/\leftrightarrow de la siguiente manera:

1. El conjunto de vértices de G/\leftrightarrow es V/\leftrightarrow .
2. Existe un arco entre las clases $[v_1]$ y $[v_2]$ si existen w_1 y w_2 en V tales que $w_i \in [v_i]$ y el arco $(w_1, w_2) \in A$.

Se tiene el siguiente resultado similar a lo que propone Forman en el caso de los campos vectoriales discretos:

TEOREMA 26. *Un matching M en $P(K)$ es un matching de Morse discreto si y solo si el grafo $P(K)/M$ no tiene ciclos dirigidos cerrados.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que existe un ciclo dirigido en el grafo cociente $P(K)/M$

$$[v_1] \rightarrow [v_2] \rightarrow \dots \rightarrow [v_k] \rightarrow [v_1]$$

cada arista dirigida en G va de un simplex de dimensión n a un simplex de dimensión $n + 1$, para algún n . Tenemos que cada $[v_i]$ es un elemento sin emparejar o un simplex en la pareja $(\sigma_i^{(n)}, \tau_i^{(n+1)})$. Revisando un representante de cada elemento del ciclo dirigido en G/M obtenemos algo de la forma

$$\sigma_1^{(n)} < \tau_2^{(n+1)} > \sigma_2^{(n)} < \dots < \tau_k^{(n+1)} > \sigma_k^{(n)} < \tau_1^{(n+1)} > \sigma_1^{(n)}$$

donde σ_i está relacionado con τ_i por M . Luego, si M fuera inducido por una función de Morse Discreta f , tendríamos que

$$f(\sigma_1) < f(\tau_2) \leq f(\sigma_2) \dots \leq f(\sigma_k) < f(\tau_1)$$

Luego $f(\sigma_1) < f(\tau_1)$. Pero $\sigma_1^{(n)}$ está relacionado con $\tau_1^{(n+1)}$ y $f(\tau_1) \leq f(\sigma_1)$, lo que genera una contradicción. Luego M no está generado por ninguna función de morse discreta.

Recíprocamente, supongamos que no existe ningún ciclo cerrado en el grafo cociente $P(K)/M$, dado que K es finito, $P(K)/M$ también lo es. Luego cualquier camino dirigido en $P(K)/M$ tiene

longitud finita. Definamos $f : K \rightarrow \mathbb{R}$: $f(\sigma)$ es la longitud del camino más largo en $P(K)/M$ que termine en $[\sigma]$. Si $\sigma^{(n)} < \tau^{(n+1)}$ en K , entonces existe un arco de $\sigma \rightarrow \tau$ en $P(K)$. Si este arco está en el matching M entonces $[\sigma] = [\tau]$, luego $f(\sigma) = f(\tau)$. En el caso contrario, cualquier camino que termina en $[\sigma]$, puede ser extendido en un camino que termina en $[\tau]$. Luego $f(\sigma) \leq f(\tau)$, y se tiene al igualdad si y solo si M empareja a σ y τ . Luego f es una función de Morse discreta y esta genera un matching de Morse discreto. \square

TEOREMA 27. *Sea K un complejo simplicial contractil a un punto. Sean K_1 un subcomplejo de K tal que K_1 es contractil. Entonces existe un matching de Morse para K_1 y $K \setminus K_1$ tal que al unirlos para formar un matching para K , este genera un campo vectorial gradiente y además usando ese matching de Morse, K se contrae a un punto.*

DEMOSTRACIÓN. Tenemos que K_1 es contractil, entonces podemos construir un matching de Morse, a partir de un campo vectorial gradiente discreto, donde existe solamente una celda crítica de dimensión 0. Consideremos $K \setminus K_1$, entonces vamos a generar un matching total para esta parte de K , omitiendo ciclos cerrados al momento de colapsar, esto en efecto es posible porque K es contractil, en efecto, extendiendo el campo vectorial gradiente generado en K_1 sobre K , notemos que este genera un matching completo sobre $K \setminus K_1$. Así, al unir ambos matchings obtenemos un matching de Morse para todo K que en efecto lo contrae a un punto. \square

Los argumentos antes expuestos establecen una pregunta interesante, ¿Será posible extender esta idea para una relación de equivalencia, no necesariamente un matching? En efecto, estos argumentos se pueden implementar para relaciones de equivalencia, pero con ciertas restricciones. Sea \sim una relación de equivalencia en K cuyas clases de equivalencia en $P(K)$ son intervalos. Suponga que $P(K)/\sim$ es acíclico. Entonces existe una función de Morse discreta en K cuyos símlices críticos son exactamente aquellos que están solos en sus respectivas clases de equivalencia.

TEOREMA 28. *Sea \sim una relación de equivalencia en un complejo simplicial K cuyas clases de equivalencia son intervalos en $P(K)$ y además $P(K)/\sim$ es acíclico. Entonces existe una función de Morse discreta en K cuyos símlices críticos son aquellas clases de equivalencia con un solo representante.*

DEMOSTRACIÓN. Tenemos que $P(K)$ es un conjunto parcialmente ordenado basado en K y que K es cerrado bajo la inclusión. Cada intervalo $[\sigma, \tau]$ en $P(K)$ se comporta como un álgebra booleana con $|\tau \setminus \sigma|$ átomos. Si esta álgebra booleana es no trivial, construya los siguientes matching totales en él: Para algún $v \in \tau \setminus \sigma$, empareje ρ con $\rho \cup \{v\}$, para todo ρ que no contiene a v .

Pongamos estos emparejamientos (para las clases de equivalencias no triviales modulo \sim) juntos. Esto genera un matching M en $P(K)$, tal que M y \sim deja los mismos símlices sin emparejar. Ahora, cualquier ciclo dirigido en $P(K)/M$ debe estar contenido en una clase de equivalencia modulo \sim , ya que si no fuera así se generaría un ciclo dirigido en $P(K)/\sim$, el cual

asumimos es acíclico. Pero cualquier arco en $[\sigma, \tau]$ baja una dimensión, luego la preimagen en $[\sigma, \tau]$ de ciclo minimal contenido en $[\sigma, \tau]/M$ sería de la forma

$$\rho_1 \rightarrow \rho_2 \cup \{v\} \leftarrow \dots \rightarrow \rho_k \cup \{v\} \leftarrow \rho_k \rightarrow \rho_1 \cup \{v\}$$

donde cada ρ_i es distinto y ninguno contiene a v . Pero ya que hay un arco $\rho_k \rightarrow \rho_1 \cup \{v\}$, entonces tenemos que $v \in \rho_k$ o $\rho_k = \rho_1$, lo que genera una contradicción. Luego por el teorema anterior, se tiene que existe un campo vectorial gradiente cuyos símplex críticos son los símplex sin emparejar en M , y así para los de \sim .

□

Luego a la relación \sim le daremos el nombre de matching de Morse generalizado.

2.3. Colapsos Equivariantes a los complejos de Morse

Con la noción de matching de Morse generalizado, vamos a construir una generalización para obtener una teoría de Morse discreta para G -complejos simpliciales.

DEFINICIÓN 29. Sea σ una cara propia de un símplex κ , el dual de σ con respecto a κ está definido por $\sigma_\kappa^* := \kappa \setminus \sigma$.

OBSERVACIÓN 30. En este contexto, σ y κ se refieren a símplexes abstractos, en vez de sus realizaciones geométricas, luego σ_K^* es una cara de K y σ y σ_κ^* contienen todos los vértices de κ .

DEFINICIÓN 31. Sea σ una cara propia de κ . Definimos $P_\kappa(\sigma)$ como la unión de todas las caras maximales de κ que contienen a σ .

LEMA 32. Sea K un subcomplejo simplicial de dimensión $(n-1)$ del símplex $\Delta^{(n)}$ tal que $K \neq \partial(\Delta)$. Entonces K es un $(n-1)$ disco.

DEMOSTRACIÓN. Demostremos este hecho por inducción en n (La dimensión del símplex) y j (El número de celdas maximales de Δ en K): Si $n = 1$, se tiene un 1-símplex y por ende K es un punto. Si $j = 1$, entonces K es un $(n-1)$ -símplex, por lo que no queda nada que demostrar.

Supongamos que la afirmación se tiene para $n < m$, y en el caso de $n = m$ supongamos $j < k$, demostremos que la afirmación se tiene para $n = m$ y $j = k$: Sea v un vértice en K , tal que $\Delta \setminus v$ es una celda maximal contenida en K . Podemos descomponer K en dos partes, la celda maximal $\Delta \setminus v$ y su complemento que llamaremos K' . Notemos que K' tiene menos celdas maximales que K , luego por hipótesis de inducción, K se ve como la unión de dos $(n-1)$ -discos junto con la intersección $|K'| \cap |\Delta \setminus v|$.

Tenemos que la intersección entre K' y $\Delta \setminus v$ está en la frontera de ambos complejos simpliciales. Además, es un complejo simplicial cuyas celdas maximales son aquellas de dimensión $(n-2)$ en K' en las que v no pertenece. Luego, $|K'| \cap |\Delta \setminus v|$ es un complejo simplicial de dimensión $(n-2)$ del complejo $\Delta \setminus v$. Dado que v pertenece a K' y que $K' \neq \partial(\Delta)$, tenemos que $|K'| \cap |\Delta \setminus v| \neq \partial(\Delta \setminus v)$. Luego por hipótesis de inducción, $|K'| \cap |\Delta \setminus v|$. Luego K está conformado por dos $(n-1)$ -discos, K' y $\Delta \setminus v$, unidos por un $(n-2)$ -disco en su frontera. Entonces K es un $(n-1)$ -disco. \square

LEMA 33. *Si Δ es un n -simplex y σ es una cara propia de Δ , entonces $P_\Delta(\sigma)$ es un $(n-1)$ -disco, topológico.*

DEMOSTRACIÓN. Tenemos que σ es una cara propia de Δ , luego $P_\Delta(\sigma)$ es un subcomplejo simplicial de dimensión $(n-1)$ y además $P_\Delta(\sigma) \neq \partial(\Delta)$ puesto que de ser así, estaríamos afirmando que σ está contenido en todos los lados de Δ , por lo que contradice el hecho de que sea una cara propia. Luego por el lema anterior $P_\Delta(\sigma)$ es un disco topológico de dimensión $(n-1)$. \square

LEMA 34. *Para cualquier cara propia σ de K , $\partial(K) = P_K(\sigma) \cup P_K(\sigma_K^*)$, más aún,*

$$\partial(P_K(\sigma)) = \partial(P_K(\sigma_K^*)) = P_K(\sigma) \cap P_K(\sigma_K^*)$$

DEMOSTRACIÓN. Cualquier lado α de K tiene dimensión $n-1$, con $\dim(K) = n$, luego existe un vértice $v \in K$, tal que $\alpha = K \setminus v$. Si $v \in \sigma$ entonces $\alpha \in P_K(\sigma_K^*)$, en el caso contrario, $\alpha \in P_K(\sigma)$. Dado que cada punto de $\partial(K)$ está en algún lado de K , se tiene que $\partial(K) = P_K(\sigma) \cup P_K(\sigma_K^*)$.

Ahora, notemos que ningún lado $K \setminus v$ de K puede estar en $P_K(\sigma)$ y en $P_K(\sigma_K^*)$, ya que de ser así, tendríamos que $v \in \sigma \cap \sigma_K^* = \emptyset$. Luego $P_K(\sigma)$ y $P_K(\sigma_K^*)$ tienen interiores disjuntos, así cualquier punto en $P_K(\sigma) \cap P_K(\sigma_K^*)$ está en la frontera de los dos. Ahora, la frontera de $P_K(\sigma)$ y $P_K(\sigma_K^*)$ está compuesta por $(n-2)$ -celdas que pueden ser escritas por $K \setminus \{v, \omega\}$ con $v \in \sigma$ y $\omega \in \sigma_K^*$ y está contenida en $K \setminus v \in P_K(\sigma_K^*)$ y $K \setminus \omega \in P_K(\sigma)$. Luego

$$\partial(P_K(\sigma)) = \partial(P_K(\sigma_K^*)) = P_K(\sigma) \cap P_K(\sigma_K^*)$$

\square

PROPOSICIÓN 35. *Sea σ una cara propia de K , entonces K se colapsa en $P(\sigma_K^*)$. Más aún, sea g una permutación de los vértices de K , con $g\sigma = \sigma$, extienda g linealmente al simplex geométrico $|K|$.*

Entonces, el colapso $c : |K| \times I \rightarrow |K|$ se puede escoger de tal manera que $c(x, 0) = x$, $c(x, 1) \in P_K(\sigma_K^)$ y $gc(x, s) = c(gx, s)$ para cualquier $x \in K$ y $0 \leq s \leq 1$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea b el baricentro de σ y b^* el baricentro de σ_K^* . Se afirma que cualquier punto $x \in |K|$ puede ser escrito como $tb + (1-t)x^*$ donde $x^* \in P_K(\sigma_K^*)$ y $0 \leq t \leq 1$.

Pero cualquier punto en $|\sigma|$ puede ser escrito de esta forma, dado que $\partial(\sigma) \subseteq P_K(\sigma_K^*)$. Además, cualquier punto de $|\sigma_K^*|$ también tiene esa propiedad ya que $\sigma_K^* \subseteq P_K(\sigma_K^*)$. Cualquier combinación convexa de puntos en $|\sigma|$ y $|\sigma_K^*|$ puede ser escrita de esta forma y la afirmación está probada, dado que $|\sigma|$ y $|\sigma_K^*|$ generan a $|K|$ de manera convexa.

Definamos $C(x, s) = t(sb^* + (1-s)b) + (1-t)x^*$. En terminos más claros, C está definida por b al ser colapsada en b^* y este colapso es lineal.

Tenemos que $C(x, 0) = tb + (1-t)x^* = x$ y $C(x, 1) = tb^* + (1-t)x^*$, donde $C(x, 1)$ es una combinación convexa de dos puntos en una $(n-1)$ -celda que contiene a x^* , dado que $x^* \in P_K(\sigma_K^*)$. Luego $C(x, 1)$ pertenece a la misma $(n-1)$ -celda en la que está x^* y también en $P_K(\sigma_K^*)$.

Por último, consideremos la permutación de los vértices g . Entonces tenemos que

$$\begin{aligned} g(C(x, s)) &= g(t(sb^* + (1-s)b) + (1-t)x^*) \\ &= t(sg(b^*) + (1-s)g(b)) + (1-t)g(x^*) \end{aligned}$$

como tenemos que g es una permutación de los vértices, mantiene la estructura simplicial de K . Entonces los baricentros de cada estructura se mantienen, es decir, $g(b) = b$ y $g(b^*) = b^*$. Luego

$$\begin{aligned} g(C(x, s)) &= t(sg(b^*) + (1-s)g(b)) + (1-t)g(x^*) \\ &= t(sb^* + (1-s)b) + (1-t)g(x^*) \\ &= C(g(x), s). \end{aligned}$$

□

Dado un colapso generado a partir de un matching de Morse, notamos que muchas veces las celdas de dimensión menor se colapsan en celdas de dimensiones superiores, luego en la versión de la definición de GCW-complejo analizada anteriormente, debemos tomarnos un atrevimiento de considerar que

“Dado el esqueleto X_{n-1} , pegue productos torcidos $G \times_{H_\alpha} \Delta_\alpha^n$ a X_{n-1} mediante inclusiones G -equivariantes de sus fronteras, donde los H_α son subgrupos de G . Luego obtenemos X_n . “

Ya n no necesariamente es igual a dimensión de Δ^m .

Observemos por el siguiente teorema, que un matching de Morse generalizado produce un colapso de un complejo simplicial K al equivalente de un complejo de Morse.

TEOREMA 36. *Sea \sim un matching de Morse generalizado en un G -complejo simplicial finito K . Asumamos que \sim es G -equivariante, es decir, si $[\sigma, \tau]$ está en \sim entonces $[g\sigma, g\tau]$ está en \sim .*

Luego existe un GCW-complejo \mathbf{C} tal que las celdas de \mathbf{C} (consideradas como un CW-complejo, olvidando la acción de G) son exactamente los simplex en K que son críticas con respecto a \sim . Además, K es G -homotópicamente equivalente a \mathbf{C} .

DEMOSTRACIÓN. Sabemos que \sim es un matching de Morse generalizado, luego $P(K)/\sim$ es acíclico. Luego $P(K)/\sim$ puede ser considerado como un conjunto parcialmente ordenado, con $w > v$ si existe un camino de v a w .

Dado que \sim es G -equivariante, G actúa en $P(K)/\sim$. Dado que $P(K)/\sim$ es finito, no se puede dar el caso de que $v < gv$, considerando el conjunto $(-\infty, v] = \{w \in P(K) \mid w \leq v\}$, se tiene que el intervalo $g(-\infty, v] = (-\infty, gv]$ tiene el mismo tamaño que $(-\infty, v]$. Luego, si $w < v$, no existen $g, h \in G$ tales que $gv < hw$. Entonces podemos considerar el conjunto parcialmente ordenado $(P(K)/\sim)/G$, como $G[\sigma] < G[\tau]$ si y solo si existen $g, h \in G$ tales que $g[\sigma] < h[\tau]$.

Este conjunto parcialmente ordenado tiene una extensión lineal $v_0 < v_1 < \dots < v_M$ donde cada v_i es una órbita de intervalos $[\sigma, \tau]$ en $P(K)$.

Ahora, si σ pertenece a algún v_j , entonces se tiene que para cualquier cara propia ρ de σ , $\rho < \sigma$ en $P(K)$, luego ρ debe estar en algún v_i para $i \leq j$. Así para cualquier n se tiene

$$K_n := \bigcup_{k \leq n} \left(\bigcup_{[\sigma] \in v_k} \sigma \right)$$

es un subcomplejo de K .

Construyamos inductivamente las equivalencias homotópicas $K_j \simeq_G \mathbf{C}_j$ para algún complejo \mathbf{C}_i , construido de las celdas σ tales que $v_i = G\{\sigma\}$, para algún $i \leq j$. Esto se logrará poniendo ciertos colapsos juntos.

Todas las caras de elemento maximal de un intervalo en v_0 deben estar en el intervalo. Luego los intervalos en v_0 pueden contener a lo más una 0-celda, y todas estas serán críticas. Sea $\mathbf{C}_0 = K_0$ y sea este el colapso trivial.

Asumamos que hemos construido los colapsos de K_{m-1} . Si $v_m = G\{\sigma\}$, los $g\sigma$ son críticos y así

$$K_m = K_{m-1} \cup_{G \times \partial(\sigma)} G \times \sigma \simeq_G \mathbf{C}_{m-1} \cup_{G \times \partial(\sigma)} G \times \sigma := \mathbf{C}_m$$

donde las homotopías extienden la homotopía $K_{m-1} \simeq_G \mathbf{C}_{m-1}$.

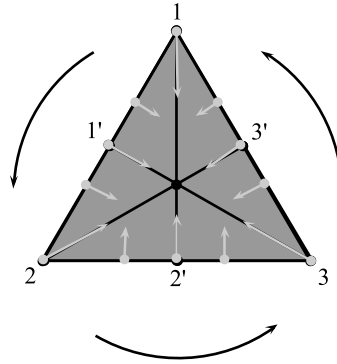
Ahora, asumamos que $v_m = G[\rho, \sigma]$, donde $\rho \neq \sigma$. Dado que \sim es G -equivariante, cualquier elemento del grupo que fija a σ , fija a ρ . Luego podemos aplicar el colapso (Teorema por revisar) en cada intervalo en v_m y obtener que $K_m \searrow K_{m-1} \simeq \mathbf{C}_{m-1}$.

Dado que existe n tal que $K_n = K$, se obtiene que $K \simeq_G \mathbf{C}_n := \mathbf{C}$, y este es un complejo con una p -celda por cada p -simplex crítico en K con respecto a \sim .

□

EJEMPLO 37. Considerando los ejemplos 20 y 22, tenemos que un campo vectorial gradiente en el ejemplo 20 para el 2-simplex bajo la acción de \mathbb{Z}_3 , no sirve para mostrar un colapso equivariante, más aún, no hay un colapso para el 2-simplex, excepto el que hace que todas sus celdas sean críticas.

En el caso de la división baricentrica del 2-simplex, notamos que existe una celda que es un punto fijo, su baricentro, entonces podemos crear un campo vectorial gradiente equivariante de la siguiente forma: Como tenemos los ciclos de los vértices $\{1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1\}$ y $\{1' \rightarrow 2' \rightarrow 3' \rightarrow 1'\}$

FIGURA 2.3.1. Campo vectorial gradiente inducido por el matching M .

bajo la acción de \mathbb{Z}_3 , creamos el matching

$$M = \{\{i, (i, b)\}, \{i', (i', b)\}, \{(i, i'), (i, i', b)\}, \{(i, (i-1)'), (i, (i-1)', b)\} \mid i = 1, 2, 3\}$$

. Notemos por los ciclos que se dan por los vértices, el matching es invariante bajo la acción de \mathbb{Z}_3 . Además, no puede tener ciclos cerrados, puesto que todo posible camino termina en b . Luego tenemos un colapso equivariante de la división baricéntrica de Δ^2 en b .

Espacio de Árboles Filogenéticos

Esta parte está dedicada a entender el espacio de árboles filogenéticos, el cual es un complejo simplicial donde cada punto del complejo representa un árbol con ciertas propiedades. Luego, empezaremos por hacer una introducción a los árboles filogenéticos y revisaremos algunas de sus características, que utilizaremos para la construcción del espacio de árboles.

DEFINICIÓN 38. Un árbol es un grafo donde cada par de vértices están conectados por un único camino en el que no se repiten los vértices.

Los vértices de grado 1 serán llamados *hojas*, una arista adyacente a una hoja, se denomina *arista libre*. Las aristas que no son libres son llamadas *bordes internos del árbol* y los vértices que no son libres serán llamados *nodos*. Un árbol se denomina *arraigado* si un vértice es denominado *raíz*, de donde el árbol es dotado de una dirección natural, que es 'dirigirse a' o 'alejarse de' dicho vértice.

Para $n \geq 2$, se define un n -árbol como un árbol en el que cada una de sus hojas están etiquetadas con el conjunto $[n] := \{1, \dots, n\}$ y cada borde interno α tiene una longitud asignada $l(\alpha)$, donde $0 < l(\alpha) \leq 1$.

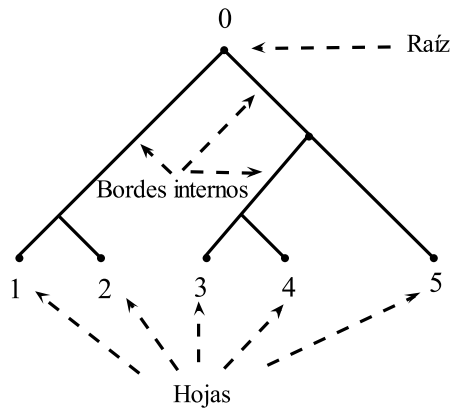


FIGURA 3.0.1. Un 5-árbol.

OBSERVACIÓN 39. Para fines prácticos, consideraremos n -árboles con raíz, y esta raíz tendrá pegada una arista con un vértice etiquetado 0 y considerada otra hoja del árbol. Es decir, las etiquetas que el n -árbol tendrá estarán dadas por el conjunto $\{0, 1, \dots, n\}$.

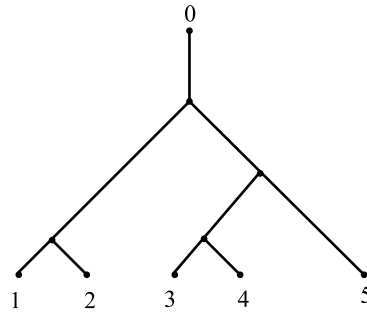


FIGURA 3.0.2. Árbol colgado de su raíz.

Notemos que el mismo árbol puede encajarse en el plano de maneras distintas, como podemos observar en la figura 3.0.3.

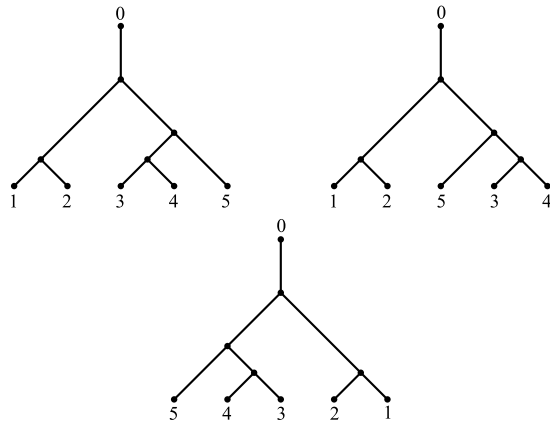
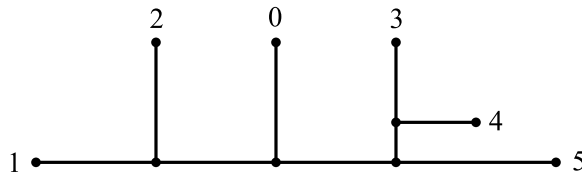
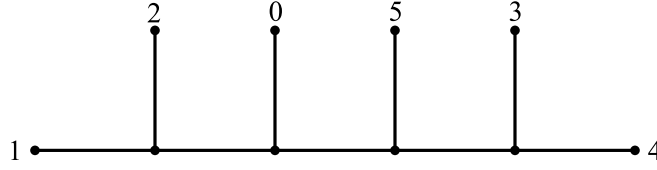


FIGURA 3.0.3. Tres árboles iguales.

Otra representación que tiene este árbol será “enderezarlo”, la llamaremos una *oruga derivada de un árbol*. Esta consta de los mismos bordes internos y nodos que el árbol original. Recordemos el árbol de la figura 3.0.3, la oruga asociada a este es



También puede ser representado de la forma



ya que nos interesa más la información que este captura que la forma de la oruga en sí.

Los siguientes teoremas, junto con los resultados posteriores, nos dará una descripción más detallada del espacio de árboles filogenéticos.

TEOREMA 40. *Sea T un n -árbol binario, es decir, que cada nodo tiene grado 3. Entonces el número de bordes internos del árbol T es $n - 2$.*

DEMOSTRACIÓN. Demostremos este hecho por inducción sobre n , el número de hojas del árbol T . En el caso $n = 2$ este no tiene bordes internos. Supongamos este hecho para los n -árboles. Sea T un árbol con $n + 1$ hojas, y consideremos el árbol T' que se obtiene al remover las aristas libres asociadas a un nodo de T . Entonces, el nodo sin sus hojas se convierte en una hoja. Luego obtenemos que T' es un n -árbol y así, por hipótesis de inducción, tiene $n - 2$ bordes internos. Luego el número de bordes internos en T es el número de bordes que tiene el árbol T' más el borde interno que se obtiene al agregar las arista libres que removimos, luego el número de bordes internos de T es $n - 1 = (n + 1) - 2$.

□

El espacio de árboles filogenéticos está creado a partir de los n -árboles, propiamente hablando, de los árboles “desarrollados”, es decir, de los árboles de n hojas, tales que la suma de las longitudes de bordes internos es 1.

Para su construcción consideremos un n -árbol binario T , con bordes internos a_1, a_2, \dots, a_{n-2} . Cada uno de estos bordes internos tiene asignado una longitud, por lo que podemos construir el vector de longitudes $(l(a_1), l(a_2), \dots, l(a_{n-2})) \in (0, \infty)^{n-2}$. Notemos que por cada n -árbol obtenemos un ortante abierto de dimensión $n - 2$. Ahora, si colapsamos uno de los bordes internos a_i del árbol, podemos representarlo a partir del vector

$$(l(a_1), l(a_2), \dots, l(a_{i-1}), 0, l(a_{i+1}), \dots, l(a_{n-2})) \in [0, \infty)^{n-2}.$$

Luego podemos observar que cada punto en la frontera de $(0, \infty)^{n-2}$ representa un árbol de n -hojas con al menos uno de sus bordes internos colapsados. Así, cada punto en un ortante representa a un árbol que tiene la forma de T , pero las distancias de sus bordes internos no son las mismas. Luego obtenemos un ortante por cada n -árbol binario posible, y uniendolos por sus caras en común. Este conjunto es denominado \mathcal{T}_n , donde cada punto representa un árbol filogenético.

Luego en cada ortante consideramos los árboles tales que $l(a_1) + l(a_2) + \dots + l(a_{n-2}) = 1$. Notamos que este conjunto es el espacio de árboles totalmente desarrollados y este es la base del espacio de árboles filogenéticos, denotado por \mathbf{T}_n . Observemos, que para el caso $n = 3$,

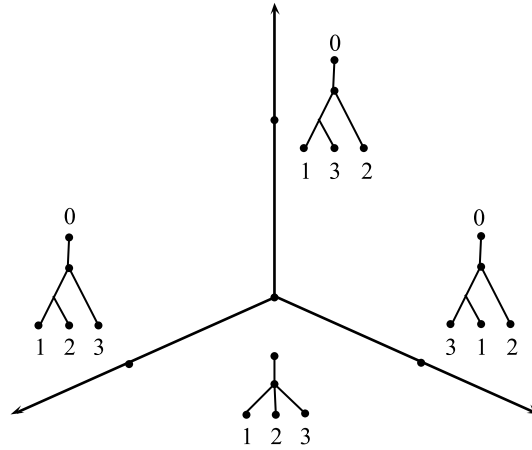


FIGURA 3.0.4. Cono de ortantes para el caso de los 3-árboles, \mathcal{T}_3 .

obtenemos 3 árboles y no podemos construir un camino dentro del espacio de un árbol a otro, como podemos ver en los puntos resaltados de la figura 3.0.4. Para $n > 3$, notemos que cada ortante está unido a otro por su frontera, más aún, la ecuación

$$l(a_1) + l(a_2) + \dots + l(a_{n-2}) = 1$$

determina un $(n - 3)$ -simplex en cada ortante, cada facet del simplex se intersecta con otros 3 simplex en otros ortantes, y así, a partir de caminos dentro del espacio \mathbf{T}_n , podemos ir de un árbol a otro, donde cada camino representan contracciones y dilataciones de algunas aristas internas y movimientos de los nodos.

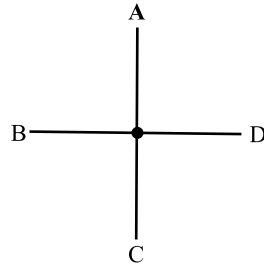
En \mathbf{T}_n , cada simplex es una colección de árboles donde su tipo combinatorio de estos es el mismo pero las longitudes de las aristas internas varían. Luego, por la ecuación $l(a_1) + l(a_2) + \dots + l(a_{n-2}) = 1$, notemos que si cada distancia es distinta de cero, entonces representa un punto en el interior de un símplex de dimensión $n - 3$, y si tenemos k componentes nulas, nos encontraremos en el borde del simplex, exactamente en una cara de dimensión $(n - 3) - k$. Hechas estas consideraciones, tenemos la siguiente afirmación.

AFIRMACIÓN 41. \mathbf{T}_n puede ser triangulado como un complejo simplicial puro de dimensión $n - 3$. Además, cada $(n - 4)$ -símplex en \mathbf{T}_n es una cara propia de exactamente 3 símplexes maximales.

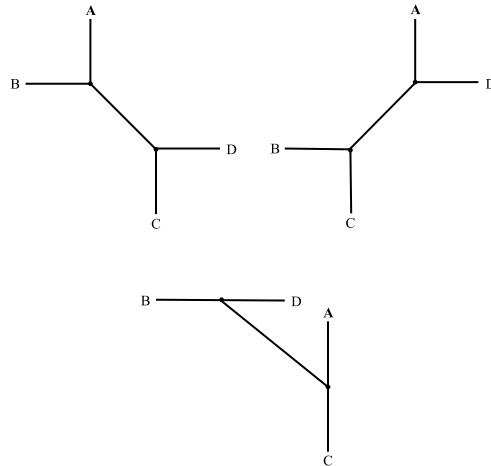
DEMOSTRACIÓN. Los símplexes de esta estructura son los siguientes: Los vértices representan a los árboles que tienen solamente un borde interno de longitud 1. Por cada árbol binario $T \in \mathbf{T}_n$, podemos obtener $\binom{n-2}{1} = n - 2$ vértices (Que representa escoger un borde interno de T y encoger el resto). Cada arista o 1-símplex está representado por la manera en que se puede, a partir de contracciones de un borde interno y elongaciones de otro, luego tenemos $\binom{n-2}{2}$. Cada i -cara del símplex representa una clase de equivalencia de árboles totalmente desarrollados, que preservan las etiquetas pero donde las longitudes de los bordes internos cambian y el número

de bordes internos presentes determinan la dimensión de la cara, donde su número está dado por $\binom{n-2}{i}$ para cada árbol. Los símplexes maximales corresponden a los árboles con el máximo número de nodos, y en este, cada nodo tiene grado 3. Tenemos que cada árbol con $(n-2)$ bordes internos en \mathbf{T}_n , representa un punto interno de un símplex de dimensión $(n-3)$ y cualquier árbol con menos de $n-2$ bordes internos está contenido en la frontera del símplex.

Tenemos un árbol $T \in \mathbf{T}_n$. Un árbol que tiene $n-3$ bordes internos posee un nodo que tiene grado 4 y todos sus otros nodos tienen grado 3. Basándonos en el vértice de grado 4, encontramos la siguiente situación



Donde, **A**, **B**, **C** y **D** representan partes del árbol T . Luego, podemos expandir el nodo indicado, agregando un borde interno, de las siguientes formas



En cada dibujo, se representa un árbol con $n-2$ bordes internos, por lo que el símplex que representa el árbol inicial se encuentra en el borde de 3 símplex maximales.

□

Debemos determinar el número de tipos combinatoricos de árboles binarios con n hojas, ya que estos van a decirnos el número de símplex maximales por los cuales podremos armar el espacio \mathbf{T}_n .

AFIRMACIÓN 42. El número de n -árboles binarios, t_n , está dado por la ecuación

$$(2n - 3)!! = \frac{(2n - 2)!}{2^{n-1}(n - 1)!} = (2n - 3) \times (2n - 5) \times \cdots \times 5 \times 3$$

DEMOSTRACIÓN. Para determinar t_n lo haremos por un proceso recursivo. Dado un $(n - 1)$ -árbol binario G , construiremos los posibles n -árboles binarios, agregando una arista libre con la etiqueta n , encontramos los siguientes casos:

- Colgamos el árbol de su raíz y luego unimos la arista libre a la raíz del árbol. De donde obtenemos solamente un árbol.

- Conectarlo a las aristas libres, a un punto del interior de la arista. Luego obtenemos $n - 1$ árboles a partir de G .

- Conectarlo a sus bordes internos, al interior de cada arista. Donde obtenemos $(n - 1) - 2 = n - 3$ árboles distintos.

Ahora el número de n -árboles binarios está dado por $t_n = (2n - 3)t_{n-1}$. Sucesivamente obtenemos que $t_{n-1} = (2(n - 1) - 3)t_{n-2} = (2n - 5)t_{n-2}$. Si continuamos con este procedimiento obtenemos $t_k = (2(k - 1) - 1)t_{k-1}$, para $k = 2, 3, \dots, n - 2$.

Así,

$$\begin{aligned} t_n &= (2n - 3)t_{n-1} \\ &= (2n - 3)(2n - 5)t_{n-2} \\ &\vdots \\ &= (2n - 3) \times (2n - 5) \times \cdots \times 5 \times 3 \end{aligned}$$

□

EJEMPLO 43. Para el caso $n = 4$, tenemos que el espacio \mathcal{T}_n está generado por cuadrantes (Semiplanos de dimensión 2) positivos, es decir duplas de números mayores o iguales que cero. Este espacio está generado por $(2n - 3)!! = (5)!! = 15$ cuadrantes, cada uno representando un árbol binario de 4 hojas. Para construir \mathbf{T}_4 , tenemos que cada árbol binario representa una celda maximal de dimensión 1. Luego el espacio es un complejo simplicial de dimensión 1, donde cada símplex de dimensión 0 se encuentra en exactamente 3 aristas. Teniendo en cuenta esto, obtenemos que el espacio \mathbf{T}_4 está representado por el grafo de Petersen

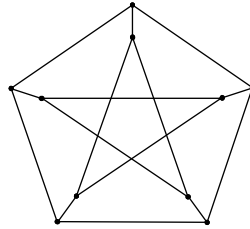
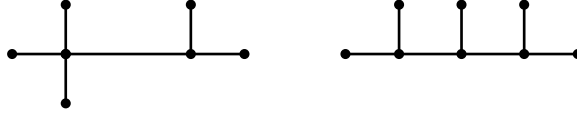


FIGURA 3.0.5. \mathbf{T}_4 , el grafo de Petersen.

donde cada uno de los vértices y aristas, respectivamente, que se encuentran en el grafo de Petersen representan árboles en forma de oruga de la siguiente forma



donde varían simplemente las etiquetas, puestas de manera razonable para no poner árboles repetidos. Además, notemos que si movemos una de las aristas del primer grafo a través de su borde libre, obtenemos uno de los tres posibles casos de las aristas que contienen a ese vértice. Esta perspectiva que tenemos a partir de las orugas nos permite determinar lo siguiente: De la primera oruga que tenemos de la imagen anterior, podemos notar que hace una partición del conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ dada por los conjuntos $\{i_0, i_1, i_2\}$ y $\{i_3, i_4\}$ al notar que al lado izquierdo y derecho se forman subconjuntos de etiquetas, donde $i_j \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ y cada etiqueta no se repite. Luego, si queremos construir un árbol binario, trasladamos una arista de la parte del árbol que tiene más de dos hojas, por lo que obtenemos que entre dos vértices de \mathbf{T}_4 , existe una arista dadas dos particiones del conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4\}$, digamos $\{A, B\}$ y $\{A', B'\}$ donde cada conjunto tiene cardinal por lo menos 2 y se tiene que al menos uno de los siguientes conjuntos

$$A \cap A' \quad A \cap B' \quad B \cap A' \quad B \cap B'$$

es no vacío. Notamos que esto establece una relación entre los vértices de \mathbf{T}_4 . En general, esto nos permite dar la siguiente definición.

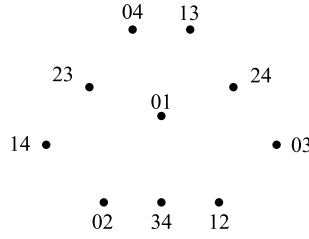
DEFINICIÓN 44. Fijemos un entero n . Consideremos el grafo G donde cada vértice está representado por el conjunto de todas las parejas no ordenadas de la forma $\{A, B\}$ donde este conjunto es una partición del conjunto $\{0, 1, \dots, n\}$, tal que $\min\{|A|, |B|\} \geq 2$. Dos vértices $\{A, B\}$ y $\{A', B'\}$ son adyacentes si y solo si se tiene que al menos uno de los siguientes conjuntos

$$A \cap A' \quad A \cap B' \quad B \cap A' \quad B \cap B'$$

es no vacío. Defina \mathbf{T}_n como el complejo simplicial cuyos simplices son los cliques (subgrafos completos) de G .

TEOREMA 45. *El complejo simplicial de la definición es el espacio de árboles filogenéticos \mathbf{T}_n .*

DEMOSTRACIÓN. Notemos que el conjunto de todas las parejas $\{A, B\}$ que son las particiones del conjunto representan grafos con solo un borde interno y al lado de cada uno de sus nodos encontramos tantas aristas libres como elementos en A y B , con sus respectivas etiquetas. Entonces cada partición representa una de los 0-simplices en \mathbf{T}_n . Recíprocamente, cada vértice en \mathbf{T}_n es un árbol caracterizado por una oruga con un borde interno y cada lado de estos representa una partición del conjunto $\{0, 1, \dots, n\}$. Luego hay una relación biunívoca entre estos elementos.

FIGURA 3.0.6. Vértices de \mathbf{T}_4 , obtenidos por la definición 41.

Sean $\{A, A^c\}$ y $\{B, B^c\}$ dos particiones de $\{0, 1, \dots, n\}$ con las características de la definición anterior, tales que son adyacentes. Entonces existe una intersección de la lista, afirmemos sin pérdida de generalidad, $A \cap B$ distinta de vacío. Consideremos los elementos en A que no se encuentran en la intersección de $A \cap B$. Entonces ellos se encuentran en B^c , entonces construyamos un árbol a partir de esa arista, representado por una oruga de la siguiente forma: Notemos que podemos construir la partición $\{B, B^c\}$ al enviar los elementos de A que no se encuentran en $A \cap B$ a A^c , así construimos B^c . Entonces esta arista entre las particiones puede ser representado como un árbol con 2 bordes internos, tal que en un extremo podemos encontrar las etiquetas $A \cap B$, recorriendo el nodo asociado a estas aristas libres, encontramos otro nodo, que está sujeto a las hojas de A que no se encuentran en $A \cap B$. Si seguimos recorriendo el camino generado por los dos bordes internos llegamos a otro nodo donde está A^c . Recíprocamente, podemos hacer la misma construcción de la partición $\{B, B^c\}$ a la partición $\{A, A^c\}$.

Luego las aristas entre los conjuntos $\{A, A^c\}$ y $\{B, B^c\}$, están representadas por árboles de dos bordes internos con etiquetas dadas por los conjuntos $A \cap B$, $A \setminus (A \cap B)$ y A^c , que podemos darnos cuenta, que se obtiene al contraer todos los bordes internos de un n -árbol binario, excepto uno. Al mismo tiempo, tenemos que si tenemos la arista en \mathbf{T}_n , es un árbol con dos bordes internos, donde contraer el nodo de en medio de su oruga, manteniendo la condición de que el mínimo de aristas libres a cada extremo de la oruga que se obtiene es por lo menos 2. Luego también obtenemos que por cada arista generada por la relación entre particiones de la definición anterior hay un n -árbol con dos bordes internos, y recíprocamente, por cada n -árbol con dos bordes internos encontramos una arista entre dos particiones. Así, tenemos un complejo simplicial de dimensión 1, con el mismo número de vértices que \mathbf{T}_n , además, tiene el mismo número de aristas, unidas de la misma forma que los 1-símplices de \mathbf{T}_n , con los vértices ahí. Luego el clique complex genera el espacio de árboles filogenéticos \mathbf{T}_n . \square

EJEMPLO 46. Podemos rectificar que el espacio \mathbf{T}_4 está constituido por el grafo de Petersen, considerando esta definición. Consideremos etiquetar, en el caso de \mathbf{T}_4 , los subconjuntos de dos elementos, que representarán los vértices del espacio. Solo consideramos los de dos elementos, puesto que su complemento con respecto al conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ nos dá el resto de la información del árbol que representa. Podemos ver el conjunto de vértices en la figura 3.0.6

Luego, a partir de la relación que definimos anteriormente, que existe una arista entre cada par de vértices si se tiene que dada la particiones $\{A, B\}$ y $\{A', B'\}$ se tiene que al menos uno

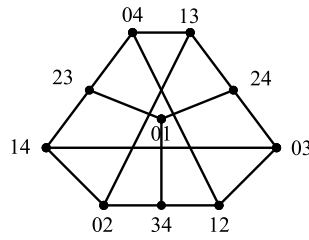


FIGURA 3.0.7. Otra representación de \mathbf{T}_4 .

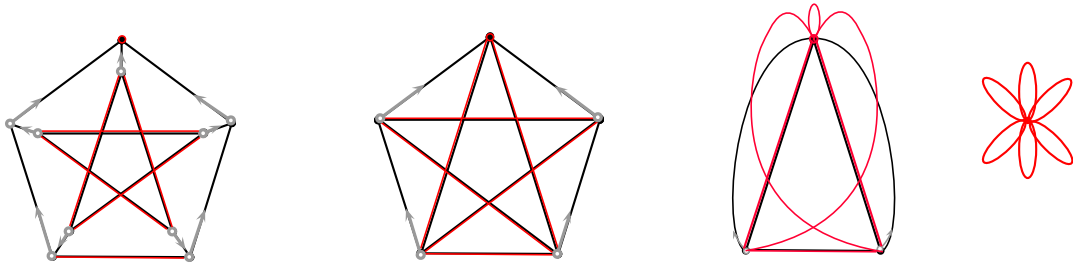


FIGURA 3.0.8. Colapso del espacio \mathbf{T}_4 .

de los siguientes conjuntos

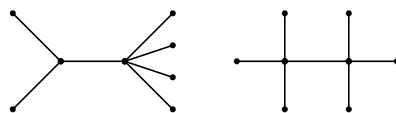
$$A \cap A' \quad A \cap B' \quad B \cap A' \quad B \cap B'$$

no es vacío, al verificar esas condiciones obtenemos el grafo mostrado en la figura 3.0.7 obteniendo otra representación del grafo de Petersen.

En este caso es sencillo construir un campo vectorial discreto para \mathbf{T}_4 , por lo que podemos ver en la figura 3.0.8 que este espacio es homotópicamente equivalente a un wedge de 6 esferas S^1 .

Los otros casos en los que $n > 4$, tenemos que el espacio de árboles filogenéticos es un complejo simplicial puro de dimensión $n-3$ en los que realizar este procediendo bajo $Vert(\mathbf{T}_n)$ no nos dará un complejo simplicial, pero obtendremos un grafo con el que podremos construir nuestro complejo simplicial deseado, obtenemos lo que se denomina *complejo clique* de \mathbf{T}_n , es decir, el 1-esqueleto de \mathbf{T}_n con el que podemos generarlo. Coincidentalmente, en el caso de \mathbf{T}_4 , su complejo clique y él son el mismo espacio.

Para casos superiores empezamos a tener un problema con esta técnica, ya que los vértices del complejo crecen a un nivel exponencial. Si analizamos el caso de $n = 5$, obtenemos 25 vértices, que representan 15 y 10 árboles, respectivamente, de la forma



cuyo complejo clique está representado por la figura 3.0.9.

y podemos observar en este caso, que reconstruir el complejo simplicial a partir del complejo clique es más complicado, al tener que el crecimiento de los vértices es exponencial (el número de vértices de \mathbf{T}_n en esta representación es $2^n - n - 2$) se complica la construcción de los espacios \mathbf{T}_n .

Luego debemos buscar nuevas técnicas para poder facilitar la construcción de los espacios. Luego debemos buscar nuevas técnicas para poder facilitar la comprensión del espacio de árboles filogenéticos. Nuestra herramienta principal será un Teorema de F. Ardila y C. Klivans que nos permitirá entender el espacio \mathbf{T}_n como (la parte propia) del orden complex del conjunto parcialmente ordenado de las particiones del conjunto $\{1, \dots, n\}$.

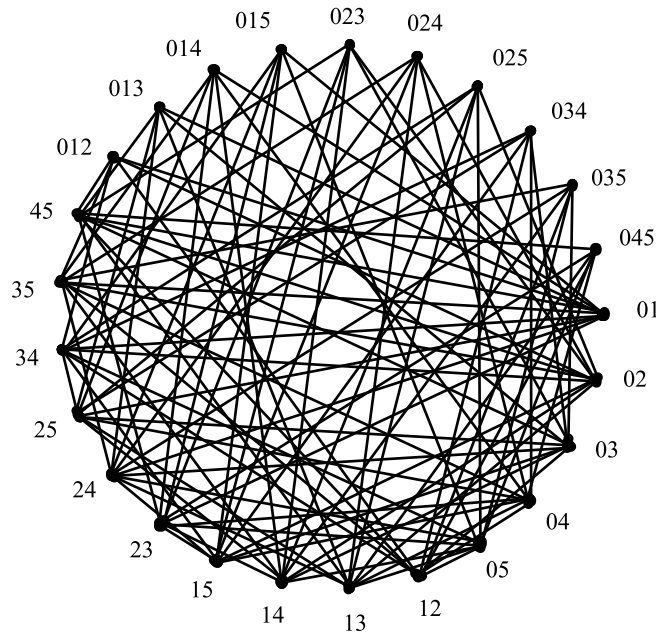


FIGURA 3.0.9. Complejo clique de \mathbf{T}_5

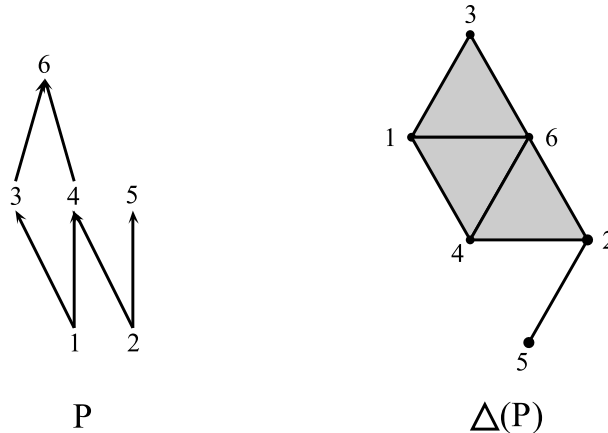
Shellings, EL-labelings y Teoría de Morse Discreta

Tenemos que todas las celdas maximales en el espacio de árboles filogenéticos de n hojas son simplex de dimensión $n - 3$. Aprovecharemos esto para poder construirlo, y más aún, poder hallar un colapso para este espacio. En esta sección estudiaremos como asociar un complejo simplicial a un orden parcial y usaremos esto junto con un teorema de F. Ardila y C. Klivans que relaciona el espacio de n -árboles filogenéticos con la parte propia del conjunto parcialmente ordenado de particiones de $[n]$.

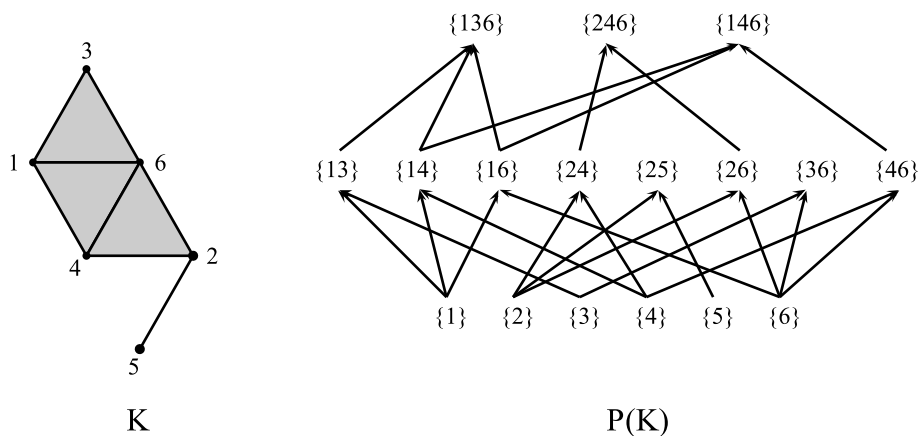
4.1. Shellings

DEFINICIÓN 47. Sean $P = (A, \prec)$ un poset y K un complejo simplicial. Denotemos $\Delta(P) = \Delta_{\prec}(A)$ el complejo simplicial que se genera de la siguiente forma: Cada elemento en A representa una 0-celda de $\Delta_{\prec}(A)$, y las cadenas de longitud m dadas por \prec crean las m -celdas donde sus vértices son los elementos en la cadena. A su vez, recordemos que $(P(K), <)$ es el orden parcial dado por la contención propia de sus celdas, es decir, si σ y κ están en K y $\sigma \subsetneq \kappa$, entonces la pareja $(\sigma, \kappa) \in P(K)$.

EJEMPLO 48. Dado el orden parcial P , obtenemos el complejo simplicial $\Delta(P)$.

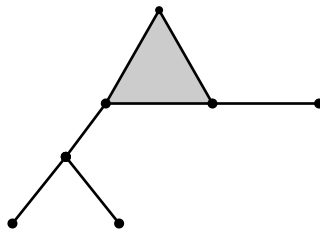


Análogamente, si tenemos el complejo simplicial K , obtenemos el orden parcial $P(K)$.



DEFINICIÓN 49. Sea K un complejo simplicial. Una *facet* o *faceta* de K es un simplex en K que no es cara de ningún simplex en K . Decimos que K es puro si todas sus facets tienen la misma dimensión.

EJEMPLO 50. Consideremos el siguiente complejo simplicial



este complejo tiene como facets todas sus aristas, excepto las que están en el 2-simplex. Notemos que no es puro, puesto que tiene facets de dimensiones distintas.

Notemos que el espacio de árboles filogenéticos de n hojas es un complejo simplicial puro de dimensión $n - 3$, por lo visto en el teorema 33.

DEFINICIÓN 51. Sea K un complejo simplicial puro.

1. El shelling de K es un orden total de las facets en K , digamos F_1, F_2, \dots, F_m tal que para toda facet F_k de K , la intersección

$$F_k \cap \left(\bigcup_{i < k} F_i \right)$$

consiste de la unión de caras propias maximales de F_k , o equivalentemente, F_k tiene una única cara minimal que no aparece en la unión de las caras anteriores.

2. Si F_1, \dots, F_m es un shelling de K , si existe una facet F_k tal que

$$F_k \cap \left(\bigcup_{i < k} F_i \right) = \partial(F_k)$$

decimos que F_k es una *facet de restricción* o *restriction facet*.

OBSERVACIÓN 52. Notemos que la definición de complejo simplicial puro no excluye los complejos simpliciales no conexos, es decir, podemos tener un shelling para una colección de complejos simpliciales puros disjuntos de la misma dimensión y para cada uno de estos un shelling. Un shelling para la unión de estos espacios sería la concatenación de los ordenes totales de cada uno de los shellings de cada complejo simplicial.

EJEMPLO 53. Sea G un grafo, notemos que este tiene un shelling: en efecto, supongamos, sin pérdida de generalidad, que tenemos un grafo conexo. Consideremos un árbol maximal abierto de este grafo, es decir, un árbol contenido en el grafo que tenga todos sus vértices y no tenga ciclos cerrados. Luego consideremos quitar una a una las aristas que no estén en ese árbol y dándole etiquetas que decrecen, luego de acabar con estas, empezamos a eliminar las hojas del árbol y así mismo etiquetándolas. Este proceso se detiene hasta que lleguemos a la raíz del árbol. Luego el shelling está dado por el proceso inverso, construir el árbol abierto maximal en el grafo y luego ir añadiendo las aristas que hacen crear ciclos cerrados.

En caso de que haya más de una componente conexa, haremos el mismo procedimiento por cada componente, obteniendo así un shelling para cualquier grafo.

Los shellings de un complejo simplicial puro nos dan una forma de construirlo, en una manera muy sencilla, ya que el mismo shelling nos dice cómo ir pegando las facets y la condición

$$F_k \cap \left(\bigcup_{i < k} F_i \right) \subseteq \partial(F_k)$$

para cada F_k en el shelling dice cómo va pegado cada simplex en la estructura que se había creado al unir las facets anteriores, algo similar a lo que sucedía con una función de Morse discreta f e ir construyendo el subcomplejo a partir de los simplex α tales que $f(\alpha) \leq c$, con $c \in \mathbb{R}$. Ahora, notemos la siguiente relación entre los shellings y las funciones de Morse discreta.

LEMA 54. *Sea K un complejo simplicial puro. Si K admite un shelling, entonces existe una función de Morse discreta cuyas celdas críticas son las restriction facets de K y un vértice por cada componente conexa de K .*

DEMOSTRACIÓN. Sea K un complejo simplicial puro, con el shelling $\{F_i \mid i \in I\}$, con I un orden total. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que K consta de una componente conexa, ya que en caso de tener más de una componente, podemos aplicar el procedimiento a cada una.

Mostremos que para cada facet en K que no es una restriction facet podemos crear un simplicial complex, en el que cada facet F_j se colapsa a las caras donde está pegado en $\left(\bigcup_{i < j} F_i\right)$.

Consideremos las facets en $\{F_i \mid i \in I\}$ que no son restriction facets, $\{F_i \mid i \in J\}$ con $J \subseteq I$. Aprovecharemos las caras propias de cada F_j que no están en $F_j \cap \left(\bigcup_{i < j} F_i\right)$, es decir, las caras propias de F_j que no estén contenidas en el paso anterior de la construcción del complejo simplicial. Vamos a realizar esto por inducción sobre la dimensión del complejo para las facets que no son de restricción excepto la primera en la lista, razón que será revelada posteriormente:

Para el caso $n = 1$, estamos en el caso de un grafo. Luego F_j es un 1-símplex y su cara propia es un vértice, llamémoslo f_k . Luego la única forma de construir un campo gradiente en cada una de estas celdas es de la forma $\{f_j, F_j\}$, luego esto sería un campo vectorial para el grafo.

Para el caso $n = 2$, notemos que pueden haber dos casos, ya que cada F_k tiene 3 caras propias maximales, al menos una debe estar sujeta al nuevo complejo. Luego, si F_k tiene solamente una cara libre, es decir, una arista f_k , construimos el campo vectorial $\{\{f_k, F_k\}\}$. En el caso de que tenga dos caras libres, tomemos una de las dos caras libres llamémosla $f_k^{(1)}$ y construimos la flecha $\{f_k^{(1)}, F_k\}$, luego la segunda cara puede ser considerada como un 1-símplex con uno de sus vértices de éste sujeto a la cara de F_k que se encuentra en $\bigcup_{i < k} F_i$. Luego estamos en el caso anterior, en el que tenemos un 1-símplex con uno de sus vértices “libre”, llamémoslo v , luego construimos la flecha $\{v, f_k^{(2)}\}$, obteniendo el campo vectorial $\{\{f_k^{(1)}, F_k\}, \{v, f_k^{(2)}\}\}$ para la facet F_k .

Supongamos que hemos revisado todos los casos para las facets de dimensión n de un complejo simplicial puro K . Ahora demostraremos para el caso $n + 1$:

En efecto, sea F_j una facet en $\{F_i \mid i \in J\}$ de dimensión $n + 1$, tenemos que al menos una cara de F_j no está pegada, luego podemos contraerla al interior de F_j . Entonces las caras restantes son símplex de dimensión n , luego para cada una podemos aplicar uno de los procesos de colapso del caso n , por hipótesis de inducción construimos un campo vectorial gradiente para cada símplex en $\{F_i \mid i \in J\}$.

Notemos que el campo vectorial gradiente del que dotamos a cada símplex en $\{F_i \mid i \in J\}$ los contrae a la parte de su frontera contenida en $\left(\bigcup_{i < j} F_i\right)$.

Ahora, construiremos el campo vectorial gradiente para K , la primera celda en el shelling es homotópicamente equivalente a un punto, luego lo dotaremos del campo vectorial gradiente que lo contrae a un punto. Luego para las siguientes celdas que no son restriction facets, aplicamos los posibles casos de campo vectorial gradiente correspondiente a su dimensión. Luego al contraer a partir del campo vectorial gradiente, la primera celda del shelling se convierte en el único vértice del CW complejo obtenido y estará conformado de un wedge de esferas por cada restriction facet sobre este vértice.

□

Como consecuencia del lema anterior podemos observar que si un complejo simplicial K admite un shelling, entonces es homotópicamente equivalente a un wedge de esferas de dimensión igual a la de K .

DEFINICIÓN 55. Un orden parcial P se dice *ranqueado* si toda cadena maximal en P tiene el mismo número de elementos. Equivalentemente, si $\Delta(P)$ es un complejo simplicial puro.

Notemos que si P es ranqueado, un shelling de $\Delta(P)$ es un orden total sobre las cadenas maximales de P , C_1, \dots, C_m tal que para todo j y todo $i < j$ existe $k < j$ que cumple las propiedades $C_i \cap C_k \subseteq C_i \cap C_j$ y $|C_j \cap C_k| = |C_k| - 1$. Recíprocamente, tenemos que si existe un orden en las cadenas maximales de un orden parcial ranqueado, podemos construir un shelling para el complejo simplicial $\Delta(P)$. Lo que se demuestra en el siguiente lema:

LEMA 56. *Sea P un orden parcial ranqueado. Un ordenamiento C_1, C_2, \dots, C_m de las cadenas maximales de P es un shelling para $\Delta(P)$ si y solo si para el ordenamiento de las cadenas maximales de P se tiene que para todo j se cumple que si $i < j$ existe $h < j$ tal que $C_i \cap C_j \subseteq C_h \cap C_j$ y $|C_h \cap C_j| = |C_j| - 1$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea C_1, C_2, \dots, C_m un ordenamiento de las cadenas maximales en P . Tenemos que cada cadena maxima representa una facet en $\Delta(P)$, llamemoslas K_1, K_2, \dots, K_m respectivamente.

Si el ordenamiento de las cadenas maximales de P genera un shelling para el complejo simplicial $\Delta(P)$, tenemos que el orden sobre sus facets satisfacen que

$$K_j \cap \left(\bigcup_{l < j} K_l \right) \subseteq \partial(K_j)$$

como la unión de caras maximales de K_j , para todo j en el conjunto de índices de las caras maximales de $\Delta(P)$.

Sea $i < j$, entonces $K_i \cap K_j$ está contenido en $\partial(K_j)$. Si $K_i \cap K_j$ es una cara maximal de K_j , tenemos que $|\text{Vert}(K_i) \cap \text{Vert}(K_j)| = |\text{Vert}(K_j)| - 1$. Luego $|C_i \cap C_j| = |C_j| - 1$. Haciendo $h = i$ obtenemos la propiedad deseada.

Démonos cuenta de que la forma de conseguir la unión de caras maximales de K_j a partir de las intersecciones $K_l \cap K_j$ es que las intersecciones que no sean caras maximales de K_j estén contenidas en las intersecciones que sean caras maximales de K_j . Si $K_i \cap K_j$ es una cara propia no maximal de K_j , supongamos que para todo $h < j$, $K_i \cap K_j \not\subseteq K_h \cap K_j$. Luego $K_j \cap \left(\bigcup_{l < j} K_l \right) = \bigcup_{l < j} (K_l \cap K_j)$ es la unión de caras maximales de K_j . Por otra parte,

$$\bigcup_{l < j} (K_l \cap K_j) = (K_i \cap K_j) \cup \left(\bigcup_{l \neq i < j} (K_l \cap K_j) \right).$$

Luego $K_j \cap \left(\bigcup_{l < j} K_l \right)$ sería unión de caras maximales de K_j con un simplex adicional de dimensión menor al de las facets de K_j dado por $K_l \cap K_j$, lo que sería un absurdo. Por lo que obtenemos el resultado deseado.

Recíprocamente, sea C_1, C_2, \dots, C_m un orden sobre las cadenas maximales tal que para todo j se cumple que si $i < j$ existe $h < j$ tal que $C_i \cap C_j \subseteq C_h \cap C_j$ y $|C_h \cap C_j| = |C_j| - 1$. Consideremos los símlices que representan las cadenas K_1, K_2, \dots, K_m . Tenemos que si para todo j , si $i < j$ existe $h < j$ $C_i \cap C_j \subseteq C_h \cap C_j$ y $|C_h \cap C_j| = |C_j| - 1$. Este hecho se traduce a los símlices de la siguiente manera: Sea K_j en la lista de complejos obtenida de las cadenas, para las intersecciones de $K_i \cap K_j$, para $i < j$, existe un símplex K_h menor que K_j en el orden heredado por las cadenas tal que la intersección de K_j y K_h es una cara maximal de K_j y esta contiene la intersección $K_i \cap K_j$. Luego al analizar la propiedad

$$K_j \cap \left(\bigcup_{l < j} K_l \right)$$

nos damos cuenta de que en efecto, para aquellas intersecciones que son caras propias no maximales de K_j éstas se encuentran contenidas en una cara maximal de K_j que se resalta por la intersección con un símplex que se encuentra por debajo en el orden generado por las cadenas maximales de P . Luego obtenemos que K_1, K_2, \dots, K_m es un shelling de $\Delta(P)$. \square

DEFINICIÓN 57. Sea P un poset tal que $|P| > 1$ y P posee un elemento máximo y mínimo, representados por M y m respectivamente. La *parte propia* del poset P se define al remover el elemento máximo y mínimo de P , denotado por $\bar{P} = P \setminus \{M, m\}$.

De la definición anterior y el lema anterior obtenemos el siguiente lema.

LEMA 58. *Sea P un poset ranqueado con máximo y mínimo. Entonces un shelling de $\Delta(P)$ generado de las cadenas maximales de P determina un shelling para $\Delta(\bar{P})$.*

DEMOSTRACIÓN. Tenemos una biyección natural entre P y \bar{P} , que remueve el máximo y el mínimo, M y m respectivamente, de P y de sus cadenas obteniendo \bar{P} . Sean C_1, \dots, C_k las cadenas maximales de P que generan un shelling de $\Delta(P)$ y C'_1, \dots, C'_k las cadenas que se obtienen al retirar el máximo y el mínimo de P . Sea C'_j en las cadenas maximales de \bar{P} , notemos que para todo $i < j$, existe $h < j$ tal que $C'_i \cap C'_j = (C_i \cap C_j) \setminus \{m, M\} \subseteq (C_h \cap C_j) \setminus \{m, M\} = C'_h \cap C'_j$. Además,

$$\begin{aligned} |C'_h \cap C'_j| &= |C_h \cap C_j| - 2 \\ &= (|C_j| - 1) - 2 \\ &= (|C_j| - 2) - 1 \\ &= |C'_j| - 1 \end{aligned}$$

Ya que se cumplen las condiciones del lema anterior, tenemos que el orden sobre las cadenas C'_1, \dots, C'_k , inducido por el orden en las cadenas maximales de P , generan un shelling para $\Delta(\bar{P})$. \square

A partir de la definición de orden parcial ranqueado y el lema 54 nos dispondremos a construir un shelling para el espacio $\Delta(P)$, usando una construcción que Björner en [3] dispone.

DEFINICIÓN 59. Para un orden parcial P , definimos el conjunto

$$C(P) := \{(x, y) \in P^2 \mid x < y \text{ y no existe ningún elemento entre } x \text{ y } y\}$$

Es decir, el conjunto $C(P)$ es el conjunto de parejas unidas por las aristas del diagrama de Hasse de P . Una cadena entre x y y ,

$$x = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = y$$

se dice *saturada* si no es posible adicionar un elemento entre dos elementos de la cadena, equivalentemente, si todas sus parejas consecutivas están en $C(P)$.

EJEMPLO 60. Dado el orden lineal usual en $[n] = \{1, \dots, n\}$, tenemos que $\Delta(P)$ consta solamente de un $(n-1)$ -simplex. $C(P) = \{(i, i+1) \mid 1 \leq i \leq n-1\}$ y en este caso, posee un shelling que consta solamente de él mismo.

DEFINICIÓN 61. Sean P y Λ ordenes parciales (usualmente $\Lambda = \mathbb{N}$). Un *labeling* de P (más formalmente, un labeling para las aristas del diagrama de Hasse de P) es una función $\lambda : C(P) \rightarrow \Lambda$. Una cadena saturada en P , $x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n$ se dice *ascendente con respecto a λ* si

$$\lambda(x_0, x_1) \leq \lambda(x_1, x_2) \leq \dots \leq \lambda(x_{n-1}, x_n)$$

Más adelante encontraremos labelings que serán de gran utilidad para el objetivo de esta sección.

DEFINICIÓN 62. Sea $\lambda : C(P) \rightarrow \Lambda$ un labeling. Decimos que λ es un *EL-labeling* si se dan las siguientes condiciones:

1. Para cualquier intervalo $[x, y]$ en P , tenemos que existe una única cadena ascendente con respecto a λ .
2. Dada la única cadena ascendente $x = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = y$ en el intervalo $[x, y]$, para cualquier $z \neq x_1$ tal que $x < z \leq y$ y la pareja $(x, z) \in C(P)$, se tiene que $\lambda(x, x_0) < \lambda(x, z)$.

Vamos a sacar provecho de los EL-labelings del diagrama de Hasse de P para poder construir shellings de $\Delta(P)$. Luego construir shellings para un complejo generado a partir de un orden parcial no es una tarea más que conseguir EL-labelings adecuados.

TEOREMA 63. *Sea P un orden parcial ranqueado y acotado (es decir, con elemento mínimo y máximo), $\lambda : C(P) \rightarrow \Lambda$ un EL -labeling. Entonces el complejo simplicial $\Delta(P)$ acepta un shelling.*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos el siguiente orden sobre el conjunto de cadenas maximales en P :

Sean $\mathbf{X} : x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n$ y $\mathbf{Y} : x_0 < y_1 < \dots < y_{n-1} < x_n$ dos cadenas maximales. Consideremos el orden parcial sobre las cadenas maximales de la siguiente forma $\mathbf{X} \triangleleft \mathbf{Y}$ si y solo si

$$(\lambda(x_0, x_1), \dots, \lambda(x_{n-1}, x_n)) <_{LEX} (\lambda(x_0, y_1), \dots, \lambda(y_{n-1}, x_n))$$

donde los vectores

$$(\lambda(x_0, x_1), \dots, \lambda(x_{n-1}, x_n)), (\lambda(x_0, y_1), \dots, \lambda(y_{n-1}, x_n)) \in \Lambda^n$$

y $<_{LEX}$ es el orden lexicográfico en Λ^n .

Comparemos un par de cadenas maximales en P , \mathbf{X} y \mathbf{Y} , con $\mathbf{X} \triangleleft \mathbf{Y}$. Sea k el mayor número tal que $x_i = y_i$ con $i = 1, \dots, k$ y $x_{k+1} \neq y_{k+1}$ y l el menor número tal que $l > k$ y $x_l = y_l$. Tenemos que $l - k \geq 2$, así usemos el intervalo $[y_k, y_l]$. Para todo $k < i < l$, tenemos que $x_i \neq y_i$. Luego la cadena $y_k < y_{k+1} < \dots < y_{l-1} < y_l$ no puede ser una cadena ascendente en $[y_k, y_l]$, ya que de ser así, $\mathbf{Y} \triangleleft \mathbf{X}$, lo que generaría una contradicción. Luego existe p con $k < p < l$ tal que $\lambda(y_{p-1}, y_p) > \lambda(y_p, y_{p+1})$.

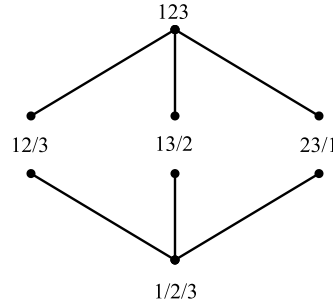
En el intervalo $[y_{p-1}, y_{p+1}]$ escojamos su cadena ascendente. Sea $z \in [y_{p-1}, y_{p+1}]$ tal que $z \neq y_p$ y $y_{p-1} < z < y_{p+1}$ es ascendente. Consideremos la cadena $\mathbf{Z} : x_0 < y_1 < \dots < y_{p-1} < z < y_{p+1} < \dots < y_{n-1} < x_n$ donde $\mathbf{Z} \triangleleft \mathbf{Y}$ y $\mathbf{Z} \cap \mathbf{Y} = \mathbf{Y} \setminus \{y_p\}$ y $\mathbf{X} \cap \mathbf{Z} \subseteq \mathbf{Z} \cap \mathbf{Y} = \mathbf{Y} \setminus \{y_p\}$. Luego por la observación 46. Tenemos que a partir del labeling hemos generado un shelling a partir del orden lexicográfico sobre las etiquetas de las cadenas maximales de P , lo que genera un orden sobre las facets de $\Delta(P)$. □

Luego, podemos construir un orden parcial en las cadenas maximales de un poset ranqueado y acotado P , a fin de construir un Shelling de $\Delta(P)$.

4.2. El orden parcial del conjunto de particiones de $[n]$

El siguiente teorema de F. Ardila y C. Klivans en [5] nos permite relacionar el espacio de árboles filogenéticos con el complejo simplicial asociado a la parte propia de un conjunto parcialmente ordenado:

TEOREMA. *(Ardila - Klivans) The order complex of the proper part of the partition lattice Π_n is a subdivision of the complex \mathbf{T}_n .*

FIGURA 4.2.1. Diagrama de Hasse de Π_3 .

Luego debemos concentrarnos en el espacio de particiones del conjunto $[n]$, Π_n y en su parte propia $\overline{\Pi_n}$.

DEFINICIÓN 64. Una partición del conjunto $[n] := \{1, \dots, n\}$ es un subconjunto de partes de $[n]$, donde todos los subconjuntos son disjuntos y cuya unión es $[n]$. El conjunto Π_n de particiones de $[n]$ tiene un orden parcial dado por refinamiento, es decir, dadas dos particiones $P, Q \in \Pi_n$, $P \preceq Q$ si y solo si todo bloque de Q es unión de bloques de P . Mientras más fina la partición, más pequeña es.

EJEMPLO 65. Consideremos el conjunto $[3] = \{1, 2, 3\}$. Entonces

$$\Pi_3 := \{\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}, \{\{1, 2\}, \{3\}\}, \{\{1, 3\}, \{2\}\}, \{\{2, 3\}, \{1\}\}, \{\{1, 2, 3\}\}\}.$$

Según el orden dado por \preceq , el diagrama de Hasse de (Π_3, \preceq) está dado por la figura 4.2.1. Notemos que los corchetes fueron eliminados, para mayor practicidad y cada bloque es separado por “ / ”, para poder visualizar los bloques de cada nivel de una manera más sencilla.

Ahora, necesitamos encontrar un EL-labeling para este espacio, oportunamente este se da en la siguiente definición.

DEFINICIÓN 66. El labeling de Gessel del poset Π_n se define como:

Si $P, Q \in \Pi_n$, con $P \prec Q$, con $(P, Q) \in C(\Pi_n)$, entonces existen exactamente dos bloques B_1 y B_2 en P que al unirse forman un bloque $B_1 \cup B_2$ en Q . Luego

$$\lambda: C(\Pi_n) \longrightarrow \mathbb{N}$$

se define por $\lambda(P, Q) = \max(\min B_1, \min B_2)$.

EJEMPLO 67. Consideremos el labeling de Gessel para Π_4 en la figura 4.2.2. Las etiquetas que se obtienen son $\{2, 3, 4\}$. Notemos que sea el camino que tomemos las etiquetas que da el labeling de Gessel no repite etiquetas y que cada camino del mínimo $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\}$ a

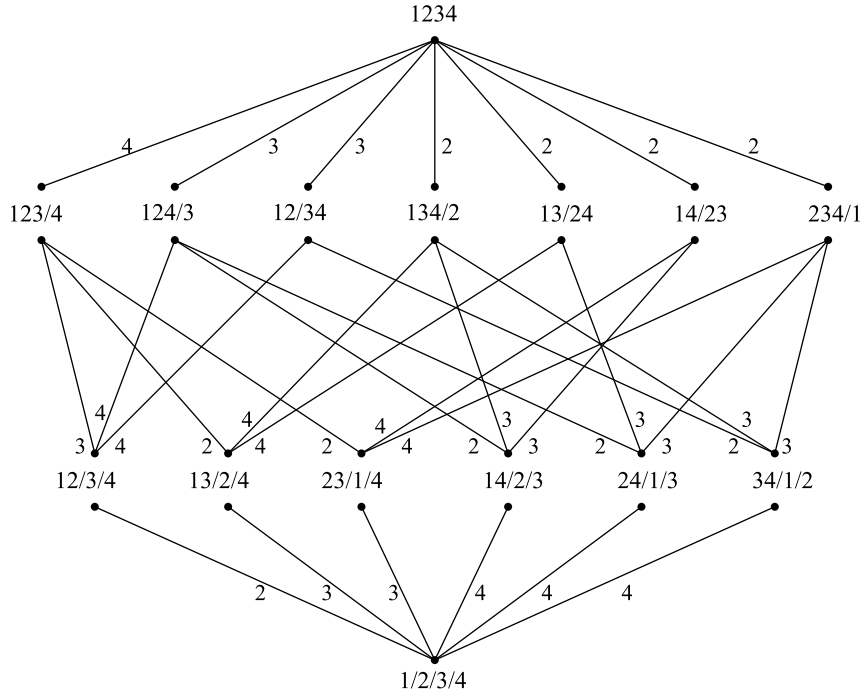


FIGURA 4.2.2. Diagrama de Hassel de Π_4 etiquetado con la función de Gessel.

$\{1234\}$ pudiera ser ordenado por el orden lexicográfico sobre el conjunto $\{2, 3, 4\}^3$, obviamente omitiendo las repeticiones.

Consideremos algunas propiedades del labeling de Gessel que serán útiles.

LEMA 68. Sean $\lambda : C(\Pi_n) \rightarrow \mathbb{N}$, el labeling de Gessel, y $P, Q, R \in \Pi_n$, tales que Q se crea al unir dos bloques en P , B_1 y B_2 , y R se genera al unir $B_1 \cup B_2$ con un bloque en P , B_3 . Entonces las etiquetas que se dan en el intervalo $[P, R]$ están dadas solamente por los mínimos de B_1 , B_2 y B_3 , a_1 , a_2 y a_3 , respectivamente. Más aun, si $a_1 < a_2 < a_3$, sus etiquetas se dan por a_2 y a_3 .

DEMOSTRACIÓN. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $a_1 < a_2 < a_3$.

Notemos que cualquier camino de P a R se construye a partir de unir los bloques B_1 , B_2 y B_3 . Luego, el orden en que los unamos nos dará distintas etiquetas y que la de los bloques de P que se repiten en R no aparecerán, puesto que al no unirlos, el labeling de Gessel no lo tendrá en cuenta.

Entonces las formas de obtener R a partir de P se dan en la manera que unamos los B_i , es decir, $(B_1 \cup B_2) \cup B_3$, $(B_1 \cup B_3) \cup B_2$ y $(B_2 \cup B_3) \cup B_1$, en cada caso respectivamente obtenemos las etiquetas

$$\begin{aligned} \max(\min B_1, \min B_2) &= a_2, & \max(\min(B_1 \cup B_2), \min B_3) &= a_3 \\ \max(\min B_1, \min B_3) &= a_3, & \max(\min(B_1 \cup B_3), \min B_2) &= a_2 \\ \max(\min B_2, \min B_3) &= a_3, & \max(\min(B_2 \cup B_3), \min B_1) &= a_2 \end{aligned}$$

aprovechando que cada bloque es disjunto y las propiedades del mínimo y el máximo. Tendremos que el mínimo más pequeño de esa lista no aparecerá en la lista de etiquetas, ya que por escoger el máximo entre dos mínimos, este siempre se descarta.

□

TEOREMA 69. *El labeling de Gessel, sobre el poset Π_n es un EL-labeling.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $[P, Q]$ un intervalo no vacío de Π_n con el orden \prec . Tenemos que cada bloque de Q se construye al unir bloques de P al igual que cada $R \in [P, Q]$. Al tener en cuenta que los bloques en P que no se utilizan para construir bloques en Q , no van a aportar etiquetas mediante el labeling de Gessel entonces podemos basarnos en particiones que no tienen ninguna parte en común.

Ahora, tenemos

$$P = \{A_1, \dots, A_m\}$$

$$Q = \{B_1, \dots, B_k\}$$

donde etiquetamos por a_i al mínimo elemento de A_i en P . Podemos asumir que $a_1 < a_2 < \dots < a_m$, si es necesario, reordenando las partes en P para que esto suceda. Entonces para cada bloque en Q tenemos una lista de mínimos que se deriva de esta, donde a_{i_j} es el mínimo del bloque B_j y asumiendo también que $a_{i_1} < \dots < a_{i_k}$. Los mínimos de los bloques B_j se encuentran en la lista de los mínimos de los A_i , puesto que cada bloque en Q se expresa como unión de bloques en P y tenemos que $a_1 = a_{i_1}$ pues es el menor en la lista de los bloques de P y este también se encuentra en los bloques de Q . También notemos que cada mínimo a_h pertenece a un B_j , entonces podemos relacionar cada a_h con un a_{i_j} .

Además, cada B_j en Q fue creado como union de elementos A_h en P cuyos índices satisfacen que $h \geq i_j$, esto dado por el orden de los bloques en P .

Consideremos el conjunto de etiquetas de cualquier cadena maximal en $[P, Q]$, este conjunto está dado por $D = \{a_1, a_2, \dots, a_m\} \setminus \{a_{i_1}, \dots, a_{i_k}\}$. En efecto, al considerar los bloques de P que se unen para construir cada bloque B_j en Q el labeling de Gessel nos da etiquetas y estas dan un subconjunto de etiquetas en $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$, estas etiquetas se dan por el labeling de Gessel y deben ser mayores que cada a_{i_j} . Cada etiqueta es una permutación de los elementos en D . Revisando de manera creciente los elementos en D y pegando cada parte en orden sucesivo a la que contiene el a_{i_j} correspondiente obtenemos una cadena de P a Q cuyas etiquetas dadas por el labeling de Gessel corresponden a los elementos de D en orden creciente.

Sea $P \prec R_1 \prec R_2 \prec \dots \prec R_s \prec Q$ la cadena que se da por la construcción anterior, Luego al seguir el orden ascendente de las etiquetas en D , encontraremos un orden de unir los bloques de A , generando una cadena $P \prec R_1 \prec R_2 \prec \dots \prec R_s \prec Q$ en $[P, Q]$, donde $s = m - k$. Tenemos que todas estas cadenas tienen longitud $|D| = m - k$, puesto que el orden es ranqueado.

Considerando la cadena $P \prec R_1 \prec R_2 \prec \dots \prec R_s \prec Q$ obtenida anteriormente, con $\lambda(P, R_1) = \text{mín}(D)$. Entonces, sea $Z \in [P, Q]$ con $P \prec Z \prec Q$ y $(P, Z) \in C(\Pi_n)$. Tenemos que $\lambda(P, Z) \in D$, si $\lambda(P, Z) = \text{mín}(D)$ quiere decir que al unir dos bloques de P , uno que tiene a $\text{mín}(D)$ y otro bloque cuyo mínimo es a_j con $a_j < \text{mín}(D)$ tal que $a_j \in \{a_{i_1}, \dots, a_{i_k}\}$

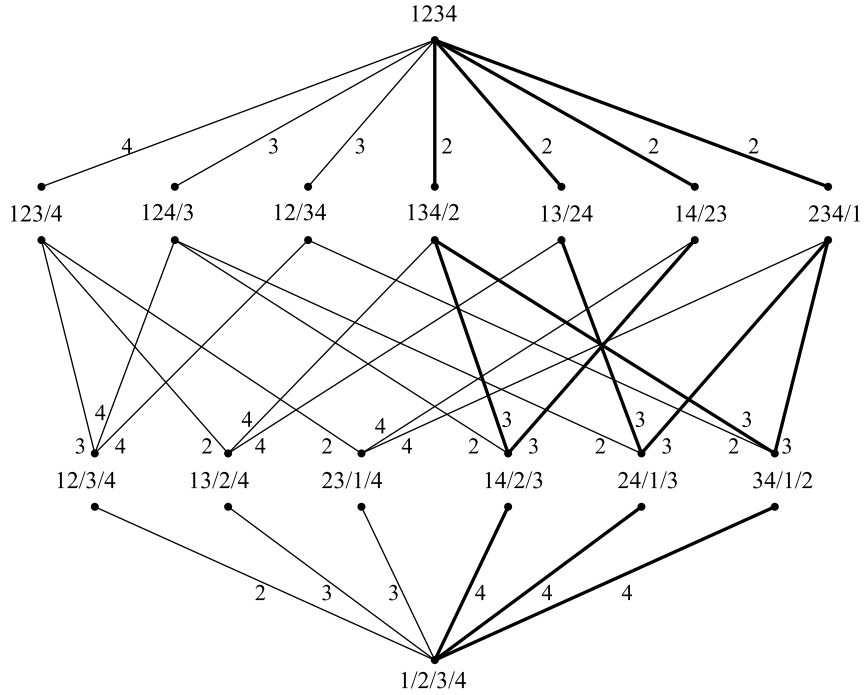


FIGURA 4.2.3. Π_4 con sus caminos descendentes resaltados.

y es el máximo con esa propiedad, es decir es la primera unión que podemos efectuar en ese orden luego $Z = R_1$. Se sigue que para cualquier otra cadena $\lambda(P, Z) > \lambda(P, R_1)$.

Así, el etiquetamiento de Gessel es un EL-labeling.

□

Luego, utilizando los resultados de la sección de Shelling y EL-labelings obtenemos que en efecto, el espacio \mathbf{T}_n es homotópicamente equivalente a un wedge de esferas. Mostremos que en efecto, el número de restriction facets es igual a $(n - 1)!$.

TEOREMA 70. *Dado el labeling de Gessel sobre Π_n , tenemos que existen $(n - 1)!$ caminos descendentes.*

DEMOSTRACIÓN. El elemento mínimo del poset Π_n está dado por $\{\{1\}, \{2\}, \dots, \{n\}\}$ y las etiquetas posibles para las cadenas están dadas por permutaciones del conjunto $\{2, 3, \dots, (n - 1), n\}$, tenemos que las formas de generar la etiqueta n está dada al unir los singletons $\{i\}, \{n\}$, con $1 \leq i \leq (n - 1)$, de donde tenemos $(n - 1)$ posibles opciones. Ahora, dados las particiones que se dan de las uniones anteriores, para obtener la etiqueta $(n - 1)$, unimos ese el bloque que contiene al elemento $(n - 1)$ con todos los posibles elementos en la partición, de donde podemos escoger $(n - 2)$ bloques, reiterando este proceso obtenemos que existen $(n - 1)!$ caminos descendentes dados por el labeling de Gessel. □

La figura 4.2.3 muestra las cadenas descendentes que se generan a partir del labeling de Gessel

TEOREMA 71. *El labeling de Gessel sobre Π_n determina un shelling de $\Delta(\overline{\Pi_n})$. Más aún, las restriction facets sobre el complejo $\Delta(\overline{\Pi_n})$ están determinado por los $(n-1)!$ caminos descendentes en el poset de Π_n .*

DEMOSTRACIÓN. Tenemos que el labeling de Gessel genera un shelling para el complejo simplicial $\Delta(\Pi_n)$, que genera un shelling para el complejo simplicial $\Delta(\overline{\Pi_n})$, dado por el orden lexicográfico en las cadenas de Π_n . Ahora notémos que cada cadenas descendente es una restriction facet en $\Delta(\overline{\Pi_n})$: Sea

$$P_0 \stackrel{n}{\prec} P_1 \stackrel{n-1}{\prec} \dots \prec P_{i-1} \stackrel{n-(i-1)}{\prec} P_i \stackrel{n-i}{\prec} P_{i+1} \prec \dots \stackrel{3}{\prec} P_{n-2} \stackrel{2}{\prec} P_{n-1}$$

una cadena descendente en Π_n .

Para cada parte de la cadena de la forma $P_{i-1} \stackrel{n-(i-1)}{\prec} P_i \stackrel{n-i}{\prec} P_{i+1}$, para crear el bloque P_i a partir de P_{i-1} unimos dos bloques B_i y B'_i , análogamente, para crear el bloque P_{i+1} a partir de P_i unimos los bloques B_{i+1} y B'_{i+1} . Luego si cambiamos el orden en que unimos estos bloques obtenemos la cadena

$$\dots \prec P_{i-1} \stackrel{n-i}{\prec} Q \stackrel{n-(i-1)}{\prec} P_{i+1} \prec \dots$$

Donde Q es una partición distinta a P_i , además, esta cadena es menor que la cadena original por el orden inducido por el orden lexicográfico sobre las cadenas.

Ahora, podemos hacer esto para cada $i = 1, \dots, n-2$. Vale la pena recalcar, que al hacer este cambio, estamos creando un simplex de dimensión $n-3$ que contiene una facet de la cadena descendente. Al continuar con todo este procedimiento, nos damos cuenta de que construimos $n-4$ simplex de dimensión $n-3$ donde cada una de ellas se encuentra en una posición menor por el orden lexicográfico y además cada uno contiene una cara propia maximal del simplex generado por la cadena descendente. Luego tenemos la condición para que cada cadena sea una restriction facet en el shelling que hemos construido. Luego al considerar

$$P \stackrel{n-1}{\prec} \dots \prec P_{i-1} \stackrel{n-(i-1)}{\prec} P_i \stackrel{n-i}{\prec} P_{i+1} \prec \dots \stackrel{3}{\prec} P_{n-2}$$

una cadena descendente de Π_n , al remover sus extremos obtenemos una cadena en $\overline{\Pi_n}$ tal que su simplex asociado en $\Delta(\overline{\Pi_n})$ es una restriction facet en el shelling inducido por el labeling de Gessel en Π_n . \square

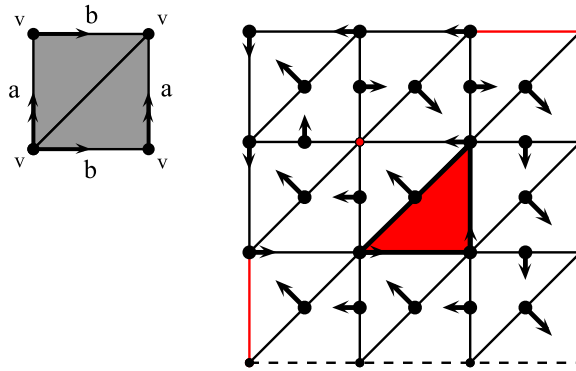
Asi obtenemos que el espacio \mathbf{T}_n es homotópicamente equivalente a un wedge de $(n-1)!$ esferas de dimensión $n-3$.

Ejemplos, Contraejemplos y Casos interesantes

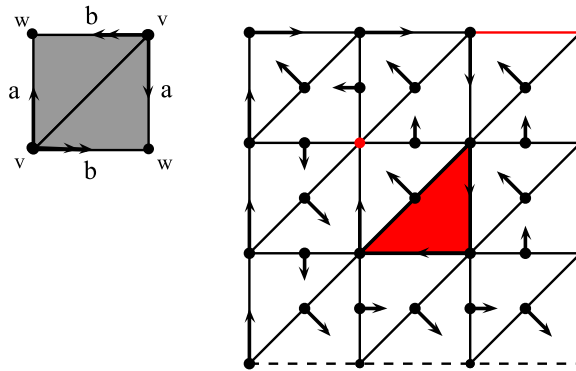
5.1. Campos Vectoriales discretos.

5.1.1. Primeros ejemplos: Complejos simpliciales. Para los casos de el torus y \mathbb{RP}^2 y la botella de Klein, bajo sus respectivas triangulaciones, construiremos unos campos vectoriales discretos partiendo desde sus vértices cubriendo un camino sin ciclos cerrados, tratando de llegar al interior de cada estructura a partir de vectores de 0-simplex a 1-simplex. Luego de acabar en el interior de la figura, partimos de 1-símplices a 2-símplices tratando de llegar a la frontera de la triangulación.

En el caso del toro obtenemos una 0-celda, dos 1-celdas y una 2-celda.



Notamos que hay unos vértices sin flechas, pero recordando la identificación que se hace con el borde de la izquierda y la derecha, y el borde de arriba con el de abajo. Además, al seguir los caminos dados por las flechas obtenemos la manera en que se pegan las celdas críticas y así obtener su estructura de CW-complejo.



En el caso de \mathbb{RP}^2 , notamos la existencia de una 0-celda, una 1-celda y una 2-celda, lo esperado.

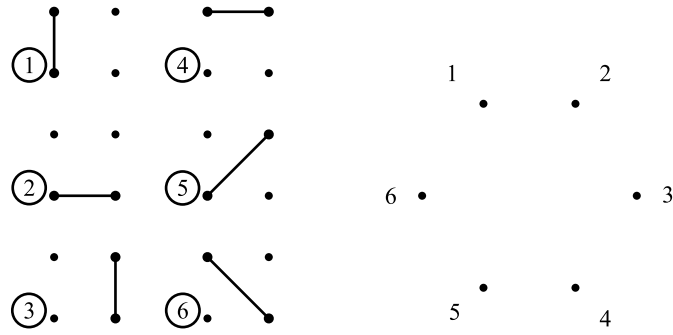


FIGURA 5.1.1. Los vértices en \mathcal{N}_4 , al lado de sus grafos generadores.

En efecto, podemos observar en cada caso que las celdas críticas de un complejo simplicial representan las celdas de su estructura de CW complejo cuando colapsamos el espacio.

5.1.2. Complejo simplicial de Grafos no conexos. Una propiedad monótona de grafos es una propiedad que no depende de la representación de los grafos, es decir, dada una colección de grafos que cumplen una respectiva propiedad y este es cerrado bajo isomorfismo (Bajo la permutación de sus vértices). Decimos que una propiedad de grafos es monótona creciente (o decreciente) si se mantiene bajo la adición (o eliminación) de aristas.

Al estudiar propiedades monótonas de grafos, podemos encontrar ejemplos interesantes de espacios relacionados con complejos simpliciales, dadas por las propiedades de grafos monótonas, considerando todos los grafos de n vértices y una propiedad que se obtiene por retirar o agregar aristas al grafo. En particular revisaremos una propiedad monótona decreciente, es decir, si G un grafo de n vértices que cumple cierta propiedad P , y tenemos que $G' \subset G$ entonces G' cumple la propiedad P .

De una propiedad monótona de grafos podemos construir un complejo simplicial de la siguiente forma: Sea V el conjunto de vértices en el grafo y consideremos el conjunto de $\binom{n}{2}$ aristas en los n vértices.

Si alguna colección de aristas forman un grafo G que cumpla la propiedad que estudiamos entonces el conjunto de esas aristas forman un simplex de dimensión el número de aristas de G menos 1, y el resultado de unir todos estos grafos sobre los $\binom{n}{2}$ vértices forman un complejo simplicial K , que será el complejo simplicial relacionado a la propiedad de grafos P . Nos enfocaremos en el ejemplo de \mathcal{N}_n , el complejo simplicial generado a partir de los grafos no conexos en n vértices. Nos dispondremos a exhibir un campo vectorial gradiente para este espacio, como se muestra en [7], y así determinar su topología.

Sea V_{12} el campo vectorial discreto generado por los grafos que no son solamente el borde $(1, 2)$, G en \mathcal{N}_n que contienen el borde $(1, 2)$ y construimos la pareja $\{G - (1, 2), G\}$.

Notemos que los grafos $(1, 2)$ y los grafos $G \in \mathcal{N}_n$ tales que $G + (1, 2) \notin \mathcal{N}_n$ no están emparejados, es decir los grafos $G + (1, 2) \notin \mathcal{N}_n$ son grafos conexos. Estos grafos deben tener dos componentes conexas, una que contiene el vértice 1 y otra que contiene el vértice 2. Denotemos estas componentes como C_1 y C_2 , respectivamente.

Sea G un grafo no emparejado en V_{12} , distinto del grafo $(1, 2)$. Busquemos el vértice 3 en este grafo, que se encuentra en la componente C_1 ó en la componente C_2 . Sin pérdida de generalidad, digamos que el vértice 3 está en C_1 . Si la arista $(1, 3)$ no se encuentra en el grafo G , entonces consideremos la pareja $\{G, G + (1, 3)\}$, notamos que $G + (1, 3)$ también es un grafo no conexo que no tiene el vértice $(1, 2)$ no se encuentra en V_{12} . Luego no tenemos ningún inconveniente en construir la pareja anterior y además, la flecha que construimos de G a $G + (1, 3)$ es una flecha que va de un simplex a otro de dimensión consecutiva a la de G . Si G no se puede emparejar en este paso es porque G posee la arista $(1, 3)$ y además $G - (1, 3)$ es unión de 3 componentes conexas, la que contiene el vértice 1, la que contiene el vértice 2 y la que contiene el vértice 3, ya que la pareja $\{G - (1, 3), (G - (1, 3)) + (1, 2)\} \in V_{12}$ luego no podemos construir la pareja $\{G - (1, 3), G\}$ en este paso. Recíprocamente, si G posee la arista $(1, 3)$ y además $G - (1, 3)$ es unión de 3 componentes conexas, la que contiene el vértice 1, la que contiene el vértice 2 y la que contiene el vértice 3 entonces G no se puede emparejar en este paso de manera natural.

Si el vértice 3 pertenece a C_2 y G no contiene la arista $(2, 3)$ entonces agreguemos la arista $(2, 3)$ a G y emparejemos de la forma $\{G, G + (2, 3)\}$. Al unir todas las parejas que formamos en este paso con las de V_{12} , obtenemos el campo vectorial V_3 .

Los grafos no emparejados en V_3 son la arista $(1, 2)$ y los grafos G tales que la arista $(1, 3) \in G$ y $G - (1, 3)$ es la unión de 3 componentes conexas o los grafos G tales que la arista $(2, 3) \in G$ y $G - (2, 3)$ es la unión de 3 componentes conexas, la que contiene el vértice 1, C_1 , la que contiene el vértice 2, C_2 , y la que contiene el vértice 3, C_3 .

Consideremos la ubicación del vértice 4, considerando su ubicación en cada componente conexa y repitiendo un proceso análogo al anterior busque los grafos G que no tienen pareja en V_3 , que no contienen las aristas $(1, 4)$, $(2, 4)$ o $(3, 4)$, dependiendo de cada componente conexa en la que estemos ubicados, y emparejándolos respectivamente con los vértices tales que $G + (1, 4)$, $G + (2, 4)$ o $G + (3, 4)$ sean grafos no conexos. Vale la pena resaltar que al menos uno de estos grafos no está emparejado en V_3 .

La unión de los campos vectoriales discretos resultantes con V_3 genera el campo vectorial discreto V_4 .

Reiterando este procedimiento para $k = 5, \dots, n-1, n$, se denotan los campos vectoriales en cada paso como V_i y $V = V_n$ el campo vectorial discreto definitivo. Los únicos grafos sin emparejar en este caso son $(1, 2)$ y aquellos grafos que son la unión de dos árboles conexos, uno que contiene al vértice 1 y el otro que contiene el vértice 2. Además, cada árbol tiene la propiedad de que cada camino empezando desde los vértices 1 o 2 es creciente. Por su construcción, podemos notar que hay $(n-1)!$ de estos árboles, en efecto, ya que el número de parejas de árboles de esta forma con n hoja, digamos P_n depende en cómo organizamos el n -ésimo vertice, luego tenemos $n-1$ formas, por P_{n-1} , reiterando este procedimiento, obtenemos que $P_n = (n-1)(n-2)\dots = (n-1)!$ y cada uno de estos tiene $n-2$ aristas, donde estos representan símlices de dimensión $n-3$ en \mathcal{N}_n .

Probemos que en efecto, V no tiene V -caminos cerrados. Sea $\gamma = \alpha_0^{(p)}, \beta_0^{(p+1)}, \alpha_1^{(p)}$ un V_{12} -camino. Luego α_0 debe ser la cola de una flecha, es decir el grafo más pequeño de una pareja en V_{12} , con β_0 como la cabeza de esa flecha. Luego $\beta_0 = \alpha_0 + (1, 2)$. El símlice α_1 es de

dimensión menor que β_0 , luego $\alpha_1 = \beta_0 - e = \alpha_0 + (1, 2) - b$, con b un borde distinto de $(1, 2)$, puesto que $\alpha_1 \neq \alpha_0$. Como α_1 contiene la arista $(1, 2)$, entonces α_1 es la punta de una flecha en V_{12} , es decir, el grafo más grande de una pareja en $(1, 2)$, luego el camino γ no puede ser extendido a un V_{12} -camino más largo. Entonces no podemos encontrar caminos cerrados, ya que de ser así, estaríamos emparejando por lo menos un simplex β_i en otro nivel, lo que dispondría el camino cerrado pero estaría en contra de la construcción del campo vectorial gradiente.

Generalizando esta idea podemos mostrar que V está libre de caminos cerrados, en efecto, sea $\gamma = \alpha_0^{(p)}, \beta_0^{(p+1)}, \alpha_1^{(p)}$ un V -camino, entonces por un argumento similar al anterior, tenemos que la pareja $\{\alpha_0, \beta_0\}$ se dio en algún paso de los V_i . Entonces existe un borde de la forma (k, i) con $k < i$ tal que $\beta_0 = \alpha_0 + (k, i)$. De manera similar al caso anterior $\alpha_1 = \alpha_0 + (k, i) - b_1$, como α_1 tiene la arista (k, i) , entonces es la cabeza de una flecha en V_i en cuyo caso el camino se detiene y no puede ser más largo, o α_1 está emparejado en V_{i-1} , por la construcción de V . Si continuamos con este procedimiento obtenemos que cualquier V -camino no puede ser cerrado. Entonces V genera un campo vectorial gradiente para \mathcal{N}_n .

Así obtenemos que \mathcal{N}_n es homotópicamente equivalente a un wedge de $(n - 1)!$ esferas de dimensión $n - 3$.

EJEMPLO 72. Consideremos el espacio de grafos no conexos en 4 vértices. El conjunto de vértices del complejo simplicial está dado por la figura 5.1.1. Notemos que el grafo sin aristas no aparece en la lista, puesto que representa al grafo vacío que no hemos tenido en cuenta para la mayoría de los casos. En este ejemplo no será tomado en cuenta. Los vértices de los grafos van etiquetados de la siguiente forma, arriba a la izquierda se encuentra el vértice 1, a su derecha el vértice 2. Abajo a la izquierda el vértice 3 y a su derecha el vértice 4.

El complejo simplicial generado por este espacio está representado en la figura 5.1.2. Construyamos un campo vectorial gradiente para este espacio: Consideremos el campo vectorial gradiente V_{12} , que está conformado por los grafos G tales que $G + (1, 2)$ sigue siendo no conexo, entonces obtenemos la lista de flechas

$$\begin{array}{ccc} \{1, [1, 4]\} & \{2, [2, 4]\} & \{3, [3, 4]\} \\ \{5, [4, 5]\} & \{6, [5, 6]\} & \{[1, 5], [1, 4, 5]\} \\ & & \{[3, 6], [3, 4, 6]\} \end{array}$$

donde cada k -upla $[a_1, \dots, a_k]$ representa el $(k - 1)$ -simplex generado por la unión de los grafos a_1, \dots, a_k en \mathcal{N}_4 .

En el nivel V_3 juntamos las parejasas

$$\{[2, 6], [1, 2, 6]\} \quad \{[2, 3], [2, 3, 5]\}$$

y notemos que para el nivel V_4 no podemos formar más parejasas puesto que los grafos dados por las parejasas $[1, 2], [1, 3], [1, 6], [2, 6], [3, 5]$ y $[5, 6]$ no admiten ninguna parejaa, ya que sus posibles parejasas ya están ocupadas en los niveles anteriores.

Luego construimos el campo vectorial y su colapso se muestran en la figura 5.1.3.

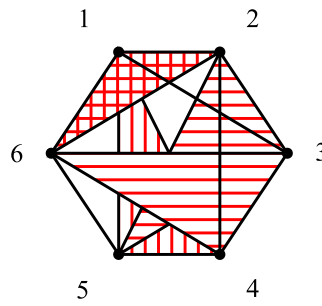


FIGURA 5.1.2. El complejo simplicial \mathcal{N}_4

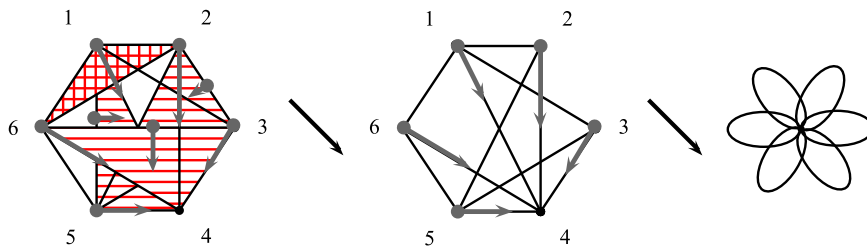


FIGURA 5.1.3. Campo vectorial gradiente y colapso de \mathcal{N}_4

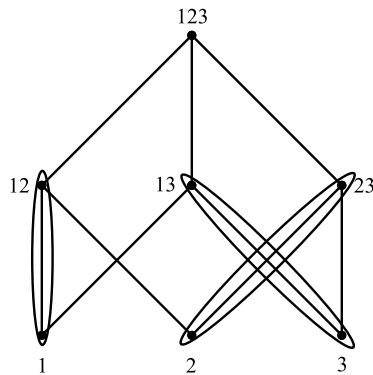
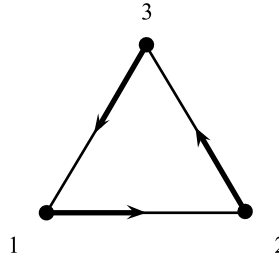


FIGURA 5.2.1. Matching completo en Δ^2 .

5.2. Teoría de Morse Discreta Equivariante

5.2.1. Matchings y Campos Vectoriales Discretos. Un matching completo no necesariamente induce un matching de Morse, como evidenciaremos en el siguiente ejemplo. Vale la pena resaltar esto, pues da una mejor perspectiva en cuando la generación de campos vectoriales gradientes con respecto a los matchings y viceversa.

EJEMPLO 73. Consideremos el matching en el poset de un 2-símplex, mostrado en la figura 5.2.1. Al mostrar el campo vectorial discreto generado por este matching obtenemos un ciclo cerrado, mostrado en la figura 5.2.2, luego es un claro ejemplo que un matching completo que

FIGURA 5.2.2. Campo vectorial discreto generado por el Matching sobre Δ^2 .

no genera una función de Morse discreta, luego cualquier construcción de un matching debe ser hecha de manera más cuidadosa.

5.2.2. El espacio de grafos no conexos (Versión Equivalente). Consideremos el ejemplo del espacio de grafos no conexos \mathcal{N}_n . Notemos que en la construcción del campo vectorial gradiente de \mathcal{N}_n observamos que las celdas críticas están dadas por los grafos (1, 2) y los grafos que son dos componentes conexas dadas por árboles con raíces en 1 y 2, donde las etiquetas de sus vértices crecen a medida que nos alejamos de la raíz. Cualquier forma de reetiquetar estos grafos depende solamente de una permutación de sus etiquetas, luego podemos generar una acción de S_n , las permutaciones de un conjunto de n elementos, sobre \mathcal{N}_n .

Como exhibe [8], esta acción de este grupo no respeta el campo vectorial gradiente generado, ya que la acción no respeta las raíces de los árboles y puede intercambiarlos por cualquier elemento, luego en el caso no equivariante las celdas críticas del complejo simplicial generado en el ejemplo anterior no respetan la simetría del espacio \mathcal{N}_n . Lo ideal es construir un colapso equivariante que no tenga tantas celdas críticas, es decir, tratar de preservar la estructura que obtuvimos anteriormente, dicho de otra forma, construir un colapso equivariante que trate de colapsar \mathcal{N}_n en una 0-celda y $(n-1)!$ celdas de dimensión $n-3$.

Dado que la acción de S_n sobre este espacio no preserva ningún punto fijo, no existe un colapso compatible con la estructura que deseamos, luego debemos buscar un subgrupo en S_n que pueda ayudarnos a mantener dicha estructura. Entonces, tratando de basarnos en el ejemplo anterior, necesitamos un grupo que mantenga la 0-celda, es decir, un grupo que permute las etiquetas 1 y 2, además un grupo que permute el resto de etiquetas de manera independiente. Consideremos el grupo $\mathcal{G} = C_2 \times S_{n-2}$, donde C_2 es el grupo cíclico en dos elementos. Este grupo funciona razonablemente al hacer que C_2 actúe en los vértices $\{1, 2\}$ y S_{n-2} actuando de manera natural en $\{3, \dots, n\}$. Generemos a partir de este grupo un Morse matching \approx , que al hacer su respectivo colapso sea $\bigvee_{i=1}^{(n-1)!} S^{n-3}$.

Sea \approx el matching generado de la siguiente forma:

1. Sea G un grafo que contiene propiamente al borde $(1, 2)$, entonces arme la pareja $\{G - (1, 2), G\}$ en \approx . Los grafos que no tienen pareja en este paso son los grafos, que no contienen a $(1, 2)$ y que al unirlos formamos un grafo conexo, además de $(1, 2)$. Aparte de $(1, 2)$, tenemos que estos grafos son aquellos que poseen 2 componentes conexas, una que tiene al vértice 1 y otra que posee al vértice 2.

2. Sea G un grafo que todavía no esté emparejado en \approx . Luego posee dos componentes conexas, llamemoslas C_1 y C_2 donde C_1 posee el vértice 1 y C_2 posee el vértice 2. Siga el grafo C_1 a partir del vértice 1, si no es una cadena, entonces existe un vértice $v_1 \in C_1$ tal que este tiene grado por lo menos 2. Si $v_1 = 1$, entonces su grado es mayor que 1. Si $v_1 \neq 1$, entonces su grado es mayor que 2. Observemos que de todos los vértices en C_1 , v_1 es el vértice que tiene menor distancia al vértice 1. Definamos V_1 el conjunto de todos los vértices adyacentes a v_1 , con excepción de 1. Si C_1 es una cadena, entonces V_1 es vacío. Análogamente, para C_2 , consideramos el vértice v_2 (si existe) y el conjunto V_2 .

Entonces $G = C_1 \cup C_2$ es un grafo sin emparejar en el caso anterior. Si al menos uno de los conjuntos V_1 o V_2 es distinto de vacío, entonces consideremos el grafo G' que se genera a partir de G y los conjuntos V_1 y V_2 : En cada conjunto V_i una los vértices en cada uno de ellos con sus posibles aristas, es decir, completar los subgrafos V_i en G . Notamos que G' también es un grafo no conexo, al ser unión de dos componentes conexas. Ahora, el intervalo $[G, G']$ estará en \approx .

Notemos que el número de grafos en n vértices no conexos compuestos de dos cadenas con las características antes descritas es $(n-1)!$: Consideremos el conjunto $\{\{1, 2\}, 3, \dots, n\}$, donde $\{1, 2\}$ representa los vértices 1 y 2. Notemos que una de las características de los grafos sin emparejar en \approx costa en que si el vértice 1 aparece, inmediatamente aparece el vértice 2 al frente, luego esta es una manera de representar ese hecho. Luego cualquiera de las cadenas está compuesta de armar “cadenas” a partir de estos $n-1$ elementos, es decir, permutaciones en estos elementos que representan los vértices de las cadenas y el elemento $\{1, 2\}$ que representa la arista faltante. Luego como costa de permutar estos elementos, obtenemos que son $(n-1)!$.

La acción del grupo \mathcal{G} sobre el matching generalizado que hemos descrito es la siguiente: notemos que C_2 solo permuta las raíces de las dos cadenas descritas anteriormente. Ahora, S_{n-1} permuta los elementos de las cadenas distintos de 1 y 2. Luego la acción del grupo envía celdas críticas en celdas críticas.

Vale la pena observar que hemos dejado fuera del matching los grafos $(1, 2)$ y aquellos que constan de dos componentes conexas, donde cada una es un intervalo: En efecto, el grafo $(1, 2)$ no ha sido considerado dentro del matching. Ahora, todos los grafos H que no han sido emparejado en la primera parte, que no están en \approx , que no tienen dos componentes compuestas generadas por cadenas, presentan que V_1 o V_2 son distintos de vacío. Luego podemos construir el extremo inferior del intervalo en el que está contenido removiendo las aristas de cada V_i . Luego H se encuentra en uno de esos intervalos. Además, si H es un grafo con dos componentes conexas cada una compuesta de una cadena, entonces V_1 y V_2 son vacíos. Luego no se encuentra en ninguna parte del matching \approx .

Ahora, veamos que \approx es un matching de Morse generalizado:

Veamos que no tiene ciclos cerrados por contradicción, supongamos que existe un ciclo cerrado en $P(\mathcal{N}_n)/\approx$, $[v_1] \rightarrow [v_2] \rightarrow \dots \rightarrow [v_k] \rightarrow [v_1]$. Su preimagen tiene la forma

$$G_1 \subset H_2 \supseteq G_2 \cdots \subset H_n \supseteq G_n \subset H_1 \supseteq G_1$$

donde cada grafo G_i y H_i están en el mismo intervalo (Pueden ser el mismo grafo) contenido en \approx y H_i y G_{i+1} difieren por una arista. Si para algún i se tiene que H_i y G_i fueron emparejado en el primer paso, entonces $H_i = G_i + (1, 2)$. Si $G_i \neq G_{i+1}$ entonces G_{i+1} contiene la arista $(1, 2)$ (ya que de no ser así estaría emparejada con H_i), G_{i+1} está emparejada con una pareja menor que él, entonces $G_{i+1} = H_{i+1} = H_i - a$, donde a es otra arista distinta de $(1, 2)$. De manera sucesiva, notamos que la sucesión es decreciente, y es estrictamente decreciente en el segundo paso. Luego esto contradice el hecho de la elección del ciclo cerrado.

Luego, consideremos que $(1, 2) \notin H_i$, para todo i . Luego todos los matchings de este ciclo están hechos en el segundo paso creando el matching. Luego en el paso $G_i \subseteq H_{i+1}$ los conjuntos V_j , los vértices v_j o el camino de j a v_j , para $j = 1, 2$ no se ven afectados, por la manera en que fueron construidos estos agrupamientos en \approx . Entonces si queremos que el camino sea cerrado, necesitamos que los pasos dados en $H_i \supset G_{i+1}$, luego en estos pasos estamos removiendo aristas que no están conectadas con v_j , fuera de S_j . Pero en cada paso $H_i \supset G_{i+1}$ es una inclusión estricta, dado que G_{i+1} es una cara propia de H_i en sus símlices de \mathcal{N}_n . Lo que contradice que el camino sea cerrado. Entonces $P(\mathcal{N}_n)/\approx$ es libre de ciclos cerrados y así \approx es un matching de Morse generalizado. Tenemos que es \mathcal{G} equivariante, ya que en cada intervalo al aplicar un elemento del grupo, los matchings no están determinados por la posición de los vértices 1 y 2, por lo que actuar los elementos de C_2 envía colapsos en colapsos, y en caso de permitir una acción de la parte de S_{n-2} , estamos permutando las etiquetas de los árboles, cambiando un intervalo en otro. Además, notemos que no dependemos el orden en que los vértices están etiquetados en esta construcción, luego el matching \approx es \mathcal{G} -equivariante.

Entonces obtenemos un matching de Morse \mathcal{G} -equivariante con celdas críticas una 0-celda representada por la arista $(1, 2)$ y los grafos no conexos creados a partir de unir dos cadenas con el vértice 1 en el extremo de una componente y el vértice 2 en el extremo de otra componente, que representan $(n-1)!$ símlices de dimensión $n-3$. Y así $\mathcal{N}_n \simeq_{\mathcal{G}} \bigvee_{i=1}^{(n-1)!} S^{n-3}$.

5.3. Shellings, EL-Labelings y Teoría de Morse Discreta

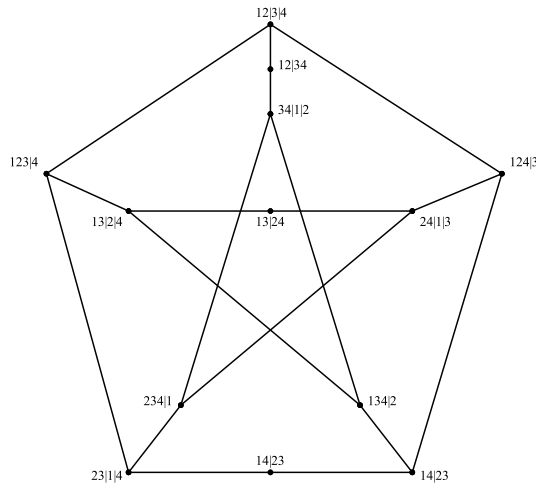


FIGURA 5.3.1. $\Delta(\overline{\Pi}_4)$

Consideremos el caso de $\Delta(\overline{\Pi}_4)$, que en efecto, es una subdivisión de \mathbf{T}_4 , mostrado en la figura 5.3.1

Notemos el orden inducido por el EL-labeling en la figura 4.2.2 sobre este complejo, en caso de que las etiquetas se repitan, notemos que simplemente podemos escogerlas en cualquier orden y no alteran la estructura de \mathbf{T}_4 .

Del Shelling inducido por el orden lexicográfico de las etiquetas, obtenemos el campo vectorial gradiente que en efecto muestra que \mathbf{T}_4 es homotópicamente equivalente a un wedge de 6 esferas S^1 .

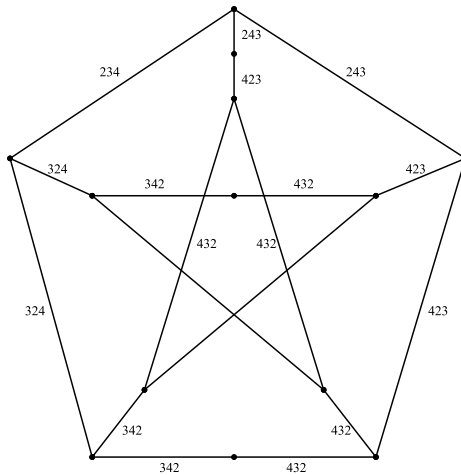


FIGURA 5.3.2. $\Delta(\overline{\Pi}_4)$ etiquetado por el labeling de Gessel.

Investigación a posteriori

Luego del estudio de la teoría de Morse discreta y equivariante obtenemos resultados conocidos que dejan las siguientes preguntas que pueden desarrollarse más adelante.

1. El espacio de campos vectoriales gradientes en un complejo simplicial K genera un complejo simplicial, ¿Cuál es este complejo simplicial? ¿Qué propiedades tiene? ¿Cuál es su tipo de homotopía?
2. ¿Existe un colapso equivariante sobre el espacio de árboles filogenéticos que obtenga un espacio G -homotópicamente equivalente a un wedge de esferas?
3. Sea K un complejo simplicial que a partir de una función de Morse discreta es homotópicamente equivalente a un CW-complejo C . Sea G un grupo que actúa sobre K ¿Cuáles propiedades debe tener el grupo G para que exista una G -equivalencia homotópica generada por una función de Morse discreta equivariante tal que $K \simeq_G C$?

Bibliografía

- [1] Sarah Whitehouse. Alan Robinson. The tree representation of $\sum n+1$, 1996.
- [2] Stephen Weingram. Albert Lundell. *The Topology of CW complexes*. Van Nostrand Reinhold Company, 1969.
- [3] Anders Björner. Shellable and cohen-macaulay partially ordered sets. *Transactions of the American mathematical society*, 260:159 – 184, 1980.
- [4] Bernd Sturmfels. David Speyer. The tropical grassmannian. Technical report, 2003.
- [5] Caroline Klivans. Federico Ardila. The bergman complex of a matroid and phylogenetic trees. In *The Journal of Combinatorial Theory, Series B*. arxiv:math.CO/0311370, 2005.
- [6] Robin Forman. Morse theory for cell complexes. *Advances in Mathematics*, 134:90 – 145, 1998.
- [7] Robin Forman. A user’s guide to discrete morse theory. *Seminaire Lotharingien de Combinatoire*, 48:Article B48c, 35, 2002.
- [8] Ragnar Freij. Equivariant discrete morse theory. *Discrete Mathematics*, 309:3821 – 3829, 2009.
- [9] Karen Vogtmann. Louis Billera, Susan Holmes. Geometry of the space of phylogenetic trees. *Advances in Applied Mathematics*, 27:733 – 767, 2001.