

TEORÍA DE PERTURBACIONES COMO UNA TEORÍA YANG-MILLS

ANDRÉS DARÍO BERMÚDEZ

ASESOR

ALONSO BOTERO MEJÍA PH.D.

FACULTAD DE CIENCIAS

MAESTRÍA EN FÍSICA

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES

BOGOTÁ D.C. 2012

Agradecimientos

Como no agradecer a mi padre Darío, mi madre Maruxa y a mis hermanos Alex y Laura, quienes siempre han estado ahí para apoyarme cuando lo necesitaba.

A Marcela por no abandonar las esperanzas en estos dos años que he estado casi siempre ausente en su vida.

Por último, a mi asesor Alonso Botero, cuya guía hizo posible la realización de este trabajo.

Tabla de Contenido

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Introducción | 1 |
| 2 | Algunos Conceptos de Geometría Diferencial | 6 |
| 2.1 | Variedades y Formas Diferenciales | 7 |
| 2.2 | Haces Fibrados | 10 |
| 2.3 | Conexión y Holonomía | 11 |
| 2.3.1 | Curvatura | 13 |
| 2.3.2 | Transformaciones gauge | 13 |
| 3 | Fases Geométricas | 15 |
| 3.1 | Fase de Berry | 15 |
| 3.1.1 | Derivación estándar | 16 |
| 3.1.2 | Derivación geométrica | 18 |
| 3.2 | Ángulo de Hannay | 19 |
| 3.2.1 | Derivación estándar | 19 |
| 3.2.2 | Derivación geométrica | 22 |
| 4 | Conexión Perturbativa | 25 |
| 4.1 | Definición de la Conexión | 26 |
| 4.2 | Holonomía de la Conexión | 29 |
| 4.3 | SU(2) | 35 |
| 4.3.1 | Spin $\frac{1}{2}$ | 35 |
| 4.3.2 | Spin superior | 42 |
| 4.4 | Sp(2, \mathbb{R}) | 43 |
| 4.5 | Transformaciones Gauge | 47 |
| 4.6 | Interpretación Geométrica | 52 |
| 4.6.1 | Interpretación Como Conexión de Berry-Simon | 52 |
| 4.6.2 | Interpretación Como Conexión de Hannay-Berry | 53 |
| 5 | Conexión Clásica | 58 |
| 5.1 | Descripción del Problema | 59 |
| 5.2 | Conexión Perturbativa Clásica | 62 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 5.3 | Oscilador Generalizado | 66 |
| 5.4 | Spin Clásico | 70 |
| 5.5 | Relación con el Ángulo de Hannay | 72 |
| 5.6 | Interpretación Geométrica | 74 |
| 6 | Conclusión | 76 |
| A | Relación de la Curvatura de Berry con la Curvatura de la Conexión Perturbativa | 79 |
| B | Teorema de Stokes no-Abeliano | 84 |
| C | Cálculo Completo Para el Oscilador Generalizado Cuántico | 86 |

Capítulo 1

Introducción

En física son muy pocos los problemas que se pueden resolver de forma cerrada. Para muchos sistemas existe la necesidad de recurrir a métodos aproximados que permitan acercarse a su solución real. Este tipo de situaciones es muy común tanto en la mecánica clásica como la cuántica, por lo que cualquier afirmación que sostenga la importancia de los métodos de aproximación difícilmente será exagerada. En la teoría cuántica, uno de los métodos de aproximación más básicos y fructíferos es la teoría de perturbaciones independiente del tiempo, son bien conocidas sus aplicaciones a fenómenos tales como la estructura fina del átomo de hidrogeno, el efecto Zeeman y el efecto Stark por nombrar algunas de las más famosas.

En este escrito, el interés por la teoría de perturbaciones no está en su gran utilidad para calcular de manera aproximada cantidades físicas medibles, más bien estamos interesados en el siguiente problema: si nos dan un hamiltoniano $H(\lambda)$ con espacio de Hilbert asociado de dimensión finita, y de él tenemos una base de vectores propios $\{|n(\lambda)\rangle\}$

¿Podremos utilizar teoría de perturbaciones a primer orden para construir una sucesión de operaciones unitarias asociadas a variar el valor de λ las cuales permitan transformar los vectores $\{|n(\lambda)\rangle\}$ en un nuevo conjunto $\{|n(\lambda')\rangle\}$, siendo $\{|n(\lambda')\rangle\}$ una base inicialmente desconocida de vectores propios de $H(\lambda')$? Como veremos, la respuesta a la anterior pregunta es afirmativa, pero más allá de la sola búsqueda de un operador que relacione las dos bases $\{|n(\lambda)\rangle\}$ y $\{|n(\lambda')\rangle\}$, veremos que este problema tiene asociado de manera natural una estructura de teoría gauge no-abeliana. La libertad gauge será la elección de las fases de los vectores propios, y como se verá, existe una forma de relacionar el problema anterior con la fase de Berry[4].

Para la teoría clásica hay una situación análoga. Para un hamiltoniano clásico integrable $H(q, p, \lambda)$, a partir del valor original de la variable de acción $I(q, p, \lambda)$, se busca, usando teoría de perturbaciones, obtener una sucesión de transformaciones canónicas que permitan conocer el nuevo valor de la variable de acción $I(q, p, \lambda')$. La libertad en este problema está en la elección de la variable de ángulo $\phi(q, p, \lambda)$ y como veremos es posible asociar el problema anterior con el ángulo de Hannay[13].

Teniendo en mente lo anterior, en el segundo capítulo se introducirán elementos provenientes de la geometría diferencial; si bien no se hará una exposición detallada del tema, si se definirán varios conceptos que serán relevantes para el desarrollo del escrito. Serán particularmente importantes las ideas de conexión y holonomía en un haz fibrado [1,2,3,29], pues estas serán el marco de referencia en el que se desarrollarán las ideas de este escrito.

Para el capítulo III describiremos las llamadas fases geométricas, en primer lugar

reproduciendo el desarrollo de la fase de Berry, que permitirá introducir el concepto de curvatura de una conexión abeliana, y luego se dará la descripción de esta fase en términos de una holonomía en un haz fibrado[6,7]. Para la holonomía clásica, llamada el ángulo de Hannay[13], se utilizará el mismo esquema que para su contraparte cuántica; primero daremos su desarrollo a partir de la mecánica clásica y luego su interpretación geométrica[18,19]. Todos los conceptos expuestos en este capítulo de una u otra forma aparecerán nuevamente en el resto del trabajo.

El capítulo IV está dedicado al estudio del ente matemático al que se le dio el nombre de *conexión perturbativa* \mathcal{A} [31]. Se considerará una familia de hamiltonianos $H(\lambda)$ cuánticos de espectro no degenerado cuyo espacio de Hilbert asociado \mathcal{H} será principalmente (pero no siempre) de dimensión finita. Estos hamiltonianos dependen de un cierto conjunto de variables externas $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, las cuales parametrizan una variedad suave \mathcal{M} . Usando teoría de perturbaciones de Rayleigh-Schrödinger a primer orden [22,23], se encontrará una fórmula que permite construir explícitamente la conexión \mathcal{A} que relaciona las bases ortonormales de vectores propios para hamiltonianos en distintos puntos arbitrarios de \mathcal{M} .

En general los operadores asociados a distintos valores de los parámetros no conmutaran entre sí, $[\mathcal{A}(\lambda), \mathcal{A}(\lambda')] \neq 0$. Debido a esto aparecen de manera natural conceptos relacionados con las teorías gauge no-abelianas [1,29], como la integral ordenada de camino, la curvatura Yang-Mills, el teorema de Stokes no-abeliano [24,25] y las transformaciones gauge no-abelianas.

Se hallará un resultado general entre la curvatura Yang-Mills de la conexión

perturbativa y la curvatura asociada a la conexión abeliana de Berry. Se utilizará el teorema de Stokes no-abeliano para encontrar una relación entre la holonomía de la conexión perturbativa y la fase de Berry y se calculará para dos ejemplos específicos la curvatura Yang-Mills que mostrarán concordancia con la teoría general.

Por último, en este capítulo se hará una interpretación geométrica de la conexión perturbativa utilizando el lenguaje de la geometría diferencial, y se mostrará que la holonomía de esta conexión se puede entender como el resultado de transportar paralelamente cada uno de los vectores base utilizando la conexión Berry-Simon. También, se mostrará que el procedimiento por el que se obtiene la conexión perturbativa es muy parecido al que se utiliza para encontrar el ángulo de Hannay, lo que indicaría que la fase de Berry se podría interpretar como una holonomía de una conexión tipo Hannay-Berry en un fibrado apropiado[12,15].

El capítulo IV concerniente a la teoría clásica busca describir la teoría de perturbaciones canónica[12,15] de una forma que guarde cierta semejanza con lo realizado para la teoría cuántica, es decir como una teoría gauge no-abeliana. En forma análoga que su contraparte cuántica, el camino elegido será definir una conexión cuya exponenciación permita conectar las foliaciones del espacio de fase inducidas por una familia de hamiltonianos integrables $H(\lambda)$ para valores diferentes de λ .

Así como la conexión perturbativa cuántica se puede llegar a relacionar con la fase de Berry, es deseable obtener un comportamiento no trivial por parte de la conexión clásica. En particular relacionar la holonomía que conexiones no triviales presentan con el ángulo de Hannay, pero, a diferencia de lo que sucede para la parte cuántica, al definir

una conexión utilizando teoría de perturbaciones clásica y tratar de utilizar la exponencial ordenada se encontrarán problemas que impedirán avanzar mas. Sin embargo, esta conexión perturbativa clásica se ligará con el ángulo de Hannay, por lo tanto consideramos que si bien el problema no pudo ser resuelto, los resultados encontrados en este capítulo son un avance en la solución del problema.

Capítulo 2

Algunos Conceptos de Geometría Diferencial

En este capítulo se introducirán algunas ideas de índole puramente matemático que serán importantes para contextualizar el desarrollo de los capítulos siguientes. De tal manera que no se pretende aquí desarrollar en profundidad la geometría diferencial; antes bien, se presentarán ciertos elementos y se definirán conceptos relevantes para este trabajo, con la esperanza de facilitar su ulterior comprensión.

En la primera sección, se comenzará definiendo una variedad diferencial y se proseguirá con los elementos usuales de geometría diferencial tales como: cartas coordenadas, espacio tangente, y formas diferenciales; por último, se presentan los conceptos de product, cuña y derivada exterior. Se seguirá en la segunda sección con la definición de los haces fibrados, y, finalmente, en la tercera sección se definirán los conceptos de conexiones y holonomias en haces fibrados.

Para este capítulo se usó como modelo la concisa exposición del tema dada por [1,2,3].

2.1 Variedades y Formas Diferenciales

A un espacio topológico \mathcal{M} se le llama variedad N-dimensional si cada punto $x \in \mathcal{M}$ está contenido en un abierto U_i donde hay definido un homeomorfismo sobre algún abierto $\varphi(U_i)$ de \mathbb{R}^N . Esto significa que localmente \mathcal{M} es como \mathbb{R}^N ; sin embargo globalmente la topología global de \mathcal{M} no está restringida a ser la de \mathbb{R}^N .

Un par (φ_i, U_i) con

$$\varphi_i : U_i \rightarrow \varphi(U_i) \subset \mathbb{R}^N, \quad (2.1)$$

es llamado una carta o un sistema de coordenadas local. Es posible hacer representar las φ_i como

$$\varphi_i = (x_i^1, x_i^2, \dots, x_i^N) \quad (2.2)$$

con $x_i^k : U_i \rightarrow \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \dots, N$. El mapa $(x_i^1, x_i^2, \dots, x_i^N)$ forma un sistema de coordenadas locales para el abierto U_i .

Se exige además que la superposición

$$\varphi_{ij} = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1} \quad : \quad \varphi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j) \quad (2.3)$$

defina un homeomorfismo para todo i, j . A \mathcal{M} se le llama diferenciable si las funciones φ_{ij} lo son. Si las φ_{ij} son infinitamente diferenciables entonces se dice que \mathcal{M} es una variedad suave.

Una función

$$f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R} \quad (2.4)$$

se dice diferenciable si

$$f \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i) \rightarrow \mathbb{R}^N$$

es diferenciable para cada carta (φ_i, U_i) . Dentro de este contexto se puede definir una estructura de espacio vectorial de la siguiente manera. Para una carta $(\varphi_i = (x_i^1, x_i^2, \dots, x_i^N), U_i)$ y un $x \in U$, se define $T_x \mathcal{M}$, el espacio tangente en x , como el conjunto de todos los operadores diferenciales de la forma

$$V_x = \sum_{i=1}^N V_x^{(i)} \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad (2.5)$$

siendo las $V_x^{(i)}$ componentes referidas a la base de vectores

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^N} \right\}. \quad (2.6)$$

A una regla

$$\mathcal{M} \ni x \rightarrow V_x \in T_x \mathcal{M}, \quad (2.7)$$

se le llama campo vectorial.

Al espacio vectorial dual a $T_x \mathcal{M}$ se le llama espacio cotangente $T_x^* \mathcal{M}$. Se puede introducir una base $T_x^* \mathcal{M}$ de la forma

$$\{dx^1, dx^2, \dots, dx^N\} \quad (2.8)$$

tal que $dx^i \frac{\partial}{\partial x^j} = \delta_j^i$.

Un mapa suave de la forma

$$\mathcal{M} \ni x \rightarrow \mathcal{T}(x) \in T_x^{(l,k)} \mathcal{M} = \left(\bigotimes_l T_x \mathcal{M} \right) \otimes \left(\bigotimes_k T_x^* \mathcal{M} \right), \quad (2.9)$$

se conoce como un campo tensorial de rango (l, k) . Una k -forma α , es un tensor antisimétrico de rango $(0, k)$.

En este trabajo, lo máximo que se usará serán 2-formas, por lo que las siguientes definiciones, que pueden ser más generales, sólo se darán para el caso de 1-formas. Dadas dos 1-formas α y β , podemos construir a partir de ellas una 2-forma definiendo el producto cuña entre ellas de la siguiente manera

$$(\alpha \wedge \beta)(v_1, v_2) = \alpha(v_1)\beta(v_2) - \beta(v_1)\alpha(v_2), \quad (2.10)$$

para cualquier par de vectores v_1, v_2 . Por ejemplo, si $\alpha = \alpha_i dx^i$ y $\beta = \beta_j dx^j$, entonces

$$\alpha \wedge \beta = \alpha_i \beta_j dx^i \wedge dx^j.$$

Para 1-formas, el producto cuña cumple con

$$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) \quad (2.11)$$

$$\alpha \wedge \beta = -\beta \wedge \alpha. \quad (2.12)$$

Queda por definir un último concepto. La derivada exterior para una función f en \mathcal{M} se define como

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i, \quad (2.13)$$

y el resultado es una 1-forma. Mientras que para una 1-forma, la derivada exterior viene dada por

$$d(f dg) = df \wedge dg = \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial x^j} dx^i \wedge dx^j \quad (2.14)$$

siendo el resultado una 2-forma. Notar que (2.13) y (2.14) implican que $d^2 f = 0$.

2.2 Hazes Fibrados

Un haz fibrado consiste de un espacio topológico total E , una variedad \mathcal{M} llamada espacio base, la fibras \mathcal{F} , un grupo de estructura G actuando sobre las fibras y un proyector π con

$$\pi : E \rightarrow \mathcal{M}, \quad (2.15)$$

tal que la fibra en x , definida por $\mathcal{F}_x = \pi^{-1}(x)$, es homeomorfa a \mathcal{F} . Se requiere además, que localmente el fibrado sea homeomorfo al producto cartesiano de dos espacios i.e., para todo punto $x \in E$, \exists un abierto U_x con $x \in U_x$ tal que

$$\pi^{-1}(U_x) \cong U_x \times \mathcal{F}. \quad (2.16)$$

Un haz fibrado se llama trivial si

$$E \cong \mathcal{M} \times \mathcal{F}. \quad (2.17)$$

Un fibrado principal es aquel cuya fibra coincide con el grupo de estructura. El siguiente es un ejemplo de un fibrado principal. Sea \mathcal{M} una variedad y $\mathcal{F}_x \mathcal{M}$ el conjunto de todas las bases ortonormales de vectores que pertenecen a \mathbb{C}^N

$$\mathcal{F}_x \mathcal{M} = \{ |n\rangle \in \mathbb{C}^N \mid \langle n | n \rangle = 1, \langle n | n \rangle = 0 \}. \quad (2.18)$$

Un par cualquiera de bases $\{|n'\rangle\}, \{|n\rangle\}$ puede ser relacionado mediante una transformación lineal

$$|n'\rangle = \Lambda |n\rangle \quad (2.19)$$

donde $\Lambda \in U(n)$. Por lo tanto una fibra típica \mathcal{F} puede ser identificada como

$$\mathcal{F} \cong U(n), \quad (2.20)$$

y uniendo todas las fibras se obtiene el fibrado principal

$$\mathcal{FM} = \bigcup_{x \in M} \mathcal{F}_x \mathcal{M}, \quad (2.21)$$

con fibra (y grupo de estructura) $U(n)$.

2.3 Conexión y Holonomía

Para un punto $p \in E$, se define el espacio vertical en p como el conjunto de vectores que son paralelos a la fibra que pasa por x , i.e., dado un vector $v \in T_p E$ este pertenecerá al espacio vertical si $v \in T_p F_x$ con $x = \pi(p)$

$$V_p = \{v \in T_p E \mid T_p \pi(v)\}. \quad (2.22)$$

Una conexión de Ehresmann es la asignación

$$E \ni p \rightarrow H_p \subset T_p E, \quad (2.23)$$

donde H_p , llamado un espacio horizontal, es transverso a V_x (i.e. $H_x \cap V_x = \{0\} \forall x \in E$) y cumple

$$T_p E = H_p \oplus V_p. \quad (2.24)$$

Aunque el espacio vertical V_p viene definido enteramente por las fibra en x , el espacio horizontal H_x es cuestión de elección.

Una vez elegido los espacios horizontales, una curva $c(t)$

$$[0, 1] \ni t \rightarrow c(t) \in E \quad (2.25)$$

se llama horizontal si su vector velocidad $\frac{dc(t)}{dt}$ es horizontal. Sea una curva $\gamma(t) \in \mathcal{M}$, $\tilde{\gamma}$ se llama levantamiento de γ si

$$\pi(\tilde{\gamma}) = \gamma, \quad (2.26)$$

si $\tilde{\gamma}$ resulta ser una curva horizontal entonces se le llama un levantamiento horizontal. Si γ es una curva cerrada \mathcal{M} se tiene que en general $\tilde{\gamma}$ será abierta en E . A este efecto se le llama holonomía de la conexión. A la asociación de una curva $\gamma(t)$ a una única curva $\tilde{\gamma}$ en el haz fibrado es lo que se conoce como transporte paralelo.

En vez de usar vectores en TE , se puede utilizar el lenguaje de las formas diferenciales para dar una descripción alternativa de la conexión. El mapa

$$T_p E \ni u \rightarrow \text{ver } u \in V_p \quad (2.27)$$

permite introducir una 1-forma \mathcal{A} en E valuada en el espacio vertical

$$\mathcal{A}_p(u) = \text{ver } u \in V_p \quad (2.28)$$

para todo $u \in T_p E$. De esta manera el espacio horizontal queda definido por

$$H_p = \{u \in T_p E \mid \mathcal{A}_p(u) = 0\}. \quad (2.29)$$

\mathcal{A} se conoce como la 1-forma de conexión. Es esta última versión de la conexión la que será más usada a lo largo de este escrito, en particular lo que será llamado la conexión perturbativa es en realidad una 1-forma de conexión.

2.3.1 Curvatura

Definiremos ahora lo que se entiende por curvatura o campo de Yang-Mills. Este concepto será importante al tratar con la holonomía de la conexión perturbativa pues se usará para relacionarla con la fase de Berry. Definiremos la curvatura como la 2-forma

$$F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu \quad (2.30)$$

cuyas componentes vienen dadas por

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} - i[A_\mu, A_\nu]. \quad (2.31)$$

donde las A_μ son las componentes de la 1-forma de conexión.

Geoméricamente, la curvatura mide que tanta holonomía presenta una curva $\tilde{\gamma}$ si su proyección es lo suficientemente pequeña.

2.3.2 Transformaciones gauge

Hasta ahora tenemos como se obtiene una 1-forma de conexión dado un sistema de coordenadas en el haz fibrado. Sea (x, p) las coordenadas de la fibra, si hacemos un cambio local en las coordenadas de la fibra $p \rightarrow p'$, y si este cambio viene dado por la acción de un elemento del grupo G

$$p' = hp,$$

entonces la ley de transformación de la 1-forma de conexión es

$$\mathcal{A}' = h\mathcal{A}h^{-1} + dh h^{-1}. \quad (2.32)$$

Lo anterior es lo que se conoce en física como una transformación gauge local. Como se verá, la conexión perturbativa obedece este tipo de ley de transformación.

En el próximo capítulo se mostrarán los fenómenos de holonomía cuántica y clásica, y se estudiarán en términos de los elementos geométricos presentados en este capítulo.

Capítulo 3

Fases Geométricas

Una parte importante del contenido de los capítulos 4 y 5 trata sobre procesos cíclicos en ciertos parámetros externos λ asociados a algún hamiltoniano y de su relación con las llamadas fases geométricas. Comenzando con la fase cuántica, se expondrá primero como esta fase está contenida en la teoría física y luego, con ayuda de los conceptos expuestos en el capítulo anterior, se le dará una interpretación en términos de la holonomía de una conexión en un haz fibrado apropiadamente construido. El mismo esquema se utilizara para la fase geométrica clásica.

3.1 Fase de Berry

Esta sección trata acerca de la holonomía cuántica, también llamada fase de Berry. Se presupondrá un conocimiento básico de la mecánica cuántica por parte del lector. Para este tema mencionamos como referencias útiles a [1,5], además del artículo original de Berry [4].

3.1.1 Derivación estándar

Supongamos que tenemos un sistema cuántico cuyo hamiltoniano depende del tiempo $H(t)$. Supondremos además que nuestro sistema comenzó en un estado propio de $H(0)$, $|\psi(0)\rangle = |n(0)\rangle$. Ahora, un vector de estado arbitrario puede ser expandido en términos de una base ortogonal de vectores

$$|\psi(t)\rangle = \sum_m c_m(t) \exp(-i \int_0^t E_m(t) dt) |m(t)\rangle, \quad (3.1)$$

donde se puede elegir que el conjunto $\{|m(t)\rangle\}$ esté compuesto de los vectores propios instantáneos del hamiltoniano del sistema $H(t)$. Al aplicar la ecuación de Schrödinger se obtiene la siguiente ecuación para los coeficientes

$$\begin{aligned} \dot{c}_m &= -c_m \langle m | \dot{m} \rangle \\ &\quad - \sum_{k \neq m} c_k \langle m | \dot{k} \rangle \exp(-i \int_0^t (E_k(t) - E_m(t)) dt). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Se calculará ahora el término $\langle m | \dot{k} \rangle$. Derivando la ecuación de valores propios

$$H |k\rangle = E_k |k\rangle, \quad (3.3)$$

se obtiene

$$H \dot{k} + \dot{H} |k\rangle = E_k |\dot{k}\rangle + \dot{E}_k |k\rangle, \quad (3.4)$$

y al multiplicar (3.4) a la izquierda por $\langle m |$ se obtiene

$$\langle m | \dot{k} \rangle = \frac{1}{E_k - E_m} \langle m | \dot{H} |k\rangle.$$

El cambio en el hamiltoniano es lo suficientemente lento para ser llamado adiabático si se cumple que

$$\left| \langle m | \dot{H} |k\rangle \right| \ll \frac{|E_k - E_m|}{\Delta T_{km}}. \quad (3.5)$$

En el límite $\Delta T_{km} \rightarrow \infty$ se tiene que $|\langle m | \dot{H} | k \rangle| \rightarrow 0$, y por lo tanto $\langle m | \dot{k} \rangle \rightarrow 0$. En este límite de perfecta adiabaticidad, la ecuación (3.2) se simplifica a

$$\dot{c}_m = -c_m \langle m | \dot{n} \rangle, \quad (3.6)$$

que junto a la condición inicial $c_n = \delta_{n,m}$, $c_m(t) = 0$ para $n \neq m$ y (3.1) implican que

$$|\psi(t)\rangle = e^{i\phi_n} \exp\left(-i \int_0^t E_n(t) dt\right) |n(t)\rangle$$

con

$$\phi = i \int_0^t \langle n | \dot{n} \rangle. \quad (3.7)$$

Si después de cierto tiempo $t = T$ se tiene que $H(T) = H(0)$, y si además tenemos que la dependencia del hamiltoniano con el tiempo es debida únicamente a ciertos parámetros λ , podemos escribir (3.7) como

$$\phi = i \int_0^T \langle n | \dot{n} \rangle = i \oint_C \mathcal{A}^{(n)}, \quad (3.8)$$

donde el integrando es la 1-forma definida por

$$\mathcal{A}^{(n)} = i \langle n | dn \rangle.$$

La fase dada por (3.8) se conoce como la fase de Berry[4].

Para terminar esta subsección, al usar el teorema de Stokes [3,4] podemos calcular la fase de Berry de la forma

$$e^{i\phi_n(C)} = \exp\left(i \int_{\Sigma} \tilde{\mathcal{W}}^{(n)}\right), \quad (3.9)$$

donde $C = \partial\Sigma$ y $\tilde{\mathcal{W}}^{(n)} = d\mathcal{A}^{(n)}$. La 2-forma $\tilde{\mathcal{W}}^{(n)}$ se llama la curvatura asociada a la conexión abeliana y puede ser probado [1,4] que para este caso viene dada por

$$\tilde{\mathcal{W}}^{(n)} = i \sum_{n \neq n'} \frac{\langle n | dH | n' \rangle \wedge \langle n' | dH | n \rangle}{(E_n - E_{n'})^2} \quad (3.10)$$

3.1.2 Derivación geométrica

Sea un hamiltoniano H que depende de unas variables externas λ , las cuales parametrizan una variedad suave \mathcal{M} . Suponiendo que el n -ésimo valor propio de H es no-degenerado para ningún λ dentro de cierta región conexa $\mathcal{R} \subset \mathcal{M}$, se elige la fibra en λ como el n -ésimo espacio propio de $H(\lambda)$ (i.e., el espacio expandido por el n -ésimo vector propio $H(\lambda)$). La fibra en este caso es una línea compleja en el espacio de Hilbert. Restringiéndonos a vectores normalizados podemos escribir esta fibra como

$$F_\lambda = \{e^{i\alpha} \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \cong U(1), \quad (3.11)$$

de esta manera obtenemos un fibrado principal $(E, \mathcal{M}, U(1))$, con espacio total

$$E = \bigcup_{\lambda \in \mathcal{M}} F_\lambda.$$

El espacio de Hilbert está equipado con una manera de definir un espacio horizontal, el producto interior. Dado $|n(\lambda)\rangle$, se puede definir el espacio horizontal, como el conjunto de vectores

$$\{ |\delta n(\lambda)\rangle \in T_\lambda \mathcal{M} \mid \langle n(\lambda) | \delta n(\lambda) \rangle = 0 \}, \quad (3.12)$$

esta elección nos define la llamada conexión de Berry-Simon[1,6,7].

Dado $|n\rangle$ que cumpla $\langle n | \frac{dn}{dt} \rangle = 0$, la curva $t \rightarrow |n(\lambda_t)\rangle$ define un levantamiento horizontal de la curva original en \mathcal{R} . La 1-forma de conexión valuada en $u(1)$ asociada es

$$\mathcal{A}^{(n)=i} \langle n | dn \rangle, \quad (3.13)$$

cuya holonomía viene dada por¹

$$e^{i\phi_n(C)} = \exp(i \oint_C \mathcal{A}^{(n)}). \quad (3.14)$$

Para terminar esta subsección, hacemos notar que la transformación gauge local $|n(\lambda)\rangle \rightarrow e^{-i\beta_n(\lambda)} |n(\lambda)\rangle$ produce el siguiente cambio en la 1-forma de conexión

$$\mathcal{A}^{(n)} \rightarrow \mathcal{A}'^{(n)} = \mathcal{A}^{(n)} + d\beta_n. \quad (3.15)$$

Al ser una forma exacta, el término extra en (3.15) no varía el valor de la fase de Berry.

3.2 Ángulo de Hannay

En la mecánica clásica existe un fenómeno de holonomía, análogo a la fase de Berry, que se conoce como el ángulo de Hannay[13,14]. En esta sección primero se reproducirá el desarrollo de Hannay [13], en el que se emplean los conceptos de sistema integrable, coordenadas ángulo-acción² y el teorema adiabático clásico. Luego se expondrá la interpretación del ángulo de Hannay en términos de haces fibrados.

Referimos a [12,15] para una exposición detallada de las ideas de mecánica clásica que se emplearán.

3.2.1 Derivación estándar

Se dice que un sistema dinámico de n grados de libertad es integrable en el sentido de Liouville-Arnold[12] si sus orbitas son acotadas y existe un conjunto de constantes de movimiento (J_1, J_2, \dots, J_n) que cumplen lo siguiente: todas las constantes están en

¹Para caminos abiertos en \mathcal{M} a la conexión (3.13) se le debe agregar un término extra para poder obtener la correcta fase adiabática[8,9,10,11].

²Será común en el escrito que se abrevie y se identifique este sistema de coordenadas con las letras A-A.

involución, I.e, para todo par J_i, J_k se cumple $\{J_i, J_k\} = 0$, siendo $\{ , \}$ el corchete de Poisson. Lo segundo es que las constantes deben cumplir

$$dJ_1 \wedge dJ_2 \dots \wedge dJ_n \neq 0. \quad (3.16)$$

Para esta clase especial de sistemas dinámicos, el espacio de fase se descompone en superficies disjuntas, las cuales son homotopicas a n-toros y una orbita dada queda completamente contenida en uno de estos n-toros. Esta foliación del espacio de fase depende unicamente del hamiltoniano en cuestión.

Sea $H(p^\alpha, q^\alpha, \lambda)$ un hamiltoniano de un sistema integrable, entonces para λ fijo existe una transformación canónica (dependiente de λ) que permite pasar a al llamado sistema de coordenadas de ángulo-acción

$$(q^1, \dots, q^n, p^1, \dots, p^n, \lambda) \rightarrow (\phi_\lambda^1, \dots, \phi_\lambda^n, I_\lambda^1, \dots, I_\lambda^n).$$

En este nuevo sistema de coordenadas el hamiltoniano tiene la propiedad de ser independiente de las variables de ángulo $(\phi_\lambda^1, \dots, \phi_\lambda^n)$

$$H(p^\alpha, q^\alpha, \lambda) = H(I_\lambda^1, \dots, I_\lambda^n), \quad (3.17)$$

y las ecuaciones de Hamilton se reducen a

$$\begin{aligned} \dot{I}_\lambda^\mu &= -\frac{\partial H}{\partial \phi^\mu} = 0 \\ \dot{\phi}_\lambda^\mu &= \frac{\partial H}{\partial I^\mu} = \omega_\mu, \end{aligned} \quad (3.18)$$

donde las ω_μ son independientes del tiempo. Las variables de acción indican en cual de los todos esta contenida la orbita, mientras que las variables de ángulo forman un conjunto de coordenadas

En general el conjunto $(\phi, I)_\lambda$ no será un sistema de coordenadas A-A para el hamiltoniano $H(p, q, \lambda)$, con $\lambda \neq \lambda$. Si dejamos que λ varíe con el tiempo, y si el sistema permanece integrable para cada valor tomado por λ , se tiene entonces que las ecuaciones de evolución para las coordenadas de ángulo acción son

$$\begin{aligned}\dot{I}^\mu &= \frac{\partial I^\mu}{\partial \lambda^\nu} \dot{\lambda}^\nu, \\ \dot{\phi}_\lambda^\mu &= \frac{\partial H}{\partial I^\mu} + \frac{\partial \phi^\mu}{\partial \lambda^\nu} \dot{\lambda}^\nu.\end{aligned}\tag{3.19}$$

Para cambios no adiabáticos del hamiltoniano las ecuaciones (3.19) dan como resultado que el cambio en (ϕ, I) depende del valor inicial de estas variables. Sin embargo, si el cambio en λ es lo suficientemente lento, el teorema adiabático clásico [12,15] nos indica que en buena aproximación podemos reemplazar las ecuaciones (3.19) por sus ecuaciones promediadas

$$\dot{I}^\mu = \left\langle \frac{\partial I^\mu}{\partial \lambda^\nu} \frac{d\lambda^\nu}{dt} \right\rangle = 0,\tag{3.20}$$

$$\dot{\phi}^\mu = \frac{\partial H}{\partial I} + \left\langle \frac{\partial \phi^\mu}{\partial \lambda^\nu} \dot{\lambda}^\nu \right\rangle,\tag{3.21}$$

donde el promedio angular viene dado por

$$\langle \dots \rangle = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} (\dots) d\phi^1 \dots d\phi^n.\tag{3.22}$$

La ecuación (3.20) nos indica que la trayectoria instantánea que recorre el sistema en el espacio de fase siempre coincide con las trayectorias propias del hamiltoniano instantáneo.

La ecuación (3.21) nos dice que el cambio en la variable de ángulo se divide en dos partes: el término $\frac{\partial H}{\partial I}$; es un factor dinámico, mientras que el segundo término es puramente geométrico. Si el camino en \mathcal{M} es cerrado³, el cambio debido al segundo término en (3.21)

³Al igual que para la fase de Berry, para caminos abiertos se tiene que tomar medidas extras para poder obtener el ángulo correcto[9, 20].

viede dado por

$$\Delta\phi_H^\mu = \oint \langle d\phi^\mu \rangle = \int d \langle d\phi^\mu \rangle, \quad (3.23)$$

conocido como el ángulo de Hannay. Aunque $d^2\phi = 0$, por lo general se tiene $d \langle d\phi \rangle \neq 0$, siendo este hecho el origen de la holonomía clásica⁴.

3.2.2 Derivación geométrica

La formulación del ángulo de Hannay en términos de haces fibrados es diferente a la que se empleó para la fase de Berry [13,14]. Comenzamos definiendo el haz el fibrado. Recordemos que un sistema dinámico dependiente de parámetros externos, se puede entender como la colección de un espacio de fase \mathcal{P} , una forma symplectica $\tilde{\omega}$ y una función hamiltoniana que cumple

$$H : \mathcal{M} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}. \quad (3.24)$$

Lo anterior tiene como resultado [1], que el espacio total asociado es el fibrado trivial

$$E \cong \mathcal{M} \times \mathcal{P}. \quad (3.25)$$

En todo fibrado trivial hay una conexión de Ehresmann que surge naturalmente [18,19], y esta da lugar al siguiente levantamiento horizontal

$$h_0(Z) = Z \oplus 0 \quad (3.26)$$

donde se define $Z \oplus 0$ como el campo vectorial en $T\mathcal{P} \times T\mathcal{M}$ dado por

$$\mathcal{M} \times \mathcal{P} \ni (\lambda, x) \rightarrow (Z, 0) \in T_\lambda \mathcal{M} \times T_x \mathcal{P}. \quad (3.27)$$

⁴Debido a esto, pudiera parecer que la adiabaticidad es la causante de la aparición de la holonomía clásica, pero no es así[16], para cambios no adiabáticos la holonomía sigue estando dada por (3.23).

Puede ser demostrado que la conexión definida por (3.27) es trivial en el sentido que toda curva cerrada en \mathcal{M} se levanta a una curva cerrada en E , es decir no presenta holonomía[17]⁵.

Ahora, sea G un grupo de Lie compacto y conexo, y que además es un grupo de simetría de la función hamiltoniana; i.e., H es invariante ante la acción

$$\begin{aligned}\Phi & : G \times \mathcal{M} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{M} \times \mathcal{P}, \\ \Phi_g & : \mathcal{M} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{M} \times \mathcal{P},\end{aligned}\tag{3.28}$$

con la condición adicional que la acción de G no cambia el carácter simplectico de la fibra \mathcal{P} .

Si α es un campo vectorial arbitrario, se puede definir su promedio sobre G como

$$\langle \alpha \rangle = \frac{1}{|G|} \int_G \Phi_g^* \alpha dg,\tag{3.29}$$

donde Φ_g^* es la acción dual del grupo, y dg es la medida de Haar[32]. La demostración que el campo vectorial definido por

$$h(Z) = \langle h_0(Z) \rangle = \langle Z \oplus 0 \rangle\tag{3.30}$$

define una conexión de Ehresmann no trivial puede encontrarse en [18]. Una conexión de este tipo se le llama de Hannay-Berry.

Básicamente lo que se hace es utilizar el mecanismo del promedio para, a partir de una conexión trivial, obtener una conexión que en general presentará holonomía.

Para los sistemas dinámicos integrables estudiados por Hannay el grupo de Lie asociado es el toro abeliano $G \cong T^N = \{(\phi^1, \dots, \phi^N) \text{ mod } 2\pi\}$ y \mathbb{R}^N es su álgebra de Lie dual

⁵El criterio que define a una conexión como trivial es su curvatura [12]. La conexión será trivía si y solo si $\tilde{F} = 0$.

[1,18,19], por lo que el promedio en (3.30) se reduce a (3.22), recuperándose así el ángulo de Hannay (3.23).

Capítulo 4

Conexión Perturbativa

En este capítulo se usará la teoría cuántica de perturbaciones independiente del tiempo para definir el objeto geométrico más importante de este trabajo; la conexión perturbativa. Con ayuda del teorema de Stokes no-abeliano se relacionará la holonomía de la conexión perturbativa con la fase de Berry. Se estudiará el comportamiento de la conexión ante transformaciones gauge y se mostrará la invariancia de su holonomía ante cierto tipo de estas transformaciones.

Al final del capítulo se hará una interpretación de la conexión perturbativa en el lenguaje de la geometría diferencial. Primero se describirá en términos de una conexión del tipo Berry-Simon, y luego se mostrarán desarrollos que indican que también se puede interpretar como una conexión del tipo Hannay-Berry.

4.1 Definición de la Conexión

Sea $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ un conjunto de parámetros reales y $H(\lambda)$ una familia de Hamiltonianos cuyo espacio de Hilbert asociado es d -dimensional y cuya dependencia de λ sea suave. Supongamos además que existe una región R del espacio de los parámetros para la que en ningún punto el espectro del Hamiltoniano es degenerado. Considérese ahora para cierto $\lambda \in R$ la base de vectores $|n(\lambda)\rangle$ definida por $H(\lambda)$. Si ahora hacemos una variación infinitesimal $\lambda_\mu \rightarrow \lambda_\mu + \delta\lambda_\mu$, la nueva base de vectores propios $|n(\lambda + d\lambda)\rangle$ debe estar relacionada con la anterior por medio de una transformación $SU(d)$ infinitesimal, la cual dependerá de λ y de la dirección de la variación $d\lambda$. Esta relación entre bases se puede escribir de la forma

$$|n(\lambda + d\lambda)\rangle = (1 + i\mathcal{A}) |n(\lambda)\rangle, \quad (4.1)$$

donde la 1-forma de conexión $\mathcal{A} = A_\mu d\lambda_\mu$ y A_μ toman valores en el álgebra de Lie de $SU(d)$ y nos referiremos a ella como la conexión perturbativa. La variación en los valores propios viene dada por el teorema Feynman-Hellman [21]

$$dE_n = \langle n(\lambda) | dH(\lambda) | n(\lambda) \rangle, \quad (4.2)$$

mientras que, por teoría de perturbaciones Rayleigh-Schrödinger [22, 23], la variación para los vectores base se puede escribir como

$$d|n(\lambda)\rangle = \sum_{m \neq n} \frac{\langle m(\lambda) | dH | n(\lambda) \rangle}{E_n - E_m} |m(\lambda)\rangle. \quad (4.3)$$

En general, el lado derecho de (4.3) podría tener una componente paralela a $|n(\lambda)\rangle$, pero esta solo generaría un cambio en la fase del vector y no contiene información alguna acerca

de la nueva base. Por lo tanto definiremos una conexión "mínima"¹ que no produzca cambio a lo largo de $|n, \lambda\rangle$. Para resumir, exigiremos que la conexión cumpla

$$\begin{aligned} \langle m(\lambda) | A_\mu(\lambda) | n(\lambda) \rangle &= -i \frac{\langle m(\lambda) | \partial_\mu H | n(\lambda) \rangle}{E_n - E_m} & m \neq n \\ &= 0 & m = n \end{aligned} \quad (4.4)$$

El siguiente resultado nos indica cómo construir explícitamente un operador que cumpla con (4.4)

Lema 1 *El operador definido por*

$$A_\mu(\lambda) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{i}{2T} \int_{-T}^T dt e^{-itH} (\partial_\mu H) e^{itH}, \quad (4.5)$$

cumple con los requerimientos de la conexión perturbativa mínima.

Demostración. La demostración consiste en calcular directamente los elementos matriciales de $A_\mu(\lambda)$. Comenzamos reescribiendo (4.5) de la siguiente forma

$$A_\mu(\lambda) = - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T t dt \int_0^1 ds e^{-itsH} (\partial_\mu H) e^{itsH}.$$

Para $m \neq n$ los elementos matriciales son

$$\begin{aligned} \langle m(\lambda) | A_\mu(\lambda) | n(\lambda) \rangle &= - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\langle m(\lambda) | \partial_\mu H | n(\lambda) \rangle}{2T} \int_{-T}^T t dt \left[\frac{e^{i(E_n - E_m)t} - 1}{i(E_n - E_m)t} \right] \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} i \frac{\langle m(\lambda) | \partial_\mu H | n(\lambda) \rangle}{(E_n - E_m)} \left[\frac{\sin((E_n - E_m)T)}{(E_n - E_m)T} - 1 \right] \\ &= -i \frac{\langle m(\lambda) | \partial_\mu H | n(\lambda) \rangle}{(E_n - E_m)}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

mientras que si $m = n$

$$\langle n(\lambda) | A_\mu(\lambda) | n(\lambda) \rangle = - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\langle n(\lambda) | \partial_\mu H | n(\lambda) \rangle}{2T} \int_{-T}^T t dt = 0, \quad (4.7)$$

¹De aquí en adelante a la conexión perturbativa mínima se le llamará simplemente la conexión perturbativa a menos que se indique lo contrario.

completando la prueba. ■

Una vez conocidas las componentes de la conexión se puede construir de forma la ecuación diferencial

$$(d - i\mathcal{A}(\lambda)) |n(\lambda)\rangle = 0, \quad (4.8)$$

conocida como la ecuación de transporte paralelo[29].

En general, sucederá que $[\mathcal{A}(\lambda), \mathcal{A}(\lambda)]$, por lo tanto la ecuación (4.8) tendrá como solución una exponencial ordenada de \mathcal{A}

$$|n(\lambda), C\rangle = Pe^{\int_C \mathcal{A}} |n(\lambda_0)\rangle. \quad (4.9)$$

donde C es el camino con que se unen λ_0 y λ . El operador $Pe^{\int_C \mathcal{A}}$ nos permite pasar de la base $\{|n(\lambda_0)\rangle\}$ del hamiltoniano $H(\lambda_0)$ a una nueva base $\{|n(\lambda), C\rangle\}$ para $H(\lambda)$.

Si C y C' son dos curvas con puntos iniciales y finales λ_0 y λ respectivamente, siempre se va a tener que los vectores resultantes son paralelos

$$|n(\lambda), C\rangle \propto |n(\lambda), C'\rangle, \quad (4.10)$$

pero no necesariamente se va a cumplir la igualdad

$$|n(\lambda), C\rangle = |n(\lambda), C'\rangle. \quad (4.11)$$

En general $|n(\lambda), C\rangle$ y $|n(\lambda), C'\rangle$ diferirán por un factor de fase $e^{i\alpha}$.

4.2 Holonomía de la Conexión

Como se mencionó al final de la sección anterior, cuando hacemos el cambio $H(\lambda_0) \rightarrow H(\lambda)$ la base de vectores $\{|n(\lambda)\rangle\}$ para el nuevo hamiltoniano no dependerá únicamente del valor de λ . Aunque λ determina el conjunto de rayos en el espacio proyectivo de Hilbert al que pertenecerá la base, el camino usado para ir del punto inicial al final en \mathcal{M} determinará en últimas cuál de todas las posibles opciones para el conjunto de vectores es la que se termina obteniendo. Cabe preguntarse entonces, ¿qué sucede si hacemos un recorrido cerrado en \mathcal{M} ?, ¿cómo se verán afectado los vectores iniciales?. El siguiente resultado es una respuesta parcial a esa pregunta.

Lema 2 (2) *Sea $\mathcal{R} \subset \mathcal{M}$ tal que, para $\lambda \in \mathcal{R}$ todos los $H(\lambda)$ comparten un mismo conjunto no degenerado de valores propios $\{E_n\}$. Consideremos además una curva $\mathcal{R} \supset C(t)$, $0 \leq t \leq T$, donde T cumple $\lambda(T) = \lambda(0)$. Por último, sea $P e^{i \oint_C \mathcal{A}}$ el elemento de $SU(N)$ asociado a recorrer $C(t)$ y sea $T^N = \{\text{diag}(e^{i\phi_1}, e^{i\phi_2} \dots e^{i\phi_n}) : \forall j, \phi_j \in \mathbb{R}\}$. Entonces se cumple que*

$$P e^{i \oint_C \mathcal{A}} \in T^N. \quad (4.12)$$

Demostración. La primera parte de la demostración consiste en notar que el hamiltoniano cumple con una ecuación tipo Heisenberg

$$dH = i[\mathcal{A}, H]. \quad (4.13)$$

Primero observamos que la condición de que no haya cambio en los valores propios junto con el teorema de Hellman-Feynman(4.2) implican la anulación de los elementos de la diagonal

del operador dH

$$\langle n(\lambda) | dH(\lambda) | n(\lambda) \rangle = 0. \quad (4.14)$$

Por otro lado tenemos que

$$\begin{aligned} i \langle n(\lambda) | [\mathcal{A}, H(\lambda)] | n(\lambda) \rangle &= \langle n(\lambda) | \mathcal{A} | n(\lambda) \rangle E_n - E_n \langle n(\lambda) | \mathcal{A} | n(\lambda) \rangle \\ &= 0, \end{aligned} \quad (4.15)$$

al juntar estos dos últimos resultados tenemos

$$\langle n(\lambda) | dH | n(\lambda) \rangle = \langle n(\lambda) | i [\mathcal{A}, H] | n(\lambda) \rangle. \quad (4.16)$$

Para los elementos fuera de la diagonal procedemos de la siguiente manera

$$\begin{aligned} 0 &= \langle m(\lambda) | H(\lambda) | n(\lambda) \rangle = \langle m(\lambda + d\lambda) | H(\lambda + d\lambda) | n(\lambda + d\lambda) \rangle \\ &= \langle n(\lambda) | (1 + i\mathcal{A})(H(\lambda + d\lambda))(1 + i\mathcal{A}) | m(\lambda) \rangle, \end{aligned}$$

y al reagrupar términos obtenemos

$$\langle m(\lambda) | dH | n(\lambda) \rangle = \langle m(\lambda) | i [\mathcal{A}, H] | n(\lambda) \rangle. \quad (4.17)$$

La igualdad entre todos los elementos matriciales prueba la identidad entre operadores

(4.13). Ahora, la solución de la ecuación (4.13) es de la forma

$$H(\lambda) = P e^{i \int \mathcal{A}} H(\lambda_0) P e^{-i \int \mathcal{A}}. \quad (4.18)$$

Al completar un recorrido cerrado en \mathcal{R} regresamos al operador original

$$P e^{-i \oint_C \mathcal{A}} H(\lambda_0) P e^{i \oint_C \mathcal{A}} = H(\lambda_0), \quad (4.19)$$

que junto con la condición de no degeneramiento del espectro asegura que $Pe^{i\int_C \mathcal{A}}$ sea diagonal; esto es debido a que

$$H(\lambda_0)Pe^{i\int_C \mathcal{A}} = Pe^{i\int_C \mathcal{A}}H(\lambda_0) \quad (4.20)$$

implica

$$\begin{aligned} E_m \langle m(\lambda_0) | Pe^{i\int_C \mathcal{A}} | n(\lambda_0) \rangle &= E_n \langle m(\lambda_0) | Pe^{i\int_C \mathcal{A}} | n(\lambda_0) \rangle, \\ &\rightarrow \langle m(\lambda_0) | Pe^{i\int_C \mathcal{A}} | n(\lambda_0) \rangle = 0. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Además, los elementos de la diagonal de $Pe^{i\int_C \mathcal{A}}$ deben dejar inalterado los valores propios de $H(\lambda)$, por lo que deben cumplir

$$|k_n|^2 = 1 \rightarrow k_n = e^{i\phi_n}, \quad (4.22)$$

concluyéndose así que

$$Pe^{i\int_C \mathcal{A}} = \exp(\text{Diag}(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)) \in T^N, \quad (4.23)$$

lo que completa la prueba. ■

Incidentalmente, la ecuación (4.4) muestra que si no hay variación en los valores propios, la conexión perturbativa proporciona los vectores base correctos para todo $\lambda \in \mathcal{R}$; pues para $|n(\lambda), C\rangle = Pe^{\int_C \mathcal{A}} |n(\lambda_0)\rangle$ se tiene que

$$\begin{aligned} H(\lambda) |n(\lambda)\rangle &= Pe^{i\int_C \mathcal{A}} H(\lambda_0) |n(\lambda_0)\rangle = E_n Pe^{i\int_C \mathcal{A}} |n(\lambda_0)\rangle \\ &= E_n |n(\lambda)\rangle. \end{aligned} \quad (4.24)$$

De gran importancia en la demostración del lemma anterior fue la transformación de similitud (4.18). Esta transformación está ligada a la no variación de los valores propios.

Si estos valores propios cambiasen, los hamiltonianos para diferentes valores de λ no se podrían relacionar unitariamente. Sin embargo, si sólo nos interesamos en la variación en las direcciones de vectores base, entonces no hay razón para que (4.23) no aplique en el caso más general.

Mostraremos ahora un resultado más general, no solo levantaremos la restricción sobre los valores propios, si no que se calculará el valor de la fase adquirida y se relacionará con la fase de Berry; no obstante, primero se definirá el concepto de curvatura de Yang-Mills.

Recordemos que la curvatura de una conexión abeliana está asociada a caminos cerrados de integración y que el teorema de Stokes permite escribir fórmulas como la (3.9). En general, para el caso no-abeliano no tenemos a nuestra disposición una fórmula este tipo de expresiones. Sin embargo, si restringimos el camino de integración de tal manera que solo sea un cuadrado de lados infinitesimales se podrá escribir

$$Pe^{i \oint_C \mathcal{A}} = e^{i \int_{\Sigma} \tilde{F}}, \quad (4.25)$$

donde la 2-forma \tilde{F} se conoce como la curvatura de Yang-Mills [29] y sus componentes vienen dadas por

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial \mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial \nu} - i [A_\mu, A_\nu]. \quad (4.26)$$

Hacemos hincapié en que (4.25) sólo es cierta para circuitos infinitesimalmente pequeños.

Ya con esta definición podemos formular el siguiente resultado

Lema 3 *Sea $\mathcal{R} \subset \mathcal{M}$ es una región para la cual la familia de hamiltonianos $H(\lambda)$ posee siempre un espectro no degenerado $\{E_n(\lambda)\}$. Entonces, para cualquier curva cerrada C en*

\mathcal{R} se cumple

$$P e^{i \oint_C \mathcal{A}} = \sum_n e^{i \int_\Sigma \tilde{\mathcal{W}}^{(n)}} |n(\lambda)\rangle \langle n(\lambda)|, \quad (4.27)$$

donde $\tilde{\mathcal{W}}^{(n)} = \langle n | \tilde{F} | n \rangle$, $C = \partial\Sigma$ y \tilde{F} es la curvatura Yang-Mills asociada a la conexión perturbativa.

Demostración. En este caso, la 2-forma \tilde{F} está valuada en $SU(N)$. Para la demostración de este lema lo primero que hay que notar es que las componentes de la curvatura Yang-Mills son diagonales en la base original de vectores. Como se muestra en el apéndice (A), el cálculo explícito de las componentes matriciales de la curvatura da como resultado

$$\begin{aligned} \langle n | F_{\mu\nu} | n \rangle &= i \sum_{n \neq n'} \left\{ \frac{\langle n | \partial_\mu H | n' \rangle \langle n' | \partial_\nu H | n \rangle}{(E_n - E_{n'})^2} - \frac{\langle n | \partial_\nu H | n' \rangle \langle n' | \partial_\mu H | n \rangle}{(E_n - E_{n'})^2} \right\} \\ \langle m | F_{\mu\nu} | n \rangle &= 0. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Faltaría relacionar la integral ordenada de camino con la curvatura. Esto se hace mediante el llamado teorema de Stokes no-abeliano [24, 25]. El teorema es la siguiente identidad

$$P e^{i \oint_C \mathcal{A}} = \mathcal{P} e^{i \int_\Sigma \tilde{\mathcal{F}}}. \quad (4.29)$$

donde $\tilde{\mathcal{F}}$ es una curvatura dependiente del camino y \mathcal{P} significa ordenamiento por superficie [24]². Más específicamente el lado derecho de (4.29) es igual a

$$\mathcal{P} e^{i \int_\Sigma \tilde{\mathcal{F}}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{P} \prod_{n,m=1}^N U_{m,n}^{-1} e^{i \varepsilon_{n,m}^2 F_{n,m}} U_{m,n}. \quad (4.30)$$

Analícemos uno de los elementos de (4.30). Como se explica en [24] y en el apéndice (B), $U(\lambda)$ es el operador de transporte paralelo que conecta el origen del camino de integración

²En general el ordenamiento por superficie es muy complicado, afortunadamente no se necesita construir explícitamente con dicho ordenamiento para continuar con la prueba.

λ_0 con los puntos donde se hacen los lazos infinitesimales $e^{i\varepsilon^2 F_{n,m}}$, en otras palabras

$$U(\lambda) |n(\lambda_0)\rangle = |n(\lambda)\rangle, \quad (4.31)$$

la operación siguiente es hacer un pequeño lazo con origen en λ

$$e^{i\varepsilon^2 F_{\mu\nu}(\lambda)} |n(\lambda)\rangle = e^{i\varepsilon^2 \mathcal{W}_{\mu\nu}^{(n)}(\lambda)} |n(\lambda)\rangle. \quad (4.32)$$

Por último se transporta de vuelta vector resultante a λ_0

$$U^{-1}(\lambda) (e^{i\varepsilon^2 \mathcal{W}_{\mu\nu}^{(n)}(\lambda)} |n(\lambda)\rangle) = e^{i\varepsilon^2 \mathcal{W}_{\mu\nu}^{(n)}(\lambda)} |n(\lambda_0)\rangle, \quad (4.33)$$

esto da como resultado

$$U(\lambda)^{-1} e^{i\varepsilon^2 F(\lambda)} U(\lambda) |n(\lambda_0)\rangle = e^{i\varepsilon^2 \mathcal{W}_{\mu\nu}^{(n)}(\lambda)} |n(\lambda_0)\rangle. \quad (4.34)$$

Básicamente lo que se ha demostrado es que $|n(\lambda_0)\rangle$ es vector propio de cada uno de los términos que aparecen en la productoria (4.30), y que el valor propio correspondiente es una fase que da cuenta del flujo de la 2-forma $\tilde{\mathcal{W}}^{(n)}$ por ese pequeño elemento de área. Al aplicar toda la exponencial ordenada por superficie a $|n(\lambda_0)\rangle$ se pueden recoger todas estas contribuciones y agruparlas en una sola exponencial

$$\mathcal{P} e^{i \int_{\Sigma} \tilde{\mathcal{F}}} |n(\lambda_0)\rangle = e^{i \int_{\Sigma} \tilde{\mathcal{W}}^{(n)}} |n(\lambda_0)\rangle, \quad (4.35)$$

lo cual, utilizando el teorema espectral, nos permite escribir la identidad

$$\mathcal{P} e^{i \int_{\Sigma} \tilde{\mathcal{F}}} = \sum_n e^{i \int_{\Sigma} \tilde{\mathcal{W}}^{(n)}} |n(\lambda_0)\rangle \langle n(\lambda_0)|, \quad (4.36)$$

concluyendo así la demostración. ■

No solo se ha demostrado la diagonalidad de $\mathcal{P} e^{i \int_C \mathcal{A}}$, si no que al comparar (4.36)

con (3.10) obtenemos lo siguiente:

Corollary 4 *El vector $|n(\lambda)\rangle$, al ser transportado por la conexión perturbativa a través de un camino cerrado en la variedad de los parámetros, adquiere una fase que corresponde a la de Berry.*

Que esto es así no sólo viene de observar que $\langle n | \tilde{F} | n \rangle$ corresponde a (3.10) para cada n , sino que además era de esperarse, básicamente la conexión perturbativa mantiene localmente la fase de los vectores (i.e $\langle n(\lambda) | \mathcal{A} | n(\lambda) \rangle = 0$ implica $\langle n(\lambda) | dn(\lambda) \rangle = 0$), esto en últimas cuentas es la definición de la conexión Berry-Simon (3.12). Notemos además que la independencia de la fase de Berry en relación a la escogencia de la superficie de integración [4], implica la independencia de la elección de la superficie para la integral ordenada en el teorema de Stokes no-abeliano.

En las siguientes dos secciones se darán ejemplos donde se emplea la conexión perturbativa y se mostrará que cumplen con los resultados obtenidos en esta sección.

4.3 SU(2)

4.3.1 Spin $\frac{1}{2}$

El hamiltoniano de una partícula de spin- $\frac{1}{2}$ que se encuentra en reposo y está en presencia de un campo magnético viene dado por

$$H = \frac{B\mu}{2}(\vec{\sigma} \cdot \hat{n}), \quad (4.37)$$

siendo σ_μ son las matrices de Pauli.

Debido a la simetría esférica del problema, es conveniente hacer la definición

$$\begin{aligned}\vec{\sigma} \cdot \hat{n} &= \sigma_n, \\ \vec{\sigma} \cdot \hat{\theta} &= \sigma_\theta, \\ \vec{\sigma} \cdot \hat{\phi} &= \sigma_\phi.\end{aligned}\tag{4.38}$$

A partir de la identidad para las matrices de Pauli [22,23]

$$(\vec{a} \cdot \vec{\sigma})(\vec{b} \cdot \vec{\sigma}) = (\vec{a} \cdot \vec{b}) + i\vec{\sigma} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})\tag{4.39}$$

es inmediato que las matrices (4.38) cumplen con la relación

$$\sigma_a \sigma_b = \delta_{ab} + i\varepsilon_{abc} \sigma_c.\tag{4.40}$$

que implica el álgebra de $\mathfrak{su}(2)$

$$[\sigma_a, \sigma_b] = 2i\varepsilon_{abc} \sigma_c ; \quad a, b = n, \theta, \phi.\tag{4.41}$$

La forma explícita de las matrices (4.38) es

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta e^{-i\phi} \\ \sin \theta e^{i\phi} & -\cos \theta \end{pmatrix}, \\ \sigma_\theta &= \begin{pmatrix} -\sin \theta & \cos \theta e^{-i\phi} \\ \cos \theta e^{i\phi} & \sin \theta \end{pmatrix}, \\ \sigma_\phi &= \begin{pmatrix} 0 & -ie^{-i\phi} \\ ie^{i\phi} & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{4.42}$$

Ya con todas las herramientas necesarias se puede llevar a cabo el cálculo de los elementos

de la conexión. Para la componente asociada al cambio en la coordenada polar

$$\begin{aligned}
A_\theta &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{i}{2T} \int_{-T}^T dt e^{-i\frac{B\mu}{2}(\vec{\sigma} \cdot \hat{n})t} \frac{\partial}{\partial \theta} e^{i\frac{B\mu}{2}(\vec{\sigma} \cdot \hat{n})t} \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{i}{2T} \int_{-T}^T dt e^{-iHt} \frac{\partial}{\partial \theta} (\cos(\frac{B\mu}{2}t) + i\sigma_n \sin(\frac{B\mu}{2}t)) \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{i}{2T} \int_{-T}^T dt (\cos(\frac{B\mu}{2}t) - i\sigma_n \sin(\frac{B\mu}{2}t))(i\sigma_\theta \sin(\frac{B\mu}{2}t)) \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{i}{2T} \int_{-T}^T dt (i\sigma_\theta \sin(\frac{B\mu}{2}t) \cos(\frac{B\mu}{2}t) + i\sigma_\phi \sin^2(\frac{B\mu}{2}t)) \\
&= -\frac{\sigma_\phi}{2}.
\end{aligned} \tag{4.43}$$

Un cálculo análogo para las coordenadas radial y azimutal da como resultado

$$\begin{aligned}
A_\phi &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{i}{2T} \int_{-T}^T dt e^{-iHt} \frac{\partial}{\partial \phi} (\cos(\frac{B\mu}{2}t) + i\sigma_n \sin(\frac{B\mu}{2}t)) \\
&= \frac{\sigma_\theta}{2} \sin \theta,
\end{aligned} \tag{4.44}$$

$$\begin{aligned}
A_B &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{i}{2T} \int_{-T}^T dt e^{-iHt} \frac{\partial}{\partial B} (\cos(\frac{B\mu}{2}t) + i\sigma_n \sin(\frac{B\mu}{2}t)) \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{i}{2T} \int_{-T}^T dt (\cos(\frac{B\mu t}{2}) - i\sigma_n \sin(\frac{B\mu t}{2}))(-\sin(\frac{B\mu t}{2}) + i\sigma_n \cos(\frac{B\mu t}{2})) \frac{B\mu t}{2} \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{4.45}$$

Lo primero por notar es la nulidad de la componente asociada a un cambio en la intensidad del campo, que era de esperarse puesto que al no cambiar la dirección del campo, los vectores propios no rotarían en el espacio de Hilbert y solo podría cambiar su magnitud o su fase, algo que la conexión perturbativa no hace.

Al no afectar los vectores base, se puede ignorar, en la mayoría de los casos, la variación en la magnitud del campo magnético y pensar que los únicos parámetros a variar serán los ángulos θ y ϕ . La variedad de los parámetros será entonces una esfera de radio B .

Para cualquier dirección $\hat{n} = (1, \beta, \alpha)$, donde se ha escrito el vector en coordenadas polares, se construirán ahora los vectores propios de σ_n . Para hacerlo solo se

transportaremos los vectores propios de σ_z

$$|\uparrow, \hat{k}\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.46)$$

$$|\downarrow, \hat{k}\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4.47)$$

bajando desde el polo norte un ángulo β a través de la línea dada por $\phi = \alpha$. Aprovechando que A_θ es independiente de θ , podemos escribir el operador asociado a la anterior transformación como una simple exponencial

$$\begin{aligned} e^{i \int_0^\beta A_\theta(\phi=\alpha) d\theta} &= e^{-\frac{\beta}{2} i \sigma_\phi(\phi=\alpha)} = \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) - i \sigma_\phi \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \\ &= \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) & -e^{-i\alpha} \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \\ e^{i\alpha} \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) & \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Al aplicar (4.48) a (4.46) y (4.47) obtenemos los nuevos vectores base

$$|\uparrow, \hat{n}\rangle = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) & -e^{-i\alpha} \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \\ e^{i\alpha} \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) & \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \\ e^{i\alpha} \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \end{pmatrix} \quad (4.49)$$

$$|\downarrow, \hat{n}\rangle = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) & -e^{-i\alpha} \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \\ e^{i\alpha} \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) & \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{-i\alpha} \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \end{pmatrix}, \quad (4.50)$$

que está en perfecta correspondencia con los resultados conocidos [22].

Se calculará el elemento de curvatura asociado a variar la dirección del campo i.e.,

$F_{\theta\phi}$. Los términos de las derivadas no presentan ningún problema

$$\frac{\partial A_\phi}{\partial \theta} = -\frac{1}{2} \vec{\sigma} \cdot \hat{n} \sin \theta + \frac{\sigma_\theta}{2} \cos \theta \quad (4.51)$$

$$\frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} = -\frac{1}{2} \vec{\sigma} \cdot (-\sin \theta \hat{n} - \cos \theta \hat{\theta}). \quad (4.52)$$

Mientras que el conmutador se calcula utilizando las propiedades de $\mathfrak{su}(2)$

$$[A_\theta, A_\phi] = \frac{1}{2}i\sigma_n \sin \theta. \quad (4.53)$$

Agrupando todo se encuentra que

$$\tilde{F} = -\frac{1}{2} \sin \theta \sigma_n d\theta \wedge d\phi, \quad (4.54)$$

fórmula que de ninguna manera depende de B . La ecuación (4.54) tiene la forma del campo producido por un monopolo situado en el origen del sistema de coordenadas.

Al aplicar ahora el Lema 3 podemos escribir

$$P e^{i \oint_C \mathbf{A}} = e^{-i\frac{\Omega}{2}} |\uparrow, \hat{n}\rangle \langle \uparrow, \hat{n}| + e^{i\frac{\Omega}{2}} |\downarrow, \hat{n}\rangle \langle \downarrow, \hat{n}| \quad (4.55)$$

donde Ω es el ángulo solido subtendido por la curva en la esfera unidad [4].

Cabe notar que en este caso en particular, existen varios contornos para los que se puede evaluar el elemento de holonomía explícitamente, sin necesidad de recurrir al Lema 3. Esto es así porque existen curvas para las cuales la conexión conmuta consigo misma, estas son las líneas de θ constante y las de ϕ constante. Por ejemplo, comencemos con el campo apuntando en la dirección \hat{k} . Movemos ahora el vector a lo largo de la curva $\phi = 0$ hasta llegar al ecuador. La rotación en los vectores base viene dada por

$$e^{i \int_0^{\frac{\pi}{2}} A_\theta(\phi=0) d\theta} = e^{-\frac{\pi}{4} i \sigma_\phi(\phi=0)} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{4}) & -\sin(\frac{\pi}{4}) \\ \sin(\frac{\pi}{4}) & \cos(\frac{\pi}{4}) \end{pmatrix}. \quad (4.56)$$

Podemos continuar el recorrido esta vez variando el campo a través de lo largo de la curva $\theta = \frac{\pi}{2}$, el elemento correspondiente de $SU(2)$ es

$$e^{\int_0^{\Delta\phi} A_\phi(\theta=\frac{\pi}{2}) d\phi} = e^{\frac{\Delta\phi}{2} i \sigma_\theta(\theta=\frac{\pi}{2})} = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\Delta\phi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\Delta\phi}{2}} \end{pmatrix}. \quad (4.57)$$

Finalmente, podemos cerrar el camino, recorriendo la curva $\phi = \Delta\phi$ hasta devolver el campo a su posición original

$$e^{\int_{\frac{\pi}{2}}^0 A_\theta(\Delta\phi)d\theta} = e^{\frac{\pi}{4}i\sigma_\phi(\Delta\phi)} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{4}) & e^{-i\Delta\phi} \sin(\frac{\pi}{4}) \\ -e^{i\Delta\phi} \sin(\frac{\pi}{4}) & \cos(\frac{\pi}{4}) \end{pmatrix}. \quad (4.58)$$

Como era de esperarse la composición de estas rotaciones es diagonal en la base original

$$\begin{aligned} e^{\frac{\pi}{4}i\sigma_\phi(\Delta\phi)} e^{\frac{\Delta\phi}{2}i\sigma_\theta(\theta=\frac{\pi}{2})} e^{-\frac{\pi}{4}i\sigma_\phi(\phi=0)} &= \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{4}) & e^{-i\Delta\phi} \sin(\frac{\pi}{4}) \\ -e^{i\Delta\phi} \sin(\frac{\pi}{4}) & \cos(\frac{\pi}{4}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\Delta\phi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\Delta\phi}{2}} \end{pmatrix} \\ &\times \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{4}) & -\sin(\frac{\pi}{4}) \\ \sin(\frac{\pi}{4}) & \cos(\frac{\pi}{4}) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & e^{-i\Delta\phi} \\ -e^{i\Delta\phi} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\Delta\phi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\Delta\phi}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & e^{-i\Delta\phi} \\ -e^{i\Delta\phi} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\Delta\phi}{2}} & -e^{-i\frac{\Delta\phi}{2}} \\ e^{i\frac{\Delta\phi}{2}} & e^{i\frac{\Delta\phi}{2}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\Delta\phi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\Delta\phi}{2}} \end{pmatrix} = \exp \begin{pmatrix} \frac{-i\Delta\phi}{2} & 0 \\ 0 & \frac{i\Delta\phi}{2} \end{pmatrix}, \quad (4.59) \end{aligned}$$

resultado que está en concordancia con lo predicho para el caso general.

Presentaremos a continuación un ejemplo en donde el resultado del lema 3 no se cumple. La diferencia de este caso con el anterior radica en que ahora no solo se variara la dirección del campo, sino que también cambiara su magnitud. Esta vez el espacio de los parámetros es todo \mathbb{R}^3 .

Teniendo en cuenta que la componente de la conexión asociada con la dirección radial es cero, se podría pensar que cualquier cambio en la magnitud del campo es

irrelevante, como veremos tal suposición es falsa.

Comenzando desde $B = 0$, nos movemos radialmente en la dirección \hat{n} , luego variamos el ángulo polar, para por ultimo devolvemos radialmente hacia el origen. El elemento de holonomía que corresponde es

$$e^{\int_b^0 A_B dB} e^{\int_0^{\theta} A_\theta d\theta} e^{\int_0^b A_\theta dB} = e^{\int_0^{\theta} A_\theta d\theta}. \quad (4.60)$$

Si \hat{n}' representa la dirección final del campo entonces se tendrá

$$e^{\int_0^{\theta} A_\theta d\theta} |\uparrow, \hat{n}\rangle \propto |\uparrow, \hat{n}'\rangle, \quad (4.61)$$

donde $|\uparrow, \hat{n}\rangle$ y $|\uparrow, \hat{n}'\rangle$ no son vectores paralelos en el espacio de Hilbert.

La razón por la que en el ejemplo anterior el elemento de holonomía no es diagonal en la base original de vectores, es que para $B = 0$ existe un degeneramiento del espectro, por lo que no cumple con las condiciones del lema 3. Todo vector de este espacio de Hilbert es vector propio del operador $H = 0$ y por lo tanto el origen de coordenadas no tiene asociado ningún conjunto de direcciones. En este caso la conexión perturbativa sigue conectando una base del operador original con una base del final, solo que debido esta vez estas bases no tienen que ser paralelas.

Ahora, vimos que cualquier base ortogonal es base propia $H = 0$, queda la pregunta de cuál de todas las posibles bases es la que terminaremos obteniendo si el circuito comienza y termina en $B = 0$. Tenemos que la componente A_B de la conexión se anula lo cual indica que la variación de la magnitud del campo no provoca cambio en la base de vectores; por lo tanto los vectores base que obtenemos al llegar a $B = 0$ apuntarán en la misma dirección que los vectores propios de la familia de hamiltonianos $H(\hat{n})$, siendo \hat{n} es la dirección por la cual nos acercamos al origen.

4.3.2 Spin superior

No resulta problemático generalizar los resultados de la subsección anterior para valores del spin superiores. La idea es utilizar las propiedades de conmutación de $\mathfrak{su}(2)$ para desarrollar los términos de la forma $e^{itS_y}(S_x)e^{-itS_y}$ en senos y cosenos del parámetro t [18].

El cálculo de la componente de la conexión asociada a variar el ángulo polar es

$$\begin{aligned}
A_\theta &= -\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{B\mu}{2T} \int_{-T}^T t dt \int_0^1 ds e^{-itsH} (\vec{S} \cdot \frac{\partial \hat{n}}{\partial \theta}) e^{itsH} \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{B\mu}{2T} \int_{-T}^T t dt \int_0^{-1} ds e^{itsH} (S_\theta) e^{-itsH} \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T t dt \int_0^{-1} ds (S_\theta \cos(B\mu t s) - S_\phi \sin(B\mu t s)) \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T dt (S_\theta \sin(B\mu t s) + S_\phi \cos(B\mu t s) - S_\phi) \\
&= -S_\phi,
\end{aligned} \tag{4.62}$$

mientras que para las otras dos componentes resulta

$$\begin{aligned}
A_\phi &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{B\mu}{2T} \int_{-T}^T t dt \int_0^{-1} ds e^{itsH} (S_\phi) e^{-itsH} \\
&= S_\phi \sin \theta
\end{aligned} \tag{4.63}$$

$$\begin{aligned}
A_B &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\mu}{2T} \int_{-T}^T t dt \int_0^{-1} ds e^{itsH} (S_B) e^{-itsH} \\
&= -\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{S_B \mu}{2T} \int_{-T}^T t dt = 0.
\end{aligned} \tag{4.64}$$

Para spin mayor que $\frac{1}{2}$ podemos proceder de la siguiente manera: tomando la suma tensorial de dos operadores de Spin $\frac{1}{2}$

$$\vec{S}_{\frac{1}{2}} \oplus \vec{S}_{\frac{1}{2}} \tag{4.65}$$

y utilizamos la identidad

$$\exp(\vec{S}_{\frac{1}{2}} \oplus \vec{S}_{\frac{1}{2}}) = \exp(\vec{S}_{\frac{1}{2}}) \otimes \exp(\vec{S}_{\frac{1}{2}}) \tag{4.66}$$

Podemos, para el mismo camino de (4.59) desarrollar de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
e^{\frac{\pi}{2}iS_\phi(\Delta\phi)}e^{\Delta\phi iS_\theta(\theta=\frac{\pi}{2})}e^{-\frac{\pi}{2}iS_\phi(\phi=0)} &= \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\Delta\phi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\Delta\phi}{2}} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\Delta\phi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\Delta\phi}{2}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e^{-i\Delta\phi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i\Delta\phi} \end{pmatrix}. \tag{4.67}
\end{aligned}$$

La matriz (4.67) es la composición de los espacio correspondientes a los vectores propios de los operadores de momento angular 1 y 0. Mediante un cambio de base [18], los términos correspondientes al spin 1 se pueden agrupar en una submatriz cuadrada 3x3. Con esto podemos escribir, para Spin 1

$$e^{\frac{\pi}{2}iS_\phi^{(1)}(\Delta\phi)}e^{\Delta\phi iS_\theta^{(1)}(\theta=\frac{\pi}{2})}e^{-\frac{\pi}{2}iS_\phi^{(1)}(\phi=0)} = \begin{pmatrix} e^{-i\Delta\phi} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\Delta\phi} \end{pmatrix}, \tag{4.68}$$

lo que coincide con el resultado para la fase de Berry [4]. Es claro que continuando iterativamente se puede generalizar para cualquier valor del Spin.

4.4 $\mathbf{Sp}(2, \mathbb{R})$

El hamiltoniano del sistema a desarrollar en esta sección es el del oscilador generalizado

$$H = \frac{1}{2} (Xq^2 + Y(pq + qp) + Zp^2) \tag{4.69}$$

donde (p, q) cumplen la relación usual de conmutación para la coordenada y el momento, i.e. $[q, p] = i$. Este sistema difiere con respecto al de la sección anterior en que el hamiltoniano expande una base que es de dimensión infinita. Sin embargo, el conjunto de vectores propios es discreto y esta enumerado por un número cuántico y como se verá, los resultados obtenidos sobre la conexión perturbativa se mantienen.

El primer paso para encontrar la forma de la conexión es notar que la transformación simplectica definida por

$$\begin{aligned} P_\lambda &= \frac{\left[\frac{Z}{X}\right] p + \left[\frac{X}{Z}\right]^{1/4} q \left[\frac{(\sqrt{XZ}+Y)}{(\sqrt{XZ}-Y)}\right]^{1/4}}{\sqrt{2}} \\ Q_\lambda &= \frac{\left[\frac{X}{Z}\right]^{1/4} q - \left[\frac{Z}{X}\right]^{1/4} p \left[\frac{(\sqrt{XZ}-Y)}{(\sqrt{XZ}+Y)}\right]^{1/4}}{\sqrt{2}}, \end{aligned} \quad (4.70)$$

deja al hamiltoniano (4.69) en una forma diagonal

$$H = \frac{\omega}{2}(P^2 + Q^2), \quad (4.71)$$

con $\omega = \sqrt{XZ - Y^2}$ y $[Q, P] = i$. En términos de los operadores $(Q(\lambda), P(\lambda))$, el hamiltoniano es básicamente el de un oscilador armónico., por lo que su espectro es no degenerado y sus valores propios se pueden escribir como

$$E_n(\lambda) = \omega(\lambda)\left(n + \frac{1}{2}\right), \quad (4.72)$$

con $n \in (\mathbb{Z}^+ \cup \{0\})$. Dado que los valores propios varían con los parámetros, se tiene que en general el cambio de H_λ a $H_{\lambda+d\lambda}$ no se podrá implementar de manera unitaria. Dado que sólo nos interesan los vectores propios el interés recaerá únicamente sobre la variación en el operador $(P_\lambda^2 + Q_\lambda^2)$. Es claro que (Q_λ, P_λ) y $(Q_{\lambda+d\lambda}, P_{\lambda+d\lambda})$ están relacionados mediante una transformación simplectica. Pero también, al ser operadores autoadjuntos y cumplir

ambos la relación de conmutación canónica, el teorema de Stone-von Neumann [21] nos dice que estos operadores están relacionados mediante

$$\begin{aligned} P_{\lambda+d\lambda} &= U(\lambda)P_{\lambda}U(\lambda)^{\dagger} \\ Q_{\lambda+d\lambda} &= U(\lambda)Q_{\lambda}U(\lambda)^{\dagger}, \end{aligned} \quad (4.73)$$

siendo U un operador unitario. Lo anterior implica

$$(P_{\lambda+d\lambda}^2 + Q_{\lambda+d\lambda}^2) = U(\lambda) (P_{\lambda}^2 + Q_{\lambda}^2) U(\lambda)^{\dagger}, \quad (4.74)$$

y de manera análoga al lema 2, para un camino cerrado en el espacio de los parámetros solo puede ser $U(\lambda) = \text{diag}(e^{i\phi_1}, e^{i\phi_2}, \dots)$.

Se ha escrito el hamiltoniano en la forma (4.71), porque facilita el cálculo del término de la forma $e^{-itsH} (\partial_{\mu}H) e^{itsH}$ que aparece en la conexión, debido a que para un oscilador armónico se conoce como varían en el tiempo los operadores (P, Q) en la imagen de Heisenberg. Más específicamente [26], se tiene que (Q, P) cumplen

$$\begin{aligned} e^{itH} Q e^{-itH} &= Q(t) = Q \cos(\omega t) + P \sin(\omega t) \\ e^{itH} P e^{-itH} &= P(t) = -Q \sin(\omega t) + P \cos(\omega t). \end{aligned} \quad (4.75)$$

Con las ecuaciones de evolución para (Q, P) es solo cuestión de álgebra encontrar las componentes de la conexión; por ejemplo, para la componente Y se puede hacer el desarrollo

de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
A_Y &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{4T} \int_{-T}^T t dt \int_0^{-1} ds e^{itsH} (pq + qp) e^{-itsH} \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{4T} \int_{-T}^T t dt \int_0^{-1} ds e^{itsH} \left(P^2 \left[\frac{(\sqrt{XZ}-Y)}{(\sqrt{XZ}+Y)} \right]^{1/2} - Q^2 \left[\frac{(\sqrt{XZ}+Y)}{(\sqrt{XZ}-Y)} \right]^{1/2} \right) e^{-itsH} \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{4T} \int_{-T}^T t dt \\
&\quad \times \int_0^{-1} ds \left[\left(Q^2 \sin^2(\omega st) + P^2 \cos^2(\omega st) - \frac{1}{2}(QP + PQ) \sin(2\omega st) \right) \frac{(\sqrt{XZ}-Y)^{1/2}}{(\sqrt{XZ}+Y)^{1/2}} \right. \\
&\quad \left. - \left(Q^2 \cos^2(\omega st) + P^2 \sin^2(\omega st) + \frac{1}{2}(QP + PQ) \sin(2\omega st) \right) \frac{(\sqrt{XZ}+Y)^{1/2}}{(\sqrt{XZ}-Y)^{1/2}} \right] \\
&= \frac{\sqrt{XZ}}{8\omega^2} (QP + PQ) = \frac{\sqrt{XZ}}{8\omega^2} \left(\left[\frac{X}{Z} \right]^{1/2} q^2 - \left[\frac{Z}{X} \right]^{1/2} p^2 \right) \tag{4.76}
\end{aligned}$$

Realizando un procedimiento similar se encuentran las otras dos componentes

$$\begin{aligned}
A_Z &= - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T t dt \int_0^1 ds e^{-itsH} (\partial_Z H) e^{itsH} \\
&= - \frac{Y}{16\omega^2} \left[\frac{X}{Z} \right]^{1/2} (PQ + QP) - \frac{1}{8\omega^2} \left[\frac{X}{Z} \right]^{1/2} (Q^2 - P^2) \\
&= \frac{Y}{16\omega^2} \left[\frac{X}{Z} \right]^{1/2} \left(\left[\frac{Z}{X} \right]^{1/2} p^2 - \left[\frac{X}{Z} \right]^{1/2} q^2 \right) + \frac{Y^2}{8\omega^3} \left(\frac{Xq^2}{Z} + p^2 \right) + \frac{YX}{8\omega^2} (qp + pq), \tag{4.77}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_X &= - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T t dt \int_0^1 ds e^{-itsH} (\partial_X H) e^{itsH} \\
&= - \frac{Y}{16\omega^2} \left[\frac{Z}{X} \right]^{1/2} (PQ + QP) + \frac{1}{8\omega^2} \left[\frac{Z}{X} \right]^{1/2} (Q^2 - P^2) \\
&= \frac{Y}{16\omega^2} \left[\frac{Z}{X} \right]^{1/2} \left(\left[\frac{Z}{X} \right]^{1/2} p^2 - \left[\frac{X}{Z} \right]^{1/2} q^2 \right) - \frac{Y^2}{8\omega^3} (q^2 + \frac{Zp^2}{X}) - \frac{YZ}{8\omega^2} (qp + pq). \tag{4.78}
\end{aligned}$$

El procedimiento para encontrar las componentes de la curvatura es directo, pero aquí solo se mostrará el resultado, pues el cálculo, al ser algo largo se detallará en el apéndice (C).

Definiendo el operador numero $N(\lambda) + \frac{1}{2} = \frac{P_\lambda^2 + Q_\lambda^2}{2}$, la curvatura es de la forma

$$\tilde{F} = \frac{(N(\lambda) + \frac{1}{2})}{8\omega^3} [X dY \wedge dZ + Z dX \wedge dY + Y dZ \wedge dX], \tag{4.79}$$

la cual es diagonal en la base original y sus elementos diagonales concuerdan con la 2-forma de Berry correspondiente para este sistema [14].

Las componentes de la conexión son una combinación de los generadores del álgebra del grupo simplectico sobre el plano $Sp(2, \mathbb{R})$ [27]. En particular, las componentes de la conexión están compuestas por los generadores de las llamadas transformaciones de squeeze

$$K_1 = \frac{1}{4}(Q^2 - P^2) \quad (4.80)$$

$$K_2 = -\frac{1}{4}(QP + PQ), \quad (4.81)$$

y lo que muestra (4.79) es que la transformación resultante luego de recorrer un camino cerrado en \mathcal{M} , está asociada al generador de las rotaciones

$$K_0 = \frac{1}{4}(Q^2 + P^2). \quad (4.82)$$

Ya habiendo desarrollado ejemplos en las dos secciones pasadas, podemos continuar con la investigación de las propiedades de la conexión perturbativa. En la siguiente sección se estudiará como varia la conexión perturbativa ante una transformación gauge.

4.5 Transformaciones Gauge

En la discusión antes de la definición de la conexión perturbativa mínima (4.4), se mencionó que igualar los elementos diagonales de \mathcal{A} a cero es cuestión de elección. Si optásemos por una conexión con elementos diagonales no nulos obtendríamos vectores resultantes con diferentes fases (y/o normas). Sin embargo, esto no cambiaría el hecho de que seguirían siendo una base para el nuevo hamiltoniano. Por lo tanto, si pensamos sólo en términos de rayos en el espacio de Hilbert, dos conexiones serán equivalentes si se

pueden relacionar mediante

$$\mathcal{A}' = \mathcal{A} + \sum_{n=1}^d \alpha_n |n(\lambda)\rangle \langle n(\lambda)|, \quad (4.83)$$

con α_n 1-formas arbitrarias. Sabemos además, que las transformaciones abelianas de gauge

$$|n(\lambda)\rangle \rightarrow e^{-i\beta_n(\lambda)} |n(\lambda)\rangle \quad (4.84)$$

no alteran el valor de la fase de Berry. Ahora, las ecuaciones (4.83) y (4.84) hacen básicamente lo mismo; un cambio de fase en los vectores propios, es natural entonces pensar que estas dos ecuaciones tienen alguna relación. Más adelante, se mostrará que estas dos ecuaciones están relacionadas con las transformaciones gauge que se pueden realizar sobre la conexión.

El propósito general de esta sección es estudiar el comportamiento de la conexión ante una transformación gauge no-abeliana. Se encontrará, para formas exactas α_n , una relación entre las transformaciones asociadas al cambio local de fase de los vectores (4.84) y la ecuación (4.83). Además, se demostrará la holonomía de \mathcal{A} no sufre variación ante un cambio gauge inducido por transformaciones del tipo (4.84).

Primero, para simplificar la escritura, definimos el promedio "temporal" de una función $f(t)$ por

$$\overline{f(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T dt f(t), \quad (4.85)$$

con lo cual podemos escribir la conexión de una manera más compacta

$$\mathcal{A} = \overline{ie^{-itH} d(Ue^{itH})}. \quad (4.86)$$

Supongamos ahora que al hamiltoniano original se le realiza una transformación de semejanza

$$H' = U^\dagger(\lambda) H U(\lambda), \quad (4.87)$$

con U unitaria. La nueva conexión estará dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{A}' &= \overline{iU^\dagger e^{-itH} U d(U^\dagger e^{itH} U)} \\ &= U^\dagger \mathcal{A} U + iU^\dagger dU + \overline{iU^\dagger e^{-itH} (U dU^\dagger) e^{itH} U}, \end{aligned} \quad (4.88)$$

donde el último término del lado derecho se puede desarrollar de la forma

$$\begin{aligned} \overline{U^\dagger e^{-itsH} (U^\dagger dU) e^{itsH} U} &= \sum_{n=1}^d \sum_{n'=1}^d \overline{U^\dagger e^{-itsH} |n(\lambda)\rangle \langle n(\lambda)| (U dU^\dagger) |n'(\lambda)\rangle \langle n'(\lambda)| e^{itsH} U} \\ &= \sum_{n=1}^d \sum_{n'=1}^d \overline{e^{it(E_{n'} - E_n)} U^\dagger |n(\lambda)\rangle \langle n(\lambda)| (U dU^\dagger) |n'(\lambda)\rangle \langle n'(\lambda)| U} \\ &= \sum_{n=1}^d \langle n(\lambda)| (U dU^\dagger) |n(\lambda)\rangle U^\dagger |n(\lambda)\rangle \langle n(\lambda)| U =, \end{aligned} \quad (4.89)$$

y por lo tanto la nueva conexión queda de la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{A}' &= U^\dagger \mathcal{A} U + iU^\dagger dU + \sum_{n=1}^d U^\dagger |n(\lambda)\rangle \langle n(\lambda)| (U dU^\dagger) |n(\lambda)\rangle \langle n(\lambda)| U \\ &= U^\dagger \mathcal{A} U + i(U^\dagger dU)_\perp, \end{aligned} \quad (4.90)$$

donde se define $(U^\dagger dU)_\perp$ como $U^\dagger dU$ pero con los elementos diagonales igualados a cero. De la ecuación (4.83), tenemos que una conexión igualmente válida puede ser definida mediante

$$\mathcal{A}' = U^\dagger \mathcal{A} U + i(U^\dagger dU). \quad (4.91)$$

La ecuación (4.91) muestra que la conexión perturbativa se transforma como los potenciales de las teorías gauge no-abelianas [29], es decir se transforma de la manera esperada. Este

último resultado nos dice que la conexión perturbativa posee verdadera estructura gauge, por lo que se ha completado el objetivo de representar la teoría de perturbaciones cuántica como una teoría tipo Yang-Mills.

Ya conociendo cómo se transforma la conexión, estamos en condiciones de encontrar la relación mencionada al comienzo de la sección; para eso usamos una matriz de transformación de la forma

$$U = \sum_{n=1}^d e^{-i\beta_n(\lambda)} |n(\lambda)\rangle \langle n(\lambda)|, \quad (4.92)$$

la cual equivale a hacer un cambio de fase local en cada uno de los vectores propios. Al derivar (4.92) se encuentra

$$\begin{aligned} dU &= -i \sum_{n=1}^d (d\beta_n) e^{-i\beta_n(\lambda)} |n(\lambda)\rangle \langle n(\lambda)| \\ &\quad + \sum_{n=1}^d e^{-i\beta_n(\lambda)} |dn(\lambda)\rangle \langle n(\lambda)| + \sum_{n=1}^d e^{-i\beta_n(\lambda)} |n(\lambda)\rangle \langle dn(\lambda)| \\ &= -i \sum_{n=1}^d (d\beta_n) e^{-i\beta_n(\lambda)} |n(\lambda)\rangle \langle n(\lambda)| \\ &\quad + i \sum_{n=1}^d e^{-i\beta_n(\lambda)} \mathcal{A} |n(\lambda)\rangle \langle n(\lambda)| - i \sum_{n=1}^d e^{-i\beta_n(\lambda)} |n(\lambda)\rangle \langle n(\lambda)| \mathcal{A} \\ &= -i \sum_{n=1}^d (d\beta_n) e^{-i\beta_n(\lambda)} |n(\lambda)\rangle \langle n(\lambda)| + i [A, U], \end{aligned} \quad (4.93)$$

y al reemplazar (4.93) en (4.91) se halla una ecuación de transformación del tipo (4.83)

$$\begin{aligned} \mathcal{A}' &= U^\dagger \mathcal{A} U + i \sum_{n=1}^d (d\beta_n) |n(\lambda)\rangle \langle n(\lambda)| - U^\dagger [A, U] \\ &= \mathcal{A} + \sum_{n=1}^d d\beta_n |n(\lambda)\rangle \langle n(\lambda)|. \end{aligned} \quad (4.94)$$

Notemos que todos los pasos que nos llevaron a (4.94) se pueden hacer en sentido contrario, lo que muestra la equivalencia entre la libertad de hacer una transformación en la conexión del tipo (4.94) y las transformaciones de fase local en los vectores propios.

Demostraremos ahora la invariancia del elemento de holonomía ante una transformación (4.92). Ante un transformación gauge, la curvatura y la integral ordenada cambian según [29]

$$\tilde{F}^r(\lambda) = U^\dagger \tilde{F}(\lambda) U \quad (4.95)$$

$$Pe^{i\oint_C \mathcal{A}'} = U^\dagger Pe^{i\oint_C \mathcal{A}} U, \quad (4.96)$$

pero por (4.36) tanto U como $Pe^{i\oint_C \mathcal{A}}$ pertenecen al toro abeliano y por lo tanto se pueden conmutar

$$\begin{aligned} Pe^{i\oint_C \mathcal{A}'} &= U^\dagger Pe^{i\oint_C \mathcal{A}} U \\ &= U^\dagger U Pe^{i\oint_C \mathcal{A}} \\ &= e^{i\oint_C \mathcal{A}}, \end{aligned} \quad (4.97)$$

esta última igualdad concluye la prueba.

Ciertamente, las transformaciones del tipo (4.92) no son las más generales que se pueden hacer en $SU(N)$. Sin embargo, en este trabajo el interés está en el conjunto de vectores propios de la familia de hamiltonianos $H(\lambda)$ y bajo esta consideración la libertad gauge que tenemos es la variación de la fase de los vectores (4.92), en este contexto las transformaciones más generales de $SU(N)$ quedan por fuera de consideración.

Ahora que se han comprobado las naturaleza gauge de la conexión perturbativa

podemos avanzar en su interpretación en términos de la geometría diferencial, a esto dedicaremos el resto del capítulo.

4.6 Interpretación Geométrica

Esta sección está dedicada a la interpretación geométrica de la holonomía de la conexión perturbativa. Primero se mostrará que se puede interpretar como una conexión de Berry-Simon y luego se darán indicios que mostrarían que también se puede entender como una conexión tipo Hannay-Berry.

4.6.1 Interpretación Como Conexión de Berry-Simon

Teniendo \mathcal{M} como espacio base, podemos en cada punto $\lambda \in \mathcal{M}$ fijar un conjunto ordenado de vectores ortonormales $\{|1(\lambda)\rangle, |2(\lambda)\rangle, \dots, |n(\lambda)\rangle\}$ lo que nos define la fibra como

$$\mathcal{F}_\lambda = \{U \in T_\lambda^N\} \cong T_\lambda^N, \quad (4.98)$$

con $T^N = U(1)_1 \times U(1)_2 \times \dots \times U(1)_N$. Esto nos da como resultado el fibrado no trivial

$$P = \bigcup_{\lambda \in \mathcal{M}} \mathcal{F}_\lambda \mathcal{M}.$$

Ahora, una curva $t \rightarrow C(t) \in \mathcal{M}$, tendrá en P un levantamiento

$$t \rightarrow \{|h_1(t)\rangle, \dots, |h_n(t)\rangle\},$$

que será horizontal con respecto a la conexión perturbativa si se cumple

$$\langle 1(\lambda) | h_1 \rangle = \langle 2(\lambda) | h_2 \rangle = \dots = \langle n(\lambda) | h_n \rangle = 0. \quad (4.99)$$

Lo que (4.99) muestra es que, por separado, cada uno de los vectores base es transportado paralelamente mediante una regla que es del tipo Berry-Simon (3.12). Como a cada vector se le está transportando según (3.12), al realizar un camino cerrado en \mathcal{M} cada uno obtendrá la fase de Berry.

4.6.2 Interpretación Como Conexión de Hannay-Berry

En la subsección anterior se mostró que la conexión perturbativa se puede interpretar como una construcción geométrica parecida a la que dio Simon a la fase de Berry. Esto es suficiente por sí solo, sin embargo, a continuación daremos argumentos que llevan a pensar que la conexión también se podría interpretar de manera análoga a lo realizado en la sección 3.2.2. para el ángulo de Hannay.

Consideremos el operador definido por

$$\mathbb{A} = ie^{-itH} (de^{itH}), \quad (4.100)$$

mostraremos que este operador presenta holonomía nula. Para comprobar esto primero demostramos la identidad

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_\mu(1) = \partial_\mu(e^{-itH} e^{itH}) \\ &= (\partial_\mu e^{-itH}) e^{itH} + e^{-itH} (\partial_\mu e^{itH}) \\ &\rightarrow \partial_\mu e^{-itH} + e^{-itH} (\partial_\mu e^{itH}) e^{-itH} = 0, \end{aligned} \quad (4.101)$$

y la utilizamos para mostrar que la curvatura asociada a (4.100) es nula. Desarrollando

para cualquier componente de la curvatura obtenemos

$$\begin{aligned}
\mathbb{F}_{\mu\nu} &= \partial_\mu \mathbb{A}_\nu - \partial_\nu \mathbb{A}_\mu - i [\mathbb{A}_\mu, \mathbb{A}_\nu] \\
&= i(\partial_\mu e^{-itH})(\partial_\nu e^{itH}) + ie^{-itH}(\partial_\mu \partial_\nu e^{itH}) \\
&\quad - i(\partial_\nu e^{-itH})(\partial_\mu e^{itH}) - ie^{-itH}(\partial_\nu \partial_\mu e^{itH}) \\
&\quad + i(e^{-itH}(\partial_\mu e^{itH})e^{-itH}(\partial_\nu e^{itH}) - ie^{-itH}(\partial_\nu e^{itH})e^{-itH}(\partial_\mu e^{itH})) \\
&= i(\partial_\mu e^{-itH})(\partial_\nu e^{itH}) - i(\partial_\nu e^{-itH})(\partial_\mu e^{itH}) \\
&\quad + i(e^{-itH}(\partial_\mu e^{itH})e^{-itH}(\partial_\nu e^{itH}) - ie^{-itH}(\partial_\nu e^{itH})e^{-itH}(\partial_\mu e^{itH})) \\
&= i[\partial_\mu e^{-itH} + e^{-itH}(\partial_\mu e^{itH})e^{-itH}](\partial_\nu e^{itH}) \\
&\quad - i[\partial_\nu e^{-itH} + e^{-itH}(\partial_\nu e^{itH})e^{-itH}](\partial_\mu e^{itH}), \tag{4.102}
\end{aligned}$$

y al usar (4.101) encontramos que $\tilde{\mathbb{F}} = 0$.

Tomando por ejemplo el caso de $\mathfrak{su}(2)$, podemos verificar que se cumple (4.102).

Las componentes para θ y ϕ vienen dadas por

$$\begin{aligned}
\mathbb{A}_\phi &= i e^{-it\sigma_n} \frac{\partial}{\partial \phi} (\cos(t) + i\sigma_n \sin(t)) \\
&= i \sin \theta (\cos(t) - i\sigma_n \sin(t)) (i\sigma_\phi \sin(t)) \\
&= -\sigma_\phi \sin \theta \sin(t) \cos(t) + \sigma_\theta \sin^2(t) \sin \theta \tag{4.103}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{A}_\theta &= i(\cos(t) - i\sigma_n \sin(t))(i\sigma_\theta \sin(t)) \\
&= -\sigma_\theta \sin(t) \cos(t) - \sigma_\phi \sin^2(t). \tag{4.104}
\end{aligned}$$

Para encontrar la curvatura calculamos por aparte cada uno de sus términos

$$\begin{aligned}
i[\mathbb{A}_\theta, \mathbb{A}_\phi] &= i[-\sigma_\theta \sin(t) \cos(t) - \sigma_\phi \sin^2(t), -\sigma_\phi \sin \theta \sin(t) \cos(t) + \sigma_\theta \sin^2(t) \sin \theta] \\
&= i \sin^2(t) \cos^2(t) \sin \theta [\sigma_\theta, \sigma_\phi] - i \sin^2(t) \sin^2(t) [\sigma_\phi, \sigma_\theta] \\
&= -2\sigma_n \sin^2(t) (\cos^2(t) \sin \theta + \sin^2(t)), \tag{4.105}
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \mathbb{A}_\phi}{\partial \theta} = -\sigma_n \sin^2(t) \sin \theta + \sigma_\theta \sin^2(t) \cos \theta - \sigma_\phi \cos \theta \sin(t) \cos(t), \tag{4.106}$$

$$-\frac{\partial \mathbb{A}_\theta}{\partial \phi} = \sigma_\phi \sin(t) \cos(t) \cos \theta + \sin^2(t) (-\sin \theta \sigma_n - \cos \theta \sigma_\theta). \tag{4.107}$$

Al juntar ((4.105)),(4.106),(4.107) verificamos la nulidad de la curvatura.

$$\begin{aligned}
\mathbb{F}_{\mu\nu} &= -2\sigma_n \sin^2(t) \sin \theta + 2\sigma_n \sin^2(t) \sin \theta (\cos^2(t) + \sin^2(t)) \\
&= 0. \tag{4.108}
\end{aligned}$$

Para entender mejor qué es lo que sucede, se calcularán las componentes matriciales de (4.100). Primero, con la ayuda de la identidad

$$\begin{aligned}
it(\partial_\mu E_n) e^{itE_n} &= \partial_\mu \langle n | e^{itH} | n \rangle \\
&= \langle \partial_\mu n | e^{itH} | n \rangle + \langle n | \partial_\mu e^{itH} | n \rangle + \langle n | e^{itH} | \partial_\mu n \rangle \\
&= \langle n | \partial_\mu e^{itH} | n \rangle, \tag{4.109}
\end{aligned}$$

se encuentra el valor de las componentes diagonales

$$\begin{aligned}
\langle n | \mathbb{A}_\mu | n \rangle &= i \langle n | e^{-itH} (\partial_\mu e^{itH}) | n \rangle \\
&= i e^{-itE_n} \langle n | (\partial_\mu e^{itH}) | n \rangle \\
&= -i e^{-itE_n} [it(\partial_\mu E_n) e^{itE_n}] \\
&= t \partial_\mu E_n = t \langle n(\lambda) | \partial_\mu H | n(\lambda) \rangle. \tag{4.110}
\end{aligned}$$

Para las demás, usamos la identidad

$$\begin{aligned}
0 &= \partial_\mu \langle m | e^{itH} | n \rangle = \langle m | (\partial_\mu e^{itH}) | n \rangle \\
&\quad \langle m | e^{itH} | \partial_\mu n \rangle + \langle \partial_\mu m | e^{itH} | n \rangle
\end{aligned} \tag{4.111}$$

y calculamos

$$\begin{aligned}
\langle m | \mathbb{A}_\mu | n \rangle &= i \langle m | e^{-itH} (\partial_\mu e^{itH}) | n \rangle = i e^{-itE_m} \langle m | (\partial_\mu e^{itH}) | n \rangle \\
&= -i e^{-itE_m} [\langle m | e^{itH} | \partial_\mu n \rangle + \langle \partial_\mu m | e^{itH} | n \rangle] \\
&= -i \left[\langle m | \left(\sum_{n \neq n'} \frac{\langle n(\lambda) | \partial_\mu H | n(\lambda) \rangle}{E_n - E_{n'}} | n \rangle \right) + e^{itE_n - E_m} \left(\sum_{m \neq n'} \langle n | \frac{\langle n(\lambda) | \partial_\mu H | m(\lambda) \rangle}{E_m - E_{n'}} \right) | n \rangle \right] \\
&= -i \left[\frac{\langle m(\lambda) | \partial_\mu H | n(\lambda) \rangle}{E_n - E_m} + e^{itE_n - E_m} \frac{\langle n(\lambda) | \partial_\mu H | n(\lambda) \rangle}{E_m - E_n} \right] \\
&= \frac{i}{E_m - E_n} [\langle m(\lambda) | \partial_\mu H | n(\lambda) \rangle - e^{itE_n - E_m} \langle n(\lambda) | \partial_\mu H | m(\lambda) \rangle].
\end{aligned} \tag{4.112}$$

Ahora, por la definición de la conexión perturbativa tenemos que

$$\mathcal{A} = \overline{\mathbb{A}}, \tag{4.113}$$

Lo cual define a \mathcal{A} como el promedio de una conexión trivial. Ahora, utilizar la conexión perturbativa para variar un vector $|n\rangle$ es equivalente a tener adiabaticidad en el sistema, pues la conexión $|n(\lambda)\rangle$ siempre será vector propio de $H(\lambda)$. Por lo tanto las ecuaciones (4.110), (4.112) y (4.113) lo que muestran es que la adiabaticidad fuerza un promedio de manera muy parecida a lo que ocurre con el teorema adiabático clásico³ y recordemos además que es el promedio en (3.21) lo que define el ángulo de Hannay (3.23). Debe de haber entonces, para la conexión perturbativa, una descripción en términos

³De hecho, en sistemas clásicos integrables ergódicos, el promedio temporal (4.85) es equivalente a promediar sobre el toro.

de conexiones promediadas en fibrados triviales parecida lo mostrado en la sección 3.22.

Claramente la única elección para el espacio total del fibrado es

$$E \cong \mathcal{M} \times \mathcal{H} \tag{4.114}$$

siendo \mathcal{H} el espacio del Hilbert del sistema. Sin embargo, todavía no es claro para el autor el significado de la conexión \mathbb{A} , ni tampoco a que corresponde el grupo de simetría asociado al promedio "temporal".

Capítulo 5

Conexión Clásica

Este capítulo se explorarán las consecuencias de tratar entender la teoría de perturbaciones canónica como una teoría gauge no-abeliana. Comenzaremos utilizando las ecuaciones de transformación a coordenadas ángulo-acción para definir una cierta conexión. Esta conexión probará ser trivial y será entonces necesario modificarla para poder obtener un comportamiento no trivial; llegaremos así al concepto de la conexión perturbativa clásica.

Infortunadamente, a diferencia de lo que ocurre con la teoría cuántica, la exponencial ordenada de la conexión clásica no presenta el comportamiento deseado. Este inconveniente no pudo ser resuelto en el presente trabajo, por lo que permanece como un problema abierto. Sin embargo, como se dijo en la introducción se encontró una relación entre la conexión perturbativa clásica y el ángulo de Hannay, lo que nos permite considerar los resultados obtenidos como un avance en la dirección correcta hacia la construcción de una teoría completa.

5.1 Descripción del Problema

Sean (p, q) un par de variables conjugadas, λ un conjunto de parámetros externos y $H = H(p, q, \lambda)$ un hamiltoniano para un sistema con un solo grado de libertad cuyos contornos de energía constante estén acotados.

Para λ fijo, existe una familia de transformaciones canónicas $\{f_\lambda\}$ que permiten pasar de las variables originales (q, p) a las variables de ángulo-acción $(I_\lambda, \phi_\lambda)$ [8,11], daremos por sentado que esta transformación es conocida y que tenemos una forma explícita de escribir las variables A-A en términos de las originales

$$\begin{aligned} I_\lambda &= I_\lambda(p, q, \lambda), \\ \phi_\lambda &= \phi_\lambda(p, q, \lambda). \end{aligned} \tag{5.1}$$

Debido a que conocemos la forma funcional de I_λ y ϕ_λ , podemos desarrollar en serie de Taylor y escribir su variación ante un cambio de los parámetros $\lambda \rightarrow \lambda + d\lambda$. A primer orden tenemos

$$\begin{aligned} I_{\lambda+d\lambda} &= I_\lambda + \frac{\partial I_\lambda}{\partial \lambda_\mu} d\lambda_\mu, \\ \phi_{\lambda+d\lambda} &= \phi_\lambda + \frac{\partial \phi_\lambda}{\partial \lambda_\mu} d\lambda_\mu. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Ademas, las nuevas variables de ángulo acción deben estar relacionadas con las viejas por medio de una transformación que a primer orden debe ser canónica

$$I_{\lambda+d\lambda} = I_\lambda - \frac{\partial G_{\lambda^\mu}}{\partial \phi} d\lambda_\mu \tag{5.3}$$

$$\phi_{\lambda+d\lambda} = \phi_\lambda + \frac{\partial G_{\lambda^\mu}}{\partial I} d\lambda_\mu$$

$$\{\phi_\lambda, I_\lambda\} = \{\phi_{\lambda+d\lambda}, I_{\lambda+d\lambda}\} = 1, \tag{5.4}$$

donde $\{ , \}$ es el corchete de Poisson. De (5.2) y (5.4) obtenemos la siguiente ecuaciones

$$\begin{aligned}\frac{\partial I_\lambda}{\partial \lambda_\mu} &= -\frac{\partial G_{\lambda\mu}}{\partial \phi}, \\ \frac{\partial \phi_\lambda}{\partial \lambda_\mu} &= \frac{\partial G_{\lambda\mu}}{\partial I},\end{aligned}\tag{5.5}$$

las cuales nos permiten encontrar $G_{\lambda\mu}$. Llamaremos a $G_{\lambda\mu}$ la función generatriz exacta.

Las transformaciones (5.4) se pueden escribir de manera más unificada utilizando el corchete de Poisson

$$\begin{aligned}I_{\lambda+d\lambda} &= I_\lambda + d\lambda^\mu \{I_\lambda, G_{\lambda\mu}\} \\ \phi_{\lambda+d\lambda} &= \phi_\lambda + d\lambda^\mu \{I_\lambda, G_{\lambda\mu}\},\end{aligned}\tag{5.6}$$

de forma más general, al definir el operador $A_\lambda^E = \{ \cdot, G_{\lambda\mu} \} d\lambda^\mu$ como las componentes de una 1-forma de conexión no-abeliana, se puede escribir para cualquier función $\chi(I, \phi)$ una ecuación de transporte paralelo de la forma

$$d\chi - \mathcal{A}^E \circ \chi = 0\tag{5.7}$$

donde $\mathcal{A}^E \circ \chi \equiv \{ \chi, G_{\lambda\mu} \} d\lambda^\mu$. La conexión \mathcal{A}^E es trivial en el sentido de que para todo camino cerrado debe ser

$$P \exp\left(\oint \mathcal{A}^E\right) = 1,\tag{5.8}$$

esto es debido a que una vez dado (p, q, λ) las ecuaciones (5.1) predeterminan el valor de (I, ϕ) . Para que (5.8) se cumpla para todos los caminos, las componentes curvatura de Yang-Mills asociada¹ a la conexión perturbativa deben necesariamente ser iguales a cero

$$F_{\mu\nu}^E = \frac{\partial A_\nu^E}{\partial \mu} - \frac{\partial A_\mu^E}{\partial \nu} + [A_\mu^E, A_\nu^E] = 0.\tag{5.9}$$

¹Las componentes de la curvatura resultan ser algo diferentes de las usadas para la parte cuántica, debido a que ahora estamos usando cantidades reales.

Tomemos por ejemplo el siguiente hamiltoniano, que corresponde a un oscilador armónico en el que puede variar tanto su punto de equilibrio como la frecuencia de oscilación

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}(q - a)^2. \quad (5.10)$$

Podemos hacer el cambio a variables de ángulo-acción empleando las siguientes transformaciones:

$$\phi = \tan^{-1} \left\{ \frac{m\omega(a - q)}{p} \right\} \quad ; \quad I = \frac{p^2}{2m\omega} + \frac{m\omega}{2}(q - a)^2. \quad (5.11)$$

Al derivar la variable de ángulo con respecto a los parámetros y reescribir en término de las variables de ángulo-acción originales obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial \omega} &= \frac{m(a - q)}{p} \frac{1}{1 + \left(\frac{m\omega(a - q)}{p}\right)^2} = \frac{\sin 2\phi}{2\omega}, \\ \frac{\partial \phi}{\partial a} &= \frac{m\omega}{p} \frac{1}{1 + \left(\frac{m\omega(a - q)}{p}\right)^2} = \sqrt{\frac{m\omega}{2I}} \cos \phi, \end{aligned} \quad (5.12)$$

mientras que para la variable de acción se encuentran las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial \omega} &= \frac{m}{2}(q - a)^2 - \frac{p^2}{2m\omega^2} = -\frac{I \cos 2\phi}{\omega}, \\ \frac{\partial I}{\partial a} &= m\omega(a - q) = -\sqrt{2m\omega I} \sin \phi. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Al compara (5.12) y (5.13) con las ecuaciones (5.5) encontramos para este sistema las funciones generatrices

$$G_\omega = \frac{I \sin 2\phi}{2\omega} \quad (5.14)$$

$$G_a = \sqrt{2mI\omega} \cos \phi. \quad (5.15)$$

Ahora, el corchete de Lie de los elementos de la conexión en términos del corchete de Poisson de las respectivas funciones generatrices[15] viene dado por

$$[A_\mu^E, A_\nu^E] = \{ \cdot, \{G_\nu, G_\mu\} \}, \quad (5.16)$$

lo que nos posibilita que podamos escribir la curvatura de la siguiente manera

$$F_{\mu\nu}^E = \{ \cdot, f_{\mu\nu}^E \}, \quad (5.17)$$

donde se definio

$$f_{\mu\nu}^E = \frac{\partial G_\nu}{\partial \mu} - \frac{\partial G_\mu}{\partial \nu} + \{G_\nu, G_\mu\}. \quad (5.18)$$

Para el caso en cuestión, al insertar las ecuaciones (5.14) en (5.15)

$$\begin{aligned} f^E &= \sqrt{\frac{mI}{2\omega}} \cos \phi - \left\{ \frac{I \sin 2\phi}{2\omega}, \sqrt{2mI\omega} \cos \phi \right\} \\ &= \sqrt{\frac{mI}{2\omega}} \cos \phi - \sqrt{\frac{m}{2\omega}} \{I \sin 2\phi, \sqrt{I} \cos \phi\} \\ &= \sqrt{\frac{mI}{2\omega}} \cos \phi - \sqrt{\frac{mI}{2\omega}} \cos 2\phi \cos \phi - \sqrt{\frac{m}{2\omega}} \sin 2\phi \sin \phi = 0 \end{aligned} \quad (5.19)$$

Lo que implica

$$\tilde{F}^E = 0. \quad (5.20)$$

5.2 Conexión Perturbativa Clásica

En cierto sentido la conexión exacta es satisfactoria, puesto que al realizar cualquier recorrido cerrado en el espacio de los parámetros recuperamos la foliación original. Lastimosamente, es cierto también que siempre regresamos al mismo valor en la variable de ángulo. En el tratamiento cuántico la fase que adquiriría los vectores de la base dependía de cómo se variaban los parámetros; sería deseable tener una conexión clásica que presente el mismo tipo de comportamiento. Además, se sabe que los sistemas integrables presentan holonomía, el ángulo de Hannay (3.23), y al igual que lo que sucedía en la parte cuántica con la fase de Berry, se querría encontrar una conexión que reproduzca la holonomía clásica.

Si queremos definir una conexión que presente holonomía debemos imponer sobre la función generatriz alguna condición que nos defina cierto tipo de "paralelismo" entre toros infinitesimalmente cercanos, para lograr este objetivo primero notamos que en general la función generatriz exacta se puede descomponer de la forma

$$G_\lambda(I, \phi, \lambda) = W_\lambda(I, \phi, \lambda) + \alpha_\lambda(I, \lambda), \quad (5.21)$$

donde W_λ es una función completamente periódica². A primer orden la presencia o ausencia de la función α_λ no afecta la nueva variable de acción, pero si influye en la variable de ángulo; esto es consecuencia de la ambigüedad inherente en el ángulo, la cual consiste en que se está en la libertad de elegir el punto $\phi = 0$.

Se podría exigir que la transformación canónica fuera tal que se cumpliera

$$I_{\lambda+d\lambda} = I_\lambda \quad (5.22)$$

para lo cual basta con utilizar la parte secular de la generatriz exacta y definir las componentes de la conexión como

$$A_\lambda^H = \{\cdot, \alpha_{\lambda^\mu}\} d\lambda^\mu.$$

Debido al parecido con lo mostrado en la sección 3.22, llamaremos a \mathcal{A}^H una conexión tipo Hannay. La curvatura asociada a esta conexión tiene una forma sencilla

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^H &= \frac{\partial}{\partial\mu} \{\cdot, \alpha_\nu\} - \frac{\partial}{\partial\nu} \{\cdot, \alpha_\mu\} + \{\cdot, \{\alpha_\nu, \alpha_\mu\}\} \\ &= \frac{\partial}{\partial I} \left(\frac{\partial\alpha_\lambda}{\partial\mu} - \frac{\partial\alpha_\lambda}{\partial\nu} \right) \frac{\partial}{\partial\phi}. \end{aligned} \quad (5.23)$$

²por completamente periódico nos referimos a que $\langle W_\lambda \rangle = 0$, donde $\langle \dots \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\dots) d\phi$ es el promedio angular sobre el toro.

La ecuación (5.23), nos indica que la conexión tipo Hannay se comporta bien para caminos cerrados, pues no afecta el valor original de I , mientras que para la variable de ángulo obtenemos una holonomía igual al ángulo de Hannay. El problema es que esta conexión no produce la correcta foliación para caminos abiertos, que esto es así reside en el hecho de que \mathcal{A}^H nunca produce cambio alguno en la variable de acción, lo cual evidentemente no corresponde con las ecuaciones (5.2) y (5.4).

La otra posibilidad que tenemos es utilizar la parte periódica de la generatriz exacta y definir $A_\lambda^P = \{\cdot, W_{\lambda^\mu}\} d\lambda^\mu$. Con esta elección para la conexión los toros no son mapeados a si mismos

$$I_{\lambda+d\lambda} \neq I_\lambda, \quad (5.24)$$

pero, como se había mencionado anteriormente, a primer orden sí obtenemos los toros correctos. Llamaremos a \mathcal{A}^P la conexión perturbativa clásica. Con esta definición las ecuaciones para las variables de ángulo y acción quedan de la forma

$$\begin{aligned} I_{\lambda+d\lambda} &= I_\lambda - \frac{\partial G_{\lambda^\mu}}{\partial \phi} d\lambda_\mu = I_\lambda - \frac{\partial W_{\lambda^\mu}}{\partial \phi} d\lambda_\mu, \\ \phi_{\lambda+d\lambda} &= \phi_\lambda + \frac{\partial W_{\lambda^\mu}}{\partial I} d\lambda_\mu. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Vemos que la nueva variable de ángulo solo difiere de la original en un término completamente periódico $\frac{\partial W_{\lambda^\mu}}{\partial I} d\lambda_\mu$, por lo que la condición de transporte paralelo que nos define la conexión perturbativa es la siguiente

$$\langle \phi_{\lambda+d\lambda} - \phi_\lambda \rangle = 0. \quad (5.26)$$

La razón del nombre de \mathcal{A}^P reside en el hecho de que la función generatriz W_λ puede ser encontrada utilizando teoría de perturbaciones canónicas a primer orden [12]. La fórmula

viene dada por

$$W_\lambda = -\frac{1}{\omega} \int d\phi [H_\lambda - \langle H_\lambda \rangle], \quad (5.27)$$

con $H_\lambda = \frac{\partial H}{\partial \lambda}$ y $\omega = \frac{\partial H}{\partial I}$ la frecuencia del sistema. Para el caso del oscilador tratado en la sección pasada, sabemos que la función exacta no tenía parte secular por lo que se debe encontrar que $G_\lambda = W_\lambda$, para $\lambda = \omega, a$. Podemos verificar esto con el cálculo directo de las funciones generatrices. Para la función asociada al cambio de la frecuencia obtenemos

$$\begin{aligned} \langle H_\omega \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H_\omega d\phi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} m\omega(a-q)^2 d\phi = \frac{(2I)}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \phi_0 d\phi_0 = I \\ \rightarrow W_\omega &= \frac{I}{\omega} \int d\phi [1 - 2\sin^2 \phi] = \frac{I}{\omega} \int \cos 2\phi d\phi = \frac{I \sin 2\phi}{2\omega}, \end{aligned} \quad (5.28)$$

y de igual manera para la variación del punto de equilibrio

$$\begin{aligned} \langle H_a \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi H_a = \frac{\sqrt{2mI\omega^3}}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \sin \phi = 0 \\ \rightarrow W_a &= -\frac{1}{\omega} \int d\phi H_a = -\sqrt{2mI\omega} \int d\phi \sin \phi = \sqrt{2mI\omega} \cos \phi, \end{aligned} \quad (5.29)$$

las cuales coinciden con el cálculo hecho analizando las ecuaciones de transformación a variables ángulo-acción.

Antes de investigar las consecuencias de utilizar \mathcal{A}^P , recapitularemos primero dos propiedades que se quisiera heredara de la conexión exacta. En primer lugar, la foliación en toros del espacio de fase sólo depende del hamiltoniano en cuestión (i.e. del valor de λ), por lo que para cada punto de \mathcal{M} existe una estructura de toros determinada y se quiere que la conexión perturbativa refleje este hecho. Básicamente si C_1 y C_2 son dos curvas diferentes en \mathcal{M} pero que comparten sus puntos finales e iniciales, se debe tener

$$Pe^{\int_{C_2} \mathcal{A}^P} \circ I_0 = Pe^{\int_{C_1} \mathcal{A}^P} \circ I_0, \quad (5.30)$$

y en particular, para cualquier camino cerrado

$$I_0 = P e^{\oint \mathcal{A}^P} \circ I_0. \quad (5.31)$$

El valor de la variable de acción si depende del camino en \mathcal{M} , sin embargo se requiere que para un circuito cerrado $\Delta\phi$ sea igual para todos los puntos (q, p) que pertenezcan a un mismo toro

$$\phi_\lambda = P e^{\oint \mathcal{A}^P} \circ \phi_0 = \left\langle P e^{\oint \mathcal{A}^P} \right\rangle \circ \phi_0. \quad (5.32)$$

Por razones que todavía no son del todo claras para el autor, resulta ser que la exponencial ordenada de la conexión perturbativa no cumple con las condiciones (5.30), (5.32). Parece ser que sólo la conexión exacta puede brindar la correcta foliación del espacio de fase y que cualquier intento de modificar esta conexión nos produce irremediamente una estructura de toros que no es la que corresponde. En las siguientes secciones ilustraremos este hecho con un par de ejemplos, para luego tratar de comentar al respecto.

5.3 Oscilador Generalizado

Se hará el tratamiento clásico para el hamiltoniano general cuadrático de un grado de libertad

$$H = \frac{1}{2} (Xq^2 + 2Yqp + Zp^2), \quad (5.33)$$

donde X, Y y Z son los parámetros del sistema.

La siguiente transformación sirve para pasar a un sistema de variables ángulo

acción [1]

$$\begin{aligned} q &= \sqrt{\frac{2IZ}{\omega}} \cos \phi, \\ p &= -\sqrt{\frac{2IZ}{\omega}} \left(\frac{Y}{Z} \cos \phi + \frac{\omega}{Z} \sin \phi \right), \end{aligned} \quad (5.34)$$

donde $\omega = \sqrt{(XZ - Y^2)}$. Se procede ahora a encontrar las tres funciones generatrices $W_{\bar{\lambda}}$ utilizando teoría de perturbación canónica

$$\begin{aligned} H_Y &= \frac{\partial H}{\partial Y} = pq = -\left(\frac{2ZI}{\omega}\right) \left(\frac{Y}{Z} \cos^2 \phi + \frac{\omega}{Z} \sin \phi \cos \phi\right) \\ \rightarrow W_Y &= \frac{1}{\omega} \int d\phi \left(\frac{ZI}{\omega}\right) \left(\frac{Y}{Z} \cos 2\phi + \frac{\omega}{Z} \sin 2\phi\right) \\ &= \frac{ZI}{2\omega^2} \left(\frac{Y}{Z} \sin 2\phi - \frac{\omega}{Z} \cos 2\phi\right), \end{aligned} \quad (5.35)$$

$$\begin{aligned} H_X &= \frac{\partial H}{\partial X} = \frac{1}{2} q^2 = \frac{ZI}{\omega} \cos^2 \phi = \frac{ZI}{2\omega} (1 + \cos(2\phi)) \\ \rightarrow W_X &= -\frac{ZI}{4\omega^2} \sin(2\phi), \end{aligned} \quad (5.36)$$

$$\begin{aligned} H_Z &= \frac{1}{2} p^2 = \frac{ZI}{\omega} \left(\left[\frac{Y}{Z}\right]^2 \cos^2 \phi + \left[\frac{\omega}{Z}\right]^2 \sin^2 \phi + \frac{Y\omega}{Z^2} \sin 2\phi \right) \\ \rightarrow W_Z &= -\frac{ZI}{4\omega^2} \left(\left[\frac{Y}{Z}\right]^2 \sin 2\phi - \left[\frac{\omega}{Z}\right]^2 \sin 2\phi - 2\frac{Y\omega}{Z^2} \cos 2\phi \right). \end{aligned} \quad (5.37)$$

Al igual que en el caso cuántico calcularemos solo la curvatura de Yang-Mills. De la ecuación (5.18) tenemos que para calcular la curvatura debemos primero calcular la funciones definidas por

$$f_{\mu\nu}^P = \frac{\partial W_\nu}{\partial \mu} - \frac{\partial W_\mu}{\partial \nu} + \{W_\nu, W_\mu\}. \quad (5.38)$$

Como se había mencionado, para el caso en cuestión no será

$$F^P \circ I_0 = \{I_0, f_{\mu\nu}\} = 0,$$

para verificar que esto no sucede que esto no sucede tómenos la componente XY de la curvatura. La parte del corchete de Poisson resulta ser independiente de ϕ , que es lo deseable

$$\begin{aligned}\{W_Y, W_X\} &= \frac{Z}{8\omega^3} \{I \sin(2\phi), I \cos 2\phi\} \\ &= -\frac{ZI}{4\omega^3}.\end{aligned}\tag{5.39}$$

El problema está en las derivadas, para la componente XY tenemos

$$\frac{\partial W_Y}{\partial X} - \frac{\partial W_X}{\partial Y} = -\frac{IZ \cos(2\phi)}{4\omega^3},\tag{5.40}$$

con resultados análogos para las otras dos componentes. Por lo tanto la transformación canónica resultante no nos devuelve a la foliación original.

Para las demás componentes, los corchetes de Poisson siguen dando valores independientes de ϕ

$$\begin{aligned}\{W_X, W_Z\} &= \frac{Y}{8\omega^3} \{I \cos 2\phi, I \sin(2\phi)\} \\ &= -\frac{YI}{4\omega^3}\end{aligned}\tag{5.41}$$

$$\begin{aligned}\{W_Z, W_Y\} &= \frac{Z^2}{8\omega^4} \left(-2 \left\{ \frac{Y}{Z} I \sin 2\phi, \frac{Y\omega}{Z^2} I \cos 2\phi \right\} - \left\{ \frac{\omega}{Z} I \cos 2\phi, \left[\frac{Y}{Z} \right]^2 I \sin 2\phi \right\} \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \frac{\omega}{Z} I \cos 2\phi, \left[\frac{\omega}{Z} \right]^2 I \sin 2\phi \right\} \right) \\ &= \frac{Z^2}{8\omega^4} \left(-\frac{4Y^2\omega}{Z^3} I + \frac{2Y^2\omega}{Z^3} - \frac{2\omega^3}{Z^3} \right) \\ &= \frac{1}{4Z\omega^3} (-Y^2 - \omega^3) = -\frac{XI}{4\omega^3},\end{aligned}\tag{5.42}$$

mientras que los demás términos si dependen de ϕ . Este es un mal resultado. La conexión perturbativa no produce los valores correctos en la variable de acción, lo cual es su principal

función. Sin embargo, si ignoramos este hecho por un momento y nos concentramos solo en la parte secular de la curvatura $\langle \tilde{F} \rangle$, encontraremos una relación con el ángulo de Hannay [1]. Al reunir los resultados (5.39),(5.41) y (5.42) la función generatriz promedio queda de la forma

$$\begin{aligned} \langle \tilde{f}^P \rangle &= f_{YZ} dY \wedge dZ + f_{ZX} dZ \wedge dX + f_{XY} dX \wedge dY \\ &= \frac{I}{4\omega^3} (XdY \wedge dZ + YdZ \wedge dX + ZdX \wedge dY) \end{aligned} \quad (5.43)$$

y la curvatura promedio

$$\langle \tilde{F}^P \rangle = \left\{ \cdot, \langle \tilde{f}^P \rangle \right\} = \frac{1}{4\omega^3} (XdY \wedge dZ + YdZ \wedge dX + ZdX \wedge dY) \frac{\partial}{\partial \phi}. \quad (5.44)$$

Al aplicarle a ϕ la curvatura (21) el resultado es el negativo de la 2-forma de Hannay de este sistema [13,14], como se demostrará más adelante este hecho no es casualidad.

A partir de la ecuaciones de transformación inversas para (I, ϕ)

$$I = \frac{1}{2\omega} (Xq^2 + 2Yqp + Zp^2) \quad (5.45)$$

$$\phi = -\tan^{-1} \left[\frac{Zp + \frac{Y}{Z}q}{\omega \frac{p + \frac{Y}{Z}q}{q}} \right], \quad (5.46)$$

es posible encontrar las funciones generatrices exactas y comprobar que la curvatura inducida por estas es nula. Por ejemplo podemos encontrar G_Y y G_X y a partir de estas calcular F_{XY} . Al derivar (5.46) con respecto a Y obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial Y} &= - \left[\frac{YZp + \frac{Y}{Z}q}{\omega^3 \frac{p + \frac{Y}{Z}q}{q}} + \frac{1}{\omega} \right] \frac{1}{1 + \left[\frac{Zp + \frac{Y}{Z}q}{\omega \frac{p + \frac{Y}{Z}q}{q}} \right]^2} \\ &= - \frac{YZp + \frac{Y}{Z}q}{\omega^3 \frac{p + \frac{Y}{Z}q}{q}} \cos^2 \phi - \frac{\cos^2 \phi}{\omega} = \frac{1}{2\omega^2} (Y \sin 2\phi - \omega \cos 2\phi) - \frac{1}{2\omega} \end{aligned} \quad (5.47)$$

que al integrar con respecto a I nos permite escribir

$$G_Y = \frac{I}{2\omega^2}(Y \sin 2\phi - \omega \cos 2\phi) - \frac{I}{2\omega} \quad (5.48)$$

Usando el mismo procedimiento para el cambio en X obtenemos

$$G_X = -\frac{ZI}{4\omega^2} \sin(2\phi). \quad (5.49)$$

El cálculo del corchete de Poisson

$$\{G_Y, G_X\} = -\frac{ZI}{4\omega^3} + \frac{ZI}{4\omega^3} \cos(2\phi),$$

y el de las derivadas

$$\frac{\partial G_Y}{\partial X} - \frac{\partial G_X}{\partial Y} = -\frac{IZ \cos(2\phi)}{4\omega^3} + \frac{ZI}{4\omega^3}, \quad (5.50)$$

revela que estos términos son opuestos por lo que F_{XY} , con igual resultado para las demás componentes de la curvatura.

5.4 Spin Clásico

El hamiltoniano para el spin clásico viene dado por

$$H = \vec{S} \cdot \vec{B} = B(\vec{S} \cdot \hat{n}). \quad (5.51)$$

Al igual que el caso cuántico es mejor trabajar el problema en coordenadas polares, donde los ángulos (θ, ϕ) del campo vienen a ser los parámetros externos. Las cantidades definidas por

$$I = \vec{S} \cdot \hat{n}$$

$$\varphi \equiv \text{ángulo azimutal en el plano } (\hat{\theta}, \hat{\phi}), \quad (5.52)$$

forman un par canónico de variables ángulo-acción³[28]. Con esta definición el vector \vec{S} se puede escribir de la forma

$$\vec{S} = I\hat{n} + \sqrt{S^2 - I^2} \cos \varphi \hat{\theta} + \sqrt{S^2 - I^2} \sin \varphi \hat{\phi}. \quad (5.53)$$

Procedemos ahora a encontrar las componentes periódicas de la función generatriz, para la variación del ángulo polar del campo

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial \theta} &= B\vec{S} \cdot \frac{\partial \hat{n}}{\partial \theta} = B\vec{S} \cdot \hat{\theta} = B\sqrt{S^2 - I^2} \cos \varphi \\ \rightarrow W_\theta &= -\frac{1}{B} \int [H_\theta - \langle H_\theta \rangle] d\varphi = -\sqrt{S^2 - I^2} \sin \varphi, \end{aligned} \quad (5.54)$$

y para el ángulo azimutal tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial \phi} &= B\vec{S} \cdot \frac{\partial \hat{n}}{\partial \phi} = B \sin \theta (\vec{S} \cdot \hat{\phi}) = B\sqrt{S^2 - I^2} \sin \theta \sin \varphi \\ \rightarrow W_\phi &= \sqrt{S^2 - I^2} \sin \theta \cos \varphi \end{aligned} \quad (5.55)$$

El corchete de Poisson entre estas dos funciones no presenta mayor problema

$$\begin{aligned} \{W_\theta, W_\phi\} &= -(\sqrt{S^2 - I^2} \cos \varphi) \left(\frac{-I \sin \theta \cos \varphi}{\sqrt{S^2 - I^2}} \right) \\ &\quad + \left(\frac{I \sin \varphi}{\sqrt{S^2 - I^2}} \right) (\sqrt{S^2 - I^2} \sin \theta \sin \varphi) = I \sin \theta, \end{aligned} \quad (5.56)$$

lo mismo es cierto para las derivadas

$$\frac{\partial W_\theta}{\partial \phi} = 0 \quad (5.57)$$

$$\frac{\partial W_\phi}{\partial \theta} = \sqrt{S^2 - I^2} \cos \theta \cos \varphi. \quad (5.58)$$

De (5.56), (5.57) y (5.58) tenemos que la función

³En esta sección ϕ denotara el ángulo azimutal de coordenadas polares y φ será la variable canónica de ángulo

$$f_{\theta\phi}^P = \frac{\partial W_\phi}{\partial \theta} - \frac{\partial W_\theta}{\partial \phi} + \{W_\phi, W_\theta\},$$

tiene componentes dependientes de φ , lo que nuevamente implica que la curvatura de la conexión perturbativa no produce los valores correctos para I . Sin embargo se observa que otra vez el promedio de la curvatura contiene la 2-forma de Hannay para este sistema [1].

$$\langle F_{\theta\phi}^P \rangle = -\sin \theta \frac{\partial}{\partial \varphi}. \quad (5.59)$$

5.5 Relación con el Ángulo de Hannay

El siguiente es un resultado general que relaciona las funciones generatrices completamente periódicas W y la curvatura de la conexión perturbativa con el ángulo de Hannay.

Lema 5 *La curvatura de la conexión perturbativa cumple con*

$$\int_{\Sigma} \left(\langle \tilde{F}^P \rangle \circ \phi \right) = -\Delta \phi_{Hannay}.$$

Demostración. La holonomía clásica de un sistema dinámico viene dada por⁴

(3.23)

$$\Delta \phi_{Hannay} = \int_{\Sigma} d_M \langle d_M \phi(p, q, \lambda) \rangle. \quad (5.60)$$

⁴Escribimos d_M para referirnos a derivas con respecto a los parámetros λ y así no confundir $d_M \phi \wedge d_M I$ con el elemento de área symplectica.

Primero, siguiendo a Hannay [9] podemos reescribir el integrando de la forma

$$\begin{aligned}
d_M \langle d_M \phi \rangle &= d_M \int \delta(I - I(p, q, \lambda)) d_M \phi \frac{dpdq}{2\pi} \\
&= \int \frac{\partial \delta}{\partial I} (d_M I \wedge d_M \phi) \frac{dpdq}{2\pi} \\
&= \frac{\partial}{\partial I} \int (d_M \phi \wedge d_M I) \delta \frac{dpdq}{2\pi} \\
&= \frac{\partial}{\partial I} \langle d_M \phi \wedge d_M I \rangle.
\end{aligned} \tag{5.61}$$

Para encontrar la relación con la conexión perturbativa y recordamos la definición de la función generatriz exacta

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial \lambda} &= \frac{\partial G_\lambda}{\partial I} \\
\frac{\partial I}{\partial \lambda} &= -\frac{\partial G_\lambda}{\partial \phi},
\end{aligned}$$

y utilizamos estas ecuaciones para desarrollar $d_M I \wedge d_M \phi$ de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
d_M I \wedge d_M \phi &= \left(\sum_\lambda \frac{\partial I}{\partial \lambda} d\lambda \right) \wedge \left(\sum_{\lambda'} \frac{\partial \phi}{\partial \lambda'} d\lambda' \right) \\
&= \sum_{\lambda, \lambda'} \left(\frac{\partial I}{\partial \lambda} \frac{\partial \phi}{\partial \lambda'} - \frac{\partial I}{\partial \lambda'} \frac{\partial \phi}{\partial \lambda} \right) d\lambda \wedge d\lambda' \\
&= \sum_{\lambda, \lambda'} \left(-\frac{\partial G_\lambda}{\partial \phi} \frac{\partial G_{\lambda'}}{\partial I} + \frac{\partial G_{\lambda'}}{\partial \phi} \frac{\partial G_\lambda}{\partial I} \right) d\lambda \wedge d\lambda' \\
&= \sum_{\lambda, \lambda'} \{G_{\lambda'}, G_\lambda\} d\lambda \wedge d\lambda'.
\end{aligned} \tag{5.62}$$

Al promediar (5.62) se encuentra la relación entre la 2-forma de Hannay y la función generatriz periódica

$$\begin{aligned}
\langle d_M \phi \wedge d_M I \rangle &= - \sum_{\lambda, \mathcal{X}} \langle \{G_{\mathcal{X}}, G_{\lambda}\} \rangle d\lambda \wedge d\mathcal{X} \\
&= - \sum_{\lambda, \mathcal{X}} \left\langle \frac{\partial W_{\mathcal{X}}}{\partial \lambda} - \frac{\partial W_{\lambda}}{\partial \mathcal{X}} + \{W_{\mathcal{X}}, W_{\lambda}\} \right\rangle d\lambda \wedge d\mathcal{X}, \\
&= - \sum_{\lambda, \mathcal{X}} \langle \{W_{\mathcal{X}}, W_{\lambda}\} \rangle d\lambda \wedge d\mathcal{X}, \tag{5.63}
\end{aligned}$$

$$= - \langle \hat{F}^P \rangle, \tag{5.64}$$

donde los términos de la forma $\frac{\partial W_{\mathcal{X}}}{\partial \lambda}, \frac{\partial W_{\lambda}}{\partial \phi}, \frac{\partial \alpha_{\lambda'}}{\partial I}$ se anulan porque siempre son completamente periódicos. ■

5.6 Interpretación Geométrica

La conexión perturbativa sugiere una interpretación de la holonomía clásica diferente a la mostrada en la sección 3.22.

A cada punto del espacio base \mathcal{M} anexamos el toro correspondiente de área determinada $2\pi I$. Ahora, cambiar la fase en el toro es cambiar el valor del origen de la variable de ángulo ϕ_{λ} , debido a que en este caso el toro es homotópicamente equivalente a una circunferencia, el grupo responsable de cambiar la fase es $U(1)$ ⁵. Por lo tanto tenemos que las fibras pueden ser identificadas como

$$F_{\lambda} \cong U(1), \tag{5.65}$$

⁵Ó T^N para el caso de varios grados de libertad.

y al unir las construimos el espacio total

$$E = \bigcup_{\lambda \in M} \mathcal{F}_\lambda. \quad (5.66)$$

En general, los toros I_λ y $I_{\lambda'}$, aunque tengan la misma área, determinan contornos diferentes en \mathcal{P} , significando esto que E no es un fibrado trivial. Para introducir una estructura de transporte paralelo usamos (5.26). El procedimiento es el siguiente: a medida que se vaya realizando una curva en $t \rightarrow I(\lambda(t))$ y los contornos vayan cambiando, en el nuevo toro se va eligiendo el origen de la nueva variable de ángulo de tal manera que se cumpla $\langle \phi_{\lambda+d\lambda} - \phi_\lambda \rangle = 0$.

Claramente una conexión así definida no es una de Berry-Simon, pues no proviene de un producto interno definido en un espacio vectorial complejo. Sin embargo, el procedimiento anteriormente descrito guarda parecido con lo mostrado en la sección 3.1.2 para de la fase de Berry. La idea es que a medida que se van deformando los contornos se va eligiendo el origen de ϕ de tal manera que los dos toros I_λ y $I_{\lambda+d\lambda}$ estén localmente en fase según el criterio (5.26), lo cual, es muy parecido a mover un vector manteniendo su fase según (3.12)⁶. Lo que parece sugerir el resultado (5.63), es que el valor numérico de la holonomía de la conexión recién descrita es igual al de la de Hannay-Berry(3.30), infortunadamente los inconvenientes encontrados con la conexión perturbativa, no permiten por ahora asegurar la validez de la afirmación anterior.

⁶En mecánica cuántica se pueden comparar las fases de cualquier par no ortogonal de vectores con solo tomar su producto interno. Para la teoría clásica tenemos una regla de comparación mucho más restringida. La relación (5.26) solo sirve para toros infinitesimalmente "ceranos" en términos de sus deformaciones, y cuyo contorno promediado sea el mismo.

Capítulo 6

Conclusión

A lo largo de este trabajo se encontraron diversos resultados, siendo el más básico de ellos la obtención de una fórmula que permite calcular de forma explícita la conexión perturbativa cuántica. El desarrollo en serie de Dyson de esta conexión es básicamente la suma a todos los órdenes en los parámetros de la serie perturbativa cuántica. Las propiedades de transformación de \mathcal{A} muestran que se comporta como una verdadera 1-forma de conexión. Se calculó de manera general la curvatura de Yang-Mills de la conexión; por lo tanto, para el tipo de problemas estudiados en este trabajo, se puede concluir que se representó la teoría de perturbaciones cuántica como una teoría Yang-Mills.

La relación encontrada entre la conexión perturbativa y la fase de Berry es por sí sola un resultado para resaltar, más que todo por su generalidad, pues casi siempre evaluar exactamente la exponencial ordenada resulta siendo una tarea formidable y aunque restringido a caminos cerrados, el resultado (4.36) provee una manera sencilla de calcular el operador resultante. Además, la holonomía no se ve afectada por cambios en la

escogencia de la superficie de integración ni por un cambio en la conexión provocado por una transformación gauge del tipo (4.92), lo que hace a este resultado aún más especial.

Para la conexión clásica el objetivo de interpretar la teoría de perturbaciones canónica como una teoría gauge no pudo ser completado, nos quedó la obvia tarea de resolver el problema encontrado con los terminos periodicos de la curvatura. Sin embargo la relación entre la conexión y el ángulo de Hannay es muy general y en vista de lo encontrado en la teoría cuántica no debe ser causalidad que la conexión clásica tenga esta propiedad. Debe de poderse encontrarse una manera, que aparezca de forma natural en la teoría, que nos permita obtener de la holonomía la conexión perturbativa solo los términos proporcionales a $\frac{\partial}{\partial\phi}$, a diferencia del metodo que se basa en el promedio sobre el toro que aparece de manera artificial. Además, debe haber una manera de definir un operador que dé la foliación correcta del hamiltoniano a medida que vamos variando los parámetros.

Por otro lado, sería muy interesante probar que una construcción como la que se propone en la sección 5.6 es posible. Esta idea estaría más cercana a la construcción de Simon para la fase de Berry, lo que permitiría interpretar geoméricamente el ángulo de Hannay de dos maneras diferentes. Esta doble interpretación del ángulo de Hannay es algo que la fase de Berry también parece poseer según lo expuesto en la sección 4.6.2. Después de todo, ¿por qué fenómenos tan íntimamente relacionados tendrían que tener construcciones geométricas no igualmente correlacionadas?

En este punto, varias preguntas se pueden plantear para futuras investigaciones. Por ejemplo, es sabido que la integral de área sobre la esfera para la curvatura de Berry

asociada al problema del spin en un campo magnético esta cuantizada de la forma

$$\frac{i}{2\pi} \int_{S^2} \tilde{\mathcal{W}} = n \in \mathbb{Z},$$

donde n es el número magnético de la partícula. Cabe preguntarse ¿qué pasa si en el integrando ponemos la curvatura de la conexión perturbativa (4.54)?, ¿qué clase de propiedades tendría el operador resultante?. Notemos que no es tan sencillo como integrar las componentes de la matriz $\tilde{F}(\lambda) = \sum \tilde{\mathcal{W}}^{(n)} |n(\lambda)\rangle \langle n(\lambda)|$, pues a medida que cambiamos λ también cambian los vectores $|n(\lambda)\rangle$. Mas general, ¿qué tipo de relación guarda la curvatura $\tilde{F}(\lambda)$ con los números de Chern?. En el trabajo de Thouless *et.al* [30] se calcula la conductividad Hall como una integral cuyo integrando es de la forma de la curvatura de Berry ¿sería relacionar esto con la curvatura de la conexión perturbativa?.

Todavía hay mucho por descubrir acerca de la conexión perturbativa y su curvatura. Esperamos que este trabajo abra las puertas a futuros estudios sobre este tema.

Apéndice A

Relación de la Curvatura de Berry con la Curvatura de la Conexión Perturbativa

Mostraremos que la curvatura es diagonal en la base original de vectores, y que los elementos de la diagonal están relacionados con la 2-foma de Berry. Para hacerlo analizaremos los elementos matriciales de las componentes

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial \mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial \nu} - i[A_\mu, A_\nu]. \quad (\text{A.1})$$

Analicemos primero los elementos de la diagonal. Comencemos investigando lo que sucede con el conmutador, sus elementos matriciales de la diagonal vienen dados por

$$\begin{aligned} \langle n | [A_\mu, A_\nu] | n \rangle &= \langle n | (A_\mu A_\nu - A_\nu A_\mu) | n \rangle = \sum_{n \neq n'} \{ \langle n | A_\mu | n' \rangle \langle n' | A_\nu | n \rangle - \langle n | A_\nu | n' \rangle \langle n' | A_\mu | n \rangle \} \\ &= \sum_{n \neq n'} \left\{ \frac{\langle n | \partial_\mu H | n' \rangle \langle n' | \partial_\nu H | n \rangle}{(E_n - E_{n'})^2} - \frac{\langle n | \partial_\nu H | n' \rangle \langle n' | \partial_\mu H | n \rangle}{(E_n - E_{n'})^2} \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

donde se ha utilizado la definición de la conexión perturbativa

$$\begin{aligned} \langle m(\lambda) | A_\mu(\lambda) | n(\lambda) \rangle &= -i \frac{\langle m(\lambda) | \partial_\mu H | n(\lambda) \rangle}{E_n - E_m} \quad m \neq n \\ &= 0 \quad m = n. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

y la variación de los vectores base.

$$d|n(\lambda)\rangle = \sum_{m \neq n} \frac{\langle m(\lambda) | dH | n(\lambda) \rangle}{E_n - E_m} |m(\lambda)\rangle. \quad (\text{A.4})$$

Para la derivada con respecto a μ se tiene

$$\begin{aligned} \langle n | \frac{\partial A_\nu}{\partial \mu} | n \rangle &= - \langle \partial_\mu n | A_\nu | n \rangle - \langle n | A_\nu | \partial_\mu n \rangle \\ &= - \sum_{n \neq n'} \left\{ \frac{\langle n | \partial_\mu H | n' \rangle \langle n' | A_\nu | n \rangle}{E_n - E_{n'}} + \frac{\langle n | A_\nu | n' \rangle \langle n' | \partial_\mu H | n \rangle}{E_n - E_{n'}} \right\} \\ &= i \sum_{n \neq n'} \left\{ \frac{\langle n | \partial_\mu H | n' \rangle \langle n' | \partial_\nu H | n \rangle}{(E_n - E_{n'})^2} - \frac{\langle n | \partial_\nu H | n' \rangle \langle n' | \partial_\mu H | n \rangle}{(E_n - E_{n'})^2} \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Análogamente para la otra la otra derivada

$$\begin{aligned} \langle n | \frac{\partial A_\mu}{\partial \nu} | n \rangle &= - \langle \partial_\nu n | A_\mu | n \rangle - \langle n | A_\mu | \partial_\nu n \rangle \\ &= - \sum_{n \neq n'} \left\{ \frac{\langle n | \partial_\nu H | n' \rangle \langle n' | A_\mu | n \rangle}{E_n - E_{n'}} + \frac{\langle n | A_\mu | n' \rangle \langle n' | \partial_\nu H | n \rangle}{E_n - E_{n'}} \right\} \\ &= i \sum_{n \neq n'} \left\{ \frac{\langle n | \partial_\nu H | n' \rangle \langle n' | \partial_\mu H | n \rangle}{(E_n - E_{n'})^2} - \frac{\langle n | \partial_\mu H | n' \rangle \langle n' | \partial_\nu H | n \rangle}{(E_n - E_{n'})^2} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Reemplazando todo en (A.1)

$$\langle n | F_{\mu\nu} | n \rangle = i \sum_{n \neq n'} \left\{ \frac{\langle n | \partial_\mu H | n' \rangle \langle n' | \partial_\nu H | n \rangle}{(E_n - E_{n'})^2} - \frac{\langle n | \partial_\nu H | n' \rangle \langle n' | \partial_\mu H | n \rangle}{(E_n - E_{n'})} \right\} \quad (\text{A.7})$$

Para las componentes no diagonales es cuestión de repetir el mismo tipo de proceso.

El conmutador es de la misma forma que para las diagonal

$$\langle m | [A_\mu, A_\nu] | n \rangle = \sum_{\substack{n \neq n' \\ m \neq n'}} \left\{ \frac{\langle m | \partial_\mu H | n' \rangle \langle n' | \partial_\nu H | n \rangle}{(E_m - E_{n'})(E_n - E_{n'})} - \frac{\langle m | \partial_\nu H | n' \rangle \langle n' | \partial_\mu H | n \rangle}{(E_m - E_{n'})(E_n - E_{n'})} \right\} \quad (\text{A.8})$$

mientras que para las derivas hay que tener en cuenta que los términos $\partial_\mu \langle m | A_\nu | n \rangle$, $\partial_\nu \langle m | A_\mu | n \rangle$ no se anulan.

$$\begin{aligned} \langle m | \frac{\partial A_\nu}{\partial \mu} | n \rangle &= \partial_\mu \langle m | A_\nu | n \rangle - \langle \partial_\mu m | A_\nu | n \rangle - \langle m | A_\nu | \partial_\mu n \rangle \\ &= -i \partial_\mu \left(\frac{\langle m | \partial_\nu H | n \rangle}{E_n - E_m} \right) \\ &\quad + i \sum_{\substack{n \neq n' \\ m \neq n'}} \left\{ \frac{\langle m | \partial_\mu H | n' \rangle \langle n' | \partial_\nu H | n \rangle}{(E_m - E_{n'})(E_n - E_{n'})} - \frac{\langle m | \partial_\nu H | n' \rangle \langle n' | \partial_\mu H | n \rangle}{(E_m - E_{n'})(E_n - E_{n'})} \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

donde falta calcular el nuevo término que apareció

$$\begin{aligned} \partial_\mu \left(\frac{\langle m | \partial_\nu H | n \rangle}{E_n - E_m} \right) &= \frac{\langle \partial_\mu m | \partial_\nu H | n \rangle}{E_n - E_m} + \frac{\langle m | \partial_\nu H | \partial_\mu n \rangle}{E_n - E_m} + \frac{\langle m | \partial_\mu \partial_\nu H | n \rangle}{E_n - E_m} \\ &\quad - \frac{\langle m | \partial_\nu H | n \rangle}{(E_n - E_m)^2} \partial_\mu E_m + \frac{\langle m | \partial_\nu H | n \rangle}{(E_n - E_m)^2} \partial_\mu E_n \\ &= \frac{\langle m | \partial_\mu \partial_\nu H | n \rangle}{E_n - E_m} + \sum_{m \neq n'} \frac{\langle m | \partial_\mu H | n' \rangle \langle n' | \partial_\nu H | n \rangle}{(E_n - E_m)(E_m - E_{n'})} \\ &\quad + \sum_{n \neq n'} \frac{\langle m | \partial_\nu H | n' \rangle \langle n' | \partial_\mu H | n \rangle}{(E_n - E_m)(E_n - E_{n'})} \\ &\quad - \frac{\langle m | \partial_\nu H | n \rangle}{(E_n - E_m)^2} \langle m | \partial_\mu H | m \rangle + \frac{\langle m | \partial_\nu H | n \rangle}{(E_n - E_m)^2} \langle n | \partial_\mu H | n \rangle. \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Para la otra derivada

$$\begin{aligned}
\partial_\nu \left(\frac{\langle m | \partial_\mu H | n \rangle}{E_n - E_m} \right) &= \frac{\langle m | \partial_\mu \partial_\nu H | n \rangle}{E_n - E_m} + \sum_{m \neq n'} \frac{\langle m | \partial_\nu H | n \rangle \langle n' | \partial_\mu H | n \rangle}{(E_n - E_m)(E_m - E_{n'})} \\
&+ \sum_{n \neq n'} \frac{\langle m | \partial_\mu H | n \rangle \langle n' | \partial_\nu H | n \rangle}{(E_n - E_m)(E_n - E_{n'})} \\
&- \frac{\langle m | \partial_\mu H | n \rangle}{(E_n - E_m)^2} \langle m | \partial_\nu H | m \rangle + \frac{\langle m | \partial_\mu H | n \rangle}{(E_n - E_m)^2} \langle n | \partial_\nu H | n \rangle. \quad (\text{A.11})
\end{aligned}$$

Sumando todas las contribuciones se encuentra

$$\begin{aligned}
\langle m | F_{\mu\nu} | n \rangle &= i \sum_{\substack{n \neq n' \\ m \neq n'}} \left\{ \frac{\langle m | \partial_\mu H | n \rangle \langle n' | \partial_\nu H | n \rangle}{(E_m - E_{n'})(E_n - E_{n'})} - \frac{\langle m | \partial_\nu H | n \rangle \langle n' | \partial_\mu H | n \rangle}{(E_m - E_{n'})(E_n - E_{n'})} \right\} \\
&- i \left(\sum_{m \neq n'} \frac{\langle m | \partial_\mu H | n \rangle \langle n' | \partial_\nu H | n \rangle}{(E_m - E_{n'})(E_n - E_m)} + \sum_{n \neq n'} \frac{\langle m | \partial_\nu H | n \rangle \langle n' | \partial_\mu H | n \rangle}{(E_n - E_m)(E_n - E_{n'})} \right) \\
&+ i \left(\sum_{m \neq n'} \frac{\langle m | \partial_\nu H | n \rangle \langle n' | \partial_\mu H | n \rangle}{(E_n - E_m)(E_m - E_{n'})} + \sum_{n \neq n'} \frac{\langle m | \partial_\mu H | n \rangle \langle n' | \partial_\nu H | n \rangle}{(E_n - E_m)(E_n - E_{n'})} \right) \\
&+ i \frac{\langle m | \partial_\nu H | n \rangle}{(E_n - E_m)^2} \langle m | \partial_\mu H | m \rangle - i \frac{\langle m | \partial_\nu H | n \rangle}{(E_n - E_m)^2} \langle n | \partial_\mu H | n \rangle \\
&- i \frac{\langle m | \partial_\mu H | n \rangle}{(E_n - E_m)^2} \langle m | \partial_\nu H | m \rangle + i \frac{\langle m | \partial_\mu H | n \rangle}{(E_n - E_m)^2} \langle n | \partial_\nu H | n \rangle \\
&= i \sum_{\substack{n \neq n' \\ m \neq n'}} \left\{ \frac{\langle m | \partial_\mu H | n \rangle \langle n' | \partial_\nu H | n \rangle}{(E_m - E_{n'})(E_n - E_{n'})} - \frac{\langle m | \partial_\nu H | n \rangle \langle n' | \partial_\mu H | n \rangle}{(E_m - E_{n'})(E_n - E_{n'})} \right\} \\
&- i \sum_{\substack{n \neq n' \\ m \neq n'}} \left(\frac{\langle m | \partial_\mu H | n \rangle \langle n' | \partial_\nu H | n \rangle}{(E_n - E_m)(E_m - E_{n'})} + \frac{\langle m | \partial_\nu H | n \rangle \langle n' | \partial_\mu H | n \rangle}{(E_n - E_m)(E_n - E_{n'})} \right) \\
&+ i \sum_{\substack{n \neq n' \\ m \neq n'}} \left(\frac{\langle m | \partial_\nu H | n \rangle \langle n' | \partial_\mu H | n \rangle}{(E_n - E_m)(E_m - E_{n'})} + \frac{\langle m | \partial_\mu H | n \rangle \langle n' | \partial_\nu H | n \rangle}{(E_n - E_m)(E_n - E_{n'})} \right). \quad (\text{A.12})
\end{aligned}$$

Los dos últimos términos de la última igualdad se pueden escribir de la forma

$$\begin{aligned}
& - \left(\sum_{\substack{n \neq n' \\ m \neq n'}} \frac{\langle m | \partial_\mu H | n \rangle \langle n | \partial_\nu H | n \rangle}{(E_m - E_n)(E_n - E_m)} + \sum_{\substack{n \neq n' \\ m \neq n'}} \frac{\langle m | \partial_\nu H | n \rangle \langle n | \partial_\mu H | n \rangle}{(E_n - E_m)(E_n - E_n')} \right) \\
= & - \frac{1}{(E_n - E_m)} \sum_{\substack{n \neq n' \\ m \neq n'}} \left(\frac{\langle m | \partial_\mu H | n \rangle \langle n | \partial_\nu H | n \rangle}{(E_m - E_n)} + \frac{\langle m | \partial_\nu H | n \rangle \langle n | \partial_\mu H | n \rangle}{(E_n - E_n')} \right) \\
= & - \frac{1}{(E_n - E_m)} \left(\frac{(E_n - E_n') \langle m | \partial_\mu H | n \rangle \langle n | \partial_\nu H | n \rangle + (E_m - E_n) \langle m | \partial_\nu H | n \rangle \langle n | \partial_\mu H | n \rangle}{(E_m - E_n)(E_n - E_n')} \right) \quad (\text{A.13})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{n \neq n' \\ m \neq n'}} \left(\frac{\langle m | \partial_\nu H | n \rangle \langle n | \partial_\mu H | n \rangle}{(E_n - E_m)(E_m - E_n')} + \frac{\langle m | \partial_\mu H | n \rangle \langle n | \partial_\nu H | n \rangle}{(E_n - E_m)(E_n - E_n')} \right) \\
= & \frac{1}{(E_n - E_m)} \sum_{\substack{n \neq n' \\ m \neq n'}} \left(\frac{(E_n - E_n') \langle m | \partial_\nu H | n \rangle \langle n | \partial_\mu H | n \rangle + (E_m - E_n) \langle m | \partial_\mu H | n \rangle \langle n | \partial_\nu H | n \rangle}{(E_m - E_n)(E_n - E_n')} \right) \quad (\text{A.14})
\end{aligned}$$

y al sumarse dan como resultado

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{(E_n - E_m)} \left(\frac{(E_n - E_n') \langle m | \partial_\mu H | n \rangle \langle n | \partial_\nu H | n \rangle + (E_m - E_n) \langle m | \partial_\nu H | n \rangle \langle n | \partial_\mu H | n \rangle}{(E_m - E_n)(E_n - E_n')} \right) \\
& + \frac{1}{(E_n - E_m)} \sum_{\substack{n \neq n' \\ m \neq n'}} \left(\frac{(E_n - E_n') \langle m | \partial_\nu H | n \rangle \langle n | \partial_\mu H | n \rangle + (E_m - E_n) \langle m | \partial_\mu H | n \rangle \langle n | \partial_\nu H | n \rangle}{(E_m - E_n)(E_n - E_n')} \right) \\
= & \frac{1}{(E_n - E_m)} \sum_{\substack{n \neq n' \\ m \neq n'}} \left(\frac{(E_n - E_m) \langle m | \partial_\nu H | n \rangle \langle n | \partial_\mu H | n \rangle - (E_n - E_m) \langle m | \partial_\mu H | n \rangle \langle n | \partial_\nu H | n \rangle}{(E_m - E_n)(E_n - E_n')} \right) \\
= & \sum_{\substack{n \neq n' \\ m \neq n'}} \left(\frac{\langle m | \partial_\nu H | n \rangle \langle n | \partial_\mu H | n \rangle - \langle m | \partial_\mu H | n \rangle \langle n | \partial_\nu H | n \rangle}{(E_m - E_n)(E_n - E_n')} \right), \quad (\text{A.15})
\end{aligned}$$

que al reemplazar en (A.12) se comprueba por fin que

$$\langle m | F_{\mu\nu} | n \rangle = 0 \quad (\text{A.16})$$

Apéndice B

Teorema de Stokes no-Abeliano

El teorema afirma la validez de la siguiente identidad

$$P e^{i \oint_C \mathcal{A}} = \mathcal{P} e^{i \int_\Sigma \tilde{\mathcal{F}}}, \quad (\text{B.1})$$

donde Σ es una superficie con borde C y

$$\mathcal{P} e^{i \int_\Sigma \tilde{\mathcal{F}}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{P} \prod_{n,m=1}^N U_{m,n}^{-1} e^{i \varepsilon_{n,m}^2 F_{n,m}} U_{m,n}, \quad (\text{B.2})$$

con \mathcal{P} representando cierto ordenamiento por superficie del que se hablará más adelante.

Una prueba detallada de (B.1) puede encontrarse en [24]. Aquí lo que se hará es tratar de explicar de manera intuitiva el resultado del teorema. Básicamente la idea es que la superficie Σ se descomponga en un gran número de pequeños lazos disjuntos σ_n con

$$\Sigma = \bigcup_n \sigma_n. \quad (\text{B.3})$$

Lo siguiente que se hace es ir desde el punto inicial λ_0 del circuito C hasta un punto λ ; para ello se utiliza el operador de transporte paralelo

$$U(\lambda, \lambda_0, L) = e^{i \int_L \mathcal{A}}, \quad (\text{B.4})$$

una vez en λ se recorre el pequeño lazo correspondiente, lo que da lugar a un operador de la forma

$$e^{i\varepsilon^2 \tilde{F}(\lambda)},$$

siendo \tilde{F} la curvatura de Yang-Mills. Luego, nos regresamos hasta el punto inicial λ_0 utilizando

$$U^{-1}(\lambda, \lambda_0, L) = e^{-i \int_L \mathcal{A}}. \quad (\text{B.5})$$

El resultado de esta acción será un operador de la forma

$$e^{i\varepsilon^2 \tilde{\mathcal{F}}(\lambda)},$$

con la curvatura $\tilde{\mathcal{F}}$ definida por

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}(\lambda) = U^{-1}(\lambda, \lambda_0, L) F_{\mu\nu}(\lambda) U(\lambda, \lambda_0, L). \quad (\text{B.6})$$

La idea es seguir realizando el proceso hasta cubrir toda la superficie Σ , y tomar el límite en que los lazos se hacen cada vez más pequeños. Esta no es en general una tarea trivial; la razón es que se está trabajando con operadores que no conmutan entre ellos. Lo que se demuestra en [24] es que existe una manera ordenada de recoger todas las contribuciones $\tilde{F}(\lambda)$ de cada lazo tal que se cumple (B.1). Ahora, encontrar dicho ordenamiento por lo general será algo muy difícil y aun llegándose a encontrar tal ordenamiento, resolver la exponencial ordenada por superficie y encontrar un operador explícito será casi siempre una labor de una dificultad extrema. Por esta razón el resultado del lema 3 es bastante particular: no sólo no se necesita construir ningún ordenamiento, sino que se obtiene de forma cerrada el operador resultante.

Apéndice C

Cálculo Completo Para el Oscilador Generalizado Cuántico

Recordemos que el hamiltoniano de interés es

$$H = \frac{1}{2} (Xq^2 + Y(pq + qp) + Zp^2), \quad (\text{C.1})$$

y que la transformación simplectica

$$\begin{aligned} P &= \frac{\left[\frac{Z}{X}\right] p + \left[\frac{X}{Z}\right]^{1/4} q \left[\frac{(\sqrt{XZ}+Y)}{(\sqrt{XZ}-Y)}\right]^{1/4}}{\sqrt{2}} \\ Q &= \frac{\left[\frac{X}{Z}\right]^{1/4} q - \left[\frac{Z}{X}\right]^{1/4} p \left[\frac{(\sqrt{XZ}-Y)}{(\sqrt{XZ}+Y)}\right]^{1/4}}{\sqrt{2}} \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

lo deja en la forma de oscilador armónico

$$H = \frac{\omega}{2} (P^2 + Q^2). \quad (\text{C.3})$$

donde $\omega = \sqrt{XZ - Y^2}$.

Teníamos además que las, componentes de la conexión vienen dadas por

$$\begin{aligned} A_Y &= \frac{\sqrt{XZ}}{8\omega^2}(QP + PQ) \\ &= \frac{\sqrt{XZ}}{8\omega^2} \left(\left[\frac{X}{Z}\right]^{1/2} q^2 - \left[\frac{Z}{X}\right]^{1/2} p^2 \right) \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

$$\begin{aligned} A_Z &= -\frac{Y}{16\omega^2} \left[\frac{X}{Z}\right]^{1/2} (PQ + QP) - \frac{1}{8\omega} \left[\frac{X}{Z}\right]^{1/2} (Q^2 - P^2) \\ &= -\frac{Y}{16\omega^2} \left[\frac{X}{Z}\right]^{1/2} \left(\left[\frac{X}{Z}\right]^{1/2} q^2 - \left[\frac{Z}{X}\right]^{1/2} p^2 \right) - \frac{Y}{8\omega^3} \left(-Y \left(\frac{Xq^2}{Z} + p^2 \right) - X(qp + pq) \right) \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

$$\begin{aligned} A_X &= -\frac{Y}{16\omega^2} \left[\frac{Z}{X}\right]^{1/2} (PQ + QP) + \frac{1}{8\omega} \left[\frac{Z}{X}\right]^{1/2} (Q^2 - P^2) \\ &= -\frac{Y}{16\omega^2} \left[\frac{Z}{X}\right]^{1/2} \left(\left[\frac{X}{Z}\right]^{1/2} q^2 - \left[\frac{Z}{X}\right]^{1/2} p^2 \right) + \frac{Y}{8\omega^3} \left(-Y \left(q^2 + \frac{Zp^2}{X} \right) - Z(qp + pq) \right) \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

Para la curvatura, comenzando primero con la componente XY

$$F_{XY} = \frac{\partial A_Y}{\partial X} - \frac{\partial A_X}{\partial Y} - i[A_X, A_Y],$$

se calcula fácilmente el conmutador

$$\begin{aligned} [A_X, A_Y] &= \frac{\sqrt{XZ}}{8\omega^2} \frac{1}{8\omega} \left[\frac{Z}{X}\right]^{1/2} [(Q^2 - P^2), (QP + PQ)] \\ &= \frac{Z}{16\omega^3} (Q^2 + P^2), \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

mientras que para la derivada se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{\partial A_Y}{\partial X} - \frac{\partial A_X}{\partial Y} &= \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\sqrt{XZ}}{8\omega^2} \left(\left[\frac{X}{Z} \right]^{1/2} q^2 - \left[\frac{Z}{X} \right]^{1/2} p^2 \right) \right) \\
&\quad - \frac{\partial}{\partial Y} \left(-\frac{Y}{16\omega^2} \left[\frac{Z}{X} \right]^{1/2} \left(\left[\frac{X}{Z} \right]^{1/2} q^2 - \left[\frac{Z}{X} \right]^{1/2} p^2 \right) + \frac{Y}{8\omega^2} \left[\frac{Z}{X} \right]^{1/2} (qp + pq) \right) \\
&= \frac{\sqrt{XZ}}{8\omega^2} \frac{\partial}{\partial X} \left(\left[\frac{X}{Z} \right]^{1/2} q^2 - \left[\frac{Z}{X} \right]^{1/2} p^2 \right) + \frac{Y}{16\omega^2} \left[\frac{Z}{X} \right]^{1/2} \frac{\partial}{\partial Y} \left(\left[\frac{X}{Z} \right]^{1/2} q^2 - \left[\frac{Z}{X} \right]^{1/2} p^2 \right) \\
&\quad + \frac{Y}{8\omega^3} \left[\frac{Z}{X} \right]^{1/2} \left(\frac{Y}{\omega} \left(\left[\frac{X}{Z} \right]^{1/2} q^2 + \left[\frac{Z}{X} \right]^{1/2} p^2 \right) + \frac{\sqrt{XZ}}{\omega} (qp + pq) \right) \\
&\quad - \frac{1}{8\omega} \left[\frac{Z}{X} \right]^{1/2} \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{Y}{\omega} \left(\left[\frac{X}{Z} \right]^{1/2} q^2 + \left[\frac{Z}{X} \right]^{1/2} p^2 \right) + \frac{\sqrt{XZ}}{\omega} (qp + pq) \right) \\
&= \frac{\sqrt{XZ}}{8\omega^2} \left(\left[\frac{1}{ZX} \right]^{1/2} q^2 + \left[\frac{Z}{X^3} \right]^{1/2} p^2 \right) \\
&\quad + \frac{Y}{8\omega^3} \left[\frac{Z}{X} \right]^{1/2} \left(\frac{Y}{\omega} \left(\left[\frac{X}{Z} \right]^{1/2} q^2 + \left[\frac{Z}{X} \right]^{1/2} p^2 \right) + \frac{\sqrt{XZ}}{\omega} (qp + pq) \right) \\
&\quad - \frac{1}{8\omega} \left[\frac{Z}{X} \right]^{1/2} \left(\frac{1}{\omega} \left(\left[\frac{X}{Z} \right]^{1/2} q^2 + \left[\frac{Z}{X} \right]^{1/2} p^2 \right) + \frac{Y^2}{\omega^2} \left(\left[\frac{X}{Z} \right]^{1/2} q^2 + \left[\frac{Z}{X} \right]^{1/2} p^2 \right) \right) \\
&\quad - \frac{1}{8\omega} \left[\frac{Z}{X} \right]^{1/2} \frac{Y\sqrt{XZ}}{\omega^3} (qp + pq) \\
&= \frac{\sqrt{XZ}}{8\omega^2} \left(\left[\frac{1}{ZX} \right]^{1/2} q^2 + \left[\frac{Z}{X^3} \right]^{1/2} p^2 \right) \\
&\quad + \frac{Y^2}{8\omega^4} \left[\frac{Z}{X} \right]^{1/2} \left(\left[\frac{X}{Z} \right]^{1/2} q^2 + \left[\frac{Z}{X} \right]^{1/2} p^2 \right) \\
&\quad - \frac{1}{8\omega^2} \left[\frac{Z}{X} \right]^{1/2} \left(\left(\left[\frac{X}{Z} \right]^{1/2} q^2 + \left[\frac{Z}{X} \right]^{1/2} p^2 \right) + \frac{Y^2}{\omega^2} \left(\left[\frac{X}{Z} \right]^{1/2} q^2 + \left[\frac{Z}{X} \right]^{1/2} p^2 \right) \right) \\
&= \frac{\sqrt{XZ}}{8\omega^2} \left(\left[\frac{1}{ZX} \right]^{1/2} q^2 + \left[\frac{Z}{X^3} \right]^{1/2} p^2 \right) + \frac{Y^2}{8\omega^4} \left[\frac{Z}{X} \right]^{1/2} \left(\left[\frac{X}{Z} \right]^{1/2} q^2 + \left[\frac{Z}{X} \right]^{1/2} p^2 \right) \\
&\quad - \frac{1}{8\omega^2} \left[\frac{Z}{X} \right]^{1/2} \left(\left[\frac{X}{Z} \right]^{1/2} q^2 + \left[\frac{Z}{X} \right]^{1/2} p^2 \right) - \frac{Y^2}{8\omega^4} \left[\frac{Z}{X} \right]^{1/2} \left(\left[\frac{X}{Z} \right]^{1/2} q^2 + \left[\frac{Z}{X} \right]^{1/2} p^2 \right) \\
&= 0. \tag{C.8}
\end{aligned}$$

Para la componente YZ , el conmutador resulta

$$\begin{aligned}
[A_Y, A_Z] &= -\frac{\sqrt{XZ}}{8\omega^2} \frac{1}{8\omega} \left[\frac{Z}{X} \right]^{1/2} [(QP + PQ), (Q^2 - P^2)] \\
&= \frac{Z}{16\omega^3} (Q^2 + P^2), \tag{C.9}
\end{aligned}$$

y el término de las derivas es muy parecido a (C.8)

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_Z}{\partial Y} - \frac{\partial A_Y}{\partial Z} &= \frac{\partial}{\partial Y} \left(-\frac{Y}{16\omega^2} \left[\frac{X}{Z} \right]^{1/2} \left(\left[\frac{X}{Z} \right]^{1/2} q^2 - \left[\frac{Z}{X} \right]^{1/2} p^2 \right) - \frac{Y}{8\omega^2} \left[\frac{X}{Z} \right]^{1/2} (qp + pq) \right) \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{\sqrt{XZ}}{8\omega^2} \left(\left[\frac{X}{Z} \right]^{1/2} q^2 - \left[\frac{Z}{X} \right]^{1/2} p^2 \right) \right) \\ &= 0. \end{aligned} \tag{C.10}$$

Sólo falta por calcular la componente ZX . En este caso se invierten los roles; el conmutador es el que se anula

$$\begin{aligned} [A_Z, A_X] &= -\frac{Y}{128\omega^3} [PQ + QP, Q^2 - P^2] \\ &\quad - \frac{Y}{128\omega^3} [Q^2 - P^2, PQ + QP] \\ &= 0, \end{aligned} \tag{C.11}$$

mientras que los demás términos dan

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_X}{\partial Z} - \frac{\partial A_Z}{\partial X} &= \frac{\partial}{\partial Z} \left(-\frac{Y}{16\omega^2} (q^2 - \frac{Z}{X} p^2) - \frac{Y^2}{8\omega^3} (q^2 + \frac{Zp^2}{X}) - \frac{YZ}{8\omega^2} (qp + pq) \right) \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial X} \left(-\frac{Y}{16\omega^2} \left(\frac{X}{Z} q^2 - p^2 \right) + \frac{Y^2}{8\omega^3} \left(\frac{Xq^2}{Z} + p^2 \right) + \frac{YX}{8\omega^2} (qp + pq) \right) \\ &= \frac{Y}{16\omega^2} (Xq^2 + Y(pq + qp) + Zp^2) = \frac{Y}{16\omega^3} (Q^2 + P^2). \end{aligned}$$

Recopliando todos los resultados tenemos que las componentes son de la forma

$$F_{XY} = \frac{Z}{16\omega^3} (Q^2 + P^2) \tag{C.12}$$

$$F_{YZ} = \frac{X}{16\omega^3} (Q^2 + P^2) \tag{C.13}$$

$$F_{ZX} = \frac{Y}{16\omega^3} (Q^2 + P^2), \tag{C.14}$$

y al recordar la definición del operador número, $N(\lambda) + \frac{1}{2} = \frac{P_\lambda^2 + Q_\lambda^2}{2}$, podemos escribir la

curvatura de Yang-Mills como

$$\tilde{F} = \frac{(N(\lambda) + \frac{1}{2})}{8\omega^3} [X dY \wedge dZ + Z dX \wedge dY + Y dZ \wedge dX]. \tag{C.15}$$

Referencias

- [1] D. Chruściński, A. Jamiolkowski, *Geometric Phases in Classical and Quantum Mechanics*, Birkhäuser (2004).
- [2] Ch. Isham, *Modern Differential Geometry for Physicist*, World Scientific, (1999).
- [3] B. Schutz, *Geometrical methods of mathematical physics*, Cambridge university press (1980).
- [4] M. Berry, *Proc.Roy.Soc.London*, **A 392** (1984), 45-57.
- [5] A. Bohm, A. Mostafazadeh, H. Koimizu y Q. Niu, *The geometric Phase in Quantum Systems*, Springer (2003).
- [6] A. Bohm, L. Boya y B.Kendrick, *Phys. Rev.* **A 43** (1991), 1206-1210.
- [7] B. Simon, *Phys. Rev. Lett.*, **51** (1983), 2167-2170.
- [8] A. Pati, *J.Phys:A.Math.Gen.*, **28** (1995), 2807.
- [9] A. Pati, *Ann. Phys*, **270** (1998), 178.
- [10] G. García de la Polavieja y E. Sjöqvist, *Am. J. Phys.* **66** (1998) 61.
- [11] J. Samuel y R Bhandari, *Phys. Rev. Lett.*, **60** (1988) 2339-2342.
- [12] V. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer, (1989).
- [13] J. Hannay, *J.Phys:A.Math.Gen.*, **18** (1985), 221-230.
- [14] M. Berry, *J.Phys:A.Math.Gen.*, **18** (1985a), 15-27.
- [15] J. José, E. Saletan, *Classical dynamics*, Cambridge university press,(1998).
- [16] M. Berry, J. Hannay, *J.Phys.A* **21** (1988), 325-331.

- [17] M. Audin, *Torus action on Symplectic manifolds*, Birkhäuser, (2000).
- [18] R. Montgomery, *Comm. Math. Phys.*, **120** (1988), 269-284.
- [19] S. Golin, A. Knauf y S Marmi, *Comm. Math. Phys.*, **123** (1989), 95-122.
- [20] G. García de la Polavieja, *Phys. Rev. Lett.*, **81**, (1998).
- [21] R. Feynman, *Phys. Rev.* **56** (1939) 340.
- [22] J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, Addison-Wesley, (1993).
- [23] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu y F. Laloë, *Quantum Mechanics vol. I and II*,
Collection Enseignement des sciences, (1973).
- [24] I. Aref'eva, *Theor. Math. Phys.* **43**, (1980), 353.
- [25] B. Broda, arXiv:math-ph/0012035v3.
- [26] A. Dutta, N. Mukunda, R. Simon, *Pramana, J.Phys.* **45**, (1995),471-497.
- [27] A. Wünsche, *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.* **2** (2000) 73-80.
- [28] M. Maamache, *Phys. Scripta* **54** (1996).
- [29] M. Nakahara, *Geometry, topology and physics*, Graduate Student Series In
Physics (1990)
- [30] D. Thouless, M. Kohmoto, M. Nighthingale y M. Njis, *Phys. Rev. Lett.*, **49**
(1982).
- [31] A. Botero y A. Reyes, *articulo sin publicar*.
- [32] J. Faraut, *Analysis on Lie groups: An introduction*, Cambridge university
press,(2008).