Probabilidades difusas en la evidencia científica

Armando Reyes

Director: Andrés Páez, PhD

Trabajo para optar al título de

Magister en Filosofía

Departamento de Filosofía
Facultad de Ciencias Sociales
Universidad de los Andes
Bogotá

Junio de 2014

Dedicado a mi director, el profesor Andrés Páez

Índice general

Introducción

Cuando decidí presentarme a la Maestría en Filosofía en la Universidad de los Andes, una de mis principales motivaciones para hacerlo fue considerar el perfil del egresado que ellos tienen en mente para los que no tenemos una formación de pregrado en filosofía. Desarrollar y fortalecer habilidades complementarias desde las cuales yo podría abordar la dimensión filosófica de mi saber matemático, fue lo suficientemente atractivo para comenzar mis estudios de maestría en esta universidad.

Admitido oficialmente a la maestría, y con el deseo que el trabajo a realizar tuviese que ver con matemáticas, conversé con el profesor Andrés Páez acerca de la posibilidad de trabajar bajo su dirección. Él me comentó sus intereses de investigación, los cuales en ese momento giraban en torno al problema de la evidencia, y las diferentes teorías que han sido formuladas para estudiar tal problema. Para mi agrado, muchas de éstas son construidas a partir de un lenguaje matemático formal, lo cual me llevó a interesarme fuertemente en estudiarlas. Este hecho, junto con la disposición de dirigir la tesis por parte del profesor Páez, dio inicio a mi línea de trabajo.

Cursar varios seminarios impartidos por el profesor Páez, hizo que comenzará a cuestionarme acerca del conocimiento probabilístico que recibí en mi formación de pregrado. Empecé a notar que dicha formación, clásica y ortodoxa, ha sido - y es actualmente - debatida en el problema filosófico de la evidencia. Por supuesto, para muchos matemáticos "puros" tal discusión es desconocida, así que es esta precisamente la dimensión filosófica de mi saber matemático que quise abordar en mis estudios de maestría.

Una vez fijado el proyecto de tesis, en el cual agradezco enormemente al profesor Tomás Barrero, quien junto al profesor Páez me colaboraron en la construcción del escrito, comencé a indagar por la concepción de la probabilidad que tienen varios académicos, y cómo ellos la relacionan con el concepto de evidencia. Para lograr esto, me reuní con varios profesores de matemáticas y estadística de la Universidad Nacional de Colombia, así como con estudiantes de doctorado de estas ciencias de la misma institución.

Interactuar con estos profesores y algunos estudiantes, me permitió darme cuenta que su concepción de la probabilidad es clásica y ortodoxa, pues todos sus trabajos de investigación están basados en un fundamento bayesiano de la probabilidad, fundamento que yo tenía en el momento de iniciar mis estudios de maestría, pero que a medida que avanzaba en la discusión de las teorías de la evidencia, se iba haciendo problemático.

Con el fin de motivar una discusión mayor acerca del por qué todos con quienes hablaba tienen esa concepción bayesiana de la probabilidad, decidí participar en algunos seminarios, tanto de profesores como de estudiantes - esta vez no solamente de matemáticas o estadística, sino de ciencias básicas en general - en los que conté ciertos problemas asociados al bayesianismo, problemas que iban desde su interpretación hasta la obtención de diferentes resultados en una misma situación. Al final, pude darme cuenta que ninguno de ellos se había preguntado desde un punto de vista filosófico, si en verdad tales teorías clásicas eran siempre aplicables, sino que simplemente confiaron en ello y les pareció suficiente. Eso sí, indagar por su concepción acerca del término *evidencia*, y cómo su idea de la probabilidad está relacionado con éste, fue algo más bien rápido: la evidencia son los datos.

Las experiencias anteriores me llevaron a ver la importancia de una discusión filosófica acerca del por qué tales ideas clásicas y ortodoxas no son siempre las adecuadas en problemas como el de la evidencia. Darme cuenta que los académicos desconocen la existencia de otras teorías probabilísticas no bayesianas, así como algunas de las críticas que se han realizado para los tratamientos que ellos adoptan - todo esto enmarcado en el problema filosófico de la evidencia - fue la principal motivación que tuve para la realización de esta tesis. Eso sí, más allá de la elaboración de este documento que solamente leerán algunas personas, mi participación como ponente este año en algunos eventos nacionales e internacionales, busca *contagiar* ese cuestionamiento que tengo acerca de las teorías probabilísticas, y su relación con el concepto filosófico de la evidencia científica, principalmente en la física[1]. De

[1] Los eventos en los que participaré son los siguientes:

- Escuela de Física Matemática *Spectral Analysis for Random Matrices and its Applications*, a realizarse en la Universidad de los Andes del 26 al 30 de mayo, con mi ponencia titulada "Probability, Topological Semigroups and Random Matrices";
- *Cuarto Encuentro Iberoamericano de Polinomios Ortogonales y sus Aplicaciones*, a realizarse en la Universidad Nacional de Colombia, sede Bogotá, del 17 al 20 de junio, con mi ponencia titulada "Grobner Bases Methods for Orthogonal Polynomials";
- *V Seminario de Investigación Interdisciplinaria*, a realizarse en la en la Universidad Nacional de Colombia, el 22 de agosto, con mi ponencia titulada "Las matemáticas detrás de la impresión 3D";

esta manera, creo que he dado comienzo a lo que dije en el primer párrafo de esta introducción. En este punto debo recordar que el responsable de mi preocupación filosófica alrededor de la probabilidad y la evidencia, así como lo que ha venido después, es mi director, el profesor Andrés Páez; de aquí que esta tesis sea dedicada a él.

Comentada mi experiencia personal, y el origen motivacional de este trabajo, a continuación describo de manera formal la discusión que se plantea en esta tesis, la cual trata sobre las teorías probabilísticas de la evidencia, junto con el interrogante de hasta qué punto estas aproximaciones sirven para una formulación de una teoría general de la evidencia.

Dentro de las principales razones para realizar un estudio probabilístico de una teoría de la evidencia, puedo mencionar, en primer lugar, el hecho de que cualquier inferencia que realicemos a partir de un conjunto de evidencias es incompleta y casi nunca concluyente, esto debido a los grados de credibilidad de las fuentes de donde las obtenemos, o a la imprecisión que tiene nuestra forma de razonar. Esto me lleva a considerar que los atributos que se le asignan a las conclusiones obtenidas, sólo pueden ser de naturaleza probabilística.

En segundo lugar, tenemos los ejemplos en la ciencia que muestran la importancia de la probabilidad como uno de los principales factores del desarrollo del conocimiento científico. Dentro de los casos más destacados, puedo mencionar el del reconocido físico Albert Einstein, quien utilizó el término *probable* en sus estudios de la velocidad de la luz, y la cuantificación que hizo sobre la constante de la misma, junto con el caso del físico matemático Henri Poincaré, quien con su radical afirmación "si el cálculo de probabilidades ha de ser condenado, entonces el conjunto de las ciencias también debe ser condenado" (1905, p. 186), resaltó la importancia de la probabilidad en la ciencia. Estos dos ejemplos, junto con muchos más, justifican un estudio de teorías de la evidencia mediante técnicas probabilísticas.

En tercer lugar, estudiar teorías probabilísticas de la evidencia permite cuestionar

- *Segundo Congreso Internacional de Matemáticas Aplicadas*, a realizarse en la en la Universidad El Bosque, del 10 al 12 de septiembre, con mi ponencia titulada "Lógica Difusa en la Ingeniería Económica";
- *International Conference in Algebraic Methods in Dynamical Systems*, a realizarse en la Universidad del Norte en Barranquilla, del 5 al 8 de octubre, con mi ponencia titulada "Involutive Partial Differential Equations and Skew PBW Extensions";
- *XX Coloquio Latinoamericano de Álgebra*, a realizarse en Lima, Perú, del 8 al 12 de diciembre, con mi ponencia titulada "Involutive Differential Equations, Operator Algebras and Skew PBW Extensions".

diversos aspectos que resultan de interés en la filosofía de la ciencia, además, por supuesto, de motivar la realización de esta tesis. De estos aspectos, puedo destacar al menos cuatro: (i) la relación entre un modelo de la evidencia hipotético-deductivo y un modelo probabilístico (el cual por su naturaleza cuantitativa, no tiene consecuencias lógicas); (ii) el significado de las evaluaciones, tanto de las hipótesis como de las evidencias, en una teoría de la evidencia; (iii) la construcción del modelo probabilístico, el cual, como objeto matemático, es una abstracción de escenarios del mundo; (iv) el grado de precisión o exactitud del modelo propuesto, visto a partir de la subjetividad, y la falta de conocimiento completo de todas las variables y las relaciones entre éstas.

Ya sea porque deseemos mostrar la importancia de la probabilidad en el desarrollo del conocimiento científico, o porque queremos indagar algunos aspectos que resultan relevantes para la filosofía de la ciencia, estoy convencido que el estudio que se realice en este trabajo deberá incluir todos los campos donde se presente la relación evidencia - hipótesis. Para el caso de esta tesis, me restringiré al ámbito científico, y a las teorías que allí se han propuesto[2]. No obstante, más allá del contexto en donde se estudie una teoría de la evidencia, lo primero que debe hacerse es intentar definir lo que ha de entenderse por *evidencia*.

Una primera pista para definir *evidencia* es la relación que ésta guarda con las palabras *hecho*, *datos*, *información* y *conocimiento*. De hecho, Schum en *The Evidential Foundations of Probabilistic Reasoning* (2001) presenta un análisis detallado acerca de la definición de cada uno de estos términos y su relación con el concepto de evidencia. Por ahora, y dependiendo de la situación a estudiar, veremos que la evidencia puede entenderse como los datos recolectados en cierto modelo, o la información que tenemos sobre la ocurrencia de un hecho.

Con esto en mente, podemos tener en cuenta que en general, utilizamos el término evidencia como referencia a los fenómenos observables en los que basamos nuestras inferencias en asuntos de interés que son de importancia para nosotros. Por ejemplo, cuando queremos hablar de cierta evidencia nos referimos al contexto en el que estamos interesados; esto hace que hablemos de evidencia científica, evidencia médica, evidencia física, etc. Sin embargo, si bien las características propias de las evidencias en un contexto nos permiten obtener conclusiones sobre diferentes acontecimientos, mostrándonos así diferencias considerables acerca de lo que podemos considerar como evidencia, hay ciertas similitudes estructurales de las diferentes evidencias que

[2]La razón de esta restricción es que un estudio de la teoría de la evidencia en un campo fuera del científico, como el ámbito judicial por ejemplo, demandaría la inclusión de términos propios de este otro contexto, así como las discusiones interpretativas que allí se presentan, lo cual conllevaría a una extensión considerable de este trabajo.

son intrínsecas a todos los campos mencionados anteriormente, y que en caso de ser identificadas, podrían llevarnos a una mejor comprensión del concepto en sí mismo, independientemente del papel que juegue en un contexto determinado.

Precisamente, reflexionar acerca de las propiedades comunes de las evidencias en cualquier campo del conocimiento, muestra la necesidad de estudiar con detalle cada uno de los acercamientos que para este concepto se han realizado, tanto desde un punto de vista histórico, como teórico, pues creo que una discusión filosófica de una teoría de la evidencia tiene que incluir los diversos paradigmas que han sido adoptados, junto con la formalización conceptual de los mismos. De esta manera, en esta tesis indago inicialmente por el desarrollo de las teorías de la evidencia a través del tiempo, así como los diversos constructos teóricos que se han formulado.

Comenzaré a hacer un recorrido histórico por los filósofos de la ciencia que se interesaron en postular una teoría de la confirmación. En una primera etapa, por así decirlo, encontraremos a filósofos como Nicod (1930), Hempel (1945a, 1945b), Carnap (1950, 1952) y Glymour (1980), quienes con sus aportes comenzaron a discutir acerca de lo que quiere decir que una evidencia confirme una hipótesis, y de ser así, en qué grado la confirma. Esta discusión originó algunas paradojas famosas en la filosofía de la ciencia (por ejemplo, la paradoja de los cuervos), paradojas que también llamaron la atención de otros filósofos como Popper (1957) y Quine (1969).

Sin embargo, la discusión de cada propuesta de solución, así como las comparaciones entre estas, mostró que aun faltaba una formulación teórica más *potente* que las que ya se encontraban, pues con las teorías existentes no lograba entenderse ni explicarse con total satisfacción cada una de las paradojas. Es así como tiempo después, la teoría bayesiana de la evidencia (Bayes, 1958/1763), tanto en su concepción subjetiva como objetiva, surge con un fundamento teórico basado en axiomas de la probabilidad, permitiendo dar solución a los problemas que hasta entonces se tenían. La paradoja de los cuervos fue solucionada con esta nueva teoría que comenzó a ganar popularidad en un espectro amplio de académicos, dentro de los que se incluyen por supuesto, filósofos y matemáticos. Es innegable el aporte del bayesianismo en una teoría de la evidencia, pues hasta el día de hoy, este enfoque probabilista continúa siendo de gran importancia en la solución de problemas actuales, como lo es por ejemplo, el hallar fragmentos del vuelo de Malaysia Airlines MH370 que se accidentó el pasado 8 de marzo de 2014[3].

No obstante, y aun cuando un enfoque bayesiano de la evidencia ha sido ampliamente aceptado y utilizado en diversos problemas científicos, otros académicos

[3] Véase "Cómo pueden las matemáticas ayudar a hallar los restos del MH370", en http://www.bbc.co.uk/mundo/

dentro de los que se destacan Zadeh (1965), Dempster (1968), Shafer (1976), Cui y Blockley (1990), Walley (1991), han argumentado que las teorías bayesianas, ya sean subjetivas u objetivas, no están exentas de problemas. Su observación es que el supuesto bayesiano sobre que las probabilidades precisas o exactas, miden el grado de creencia de un agente en una proposición, es un supuesto muy fuerte y casi que inalcanzable, pues estos están basados en la incertidumbre del sujeto a la hora de formular cuantitativamente tales grados de creencia, así como al conocimiento incompleto o viciado que él puede tener de la situación en la que se encuentra. Así, el creer que uno siempre está en capacidad de cuantificar sus creencias con un único valor entre 0 y 1, es una exigencia muy fuerte dada nuestra condición de seres humanos.

Precisamente, el *relajar* esta suposición bayesiana llevó a estos académicos a formular teorías probabilísticas de la evidencia que buscan reflejar la incertidumbre y el conocimiento incompleto, a la hora de asignar valores probabilísticos a las creencias en una proposición. De manera general, en estas teorías se manejan intervalos de probabilidad - probabilidades difusas - en cambio de un único valor de probabilidad, como se plantea en el caso bayesiano. Aun cuando las formulaciones teóricas de estos tratamientos son más densas, así como los cálculos involucrados, uno de los hechos a destacar es que todos estos enfoques generalizan la teoría bayesiana, y coinciden con esta última precisamente en el caso en el que se tienen condiciones sobre certidumbre y conocimiento completo del modelo.

Con el fin de ver con detalle cada una de las observaciones anteriores, y así cuestionar hasta qué punto las aproximaciones probabilísticas de la evidencia sirven para una formulación de una teoría general de la evidencia, he organizado el documento de la siguiente forma:

En el capítulo 1 presento un recuento del problema de la confirmación de una teoría, discutiendo lo que quiere decir que un hecho sea evidencia de una determinada hipótesis, y si es así, en qué *grado* lo es. Comienzo recordando la noción de satisfacción de Hempel, para luego continuar con la propuesta de Carnap, y así mostrar los primeros acercamientos probabilísticos que se realizaron al formular una teoría de la confirmación cuantitativa. Luego recuerdo los principales puntos de la teoría sugerida por Glymour, de tal manera que al final del capítulo menciono algunas de las dificultades de estas teorías, para así preparar el terreno para la teoría bayesiana de la evidencia, el cual es el contenido del capítulo 2.

En este segundo capítulo comienzo a estudiar con detalle las teorías bayesianas de la evidencia. Lo primero que hago es aclarar el significado que, en general, tiene la palabra *probabilidad* como un número entre cero y uno, aclaración que se lleva a cabo mediante la distinción de las diversas interpretaciones de la palabra *proba-*

bilidad. A pesar de la cantidad de interpretaciones de la probabilidad (Fine, 1973 enumera nueve interpretaciones específicas, mientras que Cohen, 1989 enumera seis, y Weatherford, 1982 enumera cuatro interpretaciones), no todas son cruciales en un estudio de la evidencia, razón por la cual solamente discuto la noción de probabilidad objetiva y de probabilidad subjetiva, dentro de las cuales pueden enmarcarse las interpretaciones anteriores. Esta distinción resulta pertinente a la hora de discutir en qué sentido una teoría de la evidencia es probabilística, pues dentro de la probabilidad *pascaliana* (término debido a los trabajos del matemático Blaise Pascal), se han realizado diversas interpretaciones de la probabilidad dependiendo de la situación en la que se encuentre este concepto. La idea de un enfoque *pascaliano* es que en este se satisfacen los tres axiomas de un espacio de probabilidad definidos por Kolmogorov[4], mientras que en un tratamiento *no pascaliano* estos axiomas no son satisfechos[5]. Una vez hecho esto, procedo a repasar los conceptos de la teoría bayesiana, incluyendo el teorema de Bayes, el cual es fundamental para estas teorías con el fin de ilustrar sus aportes y ventajas, con respecto a las teorías presentadas en el capítulo 1.

En el capítulo 3 comienzo el estudio de las teorías no bayesianas de la evidencia. Es un hecho destacable que desde 1600 se reconoció que ciertas propiedades de la probabilidad - las cuales sí son válidas en el enfoque bayesiano - no siempre son adecuadas para estudiar ciertos estados de creencias que obtenemos durante nuestra vida. Por esta razón Shafer (1976) en su propuesta, la teoría de Dempster-Shafer, ofrece un sistema epistémico de las funciones de creencias, cuyas propiedades no satisfacen los axiomas de Kolmogorov. El sistema fue formulado al notarse que en muchas de nuestras inferencias, las evidencias o las hipótesis no tienen una cuantificación exacta; son imprecisas. Bajo esta concepción de imprecisión, parece natural que sólo somos capaces de realizar conclusiones probabilísticas cargadas de imprecisión.

El tener en cuenta esta imprecisión a la hora de realizar conclusiones probabilísticas, me lleva a discutir algunas de las dificultades que se presentan al adoptar una teoría bayesiana de la evidencia. Mediante ejemplos ilustrativos tomados del ámbito

[4]El matemático ruso A.N. Kolmogorov publicó en 1933 un tratado sobre los fundamentos de la probabilidad, en el cual introdujo la probabilidad como una medida matemática asignada a eventos, siendo estos subconjuntos de un conjunto general llamado espacio muestral. A partir de este trabajo, el estudio de la probabilidad pudo hacerse en abstracto desde, y para el concepto en sí mismo, sin tener que hacer referencia a un contexto particular en el que pudiese aplicarse. Según Schum (2001, p. 22), a la hora de formular estos axiomas, Kolmogorov tenía en su mente una concepción *enumerativa* de la probabilidad.

[5]Al parecer, esta distinción fue realizada por primera vez por L. Jonathan Cohen (1977, 1989). Otro detalle importante del cumplimiento de estos axiomas de probabilidad es que ellos corresponden a una lógica de la inferencia incierta (Howson y Urbach, 2006).

científico, muestro por qué - al menos en situaciones particulares - una teoría probabilística imprecisa de la evidencia es más adecuada que una teoría precisa como la bayesiana. Más exactamente, veré algunas relaciones entre las teorías precisas y las imprecisas, principalmente en lo que tiene que ver con la cuestión de si alguna se reduce a la otra, y si es así, bajo cuáles condiciones. Al final de este capítulo, discuto la aplicabilidad de la teoría de Dempster-Shafer, junto con algunas observaciones acerca de su complejidad computacional.

En el capítulo 4 presento una teoría de la evidencia más general que las estudiadas en los capítulos anteriores, la teoría de intervalos de probabilidad introducida por Cui y Blockley (1990). La motivación para estudiarla es su relación con la teoría de Dempster-Shafer, así como ver el por qué resulta ser más general que esta última. Miraré los conceptos involucrados, así como un ejemplo ilustrativo que muestra algunos de los cálculos que en esta teoría se deben realizar, para luego terminar mencionando con cierto detalle algunas de las aplicaciones de las teorías imprecisas. La idea de estas aplicaciones es mostrar el por qué una teoría imprecisa de la evidencia, resuelve las dificultades que le han sido mencionadas al bayesianismo.

Finalmente, en las conclusiones hago un recuento de lo discutido a lo largo de la tesis, para luego preguntar si todas las teorías de la evidencia deben ser probabilísticas. Luego planteo un trabajo futuro que busque formular una teoría de la evidencia lo más general posible, y que contribuya a una *ciencia de la evidencia*.

Capítulo 1

Teorías clásicas de la evidencia

En este capítulo realizo un breve repaso histórico de algunas de las principales teorías de la confirmación que se han formulado desde mediados del siglo XX, a partir del origen del concepto de evidencia en la filosofía de la ciencia con los trabajos de Hempel (1945) y Carnap (1950, 1952). De esta manera, los trabajos a considerar son los de Hempel, Carnap, y Glymour. De igual manera, el propósito de este recorrido es apreciar algunos de los problemas centrales en torno a la evidencia, problemas que serán discutidos más a fondo en el capítulo 2 mediante un enfoque bayesiano de la evidencia.

1.1. Noción de satisfacción de Hempel

Hempel, en "Studies in the Logic of Confirmation" (1945a), trabajo en el cual resalta sus charlas con Carnap y Tarski, comenta que la característica definitoria de una proposición empírica es su capacidad de ser verificada por medio de una confrontación con resultados experimentales. Para él, esta característica es supremamente importante, pues permite distinguir proposiciones que tienen contenido empírico, de aquellas proposiciones de las ciencias formales, como lo son la lógica y las matemáticas, las cuales no requieren una verificación desde la experiencia para su validación; así mismo, también se pueden distinguir de las formulaciones metafísicas que no admiten ningún tipo de comprobación (1945a, p. 1). Su objetivo principal a lo largo de su trabajo es presentar un conjunto de condiciones para una definición apropiada de confirmación, condiciones que permitan ver que la confirmación es una relación lógica entre proposiciones, precisamente como lo es el concepto de consecuencia lógica. Llegaré a esta relación al final de la sección 1.1.2.

La confrontación a la que se refiere Hempel debe ser entendida en el sentido de "testabilidad en principio", pues hay varias proposiciones empíricas que no pueden ser comprobadas en el tiempo presente. Más exactamente, si llamamos a una proposición "comprobable en principio", esto quiere decir que es posible establecer resultados experimentales, en el caso que fuesen obtenidos en tiempo actual, que constituyen evidencia favorable o desfavorable. En pocas palabras, una proposición se denomina "comprobable en principio", si es posible describir la clase de datos que la confirmarían o la desconfirmarían (Hempel, 1945a, p. 2).

Los conceptos de confirmación y de desconfirmación como los entiende Hempel son, según él, más comprensivos que los de verificación concluyente y falsificación. Esto quiere decir que, por ejemplo, ninguna cantidad finita de evidencia experimental puede concluyentemente verificar una hipótesis que expresa una ley general como la ley de la gravitación, la cual abarca una infinidad de estancias potenciales, muchas de las cuales pertenecen a un futuro inaccesible, o al pasado. No obstante, un conjunto finito de datos relevantes[1] pueden estar "de acuerdo con" la hipótesis y de esta manera confirmarla. Similarmente, una hipótesis existencial que afirma la existencia de un elemento químico no conocido con determinadas características específicas, no puede ser probado falso de manera concluyente a partir de un conjunto finito de evidencia que no "concuerde" con la hipótesis; a cambio de esto, estos mismos datos no favorables pueden, bajo ciertas condiciones, ser considerados como una debilitación de la hipótesis en cuestión, o como una evidencia que la desconfima.

El punto de interés de Hempel es que mientras en la investigación científica los juicios de carácter experimental que confirman o desconfirman una hipótesis son realizados a menudo bajo cierta vacilación y con un consenso de opinión, difícilmente puede decirse que estos juicios están basados en una teoría explícita que brinde criterios generales de confirmación o desconfirmación. Para él, no parece haber una teoría disponible y satisfactoria que brinde criterios generales de confirmación y desconfirmación (Hempel, 1945a, p. 3.) De esta manera, en "Studies in the Logic of Confirmation", Hempel intenta brindar tales criterios, comenzando con un estado del problema mediante un análisis detallado de las concepciones que se tenían en ese momento de confirmación y desconfirmación, para luego construir definiciones explícitas para estos conceptos y formular algunos principios básicos de lo que para él podría ser llamado la lógica de la confirmación.

[1]La evidencia *relevante* es definida como aquella evidencia que nos lleva a cambiar nuestras creencias sobre la posibilidad de una hipótesis. En otras palabras, la evidencia relevante tiene que ver con cierto *grado* de convicción de nuestras creencias. Una discusión detallada sobre la manera en la que determinamos cuál es el grado evidencial de una evidencia relevante puede encontrarse en Schum (2001, p. 200).

1.1.1. Estado del problema en 1945

Para Hempel, la formulación de una teoría general de la confirmación pudo ser considerada como uno de las necesidades más urgentes de la metodología actual de la ciencia empírica (Hempel, 1945a, p. 3). Es por esto que él repasa brevemente algunos de los estudios que se han realizado al respecto. A continuación recuerdo sus principales comentarios.

En la discusión del método científico, el concepto de evidencia relevante parece ser considerado por ciertos tratamientos "inductivistas" del procedimiento científico, como agrupable en el contexto de una investigación previa a la formulación de cualquier hipótesis. Sin embargo, Hempel afirma que debería ser claro que la relevancia es un concepto relativo. Más exactamente, los datos experimentales se pueden llamar relevantes o irrelevantes solamente con respecto a una hipótesis dada, y es la hipótesis la que determina que clase de datos o evidencia es relevante para ella.

El método de inferencia inductiva es presentado usualmente como procedente de casos específicos a una hipótesis general, de la cual cada uno de los casos especiales es una "instancia" en el sentido que *confirma* la hipótesis general en cuestión, y así constituye evidencia confirmatoria para ella. Para Hempel, un análisis preciso de este concepto es una condición necesaria para una formulación clara de los investigaciones involucradas en el problema de la inducción.

Las "reglas de inducción", si las tuviésemos, nos darían la capacidad de "inferir", a partir de un conjunto de datos, esa hipótesis que trata de mejor forma los datos particulares en el conjunto dado. Hempel menciona que diversos análisis lógicos han aumentado la errónea forma de entender el problema: mientras el proceso de invención por el cual los descubrimientos científicos son hechos como una regla *psicológicamente guiada y estimulada por conocimiento previo de hechos específicos*, sus resultados *no son lógicamente determinados* por ellos. Según Hempel, la manera en la que las hipótesis científicas o las teorías son descubiertas no pueden ser reflejadas en un conjunto de reglas generales de inferencia inductiva.

Sumado a lo anterior, para Hempel lo que determina la firmeza de una hipótesis no es la forma en la que se llega a ella, sino la manera en que es comprobada, es decir, cuando es confrontada con datos observables relevantes. En consecuencia, la búsqueda de reglas de inducción en el sentido original de los cánones de descubrimiento científico tienen que ser reemplazados por la búsqueda de criterios objetivos generales que determinen (a) cuando, y si es posible, y (b) en qué grado[2], se puede

[2]Hempel utiliza el término "grado de confirmación" en vez de "probabilidad", pues este último es usado en la ciencia en un sentido técnico definitivo involucrando referencia a la frecuencia relativa

decir que una hipótesis h es corroborada por un cuerpo de evidencia e[3]. Hempel describe la necesidad de estos dos puntos de la siguiente forma:

(a) dar definiciones precisas de los dos conceptos relacionales no cuantitativos de confirmación y de desconfirmación, es decir, definir el significado de las frases "e confirma h" y "e desconfirma h". (Cuando e no confirma ni desconfirma a h, Hempel dice que e es neutral, o irrelevante, con respecto a h);

(b)(1) establecer un criterio para definir un concepto numérico de "grado de confirmación de h con respecto a e", cuyos valores son números reales; o, en su defecto

(b)(2) establecer un criterio que defina dos conceptos relacionados, "más altamente confirmado que", e "igualmente confirmado con", los cuales hacen posible una comparación no métrica de las hipótesis con respecto al grado de su confirmación.

Un punto interesante para Hempel es que el problema (b) ha recibido mayor atención en la investigación metodológica que el problema (a); para él, varias teorías de las "hipótesis de probabilidad" pueden ser relacionadas con este problema. No obstante, Hempel afirma que es más básico el problema (a), pues no presupone la posibilidad de definir grados de confirmación numéricos o de hipótesis diferentes que se comparan, como el resultado de su confirmación, y también porque nuestras consideraciones indican que cualquier intento de solucionar el problema (b) - a menos que permanezca en el estado de un sistema axiomatizado sin interpretación - es probable que requiera una definición precisa de los conceptos de instancias de confirmación y de desconfirmación de una hipótesis, antes de proceder a definir grados numéricos de confirmación, o establecer estándares no métricos de comparación[4].

de la ocurrencia de un evento dado en una sucesión, y es en ese entonces una pregunta abierta si el grado de confirmación de una hipótesis puede generalmente ser definido como una probabilidad en este sentido estadístico. Volveré a este punto en el tratamiento bayesiano de la evidencia, capítulo 2.

[3]Este acercamiento difiere esencialmente de la concepción inductivista del problema en que no sólo se presupone e, sino también cómo se da h y así busca determinar una cierta relación lógica entre ellos.

[4]Un punto de interés en el tratamiento bayesiano de la confirmación, es la posición de Hempel respecto a las teorías probabilísticas de hipótesis. Él argumenta que tales teorías pueden clasificarse en dos grupos: las teorías "lógicas" interpretan la probabilidad como una relación lógica entre proposiciones, y las teorías estadísticas, que interpretan la probabilidad de una hipótesis en sustancia como el límite de la frecuencia relativa de sus instancias confirmatorias entre todos los casos relevantes. Afirma que ninguna de las teorías del primer grupo brindan una definición general explícita del grado de confirmación de una hipótesis h con respecto a un cuerpo de evidencia e, pues se limitan a la construcción de un sistema de postulados de la probabilidad sin interpretación alguna. Para él, esto hace que estas teorías fallen en brindar una solución completa del problema

Un análisis de la confirmación es fundamental para el estudio del problema central de la epistemología; este problema puede describirse como la elaboración de "estándares de creencia racional". Para Hempel, en la metodología de la ciencia empírica este problema usualmente es relacionado con las reglas que gobiernan la verificación y aceptación, o rechazo de hipótesis empíricas sobre la base de investigación experimental u observacional. Sin embargo, para él no importa cómo es construida la evidencia final empírica y en qué términos es adecuadamente expresada, el problema teórico sigue intacto: caracterizar, en términos generales y precisos, las condiciones bajo las cuales puede decirse que un cuerpo de evidencia confirma o desconfirma una hipótesis de carácter empírico, es decir, el problema (a).

Un problema similar aparece cuando se intenta dar una definición del criterio empiricista y operacionalista para la significatividad empírica de una proposición; estos criterios son formulados por referencia a la verificación empírica de la proposición mediante evidencia experimental. Sin embargo, el concepto de verificación teórica, como fue expresado antes, está relacionado muy cercamente a los conceptos de confirmación y desconfirmación[5].

Vistas algunas de las posiciones de Hempel con respecto a la importancia y lo que debe garantizar una definición de confirmación, en la siguiente sección recordaré el criterio de confirmación de Nicod y revisaré algunas de las objeciones que Hempel presenta al mismo. Así mismo, repasaré algunos de sus aportes para lo que según él, debe ser una definición apropiada de confirmación.

1.1.2. Criterio de confirmación de Nicod

Una afirmación explícita del concepto de confirmación es presentado por Jean Nicod (1930):

"Consideremos la fórmula o ley: A *implica* B. ¿Cómo una proposición particular, o más brevemente, un hecho, puede afectar su probabilidad? Si este hecho consiste de la presencia de B en un caso de A, es favorable para la ley "A *implica* B". Por

(b). Por otro lado, un tratamiento estadístico, podría brindar una definición en términos de los números de instancias confirmativas y desconfirmativas para h que constituyen un cuerpo de evidencia e, con lo cual se tendría una definición explícita del grado de confirmación de una hipótesis. Según él, una condición necesaria para una interpretación adecuada de los grados de confirmación como probabilidades estadísticas es el establecimiento de un criterio preciso de confirmación y desconfirmación; esto es, la solución del problema (a).

[5]Cabe mencionar aquí, como lo hace Hempel, que Carnap en *Testability and Meaning* construyó definiciones de verificción y confimabilidad que evitan referencia al concepto de evidencia confirmatoria y desconfirmatoria, pero no presentó una propuesta para la definición de estos conceptos en su estudio.

el contrario, si éste consiste de la ausencia de B en un caso de A, es desfavorable para esta ley. Es concebible que tenemos aquí los únicos modos directos en los cuales un hecho puede influenciar la probabilidad de una ley ... Así, la influencia total de verdades particulares o hechos sobre la probabilidad de proposiciones universales o leyes operarían por medio de estas dos relaciones elementales las cuales llamaremos *confirmación* e *invalidación*"[6].

Hempel argumenta respecto a este criterio que la aplicabilidad del mismo se restringe a hipótesis de la forma "A implica B". Una hipótesis H de esta clase puede expresarse por medio de una proposición condicional universal de la forma

$$(x)(Px \supset Qx),$$

la cual afirma que, "para cualquier objeto x, si x es un P, entonces x es un Q". Según el criterio de Nicod, esta hipótesis es confirmada por un objeto a, si a es P y Q, mientras que es desconfirmada por a, si a es P pero no es Q. Hempel agrega a la condición de Nicod que un objeto a es neutral o irrelevante con respecto a la hipótesis en cuestión, si no satisface el antecedente. Sumado a esto, cuando Hempel considera el criterio de equivalencia de Nicod, el cual establece que "si algo confirma o refuta una de dos proposiciones equivalentes, entonces también confirma o refuta la otra", Hempel argumenta que el cumplimiento de esta condición hace que la confirmación de una hipótesis sea independiente de la forma en que se formula, y que está condición tiene que ser considerada como una condición necesaria para la formulación de cualquier definición de confirmación (1945a, p. 12).

Hempel entiende la confirmación como una relación lógica entre proposiciones, justamente como lo es la consecuencia lógica. Así, si una proposición S_2 es una consecuencia de una proposición S_1, no depende de si S_1 es verdadera (o que se conozca que es verdadera) o no; análogamente, el criterio de si una proposición dada expresada en términos del vocabulario observacional confirma una cierta hipótesis no puede depender de si las proposiciones en el reporte son verdaderas, o basadas en experiencia actual. Nuestra definición de confirmación debe darnos la capacidad de indicar qué clase de evidencia *podría* confirmar una hipótesis dada *si* estuviera disponible; y claramente la proposición que caracteriza tal evidencia puede pedírsele que la exprese solamente lo que podría ser observado, pero no necesariamente algo que tiene actualmente que ser establecido por observación.

Hempel en su propuesta de una teoría de la confirmación expresa que tal como sucede con una conclusión de una inferencia lógica, la confirmación debe ser (a1)

[6] Jean Nicod, *Foundations of Geometry and Induction* (transl. by P. P. Wiener), London, 1930; p. 219.

válidamente inferida desde (a2) un conjunto de premisas verdaderas, con lo cual para que una hipótesis sea científicamente aceptable, debe ser (b1) formalmente confirmada por (b2) informes fiables sobre los resultados observables. Es claro al afirmar que el problema central de su ensayo es establecer un criterio general para la relación formal de confirmación como se expresa en (b1) (p. 25). Una proposición de la forma de un reporte de observación puede ser aceptado o rechazado en ciencia, ya sea sobre la base de una observación directa, o porque es indirectamente confirmada o desconfirmada por otra proposición que ha sido aceptada previamente. Agrega además que la concepción de la confirmación como una relación entre proposiciones, análoga a la de consecuencia lógica, sugiere otra especificación para el intento de definir confirmación: mientras la consecuencia lógica debe ser concebida como una relación semántica entre proposiciones, debe ser posible para ciertos lenguajes, establecer un criterio de consecuencia lógica en términos puramente sintácticos. Análogamente, la confirmación puede ser concebida como una relación semántica entre un reporte de observación y una hipótesis; pero el paralelo con la relación de consecuencia sugiere que debería ser posible, para ciertos lenguajes, establecer un criterio puramente sintáctico de confirmación[7] (1945a, p. 26).

En "Studies in the Logic of Confirmation II" (1945b, p. 98), Hempel presenta una primera aproximación a una definición de confirmación como una predicción éxitosa.

Definición 1.1.1. Sean h una hipótesis y b un reporte de observación, es decir, una clase de afirmaciones de observación. Decimos que

(a) b confirma a h, si b puede ser dividido en dos subclases b_1, b_2 mutuamente exclusivas, tal que b_2 es no vacía, y cada afirmación de b_2 puede deducirse lógicamente de b_1 en conjunción con h y no solamente de b_1;

(b) b desconfirma a h, si h contradice lógicamente a b;

(c) b es neutral con respecto a h si no confirma ni desconfirma h.

Hempel argumenta que esta definición es demasiado estrecha para cubrir varios casos de la ciencia (Hempel, 1945b, p. 98). Agrega que una definición adecuada de confirmación debe cumplir las siguientes condiciones:

[7]Hempel afirma que la interpretación de confirmación como una relación lógica entre proposiciones no involucra un cambio esencial en el problema central (p. 26). Ilustra este punto con la afirmación que plantea que un objeto a que es un cisne y blanco confirma la hipótesis "(x) (Cisne(x) $\supset$ Blanco(x))" puede expresarse diciendo que el reporte de observación "Cisne (a). Blanco (a)" confirma esa hipótesis. Similarmente, la condición de equivalencia puede ser reformulada como sigue: si un reporte de observación confirma una cierta proposición, entonces también confirma cada proposición que es lógicamente equivalente con esta última.

(i) *Condición implicativa* (Entailment condition): Cualquier afirmación que es implicada por un reporte de observación, es confirmada por él (Hempel, 1945b, p. 103).

(ii) *Condición de consecuencia* (Consequence condition): Si un reporte de observación confirma cada afirmación de una clase K, entonces también confirma cualquier afirmación que sea una consecuencia lógica de K (Hempel, 1945b, p. 103).

(iii) *Condición de consistencia* (Consistency condition): Cada reporte de observación lógicamente consistente es lógicamente compatible con la clase de todas las hipótesis que confirma (Hempel, 1945b, p. 105).

Satisfacer estos requerimientos, los cuales pueden ser considerados como leyes generales de la lógica de la confirmación, es una condición necesaria, más no suficiente para una definición adecuada de confirmación; también debe ser materialmente adecuada. La definición tiene que brindar una aproximación razonable a la concepción de confirmación propia del procedimiento científico y la discusión metodológica (Hempel, 1945b, p. 107).

Hempel busca brindar una definición general de confirmación, definición expresada en términos puramente lógicos para lenguajes científicos de un carácter lógico relativamente simple. Su criterio de confirmación (Hempel, 1945b, p. 109) se presenta en la siguiente definición.

Definición 1.1.2.

(1) Un reporte de observación b confirma directamente una hipótesis h, si b implica h para la clase de objetos que son mencionados en b.

(1') Un reporte de observación b confirma una hipótesis h, si h es implicada por una clase de afirmaciones, cada una de las cuales es confirmada directamente por b.

(3) Un reporte de observación desconfirma una hipótesis h, si confirma la negación de h.

(4) Un reporte de observación b es neutral con respecto a una hipótesis h, si no confirma ni desconfirma h.

La Definición 1.1.2 satisface las condiciones (i), (ii) y (iii) expresadas anteriormente. Una de las ventajas que tiene la definición de confirmación propuesta por Hempel, es que no está restringida a hipótesis condicionales universales, como lo es el criterio de Nicod, ni a hipótesis universales en general. Ella aplica a cualquier hipótesis que pueda ser expresada por medio de relaciones y términos del vocabulario observacional del lenguaje, nombres individuales, conectivos lógicos y cualquier número de cuantificadores existenciales (Hempel, 1945b, p. 111).

Uno de los principales argumentos para abandonar la definición de confirmación propuesta por Hempel, proviene de una de las paradojas de la evidencia conocida como la paradoja de los cuervos.

1.1.3. La paradoja de los cuervos

En esta sección describo una de las paradojas de la evidencia conocida como la paradoja de los cuervos, la cual fue propuesta por Hempel en "Studies in the Logic of Confirmation" (1945a, 1945b). Esta paradoja será particularmente importante a la hora de evaluar el papel de las teorías probabilísticas de la confirmación en una teoría general de la evidencia (capítulo 2).

Consideremos la siguiente notación:

- (NC) Condición de Nicod: Para cualquier objeto a, y cualesquiera predicados F y G, la proposición que establece que a es F y es G, confirma la proposición "cada F es G". En términos formales, $(Fa \ \wedge \ Ga)$ confirma $(\forall x)(Fx \supset Gx)$, para cualquier término individual "a", y cualesquiera predicados "F" y "G".
- (EC) Condición de equivalencia: Para cualesquiera proposiciones H_1, H_2, y E, si E confirma H_1, y H_1 es lógicamente equivalente a H_2, entonces E confirma H_2.

A partir de estas dos premisas, el siguiente razonamiento nos genera la paradoja de los cuervos (B denota negro, y R denota cuervo).

1. Por (NC), $(\sim Ba \wedge \ \sim Ra)$ confirma $(\forall x)(\sim Bx \supset \sim Rx)$.
2. Por lógica clásica, $(\forall x)(\sim Bx \supset\sim Rx)$ es equivalente a $(\forall x)(Rx \supset Bx)$.
3. Por 1, 2 y (EC), obtenemos que $(\sim Ba \wedge \sim Ra)$ confirma $(\forall x)(Rx \supset Bx)$.

De esta manera,

- (PC) Conclusión paradójica: la proposición "a no es negro ni es cuervo", es decir, $(\sim Ba \wedge \sim Ra)$, confirma la proposición "cada cuervo es negro"$(\forall x)(Rx \supset Bx)$.

La paradoja afirma entonces que la observación de objetos que no son negros tales como zapatos cafés, una cobija roja, o una pared blanca, es evidencia para que todos los cuervos son negros. De esta manera, una de las objeciones que se presentaron al tratamiento de la confirmación de Hempel, es su formulación que las hipótesis son confirmadas por instancias: "Todos los cuervos son regros" es confirmada por cada objeto que encontremos y que observemos que "es un cuervo y es negro". Pero esta "condición de satisfacción" no parece muy relevante para la confirmación de hipótesis en una ciencia moderna, ya que por ejemplo no hay "instancias" observables de las leyes de Maxwell o las leyes de Einstein. Esta fue una de las razones para que los filósofos de la ciencia prefirieran el tratamiento hipotético deductivo de la confirmación, según el cual las teorías son confirmadas si de ellas deducimos (junto con proposiciones verdaderas de condiciones iniciales) reportes verdaderos u observaciones.

Los primeros análisis de esta paradoja fueron presentados, precisamente por Hempel (1945), Goodman (1954) y Quine (1969). Tanto Hempel como Goodman, no consideraron que hubiese algo paradójico en esta situación, sino que más bien hay algo equivocado en las intuiciones que lo pueden llevar a uno a considerarlo paradójico. Más precisamente, Hempel (y Goodman de manera similar) mencionó que no debemos confundir (PC), con otra conclusión distinta (PC*) que (intuitivamente) es falsa, y que (intuitivamente) no se sigue de (NC) y (EC) (Maher, 1999). Esta conclusión (PC*) es:

- Si uno observa que un objeto a - *del cual ya se sabe que no es un cuervo* - no es negro (así que a no es negro ni es cuervo), entonces *esta* observación confirma que todos los cuervos son negros.

Si bien la diferencia entre (PC) y (PC*) puede no ser tan clara en este momento, en la sección 2.5 veré su diferencia utilizando el lenguaje bayesiano. Por el momento, comentaré la solución a la paradoja propuesta por Quine .

Quine ofreció un análisis de la paradoja mediante un razonamiento diferente del de Hempel y Goodman. A diferencia de ellos dos, Quine rechazó (PC), y dado que él aceptaba la lógica clásica, no tenía más remedio que rechazar 1 ó 2; sin embargo, dada su aceptación de la premisa 2, necesariamente tuvo que rechazar la premisa 1, es decir, eliminar el criterio de Nicod (NC). Según Quine, $(\sim Ba \wedge \sim Ra)$ no confirma $(\forall x)(\sim Bx \supset \sim Rx)$, y además $\sim Ra$ no confirma $(\forall x)(\sim Rx)$. Para Quine, el problema en la confirmación en estos casos se debe a que los predicados "no negro" y "no cuervo" no son clases naturales, es decir, los objetos que caen bajo $\sim B$ y $\sim R$ no son lo suficientemente similares como para justificar la confirmación de leyes universales que involucren a $\sim B$ o $\sim R$. Así, para Quine, el origen del problema, es precisamente el criterio de Nicod.

Quine propone como solución a la paradoja una versión *restringida* de (NC) que sólo aplique a clases naturales; esta es:

- (QNC): Para cualquier objeto a, y cualesquiera clases naturales F y G, la proposición "a es F y es G" confirma la proposición que cada F es G. Formalmente, $(Fa \wedge Ga)$ confirma $(\forall x)(Fx \supset Gx)$, para cualquier término individual a, siempre que los predicados F y G se refieran a clases naturales.

En la sección 2.5 presentaré la solución de esta paradoja utilizando la teoría bayesiana de la evidencia[8].

1.2. Teoría de la confirmación de Carnap

Durante varias décadas, la obra de Carnap "Logical Foundations of Probability" (1950) estableció los estándares de una teoría de la confirmación. Tal análisis hizo la confirmación una relación objetiva. Sin embargo, algunas dificultades con el programa de Carnap dieron paso al siguiente desarrollo del análisis de relevancia bayesiano que consideró la confirmación como algo subjetivo. Esto muestra la importancia de repasar los argumentos carnapianos.

Tal como dije al principio del capítulo, el concepto de evidencia en la filosofía de la ciencia tiene sus orígenes a mediados del siglo XX con el tratamiento inductivista propuesto por Carnap (1950, 1952). Su propósito inicial fue caracterizar de manera probabilística el grado de apoyo que las premisas brindan a la tesis de un argumento por medio de la estructura sintáctica de los enunciados.

Carnap estipula que hay dos conceptos distintos necesarios para formular una teoría completa de la probabilidad, a saber: el grado de confirmación de una proposición relativa a una evidencia, y la estimación de la frecuencia relativa de un dato a partir de una evidencia dada. Según él, de estos dos, el grado de confirmación es el más importante, razón por la cual basa su teoría en este concepto. Su objetivo aquí es encontrar una expresión que permita medir tal grado de confirmación. En dicha búsqueda Carnap muestra que nuestras concepciones sobre la probabilidad no nos llevan a tener algún tipo de fórmula; más bien, todas estas concepciones nos brindan un espectro de posibilidades para medir el grado de confirmación. Es de resaltar que de este margen de posibilidades, Carnap toma un conjunto que incluya todas las propuestas que han sido formuladas por los teóricos, con lo cual propone ciertas pruebas estadísticas para decidir cuál de ellas, en determinadas condiciones, es más satisfactoria a la hora de determinar el grado de confirmación, por ejemplo, mediante estimaciones de frecuencias relativas.

[8] Actualmente, hay al menos cuatro soluciones más de esta paradoja, incluyendo la bayesiana. Estas respuestas pueden encontrarse en *Subjective Probability, Natural Predicates and Hempel's Ravens* (Gaifman, 1979).

1.2.1. Funciones de probabilidad

Carnap mostró cómo definir para ciertos lenguajes L, varios tipos de grados de funciones de confirmación c. Él definió una función particular c^* la cual propuso como una explicación apropiada de la probabilidad (probabilidad inductiva, considerada como una probabilidad opuesta a la probabilidad frecuentista). También consideró otra función particular $\tilde{c}$. En la primera parte revisa y define varias c-funciones específicas, incluyendo c^* y $\tilde{c}$, estudiando las relaciones entre ellas. Cada c-función específica determina lo que él llama un *método inductivo de confirmación*, esto es, un método para determinar para alguna (tal vez todas) hipótesis h y proposiciones de evidencia e de un lenguaje L, un valor numérico $c(h, e)$[9].

Como menciona Burks (1953), el principal resultado en la primera parte es la manera de ordenar una infinidad[10] de posibles métodos inductivos diferentes en un continuo, el cual es un resultado de gran importancia para la lógica inductiva. El principio organizador del arreglo es el papel jugado por la evidencia empírica en la inducción por enumeración simple. Consideremos una propiedad empírica M expresable en L y sea e_M la proposición que de s individuos examinados, s_M tienen la propiedad M, y sea h_M la hipótesis que un individuo dado que no está entre los s observados, tiene M. Surge la pregunta acerca de la probabilidad de h_M relativa a e_M, esto es, saber cuál es el valor de $c(h_M, e_M)$.

La situación puede describirse de la siguiente forma: para cada uno de los métodos, el valor $c(h_M, e_M)$ depende de dos factores: la frecuencia relativa $\frac{s_M}{s}$ de las instancias observadas y la *amplitud relativa* $\frac{\omega}{\kappa}$ de la propiedad M ($\frac{\omega}{\kappa}$ varía desde cero para una propiedad contradictoria, pasando por un $\frac{1}{2}$ para una propiedad atómica, y hasta uno para una propiedad lógicamente necesaria) - véase la siguiente página -. En todos estos métodos $c(h_M, e_M) = \frac{\omega}{\kappa}$ cuando $s = s_M = 0$ (es decir, antes que cualquier observación haya sido tomada) y tiende hacia $\frac{s_M}{s}$ entre más observaciones sean tomadas, esto es, a medida que s aumenta. La forma de determinar qué tan rápido tiende $c(h_M, e_M)$ a $\frac{s_M}{s}$ depende de un parámetro λ. Según Carnap, para L dado,

$$c(h_M, e_M) = \frac{s_M}{s}\frac{s}{s+\lambda} + \frac{\omega}{\kappa}\frac{\lambda}{s+\lambda}$$

[9]Debe destacarse que en la primera parte Carnap también estudia los métodos inductivos para estimar la frecuencia relativa de una propiedad en una clase sobre la base de una proposición de evidencia e. Carnap restringe su atención a lenguajes adecuados para describir un universo que consiste de un número finito de individuos (cosas, eventos, posiciones en el espacio-tiempo), cada uno ejemplificando a lo más un número finito de propiedades monádicas.

[10]Carnap construye una clase infinita de funciones de probabilidad. La elección de una en particular se basa en argumentos no teóricos, razón por la cual dicha elección de la función puede variar de un sujeto a otro; de aquí que esta versión se asemeje a una interpretación subjetiva de la probabilidad.

donde λ es cualquier número real positivo. Si, por ejemplo tomamos $\lambda = \kappa$, obtenemos la función c^* ya que

$$c^*(h_M, e_M) = \frac{s_M + \omega}{s + \kappa}.$$

Los dos métodos extremos del continuo resultan de permitir que uno de los factores $\frac{\omega}{\kappa}$ y $\frac{s_M}{s}$ domine completamente. Si dejamos que λ tienda hacia infinito, entonces en el límite $c(h_M, e_M) = \frac{\omega}{\kappa}$ sin importar cuántos individuos hayan sido observados, y por tanto tenemos un método inductivo basado en la función $\tilde{c}$. Si $\lambda = 0$ obtenemos $c(h_M, e_M) = \frac{s_M}{s}$, la llamada regla correcta (straight rule) de confirmación por enumeración simple, involucra una extrapolación de la frecuencia observada[11].

Carnap llama la razón $\frac{s_M}{s}$ un *factor empírico*, dado que su valor es determinado por observación empírica, mientras que a $\frac{\omega}{\kappa}$ lo denomina un *factor lógico* (1950, p. 24) dado que su valor puede ser determinado por un análisis lógico de la definición de "M" y la especificación del lenguaje L. Es importante notar sin embargo que el *requerimiento de completitud* de Carnap que ningún lenguaje L debe ser usado para propósitos de la lógica inductiva en conexión con cualquier universo U a menos que L sea suficientemente rico para expresar todos los atributos cualitativos exhibido por los individuos de U. Ahora, κ es 2^{π}, donde π es el número de predicados atómicos (monádicos) en L, así que *usando* un método inductivo, debemos decidir cómo varios predicados atómicos son ejemplificables en nuestro universo actual, y esto apenas parece ser un asunto lógico (1950, pp. 74).

Esta última consideración es parte de un problema: ¿cómo puede decidirse cuál de los infinitos métodos inductivos debería usarse? Carnap compara un método inductivo con una herramienta y compara la decisión de utilizar un método a la elección de una herramienta (pp. 53-55). De esta manera, él en la segunda parte de "The Continuum of Inductive Methods" (1952) desarrolla una técnica para medir el éxito de un método inductivo dado relativo a un estado de descripción específico k. Brevemente, éste consiste en lo siguiente: Consideremos una propiedad particular M. Sobre la base de un método inductivo y una muestra de tamaño s, podemos formar una estimación de probabilidad de la frecuencia relativa de M en k. Este estimado puede ser comparado con la frecuencia actual observada de M en k. La comparación es entonces generalizada para cubrir todas las propiedades de una cierta clase y todas las muestras de tamaño s. El resultado final es que para una descripción de estado k, hay un único método inductivo del continuo, el cual es el método más éxitoso en k. Por ejemplo, si k tiene el grado *máximo* de orden o uniformidad (es decir, es completamente homogéneo) un método basado en la regla correcta (straight rule) es

[11] Carnap resalta que esta regla no es aplicable cuando $s = 0$, además de conducir a resultados diversos para muestras pequeñas; por ejemplo, el caso de una instancia confirmativa y de instancias disconfirmativas arrojan una probabilidad de uno.

el de más éxitos, mientras que si k tiene el grado *mínimo* de orden o uniformidad, un método basado en $\tilde{c}$ es óptimo.

El problema de medir el éxito de un método inductivo relativo a un estado de descripción específico es difícil, y Carnap lo resuelve perfectamente, pero como él menciona es puramente lógico en naturaleza y no incluye el problema de cómo determinar cuál método es más exitoso en nuestro mundo actual. Él prueba que si sabemos que el universo no es completamente homogéneo (esto es, que no todos los individuos en ella son completamente iguales) podemos escoger un método inductivo de su continuo del cual es cierto que es más exitoso en el universo total que el método de la regla correcta.

1.2.2. Definiciones probabilísticas de la evidencia

Carnap en "Logical Foundations of Probability" (1950) distingue tres clases de proposiciones que involucran evidencia. Estas proposiciones son las siguientes:

(1) e es evidencia para h (o e confirma h), la cual Carnap denomina *cualitativa*;

(2) e es mayor evidencia para h que para h';

(3) e es mayor evidencia para h de lo que es e'.

A estos dos últimos tipos de proposiciones Carnap los llama *comparativos*. Por último, hay proposiciones de la forma

(4) el grado de confirmación que e confiere a h es r (r un número real)

casos que Carnap denomina *cuantitativos*. Para él, las proposiciones de evidencia cualitativa de la forma (1) se comprenden mejor al involucrar algunas cuantitativas de la forma (4), mientras que la última es mejor entendida en términos probabilísticos. Para Carnap, una proposición del estilo (4) significa lo mismo que

(5) la probabilidad de h, dada e, es r.

De esta manera, Carnap considera que una de sus principales tareas es explicar el concepto de probabilidad que se necesita para proposiciones como (5).

Carnap brinda dos definiciones probabilísticas diferentes. La primera, establece como criterio un aumento en la probabilidad. Más exactamente, si con $p(h \mid e)$ denotamos la probabilidad de h dada la evidencia e, tenemos

Definición 1.2.1. (Primera definición probabilística de evidencia). e es evidencia para h si, y sólo si, $p(h \mid e) > p(h)$ (Carnap, 1950, p. 348).

Esta definición se denomina "relevancia positiva", pues se dice en ella que e es relevante para h si e cambia la probabilidad de h, y es positiva dado que la incrementa.

La segunda definición probabilística de la evidencia que brinda Carnap (1950) afirma que e es evidencia para h si, y sólo si, la probabilidad de h dada e, es alta. Preciso esta definición a continuación.

Definición 1.2.2. (Segunda definición probabilística de evidencia). e es evidencia para h si, y sólo si, $p(h \mid e) > k$, donde k representa algún umbral de alta probabilidad (Carnap, 1950, p. 348).

Carnap llama k un "número fijo" pero no asigna un valor específico como tal. Siguiendo a Achinstein (2001, p. 46), parece que Carnap tiene en mente un número fijo único para todos los contextos de evaluación de evidencia en vez de un número que pueda variar de un contexto de evaluación a otro[12].

Con respecto a las dos definiciones anteriores, surge la pregunta acerca de cuál de ellas usar en la ciencia. Al parecer, afirma Achinstein (2001), los probabilistas prefieren la primera; sin embargo, Carnap afirma que ambos conceptos de evidencia son usados en la ciencia y que el segundo, expresa un sentido de evidencia asociado con la idea de algo que hace a una hipótesis "firme"; la primera con algo que la hace "más firme". Estas ideas de "firmeza" son discutidas por Achinstein (2001, cap. 4).

Antes de concluir esta sección, veré cómo deben comprenderse las proposiciones de evidencia comparativas

(2) e es una evidencia más fuerta para h que para h', y

(3) e es una evidencia más fuerte para h de lo que es e'.

Las definiciones probabilistas simples para estas nociones de evidencia están basadas en el concepto de relevancia positiva. Si para que e sea evidencia para h se necesita que e incremente la probabilidad de h, entonces para que e sea una evidencia más fuerta para h que para h', e debe aumentar la probabilidad de h más de lo que incrementa la probabilidad de h', esto es,

(2) e es una evidencia más fuerte para h, que para h' si, y sólo si, $p(h \mid e) - p(h) > p(h' \mid e) - p(h')$.

[12] Achinstein (2001, p.47) por ejemplo, toma por simplicidad el valor de $\frac{1}{2}$ para k y argumenta que este valor es una elección razonable para todos los contextos de investigación. De esta manera, para él la segunda definición probabilística de la evidencia propuesta por Carnap toma el siguiente aspecto: e es evidencia para h si, y sólo si, $p(h \mid e) > \frac{1}{2}$, o lo que es lo mismo, si, y sólo si, h es más probable que su negación dada e.

Así mismo, para que e sea una evidencia más fuerte para h de lo que es e', e debe incrementar la probabilidad de h mas que lo que e' lo hace, es decir,

(3) e es una evidencia más fuerte para h de lo que es e' si, y sólo si, $p(h \mid e) - p(h) > p(h \mid e') - p(h)$, o lo que es lo mismo, si, y sólo si, $p(h \mid e) > p(h \mid e')$.

Cabe anotar que las definiciones comparativas también pueden considerarse con la segunda definición de evidencia (cualitativa); este hecho fue notado por Carnap (1950). Si para que e sea evidencia para h se necesita que la probabilidad sea “alta”, entonces para que e sea una evidencia más fuerte para h que para h' se necesita que e haga la probabilidad de h más alta que la de h', esto es,

(2) e es una evidencia más fuerte para h que para h' si, y sólo si, $p(h \mid e) > p(h' \mid e)$

Mediante un análisis similar, tenemos

(3) e es una evidencia más fuerte para h de lo que es e' si, y sólo si, $p(h \mid e) > p(h \mid e')$

La caracterización de los conceptos de evidencia suministrada por la relevancia positiva y la alta probabilidad propuestos por Carnap, puede describirse de la siguiente forma:

(i) *Objetividad*. Si e es evidencia para h no depende de creencias o lo que se conozca sobre e, h u otro aspecto.

(ii) *Un carácter a priori*. Desde el punto de vista de Carnap, los valores númericos de $p(h \mid e)$ y $p(h)$ son determinados en su totalidad por reglas del lenguaje en las cuales h y e son expresados. Estos valores no dependen de hechos empíricos detectables sobre el mundo. Por tanto, si $p(h \mid e) > p(h)$ y $p(h \mid e) > \frac{1}{2}$, y por tanto si e es evidencia para h, son determinados a priori por reglas del lenguaje y las matemáticas.

(iii) *Relación para creer*. Bajo la teoría de Carnap, las proposiciones de probabilidad, aun cuando están definidas por referencia a descripciones de estados, se les puede dar una interpretación epistémica en términos de lo que uno está justificado en creer. Supóngase que $p(h \mid e) = r$ es verdad para algún h y algún e. Afirma Carnap “Si e expresa el conocimiento total de una persona X en el tiempo t, esto es, su conocimiento total de los resultados de sus observaciones, entonces X es justificado en ese tiempo para creer en h con grado r” (Carnap, 1950, p. 211).

De esta manera para Carnap, una proposición de probabilidad verdadera de la forma $p(h \mid e) = r$ justifica no una creencia en h, sino un *grado de creencia* en h (igual a r); y así lo hace cualquier persona para la cual e representa conocimiento observacional total disponible. Las dos definiciones brindan relaciones diferentes.

1. *Relevancia positiva.* Si e es evidencia para h, dado b, entonces alguien en una situación epistémica en la cual el conocimiento total sea e & b tiene el derecho de creer en h con un alto grado, con respecto a alguien en una situación epistémica en la cual su conocimiento total no incluya a e (Achinstein, 2001, p. 51).

2. *Alta probabilidad.* Si e es evidencia para h, entonces cualquier persona en una situación epistémica en la cual su conocimiento total es representado por e, tiene el derecho de creer en h con un alto grado, en vez de creer no h (Achinstein, 2001, p. 52).

Es importante anotar que en la teoría lógica de la probabilidad, puede presentarse el caso $p(h \mid e) > p(h)$, y que $p(h \mid e) > k$, aun cuando e y h no no son verdaderas. Más precisamente, en las dos definiciones de probabilidad brindadas por Carnap, e puede ser evidencia para h aun si e y h falsas.

Como afirma Maher (1996, p. 150), el análisis de confirmación de Carnap asume que hay una única función de probabilidad c tal que $c(h \mid e)$ representa la probabilidad que es racional dar a h cuando la evidencia total es e. En pocas palabras, podemos decir que él brinda dos análisis de confirmación (Carnap, 1950, p. 463). Uno es para la noción relativa de confirmación: se dice que e confirma h relativo a B si, y sólo si, $c(h \mid Be) > c(h \mid B)$; el otro, es el concepto absoluto: se dice que e confirma h si, y sólo si, $c(h \mid e) > c(h \mid T)$, donde T es una tautología. Agrega que este análisis de Carnap puede ser correcto sólo si realmente hay una única función de probabilidad c con las propiedades que Carnap formula. Sin embargo, los argumentos que se han dado para establecer la existencia de esta función no han sido convincentes. Los intentos usuales para demostrar su existencia han sido una variación de la idea tradicional que, en la ausencia de cualquier evidencia, una persona racional daría a todas las posibilidades la misma probabilidad. Un problema con esto es que esas posibilidades dependen de cada individuo, lo cual lleva a tener diferentes funciones de probabilidad, y dado que no hay un método para identificar la forma "correcta" de unificar y lograr un consenso sobre las posibilidades que han sido propuestas, esta dificultad llevó a que Carnap retirara su afirmación que hay una única función de probabilidad correcta c (Carnap, 1971, p. 27).

El escepticismo sobre la existencia de la función c llevó al desarrollo del análisis bayesiano subjetivo de la confirmación. Este análisis ha dominado la teoría de la confirmación en los tiempos posteriores a Carnap, ya que en ellos no se requiere tal función c (en la sección 2.1 presentaré algunas de sus principales formulaciones).

1.3. Teoría de la confirmación de Glymour

La propuesta de Glymour en *Theory and Evidence* (1980) retoma la idea básica de Hempel que las hipótesis son confirmadas por instancias. Uno de los primeros propósitos en su trabajo fue presentar sus objeciones al tratamiento hipotético-deductivo de la teoría de la confirmación. Su primera objeción consiste en que las observaciones pueden confirmar o desconfirmar partes de una teoría mejor que otras, mientras que el tratamiento hipotético-deductivo sólo permite la confirmación o desconfirmación de la teoría en su totalidad. Su segunda objeción es que dada la condición de consecuencia plausible (que si e confirma h, entonces e confirma cualquier consecuencia lógica de h), y la condición de consecuencia recíproca que se sigue de la idea principal del tratamiento (que si e confirma h, confirma cualquier proposición de la cual h es una consecuencia lógica), obtenemos el bien conocido y absurdo resultado que cualquier cosa confirma cualquier otra. En general, el problema con el tratamiento hipotético-deductivo según Glymour, es que permite que la evidencia confirme cualquier teoría con hipótesis irrelevantes o suposiciones agregadas a ella, aun cuando estas no tengan alguna relación con la evidencia dada.

Tal como afirma Morton (1981, p. 498), "el punto central de Glymour se apoya en la observación que en la lógica antigua y los tratamientos empíricos de la confirmación, dos afirmaciones diferentes son tratadas como una". La primera es la formulación de una relación directa entre aspectos particulares de evidencia y afirmaciones particulares teóricas, mientras que la segunda es la idea que hay relaciones de confirmación formulables en términos de las cuales se pueden explicar las conexiones entre evidencia y teoría. Glymour afirma que la primera de estas posiciones es falsa y la segunda verdadera, como es su propósito mostrar.

La línea argumentativa de Glymour en una teoría de la confirmación puede esbozarse de la siguiente manera: si uno tiene una relación de confirmación R entre evidencia y teoría, uno siempre puede extenderla a una relación más amplia R' entre evidencia, teoría de fondo, y teoría confirmada, estipulando que la evidencia e_1 y la teoría de fondo b sean R' para la hipótesis h cuando e_1 y b conjuntamente "apoyen" algún e_2 que lleva R a h. Glymour está más interesado en el caso en el que R es alguna relación austera de confirmación hempeliana, y "apoya" significa simplemente "implica deductivamente". Según Morton,

"Entonces el punto es que permitir que los hechos obvios de la práctica científica se involucren en cada situación de confirmación tanto de teorías básicas como de otras más complejas, no impide que se presente una estrecha relación entre la confirmación de proposiciones generales teóricas y sus instancias en el corazón del tratamiento del apoyo de hipótesis. Una pieza de evidencia observada junto con una pieza de la teoría de fondo pueden implicar una instancia de una hipótesis, y así confirmarla. Esto es lo que él llama estrategia "bootstrap". Argumenta que la necesitamos para explicar otro hecho evidente sobre la práctica científica, que la evidencia generalmente es considerada como relevante para hipótesis particulares en vez de la teoría completa" (Morton, 1981, p. 498).

Según lo anterior, para Glymour una teoría es confirmada en la medida en que sus hipótesis componentes son confirmadas, y si no encontramos instancias de una hipótesis, esa parte de la teoría no es confirmada, mientras que una hipótesis es *mejor* confirmada en la medida en que se asuman menos hipótesis para probarla; y en la medida en que haya diferentes maneras de calcular (a través de diferentes hipótesis de la teoría) las cantidades teóricas que aparecen en la hipótesis que está siendo probada, se producirán los mismos resultados que la confirman. Sin embargo, si se obtienen resultados diferentes, entonces hay algo mal con la teoría. Debido a que usamos una hipótesis para probar otra, Glymour llama a su método de probar el método "bootstrap"[13] .

Glymour mostró su método "bootstrap" en el trabajo de la confirmación de la teoría de la gravitación de Newton, en la confirmación de la teoría atómica de la química, la confirmación de la relatividad general, y sorprendentemente, en un argumento de Freud. Sin embargo, dado que hay un papel crucial de los modelos o las analogías en la inferencia científica, se presentan algunas limitaciones en su teoría. Por ejemplo, las teorías que postulan entidades similares en propiedades y comportamiento a aquellas con las cuales somos familiares, generalmente son preferidas sobre otras teorías que postulan entidades distintas, aspecto que no es cubierto por la propuesta de Glymour (Swinburne, 1981, p. 316). Además de estas limitaciones, el "bootstrap" también ha sido sometido a diversas críticas cuando se desean probar *hipótesis teóricas*, es decir, hipótesis cuyo vocabulario trasciende el de la evidencia disponible[14] (Glymour, 1980, p. 10).

[13]Llama la atención en este punto que Glymour considere que una hipótesis es *mejor* confirmada, pues esto pareciera ser un indicativo que puede cuantificarse qué tan *mejor* se confrima. Precisamente, Douven y Meijs (2006) en su trabajo "Bootstrap Confirmation Made Quantitative" extienden la teoría de Glymour a una teoría cuantitativa de la confirmación.

[14]Más precisamente, este tipo de pruebas son un problema para Glymour, quien formuló la siguiente pregunta: "¿cómo una evidencia formulada en un idioma confirma una hipótesis que se encuentra en un idioma superior al de la evidencia?" (1980, p. 10). Glymour resalta que la prueba de estas hipótesis es un problema, ya que no pueden ser confirmadas por sus casos, pues son de carácter teórico, y por lo tanto no pueden constituir la evidencia. Con el fin de dar solución a este problema, él considera cuatro métodos, los cuales son: eliminación de la teoría, el método deductivo, el método "bootstrap", y los tratamientos probabilísticos (en particular, el bayesiano). Para su primera, segunda y cuarta, él presenta varios argumentos que intentan mostrar el por qué no debe adoptarsen, mientras que propone la tercera como una solución al problema.

En este capítulo vimos los primeros acercamientos hacia una teoría de la confirmación. Dentro de las principales dificultades de estas teorías, pudimos encontrar el problema de Hempel para diferenciar proposiciones como (PC) y (PC*) - al recurrir a la "intuición"-, la subjetividad de Carnap en la elección de una función de probabilidad, y la preferencia en la elección de teorías en el caso de Glymour (párrafo inmediatamente anterior), dificultades que nos muestran la necesidad de contar con otras teorías de la confirmación, donde estos problemas se solucionen satisfactoriamente. Con este propósito, en el siguiente capítulo abordaré la teoría bayesiana de la evidencia, la cual tendrá definiciones probabilísticas similares a las propuestas por Carnap, pero además tendrá un cuerpo axiomático que le permitirá dar solución a los problemas mencionados, y ser una de las principales teorías de la evidencia en la actualidad.

Capítulo 2

Teorías bayesianas de la evidencia

En este capítulo discutiré las ventajas y debilidades de las teorías pascalianas de la evidencia. La teoría que estudiaré será la teoría bayesiana, una de las más aceptadas en el ámbito teórico y aplicado.

2.1. Introducción

La teoría bayesiana de la probabilidad se deriva del trabajo *Memoir* del matemático y sacerdote Thomas Bayes, trabajo publicado por su amigo Richard Price en 1763. Los principios del trabajo de Bayes han tenido gran influencia en el interés acerca de las probabilidades *a priori* de las teorías científicas.

El realizar una valoración probabilística de las teorías introduce un rango de grados de certeza en las teorías científicas; este rango se ha entendido como un margen de probabilidades. Al respecto, el matemático y físico Henri Poincaré se preguntó qué derecho tenía como científico de enunciar una teoría como la que describe las leyes de Newton, cuando solamente puede ser casualidad que están de acuerdo con la evidencia disponible. ¿Cómo podemos saber que las leyes dejarán de cumplirse por completo la próxima vez que se pongan a prueba? "A esta objeción, la única respuesta que podemos dar es: es muy improbable". Poincaré creía que "el físico es a menudo como un jugador, en el sentido que reconoce que sube sus posibilidades; cada vez que lleva a cabo un proceso inductivo, de forma inconsciente lleva a cabo un cálculo de probabilidades".

Un argumento en la misma línea que el de Poincaré, es el del filósofo y economista W. S. Jevons:

"Nuestras inferencias ... siempre conservan más o menos un carácter hipotético, y están abiertas a la duda. Sólo en la proporción en que nuestra inducción se aproxime al carácter de inducción perfecta, nos aproximaremos a la certeza. La cantidad de incertidumbre es la probabilidad que los objetos no analizados pueden existir y falsificar nuestras inferencias; la cantidad de probabilidad corresponde a la cantidad de información procedente de nuestro examen, y la teoría de la probabilidad será necesaria para impedirnos sobre estimar o subestimar el conocimiento que poseemos" (Jevons, 1874, p. 263).

Otros científicos han expresado la misma idea de Poincaré y Jevons sobre que las teorías tienen que ser juzgadas en términos de probabilidades. Einstein afirmó por ejemplo que "Yo sabía que la constancia de la velocidad de la luz era algo completamente independiente de la relatividad postulada, así que ponderé la que era más probable". Comentarios de otros físicos que permiten apreciar su tendencia probabilística pueden encontrarse en Howson y Urbach (2006, p. 7).

La posición bayesiana sostiene que una persona racional tiene grados de certidumbre que son representables por una función de probabilidad; esto es conocido como *coherencia*. Los bayesianos establecen principios sobre la *coherencia* de tal forma que pueda describirse cómo cambian en el tiempo los grados de creencia de una persona en una proposición P. Dicho principio es conocido como *condicionalización*, principio que establece que si una persona con función de probabilidad p aprende e y nada más, y además también cree que P, entonces la función de probabilidad posterior de la persona debe ser el resultado de condicionar p sobre e, esto es, $p(P \mid e)$. Es importante agregar que los bayesianos subjetivos no incluyen algún otro tipo de limitación para los grados racionales de certeza; sin embargo, esto no quiere decir que ellos nieguen la existencia de otras condiciones más fuertes sobre los grados de creencia, sino que la teoría de la confirmación puede asumirse sin otro tipo de condiciones. Sumado a esto, es bueno aclarar que dado el auge del bayesianismo subjetivo, como línea dominante del bayesianismo hoy en día, el término "bayesianismo" significa comúnmente "bayesianismo subjetivo".

2.2. Interpretaciones de la probabilidad

Desde las primeras páginas de este trabajo he estado hablando de probabilidad, pero nunca he dicho lo que este término significa o cómo debemos interpretarlo. Si adoptamos un punto de vista formal no habría necesidad de hacerlo, pues simplemente podríamos demostrar afirmaciones acerca de las relaciones entre diversas probabilidades sin saber lo que es cada una de ellas, tal como sucede con ciertos tratamientos matemáticos en los que solamente se deducen resultados de conceptos que no sabemos lo que son (consideremos el caso de las líneas, los puntos y la geometría alrededor de estos conceptos). Siguiendo la afirmación de Bertrand Russell "Las matemáticas pueden ser definidas como el tema en el que nunca sabemos lo que estamos hablando, ni si lo que estamos diciendo es verdad" (1901, p. 83).

Sin embargo, dado que muy seguramente durante nuestra formación secundaria, universitaria, o al escuchar las noticias sobre las preferencias electorales de una ciudad, así como en los indicadores de las acciones en la bolsa - su tendencia a la baja o a la alta - o simplemente nuestra opinión sobre si hay lluvia o no en un día determinado, hemos escuchado y adoptado algunas interpretaciones de la probabilidad, es necesario esclarecer la concepción que tenemos del término "probabilidad". Es por esto que si estamos interesados a lo largo de este trabajo en hacer uso de la noción de probabilidad y estudiar su papel en la comprensión de la inferencia bajo incertidumbre, debemos aclarar el sentido que le daremos al término con el fin de evitar ambiguedades como las expresadas arriba. Si estamos con la esperanza de creer lo que es probable, tenemos que saber lo que es probable; no hay esperanza de asignar valores a las probabilidades a menos que tengamos una idea de lo que significa el término "probabilidad". Así mismo, estaremos en posición de justificar nuestros estados epistémicos o nuestras decisiones. No obstante, hay que reconocer que si bien es un hecho conocido que el concepto de probabilidad es central en la ciencia y está presente desde hace siglos hasta nuestro tiempo en teorías como la mecánica cuántica, pasando por la investigación de operaciones, la genética y algunas teorías sociales, debemos mostrar que la probabilidad no resuelve todos los problemas científicos.

Con el fin de tener las herramientas conceptuales que permiten realizar lo anterior, a continuación distinguiré, tal como se hace en la literatura, varias interpretaciones de la probabilidad: (i) interpretación clásica, (ii) interpretaciones empíricas, (iii) las interpretaciones lógicas, y (iv) las interpretaciones subjetivas. Si bien ninguna de ellas nos es totalmente satisfactoria, existen diversos tratamientos que muestran sus alcances a la hora de desarrollar una teoría de la probabilidad[1].

La idea que la probabilidad puede ser interpretada como el cociente de casos favorables y la totalidad de casos, casos igualmente posibles, generalmente es atribuida a Laplace (1951), pero de acuerdo a algunos escritores como Hacking (1975, p. 11), sus orígenes se remontan a Leibniz; es de apuntar que esta interpretación de la probabilidad cobra mayor sentido en los juegos de azar. Si bien la interpretación clásica ha tenido una enorme influencia sobre el desarrollo de la teoría de la probabilidad, en parte debido a su aparente simplicidad, ha sido generalmente rechazada como una interpretación adecuada del cálculo de probabilidades (Kyburg y Teng, 2001, p.

[1] Véase Achinstein (2001), Schum (2001), y Howson y Urbach (2006).

69).

La interpretación clásica posee una circularidad en su definición. Cuando definimos la probabilidad como la el cociente de casos favorables y el número total de casos igualmente posibles, debemos explicar lo que queremos decir con "igualmente posibles". Es claro entonces que la circularidad aparece al definir "igualmente posible" como "igualmente probable". Con el fin de dar una definición que supere esta circularidad, los probabilistas clásicos ofrecieron el principio de indiferencia. Según este principio, cualquier conjunto de posibilidades es igualmente posible si no tenemos "razón alguna"para preferir una posibilidad sobre las otras.

La interpretación empírica de la probabilidad es el concepto de probabilidad que subyace en casi todo el trabajo en la inferencia estadística y, por lo tanto, en la evaluación de los experimentos en las ciencias físicas. Sin embargo, la principal dificultad con las interpretaciones empíricas es que no nos proporcionan una manera de medir la incertidumbre en cada caso particular.

Respecto a la interpretación lógica de la probabilidad, disenada explícitamente para hacer frente a la incertidumbre de las inferencias que hacemos a partir de datos empíricos, ella presenta fuertes limitaciones (Howson y Urbach, 2006, p. 94). Una de estas situaciones se presenta cuando Reichenbach propuso igualar el grado de verdad de una proposición con su probabilidad, así como cuando Carnap propuso igualar el grado de confirmación con su probabilidad. Más adelante, Carnap y Bar-Hillel, así como Popper y Hintikka, propusieron igualar el contenido (o la cantidad de información) de una proposición con su improbabilidad. En el caso que todos estas *equivalencias* tuvieran éxito, la ventaja sería que el tratamiento del cálculo de probabilidades podría utilizarse para el estudio de los conceptos filosóficos que quedan cubiertos por tal equivalencia. No obstante, este tipo de tratamiento no es viable como se ve en el siguiente ejemplo.

En el lenguaje ordinario tenemos la costumbre de decir que una proposición verosímil que ha sido "confirmada a medias", es *probable*. Este hecho sugiere que podemos "definir" la verosimilitud o grado de verdad de una proposición como su probabilidad. Sin embargo, esta "definición" no es viable porque conlleva a la siguiente falacia: Si en la proposición $s \supset t$ (donde $\supset$ denota la implicación material) tenemos que ésta y su consecuente son verdaderos, debemos tener $p(s \supset t) = 1$ y $p(t) = 1$. No obstante, por la definición usual del condicional y el teorema de la adición, obtenemos

$$p(s \supset t) = p(\neg s \ \vee \ t) = p(\neg s) + p(t).$$

Por hipótesis, el primer miembro y el último término son iguales a la unidad. Además, por el teorema del complemento, $p(\neg s) = 1 - p(\neg s)$. Por consiguiente se obtiene

$$1 = 1 - p(s) + p(t)$$

de donde $p(s) = p(t) = 1$. Así, de la verdad de t se infiere la de s, lo que es una falacia. Esto muestra que la teoría probabilista de la verdad propuesta por Reichenbach no es viable.

El anterior ejemplo también se puede utilizar para la teoría probabilista de la verdad propuesta por Popper, según el cual la verosimilitud de una proposición es igual a su improbabilidad, esto es, $V(s) = 1 - p(s)$. En efecto, si en los cálculos anteriores se reemplaza la unidad por el cero (que correspondería a la verdad total), se obtiene el resultado paradójico $p(s) = 1$, esto es, la confirmación del consecuente conduciría a negar el antecedente. Por consiguiente podemos concluir que el grado de verdad no es igual a la probabilidad ni a la improbabilidad (Guerrero, 2008, p. 126).

En cuanto a la identificación del grado de confirmación de una proposición con su probabilidad, propuesta por Carnap, ésta tiene por lo menos una consecuencia negativa: la probabilidad de las leyes universales resulta nula, precisamente por valer (supuestamente) para una infinidad de casos. De esta manera, el grado de confirmación de una hipótesis no debe igualarse a su probabilidad (ni a su improbabilidad).

Algunos escritores han interpretado el grado de creencia racional como una disposición a actuar; por supuesto que este es un aspecto totalmente subjetivo. Por ejemplo, el filósofo Ramsey (1931) sugiere que el grado de la creencia en una proposición puede ser medida por la probabilidad que uno está dispuesto a aceptar una apuesta en esa proposición. Una vez se interpreta que la probabilidad tiene que ver con grados reales de la creencia, también hemos resuelto el problema de la representación de "evidencia total" (Kyburg y Teng, 2001, p. 87).

Parece ser que la interpretación subjetiva de la probabilidad es algo natural para expresar nuestra incertidumbre acerca de algunas afirmaciones. Sin embargo, debido a su arbitrariedad ha sido objetivo de diversas críticas. En este aspecto, por ejemplo, un teorema de De Finetti habla de esta dificultad, señalando que a medida que se acumula evidencia por dos sujetos racionales, sus probabilidades personales se acercarán más, siempre que se cumplan determinadas condiciones. Es de aclarar, que no siempre es el caso que se cumplan las condiciones del teorema, así como también puede suceder que si se cumplen, los dos sujetos pueden estar bastante lejos el uno del otro en un primer momento con cierta evidencia disponible, lo cual a la hora de ponerse de acuerdo será poco favorable.

Si bien se han formulado algunas críticas a la interpretación subjetiva de la probabilidad, nada de lo que han dicho establece que hay algo mejor. Puede ser que no haya reglas o principios para la inferencia bajo incertidumbre. Si no existen principios generales para la asignación de probabilidades *a priori* de la clase que los intérpretes lógicos suponen que hay, entonces, como dice Earman (1992) el bayesianismo subjetivista es el único que está disponible. Si ese es el caso, entonces tanto la inferencia estadística clásica y la visión común de razonamiento inductivo están en un error fundamental, pues ambos puntos de vista encarnan la idea de la aceptación (o rechazo) de las hipótesis que van más allá de nuestros datos actuales. Si todo lo que necesita hacer es tomar decisiones, y lo único que les interesa es la consistencia lógica y probabilística, entonces tal vez el punto de vista bayesiano subjetivista nos puede dar todo lo que se merece (Kyburg y Teng, 2001, p. 93).

2.3. Conceptos de la teoría bayesiana

En esta sección recordaré algunas de las definiciones y proposiciones de una teoría bayesiana de la evidencia[2].

Definición 2.3.1. Consideremos un contexto de creencias K. Si h es una teoría y e es una evidencia de h, se define:

(i) $P(h)$ como el valor de la creencia en una hipótesis h cuando no se conoce evidencia alguna de dicha hipótesis,

(ii) $P(h \mid e)$ como el valor de la creencia en una hipótesis h bajo el conocimiento de la evidencia e.

$P(h)$ se denomina probabilidad "previa", mientras que a $P(h \mid e)$ probabilidad "posterior" de h relativa a e.

La siguiente definición relaciona las probabilidades (i) y (ii) de la Definición 2.3.1 con la propiedad de tricotomía de los números reales.

Definición 2.3.2. Sean h y e como en la Definición 2.3.1. Si

(i) $P(h \mid e) > P(h)$ se dice que e *confirma* a h,

(ii) $P(h \mid e) < P(h)$ se dice que e *no confirma* a h,

(iii) $P(h \mid e) = P(h)$ se dice que e es neutral con refspecto a h.

[2]Las definiciones presentadas aquí son tomadas de Howson y Urbach (2006), razón por la cual es importante resaltar que las probabilidades se entienden como una interpretación epistémica, es decir, como una medición de la incertidumbre del sujeto (p. 46).

La diferencia $P(h \mid e) - P(h)$ podría considerarse como el *grado* de confirmación que la evidencia e brinda a la hipótesis h. No obstante, ésta no es la única cantidad que ha sido propuesta en la literatura como *grado* de confirmación. Schum (2001, p. 213) presenta un análisis detallado del por qué no debe adoptarse alguno de estos *grados*. Con el fin de evitar estas dificultades prefiere adoptarse la siguiente idea[3] : para el caso de dos evidencias e y e' de una teoría h, si $P(h \mid e) > P(h \mid e') > P(h)$, diremos que la evidencia e confirma en *mayor* medida la teoría h que la evidencia e', tal como vimos en la sección 1.2.2.

Para lo que sigue es de fundamental importancia el siguiente resultado de la teoría de Bayes. Si h es una teoría y e una evidencia de h, entonces se tiene la igualdad

$$P(h \mid e)P(e) = P(e \mid h)P(h), \quad \text{o lo que es lo mismo} \quad \frac{P(h \mid e)}{P(h)} = \frac{P(e \mid h)}{P(e)}. \tag{2.3.1}$$

Equivalentemente,

$$P(h \mid e) = \frac{P(h)P(e \mid h)}{P(e)}.$$

De este resultado se desprende que la probabilidad posterior de la hipótesis h relativa a la evidencia e, $P(h \mid e)$, depende de los factores $P(e \mid h), P(e)$ y $P(h)$. Más adelante veré algunos argumentos a favor y en contra para la asignación de los valores de cada una de las probabilidades anteriores; sin embargo, en algunas situaciones estas probabilidades no necesitan valores puntuales (véase la Proposición 2.3.3). En general, los argumentos a favor buscarán mostrar la *potencia* de la teoría bayesiana en el razonamiento científico.

La interpretación de la probabilidad $P(h \mid e)$, en función de las tres probabilidades mencionadas anteriormente, tiene tres significados *bien destacados* en la inferencia estadística. Esto comienza a ilustrar los *alcances* de la teoría.

1. Si la evidencia e refuta la teoría h, entonces $P(e \mid h) = 0$. Esta es una "no confirmación máxima" de la teoría. Ahora bien, una *mayor* confirmación se presenta en el caso en el que $P(e \mid h) = 1$, caso que se interpreta como una implicación lógica de la hipótesis h hacia la evidencia e. Es de destacar aquí que un punto crucial de la inferencia estadística es considerar valores entre 0 y 1 con el fin de obtener *grados* de confirmación de una teoría.

2. El poder de la evidencia e para confirmar la teoría h depende de $P(e)$, esto es, de la probabilidad de e cuando no se asume que h es verdadera. Esto se sigue

[3]Howson y Urbach (2006, p. 92).

del teorema de probabilidad total (Bayes, 1763, teorema 12)

$$P(e) = P(e \mid h)P(h) + P(e \mid\sim h)P(\sim h). \tag{2.3.2}$$

Nótese que esta igualdad muestra la relación inversa entre $P(h \mid e)$ sobre $P(e)$. De aquí que la confirmación de la teoría bajo el conocimiento de la evidencia e dependa de la creencia en e.

3. La probabilidad posterior de una teoría $P(h \mid e)$ depende de su probabilidad previa. Este tipo de hipótesis debe ser un punto de discusión. Ejemplos de estas situaciones son las afrontadas por los científicos, quienes deben asignar probabilidades a las teorías de su campo científico según sea su credibilidad en ellas.

Uno de los grandes aportes del teorema de Bayes en una teoría de la evidencia, es la solución que éste brinda al problema de Duhem-Quine. Recordemos que este problema (conocido más generalmente como holismo confirmacional) surge con la filosofía de la ciencia asociada con Popper, la cual hace hincapié en el poder de ciertas evidencia para refutar una teoría. Según Popper, la falsabilidad es la característica de una teoría científica. Así, es es imposible poner a prueba de forma aislada una hipótesis científica, dado que un experimento empírico requiere asumir como ciertas una o más hipótesis auxiliares. Una respuesta completa al problema de Duhem-Quien utilizando el teorema de Bayes puede encontrarse en Howson y Urbach (2006, p. 103).

2.3.1. La probabilidad de la evidencia

El tratamiento bayesiano considera que la confirmación de una teoría h se presenta cuando la probabilidad posterior es mayor que la probabilidad previa. Según la definición 2.3.2, esto se formula mediante la relación $P(h \mid e) > P(h)$. La diferencia $P(h \mid e) - P(h)$ determina *el grado de la confirmación*. Al tener en cuenta este aspecto de la teoría bayesiana junto con el teorema de Bayes (expresión (2.3.1)), puede establecerse que

$$\frac{P(h \mid e)}{P(h)} = \frac{P(e \mid h)}{P(e)} = \frac{P(e \mid h)}{P(e \mid h)P(h) + P(e \mid\sim h)P(\sim h)}$$

pues $P(e) = P(e \mid h)P(h) + P(e \mid\sim h)P(\sim h)$, teorema de probabilidad total (2.3.2). De esta forma,

$$\frac{P(h \mid e)}{P(h)} = \frac{P(e \mid h)}{P(e)} = \frac{1}{\frac{P(e|h)P(h)+P(e|\sim h)P(\sim h)}{P(e|h)}} \tag{2.3.3}$$

$$= \frac{1}{\frac{P(e|h)P(h)}{P(e|h)} + \frac{P(e|\sim h)P(\sim h)}{P(e|h)}} \tag{2.3.4}$$

$$= \frac{1}{P(h) + P(\sim h)\frac{P(e|\sim h)}{P(e|h)}} \tag{2.3.5}$$

La importancia de las igualdades anteriores radica en el cociente $\frac{P(e|\sim h)}{P(e|h)}$, denominado el *factor de Bayes*. En efecto, si $\frac{P(e|\sim h)}{P(e|h)}$ tiende a 0, $P(\sim h)\frac{P(e|\sim h)}{P(e|h)}$ también, lo cual significa que

$$\frac{P(h \mid e)}{P(h)} = \frac{P(e \mid h)}{P(e)} = \frac{1}{P(h) + P(\sim h)\frac{P(e|\sim h)}{P(e|h)}} \quad \text{tiende a} \quad \frac{1}{P(h)}.$$

Por tanto, $P(h \mid e)$ tiende a 1 y así por la definición 2.3.2 (i), la evidencia e confirma *altamente* la hipótesis h. Cuando la hipótesis h implica la evidencia e, esto es, $P(e \mid h) = 1$, la confirmación depende de manera inversa de la probabilidad $P(e)$ o $P(e \mid\sim h)$.

2.3.2. Aportes del bayesianismo

Uno de los aportes del bayesianismo es que explica la refutación de una teoría mediante una evidencia empírica. Si consideramos una evidencia e implicada por una teoría h, y si suponemos que $P(h) > 0$, entonces $P(e \mid h) = 1$ y $P(h \mid\sim e) = 0$, lo cual muestra por (2.3.1) que $P(h \mid e)P(e) = P(h)$. Esto significa que la teoría h no es confirmada cuando es refutada. Así mismo, para una teoría que ha sido refutada no habrá evidencia alguna que pueda confirmarla, a menos que la evidencia que la refuta sea desechada.

Otro aporte del bayesianismo tiene que ver con en el que una consecuencia lógica de una teoría aumente su grado de confirmación. El teorema de Bayes presenta una justificación para que una teoría sea confirmada por una de sus consecuencias, la cual es el contenido de la siguiente proposición.

Proposición 2.3.3. *Sean h una teoría y e una evidencia implicada por h. Supóngase que se cumplen las desigualdades $0 < P(e) < 1$ y $P(h) > 0$. Se tiene entonces que h es confirmada por e.*

Demostración. Dado que h implica e y $P(h) > 0$, como se vio anteriormente $P(e \mid h) = 1$. Del teorema de Bayes (expresión 2.3.1),

$$\frac{P(h \mid e)}{P(h)} = \frac{1}{P(e)},$$

por lo que $P(h \mid e) = \frac{P(h)}{P(e)}$. Por hipótesis $0 < P(e) < 1$, es decir, $\frac{1}{P(e)} > 1$ y de aquí

$$\frac{1}{P(e)} = \frac{\frac{P(h)}{P(e)}}{P(e)\frac{P(h)}{P(e)}} = \frac{\frac{P(h)}{P(e)}}{P(h)} > 1, \quad \text{pues} \quad P(h) > 0 \tag{2.3.6}$$

y por tanto

$$\frac{P(h)}{P(e)} > P(h) \Leftrightarrow P(h \mid e) > P(h),$$

lo cual por la definición 2.3.2 (i) significa que e confirma h. □

Un detalle que vale la pena resaltar es la justificación bayesiana (a partir de los axiomas de la probabilidad) del hecho que las confirmaciones sucesivas por consecuencias lógicas aportan en menor medida cada vez que se consideran más de ellas. Sean $e_1, \ldots, e_n, n \in \mathbb{N}$, consecuencias lógicas de h. Puesto que

$$\begin{aligned} P(h \mid e_1 \,\&\, \ldots \,\&\, e_{n-1}) &= P(h \,\&\, e_n \mid e_1 \,\&\, \ldots \,\&\, e_{n-1}) \\ &= P(h \mid e_1 \,\&\, \ldots \,\&\, e_n) P(e_n \mid e_1 \,\&\, \ldots \,\&\, e_{n-1}), \end{aligned}$$

si h implica todas las evidencias $e_i, i = 1, \ldots, n$, entonces

$$P(h \mid e_1 \,\&\, \ldots \,\&\, e_n) \geq P(h \mid e_1 \,\&\, \ldots \,\&\, e_{n-1}) \tag{2.3.7}$$

lo cual es lo que se podría esperar. Ahora bien, cada vez que agregamos una evidencia sigue cumpliéndose la relación (2.3.7), razón por la cual todas las probabilidades a considerar pueden organizarse de forma no decreciente y así tienen un límite superior[4]. Más aún,

$$\lim_{n\to\infty} P(h \mid e_1 \,\&\, \ldots \,\&\, e_{n-1} \,\&\, e_n) = \lim_{n\to\infty} P(h \mid e_1 \,\&\, \ldots \,\&\, e_{n-1}). \tag{2.3.8}$$

lo cual, junto con el hecho $P(h) > 0$, implica que

$$\lim_{n\to+\infty} P(e_n \mid e_1 \,\&\, \ldots \,\&\, e_{n-1}) = 1.$$

Este resultado puede considerarse como una explicación del por qué no es viable verificar una teoría indefinidamente.

[4]Teorema de Bolzano-Weierstrass.

Una tercera característica de la confirmación de una teoría por sus consecuencias, es aquella en la cual se considera una subteoría h_r "restringida" de una teoría h (una *parte* de h). Puede decirse que la teoría h establece resultados más general que la teoría h_r, lo cual implica necesariamente que $P(h) \leq P(h_r)$, pues h_r es menos *especulativa* que h (Bayes, 1763, p. 95). Primero se estudiará la teoría h_r.

Considérese un conjunto de predicciones implicadas por h y h_r. Si estas predicciones son verificadas, ellas pueden confirmar ambas teorías con probabilidades dadas por

$$P(h \mid e_1 \,\&\, e_2 \,\&\, \ldots \,\&\, e_n) = \frac{P(h)}{P(e_1 \,\&\, e_2 \,\&\, \ldots \,\&\, e_n)},$$

o lo que es lo mismo

$$P(e_1 \,\&\, e_2 \,\&\, \ldots \,\&\, e_n) = \frac{P(h)}{P(h \mid e_1 \,\&\, e_2 \,\&\, \ldots \,\&\, e_n)} \tag{2.3.9}$$

y

$$P(h_r \mid e_1 \,\&\, e_2 \,\&\, \ldots \,\&\, e_n) = \frac{P(h_r)}{P(e_1 \,\&\, e_2 \,\&\, \ldots \,\&\, e_n)},$$

esto es,

$$P(e_1 \,\&\, e_2 \,\&\, \ldots \,\&\, e_n) = \frac{P(h_r)}{P(h_r \mid e_1 \,\&\, e_2 \,\&\, \ldots \,\&\, e_n)}, \tag{2.3.10}$$

respectivamente. Al igualar las expresiones (2.3.9) y (2.3.10) se obtiene la igualdad

$$\frac{P(h)}{P(h \mid e_1 \,\&\, e_2 \,\&\, \ldots \,\&\, e_n)} = \frac{P(h_r)}{P(h_r \mid e_1 \,\&\, e_2 \,\&\, \ldots \,\&\, e_n)},$$

es decir

$$\frac{P(h \mid e_1 \,\&\, e_2 \,\&\, \ldots \,\&\, e_n)}{P(h)} = \frac{P(h_r \mid e_1 \,\&\, e_2 \,\&\, \ldots \,\&\, e_n)}{P(h_r)}$$

y así

$$P(h \mid e_1 \,\&\, e_2 \,\&\, \ldots \,\&\, e_n) = \frac{P(h)}{P(h_r)} P(h_r \mid e_1 \,\&\, e_2 \,\&\, \ldots \,\&\, e_n) \tag{2.3.11}$$

Puesto que el valor máximo de $P(h_r \mid e_1 \,\&\, e_2 \,\&\, \ldots \,\&\, e_n)$ es 1, esto significa que incluso cuando una cantidad de predicciones de h_r hayan sido verificadas, la probabilidad posterior de h nunca podrá superar el valor del cociente $\frac{P(h)}{P(h_r)}$. Esto permite concluir (bayesianamente) que la probabilidad previa de h_r determina un límite para la probabilidad posterior de h, aún cuando las predicciones implicadas por h y h_r

sean las mismas. Esto explica el hecho que para las predicciones verificadas por experimentos realizados con un modelo en particular, dichos experimentos confirmen una versión "restringida" de h.

Otro de los aportes del bayesianismo, es decir, del bayesianismo subjetivo, es el análisis de lo que ellos llaman confirmación, pues para ellos la confirmación es relativa a las personas y a los tiempos. Otro de los puntos importantes en este enfoque bayesiano es que las confirmaciones no son contradictorias; más exactamente, si alguien dice que e es evidencia para h y otra persona dice que no, normalmente podríamos pensar que se están contradiciéndono el uno al otro. No obstante, bajo el análisis bayesiano subjetivo, la afirmación de la primera persona es seguramente interpretada como que e confirma h para ella ahora, mientras que la de afirmación de la segunda persona significa que e no confirma h para ella ahora; estas afirmaciones por supuesto, no son contradictorias.

A pesar de las ventajas del bayesianismo subjetivo, algunos autores han relizado varias objeciones a esta teoría. Este es el caso de Glymour, quien en su libro *Theory and Evidence* (1980), plantea algunos interrogantes que, según él, el bayesianismo subjetivo no puede responder. Como respuesta a sus objeciones, Swinburne en su artículo "Theory and Evidence by Clark Glymour" (1981), brinda un contra argumento a Glymour, afirmando que lo que sucede *no* es que el bayesianismo subjetivo no pueda responder a tales objeciones, sino que es Glymour quien no aprecia los recursos completos del bayesianismo, o no ha comprendido completamente las afirmaciones del bayesianismo.

2.4. Teoría objetiva de la confirmación de Maher

En esta sección presentamos la teoría de la confirmación propuesta por Patrick Maher (1996), quien a diferencia del bayesianismo ortodoxo, intenta ofrecer una teoría objetiva.

Maher identifica a la teoría de la confirmación con relevancia positiva, es decir, se dice que e confirma h si, y sólo si, e incrementa la probabilidad de h. Agrega además que los análisis que se han realizado usualmente consideran la probabilidades relevantes como probabilidades subjetivas, esto es, han sido análisis bayesianos subjetivistas. Al respecto, afirma que "estos análisis bayesianos subjetivos están irremediablemente viciados" (Maher, 1996, p. 149). En "Subjective and Objective Confirmation" (1996), su propósito es ofrecer un análisis de la confirmación en el sentido objetivo. En este punto, una forma sencilla de distinguir entre las teorías objetivas y subjetivas es la siguiente: los objetivistas[5] creen que las probabilidades se refieren a hechos del mundo exterior, mientras que los subjetivistas creen que se refieren a los fenómenos mentales, es decir, grados de creencia.

El análisis de Maher, a diferencia de Carnap y de los bayesianos subjetivistas, requiere que e sea una pieza de evidencia para confirmar alguna hipótesis h. Según él, una razón para esto es que él quiere que la expresión "e confirma h" corresponda a nuestra noción ordinaria que e sea evidencia para h, lo cual necesita que e sea evidencia. Agrega además que si no se pide que e sea evidencia, su análisis de confirmación tendría que extenderse por un camino problemático (Maher, 1996, p. 168).

Maher propone que e sea evidencia si, y sólo si, e es conocida directamente por la experiencia (Maher, 1996, p. 158). Para él, una proposición e es conocida directamente por la experiencia si, y sólo si, es conocida por la experiencia y no está basada en una inferencia de alguna proposición s. Es pertinente realizar una observación aquí: si la evidencia es conocimiento obtenido directamente por la experiencia, y si el conocimiento es una relación entre una persona y una proposición, entonces lo que cuenta como evidencia será diferente para varias personas. Así mismo, puede tenerse una noción de evidencia para una comunidad.

Algunas aplicaciones de su propuesta son las siguientes:

(i) Una proposición de la que no se conoce si es verdadera no es evidencia, y por tanto no es evidencia para alguna hipótesis. Así, por ejemplo, la proposición que establece que la luna está hecha de queso no es evidencia que yo esté de hecho de queso, dado que no sabemos que la luna está hecha de queso (aunque sabemos que esto es falso).

(ii) Aun si sabemos que una proposición es verdadera, si este conocimiento no está directamente basado en la experiencia, entonces e no es evidencia y por lo tanto no es evidencia para alguna hipótesis. Por ejemplo, sea e la evidencia que dice que una cierta sustancia tomada de un envase se disuelve cuando se coloca en el agua; supongamos que e es conocida por la experiencia. Sea h la proposición que la sustancia que estaba en el envase es soluble, y supongamos que sabemos h por haberla inferido de e. Entonces, afirma Maher, conocemos a e y a h desde la experiencia, pero e es evidencia para h y no viceversa, dado que solamente e es conocida por experiencia *directa*.

En esta propuesta la noción de evidencia depende de ese tipo de conocimiento como el del ejemplo anterior, razón por la cual puede indagarse por lo que se entiende por

[5]Dentro de una noción objetiva de la probabilidad, hay cuatro alternativas bien definidas: la teoría clásica (Laplace, 1814), la teoría lógica (Keynes, 1921; Carnap, 1950), la teoría frecuentista (Venn, 1876), y la teoría de la propensión (Popper, 1957).

conocimiento allí. Maher responde a esto diciendo que el concepto de conocimiento debe ser entendido en el sentido usual (Maher, 1996, p. 159.). Según él, e es evidencia para h si, y sólo si, e hace racional creer que h sea verdadera. Si bien esta idea proviene de Carnap como dijimos antes, ella difiere de la suya en que pide que e sea una evidencia para confirmar alguna hipótesis. Cabe mencionar que aun si se eliminara este requisito, uno necesita conocimiento factual, y en particular conocimiento de la evidencia disponible, para así poder determinar qué confirma qué. Esto niega la motivación de Carnap para no asumir que e sea evidencia (Maher, 1996, p. 169), y es la principal diferencia entre las teorías de la confirmación de Carnap y Maher.

Maher está de acuerdo con Carnap y los bayesianos subjetivistas en que los grados racionales de confianza son representables por una medida numérica que satisface los axiomas de la probabilidad[6]. Así, en vez de hablar de grados de confianza que es racional tener, habla de funciones de probabilidad racionalmente permisibles (Maher, 1996, p. 162). El término racional en una situación dada depende de la evidencia disponible en tal situación.

Otra de las principales ideas de Maher es que la evidencia e es evidencia para h si, y sólo si, e hace que sea racional tener más confianza en que h es verdadera (Maher, 1996, p. 162). Si bien ésta fue una de las ideas básicas de Carnap, la diferencia entre su teoría de la confirmación y la de Maher puede esbozarse de la siguiente forma.

El análisis de confirmación que Maher postula y defiende en “Subjective and Objective Confirmation” (1996, p. 163) es el siguiente: e confirma a h relativo a un cuerpo de evidencia de fondo $\mathcal{B}$ si, y sólo si, (i) e es evidencia y (ii) para todo $p \in \mathcal{R}(\mathcal{B})$, $p(h \mid e) > p(h)$, donde $\mathcal{R}(\mathcal{B})$ denota el conjunto de funciones de probabilidad que son racionalmente permisibles, y la proposición $p \in \mathcal{R}(\mathcal{B})$ significa que hay una posible situación en la cual la evidencia total de la persona en $\mathcal{B}$, tiene una función de probabilidad p y que esa persona no incumple alguna norma de racionalidad.

Maher reconoce que este análisis tiene la siguiente limitación. Dado que a menudo queremos argumentar que varias piezas de evidencia confiman una hipótesis, sin que solamente una de ellas la confirme, pero dado que el anterior análisis sólo cubre el caso de una única pieza de evidencia, él propone no pensar la relación de confirmación como conjunción de evidencias, pues puede darse el caso que tal conjunción no haya sido obtenida *directamente* por experiencia, sino como una relación entre un *conjunto* de piezas de evidencia y una hipótesis. Con esta sugerencia, el análisis de confirmación en el caso de varias piezas de evidencia toma la forma

[6] Una justificación de este hecho puede encontrarse en (Maher, 1993).

$\{e_1, \ldots, e_n\}$ confirma h relativo a $\mathcal{B}$ si, y sólo si, (i) $e_1, \ldots, e_n$ son todas evidencias y (ii) para todo $p \in \mathcal{R}(\mathcal{B})$, $p(h \mid e_1 \ldots e_n) > p(h)$. Según el análisis de Maher, los juicios sobre la confirmación relativa a $\mathcal{B}$ dependen en parte de las funciones de probabilidad en $\mathcal{R}(\mathcal{B})$. Los axiomas de la probabilidad delimitan lo que puede considerarse como función de probabilidad; de aquí que $\mathcal{R}(\mathcal{B})$ satisfaga estos axiomas. Maher llama a esto *coherencia* (Maher, 1996, p. 164).

La propuesta de Maher consiste en que la evidencia de fondo usualmente es suficientemente bien fijada por el contexto, si bien esto no es normalmente mencionado de forma explícita. Para él, "e confirma h" es relativo a una evidencia de fondo $\mathcal{B}$, donde $\mathcal{B}$ usualmente es considerado fijo y suficientemente exacto por el contexto. Si queremos, podemos indicar lo que es la evidencia de fondo, y en algunos contextos necesitaremos especificar lo que queremos decir (Maher, 1996, p. 166).

Pero, ¿cómo es que la evidencia de fondo es determinada por el contexto?[7] La sugerencia de Maher acerca de la evidencia de fondo es que si las proposiciones $e_1, \ldots, e_n$ son proposiciones cuya relevancia para h está bajo discusión, *ceteris paribus*, $\mathcal{B}$ es la evidencia total disponible en otro contexto al de $e_1, \ldots, e_n$. La razón para la claúsula *ceteris paribus* es que algunas veces otras consideraciones influencian el contenido de la evidencia de fondo (Maher, 1996, p. 166).

La evidencia total disponible puede ser considerada como un conjunto de piezas de evidencia, cada una de las cuales es conocida directamente por la experiencia. Maher no asume que estas piezas sean proposiciones; lo que sí asume es que ellas puedan ser tratadas como si lo fueran. De esta manera, si $\mathcal{T}$ representa la evidencia total disponible, entonces la evidencia total disponible diferente a $e_1, \ldots, e_n$ es el conjunto que consiste de todos los elementos de $\mathcal{T}$ diferentes a $e_1, \ldots, e_n$, esto es, el conjunto $\mathcal{T} - \{e_1, \ldots, e_n\}$.

2.5. La respuesta bayesiana a la paradoja de los cuervos

En esta sección mostraremos dos soluciones de la paradoja de los cuervos que muestran una de las principales ventajas de una teoría bayesiana de la evidencia, en comparación a las teorías del capítulo 1.

[7]Una posible respuesta es llevar a cabo una formulación similar a la que presenta Howson del análisis contrafáctico; si consideramos la cuestión acerca de si e confirma h, la evidencia de fondo es toda la evidencia disponible en otro contexto al de e. Sin embargo, Maher muestra que esta formulación conlleva a juicios erróneos de confirmación (Maher, 1996, p. 166.)

La posición bayesiana de la confirmación como una confirmación gradual, posición debida al teorema de Bayes, permite realizar un análisis de la *paradoja de los cuervos*, la cual fue esbozada en la sección 1.1.3. A continuación presentaré la respuesta que el bayesianismo presenta a esta paradoja siguiendo el tratamiento de Howson y Urbach (2006, p. 99.)

Consideremos la siguiente notación:

- BR denota la proposición "cierto objeto es un cuervo negro".
- $\overline{BR}$ denota la proposición "cierto objeto no es cuervo ni es negro".

Como vimos en la sección 1.1.3, en esta paradoja se presentan dos condiciones a saber:

1. Las hipótesis de la forma "Todos los cuervos son negros" son confirmadas por la evidencia de apreciar algo que es negro y que es cuervo (*condición de Nicod*).
2. Las hipótesis lógicamente equivalentes son confirmadas por la misma evidencia (*condición de equivalencia*).

Al considerar la condición de Nicod, la hipótesis "Todos los objetos que no son negros no son cuervos" es confirmada por $\overline{BR}$, mientras que de la condición de equivalencia se tiene la hipótesis "Todos los objetos que son cuervos, son negros". El problema se presenta al considerar que algo que no es cuervo y que no es negro, confirma la hipótesis "Todos los cuervos son negros".

La respuesta bayesiana a esta paradoja consiste en la observación que BR y $\overline{BR}$ confirman la hipótesis "Todos los cuervos son negros", pero no con el mismo "grado". De esta forma se reconoce la importancia de la confirmación gradual que presenta la solución bayesiana.

El impacto de los datos (cuervo y negro) sobre la hipótesis $h :=$ "Todos los cuervos son negros", está dado por

$$P(h \mid BR) = \frac{P(BR \mid h)P(h)}{P(BR)}$$

y,

$$P(h \mid \overline{BR}) = \frac{P(\overline{BR} \mid h)P(h)}{P(\overline{BR})}$$

Nótese que $P(BR \mid h) = P(B \mid h \,\&\, R)P(R \mid h) = P(R \mid h) = P(R)$. La última igualdad fue obtenida al asumir que cuando algún objeto arbitrario es un cuervo, este hecho es independiente de la verdad de h (Bayes, 1763, p. 100.) Similarmente, $P(\overline{BR} \mid h) = P(\overline{B} \mid h) = P(\overline{B})$ y $P(BR) = P(B \mid R)P(R)$, junto con

$$P(B \mid R) = \sum_{\theta} P(B \mid R \,\&\, \theta)P(\theta \mid R) = \sum_{\theta} P(B \mid R \,\&\, \theta)P(\theta)$$

donde θ representa los posibles valores de la proporción de cuervos que son negros (para h se toma $\theta = 1$) al suponer independencia entre θ y R. Finalmente, $P(B \mid R \,\&\, \theta) = \theta$, ya que si la proporción de cuervos en el universo que son negros es θ, la probabilidad de elegir al azar un cuervo negro también es θ. Al tomar estas ecuaciones con el teorema de Bayes (2.3.1) se obtiene

$$\frac{P(h \mid BR)}{P(h)} = \frac{1}{\sum \theta P(\theta)} \quad \& \quad \frac{P(h \mid \overline{BR})}{P(h)} = \frac{1}{P(\overline{R} \mid \overline{B})}.$$

De acuerdo a la primera igualdad, el cociente de las probabilidades posteriores a las probabilidades previas de h es inversamente proporcional a $\sum \theta P(\theta)$. Esto significa por ejemplo, que si inicialmente fuese muy probable que todos los cuervos fueran negros, entonces $\sum \theta P(\theta)$ sería “grande” y BR confirmaría h, mientras que si inicialmente fuera poco probable que muchos cuervos fuesen negros, la confirmación podría ser sustancial; grados intermedios de incertidumbre consideran a θ como un puente entre diferentes niveles de confirmación.

Con respecto a la segunda ecuación, ésta expresa la confirmación derivada de la observación de un objeto que no es cuervo ni es negro, lo cual ilustra la importancia de la probabilidad $P(\overline{B} \mid \overline{R})$. Seguramente hay muchas cosas en el universo que no son cuervos ni son negras, por lo que si se piensa que no hay cuervos negros, la probabilidad que algún objeto sobre el que no se sabe algo, excepto que no es negro, sea cuervo es alta, casi 1. De esta forma $P(h \mid \overline{RB}) = (1-\varepsilon)P(h)$, donde ε es un número positivo cercano a 0, lo cual muestra que el observar un objeto que no es cuervo y tampoco es negro nos brinda “un poco” de confirmación de la hipótesis h. Este es otro ejemplo que muestra que la condición de Nicod no es un principio universal de confirmación.

Para terminar esta sección, vale la pena hacer explícitas las expresiones bayesianas para las proposiciones (PC) y (PC*), mencionadas en la sección 1.1.3. A partir de la definición de confirmación bayesiana (Definición 2.3.2), puede verse que (PC) queda expresada como

$$P[(\forall x)(Rx \supset Bx) \mid\sim Ba \wedge \sim Ra] > P[(\forall x)(Rx \supset Bx)],$$

mientras que la expresión

$$P[(\forall x)(Rx \supset Bx) \mid\sim Ba \wedge \sim Ra] > P[(\forall x)(Rx \supset Bx) \mid\sim Ra],$$

corresponde a la proposición (PC*). Como vemos, una de las ventajas del lenguaje bayesiano, es que nos permite diferenciar entre proposiciones que para Hempel nos llevaban (intuitivamente) a la paradoja.

2.6. Los tres prisioneros

El siguiente ejemplo que tomaremos para ilustrar el razonamiento bayesiano clásico es tomado de uno de los acertijos matemáticos presentes en el libro de Gardner (1961).

Ejemplo 2.6.1. Tres presos A, B, y C, han sido juzgados por asesinato, y tanto sus veredictos, como la ejecución de sus sentencias, se llevarán a cabo el día de mañana. Ellos solamente saben que uno de los tres será declarado culpable y ejecutado, mientras que los otros dos serán puestos en libertad. Sin embargo, la identidad de la persona que será condenada es revelada al guardia de la prisión quien es muy confiable, pero no a los propios presos. En medio de la noche, el preso A llama al guardia y le pide el favor de darle una carta a uno de los otros presos que va a ser puesto en libertad. El guardia recibe la carta y se compromete a entregarla según la condición. Tiempo más tarde, antes del amanecer, el prisionero A llama nuevamente al guardia y le pregunta por el nombre del preso a quien entregó la carta. Para convencer al guardia de darle el nombre, el preso A le argumenta que esto no le dará algún tipo de información sobre su estado en el veredicto del juicio, pues independientemente de su destino, cada uno de los otros dos presos tenía igual probabilidad de recibir la carta. El guardia le responde al preso A diciéndole que le entregó la carta al preso B, quien será dejado en libertad en la mañana. Después de esto, el preso A se despide del guardia y regresa a su cama, donde piensa que antes de hablar con el guardia su posibilidad de ser ejecutado era de $\frac{1}{3}$, pero ahora que el guardia le ha dicho que B será dejado fuera, entonces solamente queda el preso C y él, por lo que ahora su posibilidad de ser ejecutado es de $\frac{1}{2}$. Dado que su probabilidad de morir aumentó considerablemente, el preso A se pregunta qué hizo mal, pues al pedirle al guardia que entregara la carta y le dijera a quién se la entregó, él se aseguró de no pedir algún tipo de información sobre su veredicto[8].

Para hacer un análisis detallado del razonamiento del preso, consideremos la red bayesiana que ilustra esta situación (Figura 2.1), donde cada uno de los nodos

[8]En los cursos de probabilidad a nivel de pregrado, el ejemplo de los tres prisioneros es bastante ilustrativo antes y después de estudiar las técnicas probabilísticas. Para algunos estudiantes, la probabilidad de A de ser ejecutado cambia después que el preso interactúa con el guardia, aun cuando no pueden explicar en qué momento el preso obtiene información sobre el veredicto del juicio. En cambio, quienes afirman que la probabilidad sigue siendo de $\frac{1}{3}$ antes y después de la charla del preso con el guardia, tienen cierta dificultad para encontrar el error en el razonamiento del preso.

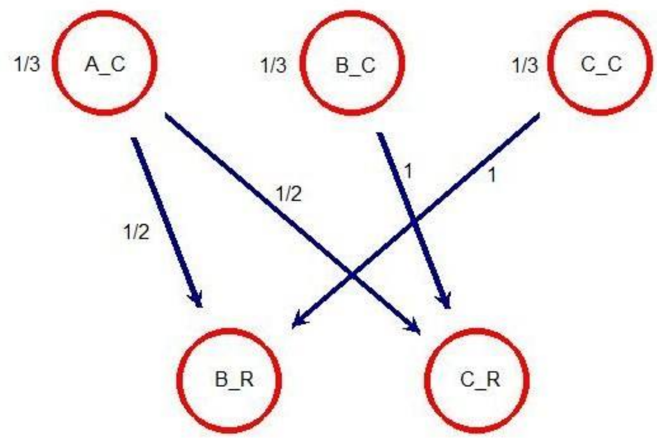

Figura 2.1: Red bayesiana para el problema de los tres prisioneros

denota los siguientes eventos: B_I : "el preso B será declarado inocente", A_C : "el preso A será declarado culpable, B_C : "el preso B será declarado culpable, C_C : "el preso C será declarado culpable, B_R : el preso B recibe la carta, y C_R : el preso C recibe la carta. Ahora bien, según los datos del Ejemplo 2.6.1, tenemos los siguientes valores probabilísticos:

$$\begin{aligned}
P(A_C) &= \frac{1}{3},\\
P(B_C) &= \frac{1}{3},\\
P(C_C) &= \frac{1}{3},\\
P(B_R \mid A_C) &= \frac{1}{2},\\
P(B_R \mid C_C) &= 1,\\
P(C_R \mid A_C) &= \frac{1}{2},\\
P(C_R \mid B_C) &= 1.
\end{aligned}$$

Dada la interacción entre el preso A y el guardia, debemos calcular - según la teoría bayesiana clásica - la probabilidad posterior de A_C después que ha sucedido B_I, esto es, el valor de $P(A_C \mid B_I)$. Puesto que A_C implica B_I, entonces $P(B_I \mid A_C) = 1$, y por tanto

$$P(A_C \mid B_I) = \frac{P(B_I \mid A_C)P(A_C)}{P(B_I)} = \frac{P(A_C)}{P(B_I)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}.$$

Como podemos ver, este es el resultado que obtuvo el preso después de preguntar el guardia el nombre del preso que recibió la carta. Sin embargo, el planteamiento correcto que debe hacerse el preso A, no debe involucrar la proposición B_I, sino una más débil, pero que considere su intervención con el guardia. Sea B'_I el evento "el guardia dijo que B será declarado inocente"[9]. De esta manera, si calculamos $P(A_C \mid B'_I)$ en vez de $P(A_C \mid B_I)$, obtendremos la respuesta correcta:

$$P(A_C \mid B'_I) = \frac{P(B'_I \mid A_C)P(A_C)}{P(B'_I)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} \tag{2.6.1}$$

la cual coincide con la probabilidad antes que el preso A charle con el guardia. Notemos que el cambio en los valores de las probabilidades se debe a que B'_I implica B_I, pero no al contrario. De esta manera, vemos que no se puede evaluar la importancia de la nueva información considerando solamente las proposiciones implícitas en ésta, sino que también debemos considerar la información que ha sido hecho explícita en las declaraciones.

Como pudimos ver en este capítulo, la teoría bayesiana de la evidencia da solución a las dificultades que se presentan con las teorías clásicas de la confirmación. Además, el bayesianismo permite calcular de manera explícita, el grado de confirmación que una evidencia brinda a una hipótesis. Es por esto que en la literatura pueden encontrarse centenares, y hasta miles de trabajos en ciencias básicas e ingeniería, donde un enfoque bayesiano permite realizar inferencias a partir de evidencias. Tal vez uno de los casos más destacados es el de la inteligencia artificial, donde a partir de ciertas proposiciones (evidencias), se construye una red bayesiana para la que se mide el grado de confirmación que una hipótesis tiene en relación con este conjunto de premisas. En todos estos trabajos, el cálculo bayesiano hace uso de uno de los fundamentos teóricos más fuertes de esta teoría, el teorema de Bayes, el cual es una consecuencia de los axiomas de Kolmogorov (1933).

Sin embargo, pensar en una teoría probabilística que no necesariamente cumpla dichos axiomas (principalmente el axioma de aditividad, $P(A) + P(A^C) = 1$, donde

[9] La evidencia sobre algún evento y la ocurrencia real de este caso no son los mismos. Por ejemplo, la evidencia E^* puede representar el testimonio de una persona que se produjo suceso E (Schum, 2001, p. 18).

A^C denota el complemento del evento A), nos lleva a indagar cuáles de estas teorías podrían resultar de interés para nuestro problema de la evidencia (pues si bien pueden descubrirse varias propuestas, seguramente no todas aporten elementos nuevos a la discusión). Con este propósito, en el siguiente capítulo discutiré la teoría de Dempster-Shafer, teoría no aditiva que actualmente - y tal como sucede con la teoría bayesiana - es ampliamente estudiada en los problemas evidencia - hipótesis, y es un ejemplo de esas teorías que no cumplen el marco axiomático del bayesianismo, pero que sí abordan el problema de la evidencia.

Ahora bien, debe decirse que estudiar estas teorías no aditivas no se hace solamente desde un punto de vista formal, es decir, como una generalización de los axiomas del bayesianismo y punto, sino también por el hecho que éstas no asumen, como sí lo hacen los bayesianos en general, que un agente esté en capacidad de cuantificar sus probabilidades - ya sean subjetivas u objetivas - mediante un valor exacto; allí se reconoce la imprecisión del razonamiento, debido al conocimiento incompleto o viciado que pueda tenerse, lo cual implica que no estemos en capacidad de dar juicios precisos. De esta manera, al recordar la discusión entre Glymour y Swinburne acerca de las objeciones al bayesianismo subjetivo (final de la sección 2.3.2), así como la teoría bayesiana objetiva propuesta por Maher (sección 2.4), quien afirma que los bayesianos subjetivos están viciados (Maher, 1996, p. 149), podemos pensar que una teoría (como la de Dempster-Shafer) que reconozca nuestra incapacidad a la hora de formular juicios probabilísticos, puede ser de gran ayuda en una teoría probabilística de la evidencia, teoría para la cual no tendríamos las críticas que sí se han hecho al bayesianismo, además de ser una generalización de este último.

Capítulo 3

Teoría de Dempster-Shafer de la evidencia

En este capítulo presento un tratamiento detallado de la teoría de Dempster-Shafer de la evidencia. Primero motivaré la necesidad de las probabilidades imprecisas en el contexto científico para luega abordar la teoría en sí; sus conceptos, ventajas y desventajas con respecto a la teoría bayesiana clásica serán discutidos a lo largo del capítulo.

3.1. Presentación

En el análisis del problema de los tres presos supusimos que si B y C son dejados en libertad - información conocida por el guardia de la carcél - entonces cada uno de ellos tiene $\frac{1}{2}$ de probabilidad de recibir la carta. Sin embargo, si eliminamos esta suposición, es decir, si desconocemos la forma en la que el guardia eligió a uno de los presos (por ejemplo, tal vez el preso B estaba en una celda más cerca a la del preso A que la celda del preso C, y el guardia no quería caminar más de la cuenta, pues ya sabía que el preso A era el declarado culpable), entonces la probabilidad condicional $P(B'_I \mid A_C)$ ya no tiene un valor exacto, sino que se encuentra entre 0 y 1, esto es, $0 \leq P(B'_I \mid A_C) \leq 1$, donde $P(B'_I \mid A_C) = 0$ en el caso en el que el guardia elige al preso C, y $P(B'_I \mid A_C) = 1$ si el guardia elige al preso B. De igual manera, el tener presente nuestro desconocimiento acerca de cómo eligió el guardia entre los dos presos nos lleva a ver que $\frac{1}{3} \leq P(B'_I) \leq \frac{2}{3}$.

Si tenemos en cuenta estos valores, el teorema de probabilidad garantiza que

$$\begin{aligned} P(A_C \mid B'_I) &= \frac{P(B'_I \mid A_C)P(A_C)}{P(B'_I \mid A_C)P(A_C) + P(B'_I \mid B_C)P(B_C) + P(C'_I \mid C_C)P(C_C)} \\ &= \frac{P(B'_I \mid A_C)\cdot \frac{1}{3}}{P(B'_I \mid A_C)\cdot \frac{1}{3} + 0 + \frac{1}{3}} \\ &= \frac{P(B'_I \mid A_C)}{1 + P(B'_I \mid A_C)}, \end{aligned}$$

y dado que $0 \leq P(B'_I \mid A_C) \leq 1$, necesariamente

$$0 \leq P(A_C \mid B'_I) \leq \frac{1}{2}. \tag{3.1.1}$$

donde $P(B'_I \mid A_C) = 0$ en el caso que el preso C sea declarado inocente, y $P(B'_I \mid A_C) = \frac{1}{2}$ si es el preso B quien será dejado en libertad.

A diferencia del resultado que obtuvimos bajo la hipótesis de que los presos B y C tienen la misma probabilidad de ser elegidos por el guardia, donde concluimos que $P(A_C \mid B'_I) = \frac{1}{3}$ (expresión (2.6.1)), si eliminamos esta suposición obtenemos un intervalo de probabilidad para esta probabilidad condicional.

Las técnicas bayesianas tradicionales (y por tanto las redes bayesianas[1]), no están diseñadas para tratar con intervalos de probabilidad como el que se obtuvo en la expresión (3.1.1). Esto muestra que necesitamos teorías probabilísticas no bayesianas en el sentido clásico, que permitan trabajar con intervalos de probabilidad (probabilidades imprecisas). Una de estas teorías es la teoría de Dempster-Shafer, la cual estudiaré en este capítulo. Brevemente, podemos decir que esta teoría está basada en intervalos de probabilidad, donde las probabilidades inferiores y superiores son cotas para nuestros grados de creencias en la veracidad de un evento. Con el fin de ejemplificar esta teoría, en la sección 3.3.2 abordaré el problema de los tres prisioneros desde este modelo impreciso.

[1]Las redes bayesianas son modelos gráficos probabilísticos supremamente útiles para modelar incertidumbre. No obstante, una de sus principales hipótesis es que estas redes son modelos precisos, esto es, los valores numéricos que allí se manejan son exactos y sus valores iniciales dados *a priori* para poder llevar a cabo la cuantificación en la red deben ser exactos, lo cual ha llevado a investigadores de las probabilidades imprecisas a desarrollar redes bayesianas que admiten que estos valores *a priori* sean imprecisos. Este es el caso de Corani et al., (2012) quienes presentan juegos de distribuciones de probabilidad con el fin de brindar una descripción más realista de la dificultad a la hora de asignar valores iniciales en las redes. Estos modelos más generales conducen a una nueva clase de modelos gráficos probabilísticos e imprecisos, conocidos en la literatura como *redes de creencias*. Según este tratamiento, si en el momento de establecer una red la información disponible no es suficiente, las *redes de creencia* proporcionan un tratamiento más apropiado para obtener conclusiones a partir de la incertidumbre en los valores iniciales de la red.

Las probabilidades imprecisas[2] son aplicables cuando la información es escasa, incompleta, vaga, o en los casos en los que sea difícil de identificar una única distribución de probabilidad. El primer tratamiento formal de estas probabilidades fue realizado por Boole (1854). Walley (1991) sentó los fundamentos en un lenguaje más preciso, y él fue el que acunó el término de probabilidad imprecisa, a la vez que unificó varias teorías que involucran esta clase de probabilidades. Años después, de Cooman (2000) presentó un trabajo más profundo de estas probabilidades. Uno de los mayores avances en esta línea de probabilidad, y que relacionó trabajos anteriores con enfoques modernos es el realizado por Neumaier (2004), quien propuso que los conjuntos de intervalos difusos (*interval fuzzy sets*), introducidos por Zadeh et. al., (1965) podrían ser usados como una herramienta para representar probabilidades imprecisas, esto con el fin de establecer grados de probabilidad para medir la plausibilidad de eventos.

El nombre *probabilidad imprecisa* fue formulado desde el comienzo en un sentido amplio como un término genérico para aquellos modelos matemáticos o estadísticos que miden el *chance* o la incertidumbre sin el uso de probabilidades exactas. Estos modelos pueden ser cualitativos (como lo son los modelos de probabilidad comparativos), o cuantitativos (como los intervalos de probabilidad, funciones de creencia, cotas inferiores y superiores de valores esperados, entre otros). El hecho a destacar es que los modelos de probabilidades imprecisas son necesarios en aquellos problemas en los que se tiene poca información para determinar con exactitud un valor probabilístico. Estas características, todas de problemas reales como se muestra en la sección 4.4, demandan un procedimiento que garantice la toma de una decisión realista que tenga presente la incertidumbre del problema a abordar. En estas aplicaciones se ha podido evidenciar diferentes ventajas sobre la teoría clásica de la probabilidad (véase la sección 4.4).

3.2. Justificación

A lo largo de la historia se ha mostrado que la complejidad de la naturaleza y el comportamiento estocástico de la misma, implican que en el desarrollo de teorías científicas se planteen desarrollos que buscan la mayor aproximación a la realidad, aproximaciones que, una vez formulada una teoría, buscan realizar predicciones bajo incertidumbre. Dentro de estas fuentes de incertidumbre pueden destacarse las siguien-tes: (i) comportamiento estocástico potencialmente no determinista de la teoría (*incertidumbre aleatoria*) y (ii) la falta de conocimiento sobre el verdadero sistema, esto es, su representación matemática, y los valores específicos que deben

[2] Tal como afirma Schum (2001), es de destacar que Aristóteles tuvo concepciones de la probabilidad que hoy en día llamaríamos difusas.

asumirse para explicitar la incertidumbre del mismo. Reconocer y cuantificar la incertidumbre es importante porque permite a los modeladores - y futuros postuladores de teorías científicas - asignar eficazmente los recursos hacia la mejora del modelo en cuestión, así como evaluar el grado de confianza que pueden tener en las predicciones de la teoría.

La teoría de la probabilidad ha sido durante mucho tiempo el marco matemático bien aceptado para describirla. Sin embargo, Keynes (1921), de Finetti (1937) y Cox (1946), entre otros, han demostrado por el argumento económico llamado *Dutch Book argument* que la teoría de la probabilidad también es un instrumento adecuado para describir la incertidumbre epistémica. Brevemente, su argumento es que cuando el estado del conocimiento de una persona es cuantificable mediante preferencias declaradas entre diversas elecciones (con el requisito que esas preferencias sean coherentes en el sentido de evitar pérdida económica), las cuantificaciones de los conocimientos resultantes pueden expresarse mediante leyes de la probabilidad.

Y es que las leyes de la probabilidad resultan de suficiente interés a la hora de formular una teoría científica. Por ejemplo, dado que en la mayoría de los casos un agente que busca formular una de estas teorías no tiene acceso total al conocimiento, esto debido a las limitaciones de sus sentidos y de la incertidumbre presente, él tendrá que recurrir a otros aspectos con el fin de mejorar su estado de conocimiento (por ejemplo, opiniones de expertos) (Pollino et al., 2007; Reichert et al., 2007). El enfoque formal para la obtención de conocimientos acerca de una cantidad incierta dentro de una teoría de la probabilidad se conoce como *obtención de probabilidad* (véase Meyer and Booker, 1991; O'Hagan et. al., 2004; James et. al., 2010). Una situación que ejemplifica esta afirmación es el caso de los modelos que se utilizan para tomar decisiones de carácter público. Generalmente se está interesado en el conocimiento intersubjetivo que representa el estado actual del conocimiento de la comunidad científica acerca de un sistema ambiental, su descripción matemática, o valores específicos de los parámetros. Así, los argumentos a favor de una teoría de probabilidades para representar tanto la incertidumbre aleatoria como la epistémica se fortaleció aún más en el caso de la representación del conocimiento intersubjetivo, esto debido a la necesidad de mantener la coherencia y la transparencia. La importancia de una interpretación intersubjetiva de las probabilidades para describir el razonamiento científico ya ha sido discutido por Gillies (1991).

Lo anterior muestra la utilidad de formular el conocimiento epistémico utilizando una teoría de la probabilidad. No obstante, las imprecisiones en los procedimientos de obtención de datos, los problemas en la cuantificación de las creencias de un individuo, la medición de la información de diferentes individuos, o desacuerdos entre las opiniones de expertos pueden llevar a la incertidumbre sobre la cuantificación probabilística de conocimiento (O'Hagan y Oakley, 2004). Este tipo de incertidumbre se ha llamado en la literatura *ambigüedad*. Los investigadores de las probabilidades imprecisas están interesados en identificar, describir y tratar de reducir la incertidumbre presente. Varios métodos han sido diseñados con este fin (véase la sección 4.4), métodos que siguen las ideas de la teoría de probabilidades imprecisas presentadas por Walley (1991).

La teoría de Walley extiende la teoría de la probabilidad subjetiva tradicional a las probabilidades imprecisas mediante la interpretación de compra y venta de precios de apuestas. Otros enfoques alternos de probabilidades imprecisas es el presentado por Weichselberger (2000). Allí, Weichselberger generaliza los axiomas de Kolmogorov de la probabilidad clásica, pero a diferencia de Walley (1991) no impone interpretación alguna. En ambos trabajos se establecen condiciones de consistencia que relacionan distribuciones de probabilidades imprecisas con objetos matemáticos llamados *conjuntos convexos*[3]. Un hecho a destacar es que en el contexto de la teoría de probabilidades imprecisas, la teoría bayesiana clásica de la probabilidad también es generalizada (Ríos Insua y Ruggeri, 2000; Berger, 1994).

Uno de los mayores aportes de la teoría de probabilidades imprecisas, y el cual es una diferencia radical con la teoría bayesiana clásica de la probabilidad es la cuantificación de la incertidumbre. Tradicionalmente, dicha cuantificación es llevada a cabo mediante el uso de probabilidades precisas. La idea es que a cada evento A, se le asigna una única y precisa probabilidad $P(A)$, probabilidad que generalmente satisface los axiomas de Kolmogorov (Augustin y Cattaneo, 2010). Si bien esta asignación puntual - precisa, clásica - de probabilidades ha sido bastante fructífera en diversas aplicaciones, también se han encontrado dificultades en diferentes campos del conocimiento (en la sección 4.4 se presentarán con detalle estas dificultades). Tal vez, la principal razón de sus limitaciones se debe a que la probabilidad clásica demanda un alto nivel de precisión y de consistencia de la información, lo cual es muy restrictivo si tenemos en cuenta nuestra incertidumbre a la hora de tomar una decisión o asignar un valor a una creencia que tengamos en una evidencia o una hipótesis científica. Esto hace que en diferentes situaciones seamos incapaces de asignar un valor probabilístico exacto a una de estas últimas.

Precisamente el reconocimiento de la dificultad a la hora de asignar una probabilidad precisa a un evento proviene desde hace tiempo. La idea de usar probabilidades imprecisas - no exactas, no precisas, tiene una historia considerable. Por ejemplo, Hampel (2009) presenta un extenso tratamiento histórico de probabilidades imprecisas no aditivas. No obstante hay que decir que el primer acercamiento formal que

[3]Otros de los objetos matemáticos considerados en la teoría son las estadísticas fuertes (Augustin y Hable, 2010) y los enfoques bayesianos robustos (Ríos Insua y Ruggeri 2000).

utilizó conceptos matemáticos en estas probabilidades proviene de al menos la mitad del siglo XIX (Boole, 1854). En los últimos treinta años la teoría se ha desarrollado de forma considerable, iniciando con los fundamentos presentados por Walley (1991) como se dijo anteriormente, quien fuese el que acunó el término *probabilidad imprecisa*, mientras que Cui y Blockley (1990) introdujeron la teoría de intervalos de probabilidad como una manera de medir el apoyo evidencial en los sistemas basados en el conocimiento (Kuznetsov, 1991; Weichselberger, 2000, también utilizaron el término *intervalo de probabilidad*). Su idea original consiste en que los intervalos se utilizan para representar la medida de probabilidad con el fin de establecer y hacer explícita la falta de información a la hora de asignar un valor probabilístico a una evidencia[4]. En la literatura puede encontrarse un trabajo considerable dedicado al razonamiento probabilístico acerca de las restricciones condicionales proposicionales, véanse Dubois et al (1993), Frisch y Haddawy (1994). Entre algunos de los trabajos que se han realizado sobre intervalos de probabilidad se encuentran Dempster (1969) y Shafer (1976).

Una de las principales ventajas de las probabilidades imprecisas con respecto a las probabilidades clásicas son los métodos que brindan una mayor *flexibilidad* para la cuantificación de la incertidumbre. Estos y otros aspectos más son intratables en la teoría bayesiana de la evidencia; "dejar de lado la idea de utilizar una distribución de probabilidad precisa por la idea de tomar en consideración un conjunto de distribuciones, conlleva a las distribuciones de probabilidades imprecisas que proporcionan un medio para la representación de esta ambigüedad" (Rinderknecht et. al., 2012). De esta manera, las probabilidades imprecisas pueden formar un puente entre la ignorancia total y riesgo caracterizado precisamente por permitir un cierto grado de imprecisión para representar ambigüedad[5].

3.3. La teoría de la evidencia de Dempster-Shafer

Como vimos en la sección 2.1, la teoría bayesiana de la probabilidad hace uso de modelos probabilísticos en los que se asignan probabilidades exactas para el

[4]Visto desde el lenguaje, un elemento importante ha sido lo que éste ha aportado a la representación del conocimiento probabilístico, representación que se ha llevado a cabo mediante *intervalos de probabilidades condicionales*, también llamadas *restricciones condicionales*, (Lukasiewicz, 1998).

[5]Un ejemplo del manejo de esta técnica de distribuciones de probabilidades imprecisas es presentado por Rinderknecht et. al., (2012). Allí, ellos introducen tres métricas para describir la ambigüedad de las características de las distribuciones de probabilidad, a saber, su ancho, la forma y el modo. Argumentan que las probabilidades imprecisas permiten cuantificar esta ambigüedad e ilustran su afirmación en la toma de decisiones ambientales, así como también presentan un paquete computacional para llevar a cabo los cálculos requeridos.

planteamiento del modelo. De esta manera, antes de llevar a cabo algún tipo de razonamiento, el bayesianismo asume que uno está en capacidad de dar probabilidades *a priori* como valores iniciales del proceso, de manera que en esta teoría se requiere una valoración completa tanto de la hipótesis como de las evidencias relacionadas.

La teoría bayesiana de la probabilidad ha sido usada para caracterizar la incertidumbre aleatoria (incertidumbre que resulta del hecho que un sistema pueda comportarse de cierta manera que no puede determinarse), y la incertidumbre epistémica (incertidumbre que resulta de la falta de conocimiento sobre un sistema). Por ejemplo, en el caso de la incertidumbre aleatoria, ésta puede ser descrita utilizando un tratamiento frecuentista. No obstante, en situaciones donde se tiene poca información completa, o en presencia de informaciones contradictorias entre sí, en general la teoría bayesiana no captura la incertidumbre epistémica. Esto llevó a la necesidad de considerar otros tratamientos para realizar inferencias, tratamientos como la teoría de Dempster-Shafer.

La teoría de la evidencia de Dempster-Shafer (abreviada DS en la literatura), también conocida como teoría de las funciones de creencia, debe su nombre al trabajo de Arthur Dempster (1968) y su estudiante Glenn Shafer (1976). Dempster (1967) desarrolló la teoría para combinar grados de creencia a partir de diferentes evidencias, mientras que Shafer (1976) desarrolló el método para obtener grados de creencias para una hipótesis a partir de las probabilidades subjetivas relacionas con la hipótesis en cuestión. Más exactamente, el trabajo de Shafer está basado en las ideas de Dempster (1967) sobre la modelación de incertidumbre en términos de probabilidades inferiores y superiores inducidas por una función multivaluada. Estas probabilidades superiores e inferiores, son llamadas *creencia* y *plausibilidad* (véanse las Definiciones 3.3.3 y 3.3.4 más adelante). Sin embargo, vale la pena mencionar que las ideas de esta teoría ya se habían vislumbrado en el siglo XVII, pues son una generalización de la teoría bayesiana subjetiva. Tal como afirma Barnett (1981), la relación entre DS y la teoría bayesiana puede formularse así: "la teoría DS se reduce al razonamiento bayesiano clásico cuando el conocimiento de un agente es exacto, pero es más flexible en la representación del conocimiento cuando hay que tratar con la ignorancia y la incertidumbre".

La teoría de Dempster-Shafer es un modelo en el cual se representan relaciones cuantitativas de compatibilidad o posibilidad entre las proposiciones involucradas, permitiendo así representar el razonamiento llevado a cabo bajo incertidumbre, información imprecisa e incompleta. La idea es que a partir de estas relaciones cualitativas se obtiene (mediante un razonamiento lógico) pruebas que llevan a conclusiones. Brevemente, puede decirse que la teoría DS está basada en dos ideas: la idea de obtener grados de creencia para una hipótesis a partir de probabilidades subjetivas de las evidencias relacionadas con la hipótesis, y la regla de combinación de Dempster para combinar estos grados de creencia cuando están basados en ítems independientes de evidencia. Precisamente esta posibilidad de combinación es una de las principales razones para preferir la teoría DS en lugar de la teoría bayesiana, pues mediante esta combinación se pueden estudiar modelos que son especificados parcialmente, y en los cuales es necesario tener una forma de considerar evidencias de manera simultánea (Smets, 1999).

Esta posibilidad de combinar evidencias al mismo tiempo popularizó el uso de la teoría DS. Tal como afirma Liu (2001), "la teoría DS ha sido popular desde los años 80's cuando los investigadores en inteligencia artificial, en su búsqueda de diferentes mecanismos para modelar la incertidumbre, y que fuesen más generales que los bayesianos, encontraron diversas aplicaciones de esta teoría. Así, es posible describir la ignorancia en presencia de información incompleta, e irla reduciendo a medida que se obtiene más evidencia". No obstante, en algunas ocasiones la regla de combinación de Dempster arroja resultados contraintuitivos. Este punto será tratado con detalle en la sección 3.5.

El propósito en esta sección es presentar los elementos básicos de la teoría DS. La idea es mostrar las bases probabilísticas de las funciones de masa definidas por Shafer (1976), con el fin de ver cómo obtener una función de masa a partir de una distribución de probabilidad; el concepto clave es el de función multivaluada (Dempster, 1967). El tratamiento aquí desarrollado sigue las ideas originales de Dempster (1967), Shafer (1976) en un lenguaje moderno como el de Liu (2001). Así mismo, veré los aspectos en los que la teoría DS difiere del bayesianismo clásica en varios aspectos. En primer lugar, DS no tiene problemas en admitir un modelo probabilístico incompleto en el que no se tiene información precisa de algunos de los parámetros, tales como las probabilidades *a priori* o condicionales que el bayesianismo sí asume de entrada. En segundo lugar, en DS los valores probabilísticos no se entienden como valores asignados a eventos dentro de un espacio muestral, por lo que en la teoría DS, y a diferencia del bayesianismo tradicional, puede darse el caso de tener valoraciones de verdad para una proposición y para su negación al mismo tiempo, logrando así que la cuantificación total de nuestras creencias sea estrictamente menor que uno, algo que no está permitido en los axiomas pascalianos de la teoría bayesiana. Finalmente, dada la incompletitud del modelo en la teoría DS, ésta no busca dar respuestas completas y definitivas a las preguntas que se plantean en una situación, sino que simplemente da respuestas parciales hasta donde es posible dependiendo de la información disponible. Esto significa que DS nos dice qué tanto aporta la evidencia a la verdad de la hipótesis, en vez de estimar que tan cerca está la hipótesis de ser verdad.

3.3.1. Conceptos básicos

En la teoría DS una pieza de información se describe generalmente como una función de masa en un marco de discernimiento (Shafer, 1976).

Definición 3.3.1. Un conjunto se llama un *marco de discernimiento* (o simplemente un marco) si contiene posibles respuestas mutuamente excluyentes y exhaustivas a una pregunta. El conjunto se denota generalmente como Θ, y se requiere que en cualquier momento, uno y sólo un elemento del conjunto sea verdad.

Definición 3.3.2. Una función $m : \mathcal{P}(\Theta) \rightarrow [0, 1]$ se denomina una *función de masa* sobre un marco Θ si satisface las siguientes dos condiciones:

1. $m(\emptyset) = 0$,
2. $\sum_{A\subseteq\Theta} m(A) = 1$,

donde $\emptyset$ es el conjunto vacío y A es un subconjunto de Θ.

Una función de masa también es llamada una *asignación básica de probabilidad*.

Definición 3.3.3. Una función $Bel : \mathcal{P}(\Theta) \rightarrow [0, 1]$ se denomina una *función de creencia* si satisface las siguientes dos condiciones:

1. $Bel(\Theta) = 1$,
2. $Bel(\bigcup_{l=1}^{n}) \geq \sum_l Bel(A_l) - \sum_{l>j} Bel(A_l \bigcap A_j) + \cdots + (-1)^{-n} Bel(\bigcap_l A_l)$.

A partir de la definición puede mostrarse que $Bel(\emptyset) = 0$ para cualquier función de creencia.

Una función de creencia también es llamada una función de apoyo. La diferencia entre $m(A)$ y $Bel(A)$ es que $m(A)$ es nuestra creencia comprometida con A excluyendo cualquiera de sus subconjunto, mientras que $Bel(A)$ es nuestro grado de creencia tanto en A como en todos sus subconjuntos. En general, si m es una función de masa sobre un marco Θ, entonces

$$Bel(A) = \sum_{B\subseteq A} m(B) \tag{3.3.1}$$

es una función de creencia sobre Θ. La recuperación de una función de masa de una función de creencia se realiza de la siguiente manera (Shafer, 1990):

$$m(A) = \sum_{B\subseteq A} (-1)^{|B|} Bel(B). \tag{3.3.2}$$

Para cualquier marco finito, siempre es posible obtener la función de masa correspondiente a una función de la creencia y la función de masa es única (Liu, 2001).

Un subconjunto A con $m(A) > 0$ se denomina un *elemento focal de esta función de creencia*. Si todos los elementos focales de una función de creencia son los singletones de Θ, entonces la función de masa correspondiente es exactamente una distribución de probabilidad sobre Θ. En este sentido, las funciones de masa son distribuciones de probabidad generalizadas. Si sólo hay un elemento focal de una función de creencia y el elemento focal es todo el marco Θ, esta función se llama una *función de creencia vacía*. Esta función representa la ignorancia total (por falta de conocimiento). La pareja (Θ, Bel) se denomina en la literatura una *estructura DS*.

Definición 3.3.4. Una función $Pl(A) = 1 - Bel(\sim A)$ donde $\sim A$ denota la negación de A, se denomina una *función de plausibilidad*.

Una función de plausibilidad $Pl(A)$ representa el grado en el que la evidencia no refuta a A.

A partir de una función de masa podemos obtener su función de plausibilidad (Shaffer, 1990) considerando la expresión

$$Pl(B) = \sum_{A \cap B \neq \emptyset} m(A). \tag{3.3.3}$$

En un sistema que utiliza el razonamiento evidencial, el conocimiento o los resultados de inferencias son representados usualmente por los intervalos de $Bel()$ y $Pl()$.

Algunas de las características de este intervalo son las siguientes (Wesley, 1983):

$[Bel(A), Pl(A)] = [1, 1]$ subconjunto A completamente verdadero,
$[Bel(A), Pl(A)] = [0, 0]$ subconjunto A completamente falso,
$[Bel(A), Pl(A)] = [0, 1]$ subconjunto A completamente ignorante,
$[Bel(A), Pl(A)] = [Bel(A), 1], 0 < Bel(A) < 1$ tiende a apoyar A,
$[Bel(A), Pl(A)] = [0, Pl(A)], 0 < Pl(A) < 1$ tiende a refutar A,
$[Bel(A), Pl(A)] = [Bel(A), Pl(A)], 0 < Bel(A) < Pl(A) < 1$ puede apoyar o refutar A.

Con respecto a estos intervalos de probabilidad en la teoría DS, su propósito es brindar un grado de certidumbre de las evidencias. Así, un intervalo con una longitud $Pl(A) - Bel(A)$ *pequeña* muestra que tenemos un alto grado de creencia, mientras que una longitud *grande* muestra que no estamos tan seguros. No obstante, la igualdad $Bel(A) = Pl(A)$ no necesariamente indica que sepamos cuál hipótesis es correcta, sino cuál es más probable de suceder.

Cuando se tiene más de una función de masa en el mismo marco de discernimiento, se obtiene la combinación de estas funciones de masa utilizando *la regla de* *combinación de Dempster*. Si m_1 y m_2 son dos funciones de masa sobre un marco Θ, entonces $m = m_1 \oplus m_2$ es la función de masa después de combinar m_1 y m_2, y

$$m(C) = \frac{\sum_{A\cap B=C} m_1(A)m_2(B)}{1 - \sum_{A\cap B=\emptyset} m_1(A)m_2(B)}. \tag{3.3.4}$$

El símbolo $\oplus$ denota la aplicación de la regla de combinación de Dempster. La condición para utilizar esta regla se establece diciendo que "dos o más piezas de evidencias se basan en cuerpos distintos de evidencia" (Shafer, 1976).

A continuación presentaré algunos ejemplos sencillos que ilustran la forma de razonamiento de la teoría DS. En la sección 3.3.2 veré un ejemplo más ilustrativo que nos permitirá hacer un análisis más detallado de la teoría DS y sus ventajas o desventajas con respecto al tratamiento bayesiano.

Ejemplo 3.3.5. En un ascensor se encuentran cuatro personas, digamos, B, J, S, y K. De repente, el ascensor queda detenido y totalmente a oscuras debido a un fallo de luz. Al cabo de un tiempo la luz vuelve y cuando el ascensor queda iluminado todos se dan cuenta que K ha sido asesinado por la espalda con un cuchillo (lo cual muestra que no pudo haberse suicidado). Después que todos salen y llega la policía al lugar de los hechos se encuentran observan que no hubo posibilidad que alguien haya entrado al ascensor, así que necesariamente uno de los tres, B, J o S es el asesino.

Si queremos modelar esta situación con la teoría DS, lo primero que debemos plantear es el espacio de posibilidades. Dado que uno de los tres restantes es el asesino, tenemos $\Theta = \{B, J, S\}$, por lo que nuestro conjunto de partes está dado por $\mathcal{P}(\Theta) = \{\emptyset, \{B\}, \{J\}, \{S\}, \{B, J\}, \{B, S\}, \{J, S\}, \{B, J, S\}\}$. Después que la policía estudia algunas pistas en el lugar, obtiene los valores de la función de masa para los elementos de $\mathcal{P}(\Theta)$, los cuales pueden apreciarse en el cuadro 3.1. Así, en nuestro ejemplo, en vista de la valoración de las evidencias realizada por la policía, si ha de encontrarse un culpable, B tendría la primer opción de ser el asesino de K, mientras que si vemos en conjunto (algún tipo de complot), la pareja formada por J y S parece ser la más probable de haber asesinado a K (pero no es posible dividir la evidencia para $\{J, S\}$ entre J y S con el fin de determinar la culpabilidad de cada uno de ellos por aparte). Todos los valores se encuentran en el cuadro 3.2.

Ejemplo 3.3.6. Supongamos que se quiere formular una hipótesis sobre los resultados de un experimento en un laboratorio. Para ello, los científicos han decidido que cien repeticiones son un primer acercamiento para inferir la tendencia en los resultados del experimento (dado que la fidelidad de los equipos va disminuyendo cada repetición). Con el fin de tener una segunda opinión, decidieron realizarlo en

Hipótesis	Función de masa $m(-)$
Nadie es culpable	0
B es culpable	0,1
J es culpable	0,2
S es culpable	0,1
B o J es culpable	0,1
B o S es culpable	0,1
S o J es culpable	0,3
Uno de los tres es culpable	0,1

Cuadro 3.1: Valores de la función de masa para el ejemplo 3.3.5

	$\{B\}$	$\{J\}$	$\{S\}$	$\{B,J\}$	$\{B,S\}$	$\{J,S\}$	$\{B,J,S\}$
$m(A)$	0,1	0,2	0,1	0,1	0,1	0,3	0,1
$Bel(A)$	0,1	0,2	0,1	0,4	0,3	0,6	1,0
$Pl(A)$	0,4	0,7	0,6	0,9	0,8	0,9	1,0
$Bel(\neg A)$	0,6	0,3	0,4	0,1	0,2	0,1	0,0
Intervalo de probabilidad	[0,1, 0,4]	[0,2, 0,7]	[0,1, 0,6]	[0,4, 0,9]	[0,3, 0,8]	[0,6, 0,9]	[1,0, 1,0]

Cuadro 3.2: Valores de la teoría DS para el ejemplo 3.3.5

dos laboratorios distintos utilizando equipos diferentes. En el laboratorio 1 comienzan a llevar a cabo el experimento y en la repetición 51 uno de los equipos falló y no pudieron continuar, mientras que en el segundo laboratorio solamente lograron repetir el experimento cuarenta veces hasta que uno de los equipos también falló. Mientras que pudieron realizarse los experimentos en ambos laboratorios se obtuvieron dos resultados A y B, resultados que pueden resumirse en el cuadro 3.3.

	$m_1(-)$	$m_2(-)$
A	0,3	0,2
B	0,2	0,2
$A \vee B$	0,5	0,6

Cuadro 3.3: Valores de las funciones de masa del ejemplo 3.3.6

Con el fin de utilizar la regla de combinación de Dempster, consideremos el cuadro 3.4.

	$m_1(A)$	$m_2(B)$	$m_1(\Theta)$
$m_2(A)$	0,06	0,04	0,1
$m_2(A \vee B)$	0,06	0,04	0,1
$m_2(\Theta)$	0,18	0,12	0,3

Cuadro 3.4: Valores para el ejemplo 3.3.6

Al utilizar la regla de combinación de la teoría DS (3.3.4), tenemos:

$$\begin{aligned}
m_{12}(A) &= \frac{0{,}06 + 0{,}06 + 0{,}18 + 0{,}1}{1 - 0,04} = 0{,}42 \\
m_{12}(B) &= \frac{0{,}04 + 0{,}12}{1 - 0,04} = 0{,}17 \\
m_{12}(A \cup B) &= \frac{0{,}1}{1 - 0,04} = 0{,}1 \\
m_{12}(\Theta) &= \frac{0{,}3}{1 - 0,04} = 0{,}31 \\
Bel(A) &= m_{12}(A) = 0{,}42 \\
Bel(B) &= m_{12}(B) = 0{,}17 \\
Bel(A \vee B) &= m_{12}(A) + m_{12}(B) + m_{12}(A \vee B) = 0{,}69 \\
Pl(A) &= m_{12}(A) + m_{12}(A \vee B) + m_{12}(\Theta) = 0{,}83 \\
Pl(A) &= m_{12}(B) + m_{12}(A \vee B) + m_{12}(\Theta) = 0{,}58 \\
Pl(\Theta) &= 1
\end{aligned}$$

De esta manera, el intervalo de probabilidad para la hipótesis A es $[0{,}42, 0{,}83]$, mientras que para la hipótesis B su intervalo de probabilidad es $[0{,}17, 0{,}58]$. Así, ambas hipótesis siguen siendo igual de probables en vista de los experimentos realizados y en este caso la teoría DS no nos ayuda a determinar cuál de ellas tiene mayor posibilidad de ocurrir.

Ejemplo 3.3.7. Supongamos que queremos determinar experimentalmente la veracidad de una hipótesis A. Después de realizar diferentes repeticiones en dos laboratorios m_1 y m_2 se han encontrado los valores que se muestran en el cuadro 3.5.

Al utilizar estos valores y combinarlos con la regla de la teoría DS (3.3.4), obte-

	$m_1(-)$	$m_2(-)$
A	0,6	0,8
$\neg A$	0,2	0,1
Θ	0,2	0,1

Cuadro 3.5: Valores de las funciones de masa del ejemplo 3.3.7

	$m_1(A)$	$m_1(\neg A)$	$m_1(\Theta)$
$m_2(A)$	0,48	0,16	0,16
$m_2(\neg A)$	0,06	0,02	0,02
$m_2(\Theta)$	0,06	0,02	0,02

Cuadro 3.6: Valores para el ejemplo 3.3.7

nemos:

$$\begin{aligned}
m_{12}(A) &= \frac{0{,}48 + 0{,}06 + 0{,}16}{1 - (0,16 + 0,06)} = 0{,}9 \\
m_{12}(\neg A) &= \frac{0{,}02 + 0{,}02 + 0{,}02}{1 - (0,16 + 0,06)} = 0{,}08 \\
m_{12}(\Theta) &= \frac{0{,}02}{1 - (0,16 + 0,06)} = 0{,}03 \\
Bel(A) &= 0{,}9 \\
Bel(\neg A) &= 0{,}08 \\
Bel(\Theta) &= 1 \\
Pl(A) &= 0{,}92 \\
Pl(\neg A) &= 0{,}1 \\
Pl(\Theta) &= 1.
\end{aligned}$$

Vemos entonces que que la incertidumbre utilizando la teoría DS está dada por el intervalo $[0{,}9, 0{,}92]$, mientras que si utilizamos la teoría bayesiana y técnicas estadísticas, sabremos que la covarianza de A por m_1 y m_2 es $P = (P_1^{-1} + P_2^{-1})^{-1} = (\frac{1}{0{,}1} + \frac{1}{0{,}05})^{-1} = \frac{1}{3}$, y la media m toma el valor $m = P(P^{-1}m_1 + P_2^{-1}m_2) = 0{,}8$, por lo que la incertidumbre obtenida mediante el bayesianismo está dada por $[0{,}8 - \frac{1}{3}, 0{,}8 + \frac{1}{3}]$. Así, en este ejemplo la teoría DS ofrece un mejor estimativo que el bayesianismo al presentar un menor grado de incertidumbre.

3.3.2. Los tres prisioneros según la teoría DS

En este apartado ilustraré la teoría DS utilizando como ejemplo el problema de los tres presos abordado bayesianamente en la sección 2.6. Como vimos allí, el interrogante al que queremos dar respuesta trata sobre la probabilidad que tiene el preso A de ser declarado culpable. Para ver el planteamiento que hace la teoría DS de esta situación, consideremos la notación de la sección 2.6 junto con los eventos B_R : "el guardia dijo que entregó la carta al preso B", y C_R : "el guardia dijo que entregó la carta al preso C".

En la sección 2.6 vimos que el bayesianismo asume que el conocimiento previo que tenemos del tribunal que declara la culpabilidad de uno de los tres presos, asigna probabilidades equitativas, esto es, que cada preso tiene $\frac{1}{3}$ de probabilidad de ser culpable ($f(A_C) = f(B_C) = f(C_C) = \frac{1}{3}$, donde f es la función de culpabilidad definida por el tribunal). Igualmente, el bayesianismo también asume que en el caso que el preso A fuese declarado culpable, el guardia escoge a quién dar la carta con probabilidad de $\frac{1}{2}$. En esa sección concluimos que bajo estas suposiciones, la probabilidad que el preso A sea declarado culpable, dado que el guardia eligió al preso B como remitente de la carta, es de $\frac{1}{3}$. Según esto, la respuesta del guardia al preso A no es importante para las posibilidades que A sea declarado culpable. No obstante, si se da el caso que el guardia no elige al azar (con igual probabilidad entre los presos B y C), entonces la probabilidad condicional $P(A_C \mid B_R)$ necesariamente estará entre 0 y $\frac{1}{2}$, esto es, $0 \leq P(A_C \mid B_R) \leq \frac{1}{2}$.

Si eliminamos las anteriores dos suposiciones y aceptamos nuestra incertidumbre en el proceso que utiliza el tribunal para declarar al culpable del asesinato, así como nuestra falta de total conocimiento en la forma en la que el guardia eligió al receptor de la carta, de lo único que podemos estar seguros es que la proposición[6] B_R es *compatible* tanto con A_C como con C_C, pero es *incompatible* con B_C (suponiendo que el guardia es honesto y en verdad entregó la carta a B sabiendo que B será dejado en libertad). Así, según el testimonio y el actuar del guardia, los únicos estados de cosas que pueden darse son (A_C, B_R) y (C_C, B_R). Estas parejas de posibles resultados que pueden presentarse son llamados *marco de discernimiento* en la teoría DS, o *posibilidades* en la teoría de lógicas difusas de Zadeh[7] (1965). Con respecto a las

[6]Hasta este momento los símbolos A_C, B_C, C_C, B_R, y C_R han denotado eventos. Sin embargo, en la teoría DS es importante considerar proposiciones asociadas a eventos, así que utilizaremos estos mismos símbolos para denotar dichas proposiciones, lo cual esperamos no cause confusión y quede aclarado según el contexto de discusión (tal vez una forma apropiada de distinguir las proposiciones de los eventos sea denotarlas con letras minúsculas, a diferencia de los eventos que denotamos con letras mayúsculas).

[7]Zadeh (1965) introdujo la noción de conjunto difuso con el fin de formalizar los conceptos humanos en su relación con la representación del lenguaje natural humano y la computación con

restricciones propias de cada situación que permiten determinar los estados de cosas posibles, éstas son conocidas en la teoría DS como *relaciones de compatibilidad* (en el ejemplo de los tres presos, un ejemplo de estas restricciones es que el tribunal declara culpable a uno y solamente uno de los presos).

Lo anterior muestra que si bien podemos conocer los estados de cosas en una situación determinada, no necesariamente estamos en capacidad de asignar valores probabilísticos precisos a estos eventos (por ejemplo, no sabemos con total certeza los valores de $f(A_C)$, $f(C_C)$ y $f(B_C)$ pues desconocemos la forma en la que el tribunal declara al culpable, y por tanto desconocemos las probabilidades condicionales que dependen de estos valores de culpabilidad). Esta incapacidad que tenemos nos impide formular un modelo probabilístico completo como el de las redes bayesianas. Por consiguiente, necesitamos buscar otro tipo de teorías, conceptos, relaciones y demás, que nos permitan realizar inferencias a partir de nuestra incertidumbre en el modelo a estudiar.

Como he venido anunciando desde la sección 2.6, la teoría DS se presenta como una alternativa al tratamiento bayesiano en la que se busca dar solución a modelos probabilísticos incompletos. En esta teoría - a diferencia del bayesianismo - se consideran nuestros grados de seguridad en la existencia de una prueba para una proposición, grados que estás en función de la información disponible. En el ejemplo de los tres prisioneros, dado que no tenemos conocimiento completo sobre cómo el tribunal elige al culpable - no tenemos evidencias de pruebas lógicas para A_C ni para $\neg A_C$ - nuestra función de creencia para la proposición A_C está dada por $Bel(A_C) = Bel(\neg A_C) = 0$. Este resultado es inaceptable en la teoría bayesiana, pues de entrada ésta asume los axiomas de Kolmogorov[8].

La búsqueda de condiciones que nos permitan tener funciones de creencia $Bel(q)$ no nulas nos lleva a pensar en situaciones en las que la negación $\neg q$ de una proposición q sea incompatible con la evidencia disponible, caso en el cual tendremos $Bel(q) \neq 0$; esto se presenta en el caso de los tres presos, puesto que C_R y B_R son incompatibles. Más aún, si tenemos información parcial de una situación, podremos garantizar que nuestra función de creencia en una proposición es no nula en el caso que dicha información esté a favor de la proposición en juego. Para ilustrar este punto, supongamos que cuando el guardia se dirige a entregar la carta del preso

palabras. Los conjuntos difusos y la lógica difusa se utilizan con el fin de modelar el razonamiento impreciso a la hora de tomar decisiones racionales en un ambiente con incertidumbre e imprecisión. En las Conclusiones describiremos la relación entre esta lógica y las teorías probabilísticas de la evidencia.

[8]Para una descripción detallada de estos axiomas en la formalización matemática de la probabilidad, véase Schum (2001).

A, su supervisor lo aborda y le pide que pase por algunas celdas (tal vez las celdas que se encuentran en el mismo piso que las celdas de los presos B y C) entregando algunas correspondencias de los familiares de los otros presos. Así, al cumplir con la tarea asignada por su jefe, el guardia vuelve luego a dar una ronda por la celda del preso A, momento en el que éste le pregunta quién recibió la carta. Por supuesto, dado que el guardia tuvo contacto con varios presos diferentes a B y C, no está del todo seguro a cuál de los dos le entregó la carta. Después de meditarlo un rato, el guardia comenta al preso A que cree haber entregado la carta al preso B, pero que no está del todo seguro; tal vez solamente lo está en un 52 %. En presencia de este porcentaje, la teoría DS afirma que no estamos en capacidad de probar $\neg B_C$, esto es, nuestro grado de creencia en una prueba lógica de B_C es 0,52 (o equivalentemente, $Bel(\neg B_C) = 0{,}52$).

La anterior situación muestra que si tenemos buenas razones para creer en los testimonios de otros, podemos construir nuestra función de creencia con un valor que depende de tales testimonios. Este es el mismo caso que se presenta cuando confiamos en el tribunal y en sus jurados, quienes pueden decirnos que tienen en su poder pruebas que incriminan por igual a los presos A, B, y C, esto es, $f(A_C) = f(B_C) = f(C_C) = \frac{1}{3}$.

Y es que si cada uno de los tres presos tiene esta probabilidad de ser declarado culpable, cada momento en la deliberación del jurado en el que alguno de ellos es considerado culpable del asesinato determina un posible estado de cosas sobre los otros dos prisioneros. Para ilustrar esta situación imaginemos que el jurado considera en algún momento que quien será declarado culpable es el preso A; inmediatamente sabemos que las parejas de estados que cosas que pueden darse a partir de la decisión son $(A_C, \neg B_C)$ y $(A_C, \neg C_C)$. Este razonamiento nos lleva a formular las parejas de proposiciones compatibles $(A_C, \neg B_C), (A_C, \neg C_C), (B_C, \neg A_C), (B_C, \neg C_C), (C_C, \neg A_C)$, y $(C_C, \neg B_C)$. De esta manera, nuestras funciones de creencia quedan valoradas como $Bel(A_C) = Bel(B_C) = Bel(C_C) = \frac{1}{3}$, y $Bel(\neg A_C) = Bel(\neg B_C) = Bel(\neg C_C) = \frac{2}{3}$.

Sin embargo, si suponemos que los prisioneros no tienen la misma posibilidad de ser declarados culpables (por ejemplo, alguno de ellos tiene antecedentes de mal comportamiento, o tal vez el asesinado tenía conflictos personales con algún preso), y esto es precisamente lo única información que tenemos de parte del jurado, entonces solamente tendremos acceso a información parcial del proceso de deliberación. Si, por ejemplo, sabemos que a diferencia de los presos B y C, el preso A nunca tuvo algún tipo de conflicto con el asesinado, en ese momento nuestra creencia en la inocencia de A nos lleva a considerar nuestra función de creencia $Bel(\neg A_C) = m$. Por supuesto, no podemos negar que durante el estudio que los jueces hacen de la posible culpabiidad de cada uno de los presos, no haya momentos en los que la evidencia presentada determine nuestra función de creencia tanto en la inocencia como en la declaración de culpabilidad del preso A. Así, para evaluar las funciones $Bel(A_C)$ y $Bel(\neg A_C)$ debemos considerar los momentos de la duración total del proceso de deliberación en el que A_C puede *probarse* verdadera. Si conocemos los antecedentes de A en un momento dado, entonces podremos tener mayor tendenecia a probar $\neg A_C$, por lo que según la teoría DS tendremos $Bel(\neg A_C) = m$ y $Bel(A_C) = 0$. Notemos que este mismo razonamiento lo lleva a cabo un agente externo que nunca trató con alguno de los presos, y a quien se le presentan como candidatos para, de entre ellos, declarar al culpable; dado que el agente no tiene información *a priori* sobre ellos y su posible relación con el asesinado, él tiene funciones de creencia no nulas tanto en A_C como en $\neg A_C$.

En la teoría DS, la medida $m(q)$ es llamada *la asignación básica de probabilidad* (Definición 3.3.2), y lo que busca es medir la *fuerza* del argumento a favor de una proposición q, la cual es denominada el *elemento focal*. En el ejemplo de los tres prisioneros, si solamente existe un elemento focal A, entonces el *peso* $1 - m(A)$ es asignado a la disyunción $A_C \vee B_C \vee C_C$, y la creencia en cualquier otra proposición D está dada por

$$Bel(D) = \begin{cases} 1, & D = A_C \vee B_C \vee C_C \\ m(A), & A \supset D \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

En una situación más compleja en la que se tengan evidencias a favor o en contra de dos o más proposiciones a la vez, la teoría DS estipula que debemos considerar nuestras creencias con respecto a la disyunción de las proposiciones. Por ejemplo, supongamos que el informe de la autopsia dictamina que quien propinó las heridas de muerte a la victima es zurdo (evidencia con peso m_1), y que en su cuerpo se encontraron cabellos rubios (evidencia con peso m_2). Si sabemos que los presos A y B son zurdos, y que los presos B y C son rubios, la restricción $A_C \vee B_C$ deberá tener en cuenta la fracción del proceso m_1, mientras que $B_C \vee C_C$ la fracción del proceso m_2, por lo que para el resto del proceso $1 - (m_1 + m_2)$ no hay restricción alguna.

De manera general, sin importar el número de elementos focales, la teoría DS establece que $\sum_D m(D) = 1$, D elemento focal, mientras que para una proposición E, $Bel(E) = \sum_{D \supset E} m(D)$. La *plausibilidad* de D es definida como $Pl(D) = 1 - Bel(\neg D)$, la cual representa la probabilidad que A sea compatible con la evidencia disponible, esto es, que puede ser probada y por tanto posible. En nuestro ejemplo, $Pl(A_C) = 1 - m$, mientras que $Pl(B_C) = Pl(C_C) = 1$. Por otro lado, el intervalo $Pl(D) - Bel(D) = 1 - (Bel(D) + Bel(\neg D)) \geq 0$ representa la probabilidad (fracción del tiempo) que D y $\neg D$ sean compatibles con la evidencia disponible.

3.4. Teoría DS vs. Teoría bayesiana

En la sección anterior vimos que si los presos tienen igual probabilidad de ser declarados culpables, los valores probabilísticos para cada una de las proposiciones A_C, B_C, y C_C, están dadas por $m(A_C) = m(B_C) = m(C_C) = \frac{1}{3}$. Así, si nuestra función de creencia inicial es $Bel(A_C) = \frac{1}{3}$ - antes de la respuesta del guardia - debemos indagar por el nuevo valor de $Bel(A)$ al conocer tal respuesta, es decir, el momento del proceso en el que la proposición A_C es probable dada la evidencia disponible (conocimiento del destinatario de la carta). Como sabemos que el momento en el que creímos en una prueba para B_C es incompatible con la evidencia B_R, debemos excluir el posible estado de cosas (B_C, B_R), y trabajar solamente con las proposiciones A_C y C_C. De esta manera, los $\frac{2}{3}$ de los momentos restantes se dividen equitativamente entre A_C y C_C, por lo que nuestra creencia en una prueba para A_C es $\frac{1}{2}$, y de igual forma para $\neg A_C$. Por tanto, nuestras funciones de creencia después de conocer la respuesta del guardia son $Bel(A_C) = Bel(\neg A_C) = \frac{1}{2}$.

El tratamiento bayesiano de esta situación presentado en la sección 2.6, y más exactamente en la expresión (2.6.1), mostró que $P(A_C \mid B_R) = \frac{1}{3}$, análisis que tuvo como hipótesis que el guardia, una vez que sabía que A fue declarado culpable, escogió entre B y C con probabilidad de $\frac{1}{2}$ para cada uno, esto es, $P(B_R \mid A_C) = P(C_R \mid A_C) = \frac{1}{2}$ (véase la Figura 2.1). Como también vimos en esa sección, si desconocemos la forma en la que el guardia determinó a quién entregar la carta, entonces $0 \leq P(A_C \mid B_R) \leq \frac{1}{2}$, donde $P(A_C \mid B_R) = 0$ si C será dejado en libertad, y $P(A_C \mid B_R) = \frac{1}{2}$ si es B quien será dejado en libertad (véase la expresión (3.1.1)).

Del análisis anterior, podemos ver que la dificultad que tiene el modelo bayesiano para tratar con información imprecisa es tratada por la teoría DS teniendo en cuenta la evidencia disponible como criterio para especificar los posibles estados de cosas, mediante la relación de compatibilidad. De hecho, si indagamos aún más en las diferencias entre un modelo bayesiano completo (con todos los valores probabilísticos especificados), y la teoría DS, encontramos que una diferencia radical es que en esta última es posible retrasar una *declaración* (un juicio) hasta que se cuente con evidencia disponible. En el ejemplo que he venido trabajando, antes de conocer la respuesras del guardia, teníamos los posibles estados de cosas $(A_C, B_R), (A_C, C_B), (B_C, C_R)$, y (C_C, B_R), estados que son compatibles con la evidencia hasta ese momento (que el tribunal solamente declarará culpable a uno de los tres presos). Para estos estados tenemos las valoraciones $m(B_C \wedge C_R) = m(C_C \wedge B_R) = \frac{1}{3}$, y $m((A_C \vee B_R) \wedge (A_C \vee C_R)) = \frac{1}{3}$, lo cual muestra que hasta este momento no tenemos inclinación hacia algún estado particular. Sin embargo, una vez conocemos la respuesta del guardia, eliminamos los estados (A_C, C_R) y (B_C, C_R), por lo que nuestra nueva valoración es $m(C_C \vee B_R) = m(A_C \vee B_R) = \frac{1}{2}$, ya que $\frac{1}{3} = m(B_C \wedge C_R)$ fue eliminado y se distribuyó equitativamente entre (C_C, B_R) y (A_C, B_R).

Una posible explicación de lo que sucede en la teoría DS y que no ocurre en la teoría bayesiana es que desde el planteamiento de esta última, los modelos probabilísticos entienden “creencia en la proposición D” como la probabilidad condicional que D sea verdad dada la evidencia e, mientras que en la teoría DS se calcula la probabilidad que la proposición D sea verdadera dada la evidencia e y que e sea *consistente* con D. Esto quiere decir que en la teoría DS no se calcula la probabilidad condicional $P(D \mid e)$, sino que se centra en la probabilidad de la implicación lógica $e \vdash D$. Aquí no debemos entender $e \vdash D$ como una proposición, sino como una *relación* entre e y D en la que necesitamos construir una prueba lógica de e a D. Así, mientras que $P(D \mid e)$ hace uso del teorema de Bayes, y por tanto de un modelo probabilístico completo donde se especifique cada probabilidad (inclusive las que son *a priori*), para calcular $P(e \vdash D)$ no necesitamos de estas probabilidades, sino de las proposiciones q que son compatibles con e y con $\neg D$:

$$P(e \vdash D) = 1 - \sum_q m(q).$$

Para el ejemplo de los tres prisioneros tenemos $P(B_R \vdash A_C) = \frac{1}{2}$, y como vimos antes, no necesitamos alguna suposición sobre el proceso que utiliza el guardia para elegir entre B y C, como sí sucede en el caso bayesiano.

Vemos que la teoría DS se diferencia de la teoría bayesiana en (al menos) los siguientes aspectos:

(a) la teoría propuesta por Dempster y Shafer puede tratar con modelos probabilísticos incompletos, incompletitud que hace referencia a la falta de algunos de lo valores probabilísticos precisos (como las probabilidades *a priori* que el bayesianismo conocidas);

(b) la información probabilística en la teoría DS (por ejemplo la fuerza de la evidencia) no se interpreta como grados de creencia (tal como en el caso bayesiano) sino como grados de certeza en el momento de la existencia de una demostración de las proposiciones;

(c) la teoría DS admite que una proposición y su negación sean compatibles simultánemente, lo cual lleva a que en algunos momentos del procesor pueda presentarse que la suma de las creencias en éstas sea menor que 1, esto es, $Bel(q) + Bel(\neg q) < 1$, donde q es una proposición (lo cual es inconcebible en el enfoque bayesiano);

(d) dado que la teoría DS trata con modelos incompletos, su objetivo no es brindar respuestas a todas las preguntas que se puedan plantear en el modelo, sino generar respuestas parciales en diferentes momentos del modelo. En otras palabras, la teoría DS estima qué tan intensa (fuerte) es la evidencia para lograr una prueba de la hipótesis (a diferencia de los modelos bayesianos donde se calcula qué tan cerca está la hipótesis de ser verdad).

Una pregunta que surge necesariamente al ver las diferencias entre los dos modelos es si toda teoría probabilística completa puede ser estudiada dentro de la teoría DS, y si además, esta última arroja los mismos resultados que el tratamiento bayesiano. La respuesta a esta pregunta es sí. La conversión (por así decirlo), de un modelo probabilístico completo a la teoría DS consiste en que ya no consideramos proposiciones individuales, sino que se definen un conjunto de estados posibles que puedan llegar a ocurrir, y a cada uno de estos se les asigna un peso m igual a la probabilidad conjunta que especifica el modelo completo.

Para ilustrar esta conversión, retomemos el ejemplo de los tres prisioneros en su solución probabilística completa (de hecho bayesiana) presentado en la sección 2.6. Allí asumimos probabilidades iguales tanto en la declaración del jurado como en la elección del guardia (una vez se sabe que A será declarado culpable). De esta manera, los estados posibles que pueden darse son $(A_C, B_R), (A_C, C_R), (B_C, C_R), (C_C, B_R)$, cuyos pesos m (los caminos de la red bayesiana) según la Figura 2.1 están dados por $m(A_C \wedge B_R) = \frac{1}{6}$, $m(A_C \wedge C_R) = \frac{1}{6}$, $m(B_C \wedge C_R) = \frac{1}{3}$, y $m(C_C \wedge B_R) = \frac{1}{3}$. Una vez que sabemos que el guardia entregó la carta al preso B, de los cuatros estados anteriores solamente quedan como posibles (A_C, C_R) y (B_C, C_R), por lo que el estado (C_C, B_R) se presenta $\frac{1}{3}$ del proceso y (A_C, B_R), $\frac{1}{6}$ del proceso. De esta manera,

$$\begin{aligned} Bel(A_C) &= \frac{m(A_C \wedge B_R)}{m(A_C \wedge B_R) + m(C_C \wedge B_R)} \\ &= \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6} + \frac{1}{3}} \\ &= \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} Bel(\neg A_C) &= \frac{m(C_C \wedge B_R)}{m(A_C \wedge B_R) + m(C_C \wedge B_R)} \\ &= \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{6} + \frac{1}{3}} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

tal como sucede en el tratamiento bayesiano, solamente que allí expresamos estas dos probabilidades como $P(A_C \mid B_R)$ y $P(\neg A_C \mid B_R)$, respectivamente.

Ahora bien, en presencia de modelos probabilísticos en los que se tienen probabilidades condicionales, estos no siempre pueden verse dentro de la teoría DS siguiendo la conversión de modelos completos descrita anteriormente. La dificultad surge en que para realizar la conversión debemos tener suficiente información para formular un modelo completo y calcular (como se hizo antes), los pesos de los estados posibles. Veamos un ejemplo que ilustra esta dificultad: si en el caso de los tres prisioneros tenemos un "presentimiento" muy fuerte que el guardia escogió aleatoriamente entre B y C (sabiendo que A es declarado culpable), como se ponderaría en el caso bayesiano generalmente, pero no estamos totalmente seguros que así fue, pues nunca tuvimos acceso a la respuesta del guardia, este "presentimiento " *no* puede ser incorporado como evidencia para obtener el segundo valor de $Bel(A_C)$ (recordemos que su primer valor fue $\frac{1}{3}$ porque tenemos la certeza que cada uno de los tres presos tiene la misma probabilidad de ser declarado culpable). La razón de esta incapacidad es que las probabilidades condicionales no pueden ser utilizadas para determinar el conjunto de estados posibles. En un lenguaje más preciso, la afirmación $p(\square \mid \triangle)$ *no* puede expresarse en una afirmación equivalente del tipo $p(f(\square, \triangle))$, donde f es una función booleana de $\square$ en $\triangle$ (Goodman, 1987).

La dificultad anterior de la teoría DS también se presenta en los modelos bayesianos, tal como vimos al final de la sección 2.6. Si desconocemos la forma en la que el guardia escogió al preso para entregarle la carta una vez que ya conocía cuál de ellos fue declarado culpable, esto es, no conocemos el valor exacto de $P(B_R \mid A_C)$, entonces la probabilidad condicional $P(A_C \mid B_R)$ queda intederminada, y lo único que podemos decir es que esta probabilidad está acotada por 0 y $\frac{1}{2}$. No obstante, recordemos que este inconveniente en el enfoque bayesiano es superado en la teoría DS, pues independientemente del proceso de decisión del guardia nosotros concluimos $Bel(A_C) = Bel(\neg A_C) = 0$, ya que no tenemos certeza de algún tipo de demostración para la proposición A_C ni para su negación $\neg A_C$.

Por otro lado, también resulta interesante preguntarnos si la teoría de la probabilidad en general puede describir los modelos incompletos que, principalmente, se estudian en la teoría DS, y si es así, generar las mismas respuestas. Para responder esta inquietud recordemos que según la interpretación de la teoría DS, las preguntas tratan sobre qué tan cerca está(n) la(s) evidencia(s) e de demostrar una proposición D, esto es, que existe un argumento lógico para $e \vdash D$. Con esto en mente, ilustraré este hecho con el ejemplo que he venido trabajando. Dada la información presentada en la Figura 2.1 junto con la evidencia $e = B_R$, veamos si la pregunta por una demostración de $e \vdash D$ puede ser respondida por un modelo probabilístico. Según este modelo, $P(A_C \mid B_R) = \frac{1}{3}$, de lo que podemos ver que e está lo más lejos posible (grado 0) de mostrar que A_C es demostrable, pues todos estarán de acuerdo conmigo en que una proposición que tiene solamente $\frac{1}{3}$ de ser verdadera no tiene posibilidad de ser demostrada. Dicho en otras palabras, podemos demostrar una proposición a partir de una evidencia solamente si su probabilidad es 1. De esta manera, para responder la pregunta inicial debemos ver si en una teoría probabilística completa la probabilidad de una proposición D demostrable tiene probabilidad 1.

3.5. Validez de la teoría DS

A partir de los trabajos de Zadeh (1979, 1986) se ha discutido la validez, aplicabilidad o consistencia de la teoría DS. La discusión se ha centrado en la obtención de resultados contraintuitivos cuando esta teoría se ha aplicado en diversos campos del saber. Además de los ejemplos presentados por Zadeh para esta discusión, vale la pena mencionar los trabajos de Lemmer (1985), Voorbraak (1991), Dubois y Prade (1990), Walley (1991), Pearl (1990, 1992), Wang (1994), y Gelman (2006). Sin embargo, con el fin de superar las dificultades de la teoría DS que se evidencian en dichos trabajos, se han realizado varias propuestas que ofrecen tratamientos alternativos a la regla de combinación propuesta por Demspter y Shafer (véase Smets y Kennes, 1994; Smets, 1998; Smarandache y Dezert, 2004).

Con el fin de ilustrar los resultados contraintuitivos a los que conduce - en algunas ocasiones - la regla de combinación de la teoría DS, en esta sección presentaré un ejemplo junto con algunas de las interpretaciones que se hacen de su resultado.

Ejemplo 3.5.1 (Dezert et. al, 2012). Consideremos un marco de discernimiento $\Theta = \{A, B, C\}$ el cual es exhautiso y exclusivo (es decir, se tiene que exactamente uno de los tres es cierto), por ejemplo, tomando $A =$ tumor cerebral, $B =$ conmoción cerebral y $C =$ meningitis. Supongamos que dos médicos diferentes dan su diagnóstico a un paciente que se ha realizado varios tipos de exámenes, cada uno de los cuales es diferente para cada médico. El diagnóstico de cada uno de ellos se presenta en el cuadro 3.7 donde $a \in [0, 1], b_1, b_2 > 0$, y $b_1 + b_2 \in [0, 1]$. Dado que las fuentes a

Elemento focal	$m_1()$	$m_2()$
A	a	0
$A \cup B$	$1 - a$	b_1
C	0	$1 - b_1 - b_2$
$A \cup B \cup C$	0	$1 - b_1 - b_2$

Cuadro 3.7: Funciones de masa m asignadas por los médicos m_1 y m_2

partir de las cuales los médicos realizan sus diagnósticos son independientes, por lo que podemos aplicar la regla de combinación de la teoría DS y obtener

$$\begin{aligned} m_{12}(A) &= a(b_1+b_2) \\ m_{12}(A\cup B) &= (1-a)(b_1+b_2) \\ m_{12}(\emptyset) &= 1-b_1-b_2, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} m_{DS}(A) &= \frac{m_{12}(A)}{1-m_{12}(\emptyset)} = \frac{a(b_1+b_2)}{b_1+b_2} = a = m_1(A) \\ m_{DS}(A\cup B) &= \frac{m_{12}(A\cup B)}{1-m_{12}(\emptyset)} = \frac{(1-a)(b_1+b_2)}{b_1+b_2} = 1-a = m_1(A\cup B) \end{aligned}$$

A partir de estos resultados vemos que el diagnóstico del médico 2 no cuenta en absoluto, pues en definitiva $m_{DS}() = m_1()$. De esta manera, aun cuando este médico tenga una reputación en el campo tan importante como la del médico 1, a la hora de tomar una decisión definitiva su concepto no será tenido en cuenta (véase la Observación 3.5.2 más adelante para una razón teórica del por qué ocurre esto). Este resultado, que en un principio podría parecer contraintuivo[9] (pues en la práctica definitivamente su concepto sí sería tenido en cuenta), ha encontrado en el ámbito académico diversas respuestas, tal como lo plantean Dezer et., al (2012):

- Este tipo de resultados obtenidos a partir de la regla de combinación de la teoría DS no muestran que la teoría en sí misma sea incorrecta, sino que hay situaciones donde ésta no es aplicable.
- El resultado del ejemplo no muestra que la teoría DS sea incorrecta; lo que es incorrecto es nuestra intuición.
- El resultado muestra que la teoría DS es incorrecta y por tanto se tiene la necesidad de reformarla o eliminarla.

Para cada una de estas posiciones pueden darse razones a favor o en contra. Por ejemplo, para la tercera afirmación, antes se dijo que hay teorías alternas que buscan mejorar la regla de combinación con el fin de evitar este tipo de resultados. Si bien la segunda afirmación es problemática, dado que requiere una discusión previa acerca

[9] Otro ejemplo similar y que también lleva a un resultado contraintuitivo es el siguiente. Supongamos que un paciente P es examinado por dos doctores A y B. El diagnóstico de A es que P tiene meningitis con una probabilidad de 0.99, mientras que tiene solamente 0.01 de probabilidad de tener un tumor cerebral. Por otro lado, B también considera que P tiene 0.01 de probabilidad de tener un tumor cerebral, pero diagnostica que tiene 0.99 de probabilidad de padecer de una conmoción cerebral. Al aplicar la regla de combinación obtenemos que la creencia que P tiene tumor cerebral es de 1.0, conclusión que es altamente contraintuitiva dada la baja probabilidad que A y B asignaron a esta enfermedad.

de lo que entendemos por *intuición*, tal vez sea la primera afirmación la que muestra la necesidad de un criterio para determinar si la teoría DS es aplicable o no. Por supuesto, tal criterio tendrá que estar en función de nuestras expectativas.

Observación 3.5.2. En el ejemplo 3.5.1 vimos que en el momento de tomar una decisión acerca de cuál es la enfermedad que padece el paciente, la opinión del médico 2 no será tenida en cuenta. A continuación veré el por qué sucede esto.

Cuando el médico 1 asigna el valor $Pl_1(C) = 0$, además de excluir inicialmente la enfermedad C, inmediatamente descarta la posibilidad que esta enfermedad sea considerada a futuro cuando se tengan nuevas evidencias obtenidas por diversos exámenes realizados al paciente. Esta afirmación se sigue de la definición de Shafer (1976, p. 43), donde se estipula que $Pl_1(C) = 0$ significa que para cada $X \in \mathcal{P}(\Theta)$ con $X \cap C \neq \emptyset$, se tiene $m_1(X) = 0$. De esta manera, cuando se lleva a cabo la regla de combinación DS con el fin de combinar $m_1(-)$ y $m'(-)$ (donde $m'(-)$ es cualquier otra función de masa elaborada por otro médico), entonces $m_{DS}(Y) = 0$ para cualquier elemento Y de $P(\Theta)$ con $Y \cap C \neq \emptyset$. Así, necesariamente $Pl_{DS}(C) = 0$ sin importar qué nueva evidencia sea agregada al caso.

Finalmente, es interesante reflexionar sobre el significado de la diferencia $Pl() - Bel()$ en el intervalo $[Bel(), Pl(A)]$. En la literatura, a menudo se interpreta esta diferencia como el grado de ignorancia (Ejemplos 3.3.5 y3.3.7) o la cantidad de información que se necesita para construir un modelo probabilístico completo. No obstante, estas diferencias nada tienen que ver con ignorancia ni con cotas para las probabilidades de ocurrencia de un evento. Para ilustrar esta afirmación retomemos el ejemplo de los tres prisioneros. Como vimos en la sección 3.3.2, aun cuando ignoramos la forma en la que el guardia eligió entre los presos B y C para entregar la carta, la diferencia $Pl(A_C) - Bel(A_C)$ es cero, lo cual nos podría llevar a pensar que el valor $Bel(A_C) = \frac{1}{2}$ fue obtenido en un modelo completo de probabilidad en el que el guardia no eligió a C. De igual manera, si tuviésemos conocimiento del proceso que realizó el guardia para elegir podríamos decir que la probabilidad posterior $P(A_C \mid e)$ estará entre 0 y $\frac{1}{2}$.

3.6. Complejidad computacional de la teoría DS

El problema de la complejidad computacional de la teoría DS fue estudiado por primera vez por Barnett (1981). A partir de este trabajo se han propuesto diversas implementaciones que buscan reducir la complejidad de los cálculos en situaciones particulares (véase Barnett, 1981; Gordon y Shortliffe, 1985; Shenoy y Shafer, 1986; Shafer y Logan, 1987). La raíz de la complejidad es la regla de combinación de diferentes evidencias, ya que el número de cálculos a efectuar crece exponencialmente

(Gordon y Shortliffe, 1985, p. 324; Shafer y Logan, 1987, p. 271). Más exactamente, la idea es mostrar que la función que determina la regla de combinación es NP-completa (Garey y Johnson, 1979, p. 168). Un tratamiento sobre la complejidad computacional de la teoría DS ha sido realizado por Provan (1990) y de una forma diferente por Orponen (1990). La dificultad radica en que mientras que el cálculo de $Bel(-)$ y $Pl(-)$, junto con otros valores para una única evidencia, pueden ser llevado a cabo en tiempo polinomial, la combinación de estos valores para diversas evidencias es un problema NP-completo.

El estudio de la complejidad computacional también se ha realizado para las redes bayesianas. Sin embargo, parece no haber un acuerdo general al respecto, pues dependiendo de la red del modelo, puede garantizarse lo NP-completo de la red. Algunos de los trabajos sobre este problema son Maxwell (1996) y Dojer (2006), quienes argumentan que los cálculos a realizar en una red bayesiana son y no son NP-completos, respectivamente. Así las cosas, si queremos determinar si un modelo específico - ya sea bayesiano o en la teoría DS es NP-completo - , lo que podemos hacer es revisar en la literatura buscando algunas caracterizaciones de problemas NP-completos, y mirar si el que estamos estudiando corresponde a uno de estos. Todo esto nos lleva a la conclusión que, tanto en el enfoque bayesiano como de la teoría DS, el problema computacional está presente y es uno de los puntos problemáticos de ambas teorías.

La teoría de Dempster-Shafer, como una generalización de la teoría bayesiana, ha sido estudiada con cierto detalle en este capítulo. Si bien no se pueden negar sus contribuciones a una teoría de la evidencia, como lo mostró el Ejemplo 3.3.7 donde obtuvimos una mejor aproximación que la que brinda el enfoque bayesiano, el ejemplo de los tres prisioneros (ejemplo 3.3.2), y lo discutido en la sección 3.4, debemos detenernos un momento y pensar si éste siempre es el caso.

Al hacer una búsqueda de los trabajos de investigación en los que se trata con evidencias, hipótesis, inferencias y demás, un número considerable de estos sugieren que la teoría de Dempster-Shafer es una mejor aproximación que la teoría bayesiana. En problemas de ingeniería, por ejemplo, la incertidumbre presente en los modelos a estudiar, muestran que este factor debe tenerse presente, y no ser obviado como lo hace el bayesianismo. Conocimientos incompletos, aproximaciones más "fieles" a la realidad, son algunos de los argumentos del por qué utilizar un acercamiento impreciso en vez de la teoría bayesiana. Pareciera ser entonces que la solución a la pregunta sobre cuál puede ser una teoría probabilística general de la evidencia, ha sido respondida.

No obstante, situaciones particulares como las descritas en la sección 3.5 nos muestran que esta teoría puede llevarnos a resultados contraintuitivos. Si intentamos salvar la teoría DS, e investigar un criterio que nos permita determinar en cuáles situaciones es aplicable, lograríamos una mejora considerable de la misma. Y este camino puede estar cerca de conseguirse; precisamente en la observación 3.5.2, vimos una justificación del por qué la teoría DS nos llevaba a un resultado contraintuitivo en el ejemplo 3.5.1. Tal vez lo que buscamos, tenga que ser una reforma de la definición de la función de plausibilidad de Shafer (1976, p. 43). De todas formas, sin importar si seamos capaces de formular tal criterio, no deja de llamar la atención el hecho que en casi la totalidad de los trabajos que utilizan la teoría DS - a diferencia de la bayesiana - nunca se indaga antes si la teoría es aplicable al problema en cuestión, sino que simplemente se implementa con el fin de obtener un resultado.

En vez de intentar *salvar* la teoría, alguien podría argumentar que lo que está sucediendo es una situación similar a la de la paradoja de los cuervos presentada en el capítulo 1, en la que según Hempel y Goodman, no es que ésta fuera en sí paradójica, sino que hay algo equivocado en nuestras intuiciones que nos lleva a verla de esa manera. Si esto es así, entonces necesitamos de una teoría superior que nos ayude a aclarar (tal como la teoría bayesiana lo hizo con las proposiciones (PC) y (PC*) al final de la sección 2.5) el por qué la teoría DS ocasiona este tipo de resultados en ciertas situaciones, y en otras parece estar de acuerdo con nuestra intuición. Con el fin de explorar este segundo camino, el siguiente y último capítulo de esta tesis tratará sobre la teoría de la evidencia conocida como la teoría de intervalos de probabilidad, la cual es una generalización de la teoría DS.

Capítulo 4

Teoría de intervalos de probabilidad

En este capítulo presento la teoría de intervalos de probabilidad introducida por Cui y Blockley (1990), con el fin de ampliar el espectro de posibles teorías difusas de la evidencia que se pueden utilizar en el ámbito científico. Así mismo, discutiré su relación con respecto a la teoría bayesiana y la teoría de Dempster-Shafer.

4.1. Presentación

Al igual que con la teoría DS, en la teoría de intervalos de probabilidad se construye una teoría probabilística que permita medir el soporte evidencial en modelos que requieren de grados de conocimiento. Su idea es que un intervalo permite capturar de manera - relativamente simple -, aspectos difusos e incompletos, idea que llevan a cabo mediante un manejo operacional con intervalos denominado *método de vértices* (Dong y Shah, 1987).

Algo importante en su teoría es la introducción de un parámetro ρ (véase la expresión (4.1.1)) - el cual también es un intervalo - llamado el *grado* del análisis de intervalos, pues gracias a éste se puede discutir la relación entre esta teoría de intervalos de probabilidad, y otras teorías imprecisas para modelar conocimientos parciales, como lo son la teoría DS, los conjuntos difusos, y la lógica de soporte[1] de Baldwin (1986). Cui y Blockley (1990) muestran que la teoría DS de la evidencia y la teoría de conjuntos difusos (Dubois y Prade, 1980) son casos especiales de la teoría de intervalos de probabilidad; brevemente, la idea es que la teoría DS corresponde

[1]Esta teoría arroja resultados similares a la teoría de intervalos de probabilidad. Sin embargo ha sido cuestionada por Dubois y Prade (1990). Una discusión acerca de la relación entre la teoría DS y esta lógica puede encontrarse en Hunter (1987).

a una teoría de intervalos de probabilidad con una hipótesis de independencia en el parámetro ρ, mientras que la teoría de conjuntos difusos corresponde a una hipótesis de dependencia total en ρ (Cui y Blockley, 1990, p. 191).

Dentro de las ventajas de la teoría de Cuy y Blockley, se encuentra el hecho que que ésta, aun cuando está basada en un desarrollo axiomático de la probabilidad al estilo *pascaliano*, permite que el soporte evidencial para una hipótesis pueda ser separado del soporte evidencial de su negación; así, este parámetro permite explorar las relaciones de dependencia aun cuando éstas no sean conocidas con exactitud. Es de resaltar que este aspecto de la teoría no se tiene con los tratamientos bayesianos ni con la teoría DS (Cui y Blockley, 1990, p. 183).

Con el fin de entender la estructura de la teoría de intervalos de probabilidad, a continuación presentaré los conceptos básicos de esta teoría siguiendo los trabajos "Interval probability theory for evidential support" de Cui y Blockley (1990), y "Uncertain inference using interval probability theory" de Halle et. al., (1998).

En los intervalos de probabilidades la idea es la siguiente: si A es un evento que representa una proposición sobre un conjunto universal X, entonces la medida de probabilidad para A está dada por la relación de pertenencia $P(A) \in [\underline{P}(A), \overline{P}(A)]$, donde $\underline{P}(A)$ y $\overline{P}(A)$ son las estimaciones inferiores (izquierdas) y superiores (derechas) de la probabilidad de A, respectivamente. De esta manera, la probabilidad de A puede encajarse como $\underline{P}(A) \leq P(A) \leq \overline{P}(A)$. Igualmente, la probabilidad del complemento de A está encajada en el intervalo $1-\overline{P}(A) \leq P(\overline{A}) \leq 1-\underline{P}(A)$.

Los intervalos de probabilidad pueden ser considerados como una medida de creencia en una proposición A. Por ejemplo, la relación $P(A) \in [0,0]$ representa la creencia que A es ciertamente falsa o no confiable, mientras que $P(A) \in [1,1]$ representa la creencia que A es cierta o fiable, mientras que $P(A) \in [0,1]$ representa la *creencia* que A es conocida.

Para el caso que nos interesa aquí, el del *apoyo* que una evidencia brinda a una hipótesis científica, necesitamos considerar el grado de correspondencia que se presenta entre dos evidencias de una misma teoría, ya sea porque ambas la apoyen positivamente o porque alguna de ellas, o las dos, quieran refutarla. Este grado de correspondencia entre dos proposiciones e_1 y e_2 está dado por el parámetro ρ

$$\rho = \frac{P(e_1 \cap e_2)}{\min\{P(e_1), P(e_2)\}}. \tag{4.1.1}$$

Bajo esta definición, $\rho = 1$ quiere decir que $e_1 \subset e_2$ o que $e_2 \subset e_1$, mientras que si e_1 y e_2 son independientes, entonces $\rho = \max\{P(e_1), P(e_2)\}$, por lo que $P(e_1 \cap e_2) =$

$P(e_1)P(e_2)$. El valor mínimo de ρ está dado por $\rho = \max\{\frac{P(e_1)+P(e_2)-1}{\min\{P(e_1),P(e_2)\}}, 0\}$, donde $\rho = 0$ significa que e_1 y e_2 son mutuamente excluyentes.

Si ρ está definido sobre un intervalo $[\rho_l, \rho_u]$, entonces se tienen las siguientes igualdades, donde $\overline{e}$ denota la negación de la proposición e:

(i) $\underline{P}(e_1 \cap e_2) = \rho_l \text{ mín}\{\underline{e_1}, \underline{e_2}\}$,

(ii) $\overline{P}(e_1 \cap e_2) = \rho_u \text{ máx}\{\overline{e_1}, \overline{e_2}\}$

(iii) $\underline{P}(e_1 \cup e_2) = \underline{e_1} + \underline{e_2} - \rho_l \text{ mín}\{\underline{e_1}, \underline{e_2}\}$

(iv) $\overline{P}(e_1 \cup e_2) = \overline{e_1} + \overline{e_2} - \rho_u \text{ mín}\{\overline{e_1}, \overline{e_2}\}$

Como dije al comienzo, la importancia del parámetro ρ radica en su utilidad a la hora de estudiar las relaciones de dependencia entre evidencias cuando tal dependencia no es descrita con exactitud. La definición de este parámetro generaliza otras reglas de inferencia que se tienen en la literatura, como es el caso de la teoría de la evidencia de Dempster-Shafer (1976), convirtiéndose así esta última en un caso particular de la teoría de los intervalos de probabilidad (en el final de este capítulo presento una justificación de esta afirmación).

4.2. Proposiciones compuestas

Consideremos la siguiente situación. Supongamos que tenemos dos proposiciones e_1 y e_2 con dependencia entre ellas dada por el intervalo $[p_l, p_u]$. En el universo de discurso tenemos relaciones entre e_1 y e_2 dadas por $e_1 \cap e_2, e_1 \cap \overline{e_2}, \overline{e_1} \cap \overline{e_2}$ así que debemos asignar probabilidades a cada una de dichas relaciones. Estos valores son los siguientes:

$$P(e_1 \cap e_2) = [m_{11}, m_{11} + m_{13} + m_{31} + m_{33}] \tag{4.2.1}$$
$$P(e_1 \cap \overline{e_2}) = [m_{12}, m_{12} + m_{13} + m_{32} + m_{33}] \tag{4.2.2}$$
$$P(\overline{e_1} \cap e_2) = [m_{21}, m_{21} + m_{23} + m_{31} + m_{33}] \tag{4.2.3}$$
$$P(\overline{e_1} \cap \overline{e_2}) = [m_{22}, m_{22} + m_{23} + m_{32} + m_{33}]. \tag{4.2.4}$$

Los valores de m_{ij} en el intervalo $(0, 1)$ son por convención restringidos a las condiciones

$$m_{11} + m_{12} + m_{13} = \underline{P}(e_1), \tag{4.2.5}$$
$$m_{21} + m_{22} + m_{23} = 1 - \overline{P}(e_1), \tag{4.2.6}$$
$$m_{11} + m_{21} + m_{31} = \underline{P}(e_2), \tag{4.2.7}$$
$$m_{12} + m_{22} + m_{32} = 1 - \overline{P}(e_2), \tag{4.2.8}$$
$$m_{11} + m_{12} + m_{13} + \cdots + m_{33} = 1. \tag{4.2.9}$$

A partir de las igualdades anteriores puede verse que $m_{11} = \rho_l$ mín$\{\underline{P}(e_1), \underline{P}(e_2)\}$. También se obtiene la relación $m_{22} = \underline{P}(\overline{e_1} \cap \overline{e_2}) = 1 - \overline{P}(e_1 \cup e_2)$, o lo que es lo mismo, $m_{22} = 1 - \overline{P}(e_1) - \overline{P}(e_2) + \rho_u$ mín$\{\overline{P}(e_1), \overline{P}(e_2)\}$.

Si e_1 y e_2 son elementos de la misma evidencia obtenidos de diferentes fuentes, entonces la suma $m_{12} + m_{21}$ representa el conflicto entre estas dos pruebas. En las aplicaciones se encuentra que tal suma es de gran utilidad cuando se tienen evidencias contradictorias, pues si bien el conflicto entre evidencias es inevitable en algunas situaciones, éste tiene que ser reflejado en la proposición compuesta por ambas evidencias. Esto no sucede cuando se aplica la regla de combinación de la teoría DS, donde por medio de la renormalización se elimina el conflicto entre evidencias contradictorias, conllevando así a la generación de resultados contraintuitivos (Zadeh, 1986).

Debemos notar que mientras $P(e_1 \cap e_2)$ y $P(\overline{e_1} \cap \overline{e_2})$ están únicamente determinadas, las restricciones para los valores de m_{ij} no arrojan intervalos únicos para $P(e_1 \cap \overline{e_2})$ y $P(\overline{e_1} \cap e_2)$. De esta manera, para obtener unicidad necesitamos tener conocimiento específico sobre la dependencia entre e_1 y $\overline{e_2}$, así como entre $\overline{e_1}$ y e_2. Dado que tal conocimiento puede llegar a ser difícil de tener, lo que podemos hacer es calcular la familia de intervalos permisibles para $P(e_1 \cap \overline{e_2})$ y $P(\overline{e_1} \cap e_2)$. Una ilustración de esta situación se presenta en la siguiente sección.

4.3. Inferencias lógicas

Caso 4.3.1. Consideremos la situación en la que tenemos una hipótesis h y una evidencia e para h. Con el fin de establecer el apoyo que la evidencia brinda a la hipótesis, necesitamos el valor de $P(e)$ y alguna posible relación entre e y h, relación que en la teoría de los intervalos de probabilidad está definida por las probabilidades condicionales $P(h \mid e)$ y $P(h \mid \overline{e})$. Del teorema de probabilidad total sabemos que

$$P(h) = P((h \cap e) \cup (h \cap \overline{e})).$$

Si $h \cap e$ y $h \cap \overline{e}$ son exclusivos, entonces $P(h) = P(h \mid e)p(e) + p(h \mid \overline{e})p(\overline{e})$, o de manera equivalente, $p(h) = p(h \mid e)p(e) + p(h \mid \overline{e})(1 - p(e))$. Dubois y Prade (1990) mostraron que cuando cada uno de estos términos tienen intervalos de probabilidad, las cotas para $P(h)$ están dados por las siguientes expresiones:

$$\underline{P}(h) = \begin{cases} \underline{P}(h \mid e)\underline{P}(e) + \underline{P}(A \mid \overline{e})(1 - \underline{P}(e)) & \text{si } \underline{P}(a \mid e) \geq \underline{P}(A \mid \overline{E}) \\ \underline{P}(a \mid e)\overline{P}(E) + \underline{P}(h \mid \overline{E})(1 - \overline{P}(E)) & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y

$$\overline{P}(h) = \begin{cases} \overline{P}(h \mid e)\overline{P}(e) + \overline{P}(h \mid \overline{e})(1 - \overline{P}(e)) & \text{si } \overline{P}(h \mid d) \leq \overline{P}(h \mid \overline{e}) \\ \overline{P}(h \mid e)\underline{P}(e) + \overline{P}(h \mid \overline{e})(1 - \underline{P}(e)) & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

La relación entre e y h es una característica de la estructura del problema de inferencia. Es por esto que es importante aclarar el significado que los conceptos *necesario* y *suficiente* adquieren dentro los intervalos de probabilidad. Por ejemplo, e puede ser una condición *necesaria* para h si $P(h \mid e) \leq [1,1]$, $P(h \mid \overline{e}) = [0,0]$, o e puede ser una condición *suficiente* para h si $P(h \mid e) = [1,1]$, $P(h \mid \overline{e}) \leq [1,1]$. Ahora, e es una condición *necesaria* y *suficiente* para h si $p(h \mid e) = 1$ y $P(h \mid \overline{e}) = [0,0]$. Finalmente, una condición más débil es que e sea *relevante* para h, caso en el cual $[0,0] < P(h \mid e) \leq [1,1]$ y $[0,0] \leq P(h \mid \overline{e}) \leq [1,1]$.

Ayyub y Klir (2006) presentan la siguiente tabla para las relaciones de implicación lógica en términos de intervalos de probabilidad.

Relación lógica entre e y h	$P(h \mid e)$	$P(h \mid \overline{e})$
e puede ser una condición *necesaria* para h	$P(h \mid e) \leq 1$	$P(h \mid \overline{e}) = 0$
e puede ser una condición *suficiente* para h	$P(h \mid e) = 1$	$P(h \mid \overline{e}) \geq 0$
e es una condición *necesaria y suficiente* para h	$P(h \mid e) = 1$	$P(h \mid \overline{e}) \geq 0$
e es una condición *pertinente o parcialmente suficiente* para h	$0 < P(h \mid e) \leq 1$	$0 \leq P(h \mid \overline{e}) \leq 1$

Cuadro 4.1: Inferencia lógica en intervalos de probabilidad.

Caso 4.3.2. Consideremos ahora la situación en la que tenemos dos evidencias e_1 y e_2 para una hipótesis h. El espacio muestral constituido por las posibles relaciones entre e_1 y e_2 puede considerarse como la unión de cuatro subconjuntos mutuamente exclusivos, lo cual junto con el teorema de probabilidad total garantiza que la probabilidad para h esté dada por la expresión

$$P(h) = P(h \mid e_1 \cap \overline{e_2})P(e_1 \cap \overline{e_2}) + P(h \mid \overline{e_1} \cap e_2)P(\overline{e_1} \cap e_2) \tag{4.3.1}$$
$$+ P(h \mid e_1 \cap e_2)P(e_1 \cap e_2) + P(h \mid \overline{e_1} \cap \overline{e_2})P(\overline{e_1} \cap \overline{e_2}) \tag{4.3.2}$$

donde $P(h \mid e_1 \cap \overline{e_2}$, $P(h \mid \overline{e_1} \cap e_2)$, $P(h \mid e_1 \cap e_2)$ y $P(h \mid \overline{e_1} \cap \overline{e_2})$ definen las relaciones entre la hipótesis y las evidencias. A manera de ilustración, si e_1 y e_2 son condiciones *necesarias* para h, entonces

$$P(h \mid e_1 \cap \overline{e_2}) = P(h \mid \overline{e_1} \cap e_2) = P(h \mid \overline{e_1} \cap \overline{e_2}) = [0,0]$$

de tal manera que $P(h) = P(h \mid e_1 \cap e_2)P(e_1 \cap e_2)$. Ahora, si e_1 y e_2 son condiciones *necesarias y suficientes* para h, se sigue que $P(h \mid e_1 \cap e_2) = [1,1]$, por lo que $P(h) = P(e_1 \cap e_2)$. El hecho importante aquí es que el uso de los conectivos lógicos será de gran utilidad a la hora de estudiar la necesidad y suficiencia de evidencias. Esto se ilustra con detalle en el cuadro 4.2.

En la práctica, los expertos en situaciones donde se tienen evidencias manipulan las ideas de necesidad, suficiencia y relevancia en una forma más flexible, que lo que se puede hacer mediante los operadores lógicos presentados en el cuadro 4.2. Por ejemplo, un experto puede demostrar de manera convincente la hipótesis h a partir de las evidencias e_1 y e_2, pero el sólo poseer la primera puede ser suficiente para estar seguro de h, tal vez porque e_1 dice más que la otra; también puede darse el caso que sin tener ni a e_1 ni a e_2, no se tendría idea alguna de h (Halle et. al., 1980). Después de actualizar los datos, tendríamos los valores

$$P(h \mid e_1 \cap e_2) = [1{,}0, 1{,}0], \quad P(h \mid e_1 \cap \overline{e_2}) = [0{,}4, 0{,}9] \tag{4.3.3}$$
$$P(h \mid \overline{e_1} \cap e_2) = [0, 2, 0{,}6], \quad P(h \mid \overline{e_1} \cap \overline{e_2}) = [0{,}0, 1{,}0]. \tag{4.3.4}$$

	$P(h \mid e_1 \cap \overline{e_2})$	$P(h \mid \overline{e_1} \cap e_2)$	$P(h \mid e_1 \cap e_2)$	$P(h \mid \overline{e_1} \cap \overline{e_2})$
$e_1 \wedge e_2$	$[0,0]$	$[0,0]$	$[1,1]$	$[0,0]$
$e_1 \vee e_2$	$[1,1]$	$[1,1]$	$[1,1]$	$[0,0]$
$e_1 \veebar e_2$	$[1,1]$	$[1,1]$	$[0,0]$	$[0,0]$
$\sim e_1$	$[0,0]$	$[1,1]$	$[0,0]$	$[1,1]$
$\sim e_2$	$[1,1]$	$[0,0]$	$[0,0]$	$[1,1]$
$\sim (e_1 \vee e_2)$	$[0,0]$	$[0,0]$	$[0,0]$	$[1,1]$

Cuadro 4.2: Inferencia lógica.

Tal como plantean Hall et. al., (1998), establecer la relevancia de la evidencia es un proceso delicado, pues se necesita de cuidado al expresar en lenguaje matemático el lenguaje natural del problema. En la situación anterior, por ejemplo, cuando el experto afirma que "una sola de las evidencias es suficiente para verificar la hipótesis h, o que de las evidencias e_1 y e_2, probablemente e_1 diga más que e_2 acerca de la hipótesis h, él generalmente se estará refiriendo a las probabilidades $P(h \mid e_1)$ y $P(h \mid e_2)$, y podría estar diciendo que necesita de mayor información para establecer los valores de $P(h \mid e_1 \cap \overline{e_2})$ y $P(h \mid \overline{e_1} \cap e_2)$.

Las cotas para $P(h)$ en la expresión (4.3.1) pueden encontrarse probando cada uno de los elementos de la familia de intervalos de probabilidad tanto para $P(e_1 \cap \overline{e_2})$ como para $P(\overline{e_1} \cap e_2)$. Esto se realiza utilzando las siguientes expresiones:

$$\underline{P}(h) = \inf_{i,m_{12},m_{21}} \{\underline{P}(h \mid e_1 \cap e_2) P_i(e_1 \cap e_2) + \underline{P}(h \mid e_1 \cap \overline{e_2}) P_i(e_1 \cap \overline{e_2})\} \tag{4.3.5}$$
$$+ \underline{P}(h \mid \overline{e_1} \cap e_2) P_i(\overline{e_1} \cap e_2) + \underline{P}(h \mid \overline{e_1} \cap \overline{e_2}) P_i(\overline{e_1} \cap \overline{e_2}), \tag{4.3.6}$$

$$\overline{P}(h) = \sup_{i,m_{12},m_{21}} \{\overline{P}(h \mid e_1 \cap e_2) P_i(e_1 \cap e_2) + \overline{P}(h \mid e_1 \cap \overline{e_2}) P_i(e_1 \cap \overline{e_2})\} \tag{4.3.7}$$
$$+ \overline{P}(h \mid \overline{e_1} \cap e_2) P_i(\overline{e_1} \cap e_2) + \overline{P}(h \mid \overline{e_1} \cap \overline{e_2}) P_i(\overline{e_1} \cap \overline{e_2}), \tag{4.3.8}$$

donde $P_i = P_1, \ldots, P_{16}$ son los posibles elementos de la familia a considerar (véase el cuadro 4.3). Cada uno de estos elementos representa una permutación diferente de las nueve asignaciones de la proposición compuesta por e_1 y e_2 tales que $\underline{P} \leq P_i \leq \overline{P}$ y

$$P_i(e_1 \cap e_2) + P_i(e_1 \cap \overline{e_2}) + P_i(\overline{e_1} \cap e_2) + P_i(\overline{e_1} \cap \overline{e_2}) = 1.$$

Ilustremos esta situación con los siguientes valores. Supongamos que tenemos los valores $P(e_1) = [0{,}3, 0{,}7], P(e_2) = [0{,}2, 0{,}5]$ y $\rho = [0{,}3, 0{,}7]$. Un rango de valores permitidos para m_{12} y m_{21} junto con las asignaciones correspondientes $m_{11}, \ldots, m_{33}$ se presentan en el cuadro 4.4.

Otra situación que ilustra lo dicho hasta aquí se presenta cuando las evidencias $e_1 \cap e_2, e_1 \cap \overline{e_2}, \overline{e_1} \cap e_2$ y $\overline{e_1} \cap \overline{e_2}$ son todas relevantes para h. Supongamos por ejemplo que

$$P(h \mid e_1 \cap e_2) = [0{,}5, 0{,}9] \qquad P(h \mid e_1 \cap \overline{e_2}) = [0{,}7, 0{,}9] \tag{4.3.9}$$
$$P(h \mid \overline{e_1} \cap e_2) = [0{,}2, 0{,}6], \qquad P(h \mid \overline{e_1} \cap \overline{e_2}) = [0{,}0, 1{,}0]. \tag{4.3.10}$$

El cálculo de las probabilidades $\underline{P}(h)$ y $\overline{P}(h)$, siguiendo el cuadro 4.3 y utilizando los valores del cuadro 4.4, se presenta en el cuadro 4.5. La conclusión aquí es que la inferencia más general posible para h está dada por el intervalo de probabilidad $P(h) = [0{,}18, 0{,}96]$. Estos valores fueron obtenidos al encontrar que m_{12} y y m_{21} son mínimos.

i	$P_i(e_1 \cap e_2)$	$P_i(e_1 \cap \overline{e_2})$	$P_i(\overline{e_1} \cap e_2)$	$P_i(\overline{e_1} \cap \overline{e_2})$
1	$m_{11}+m_{13}+m_{31}+m_{33}$	$m_{12}+m_{32}$	$m_{21}+m_{23}$	m_{22}
2	$m_{11}+m_{13}+m_{31}+m_{33}$	m_{12}	$m_{21}+m_{23}$	$m_{22}+m_{32}$
3	$m_{11}+m_{13}+m_{31}+m_{33}$	$m_{12}+m_{32}$	m_{21}	$m_{22}+m_{23}$
4	$m_{11}+m_{13}+m_{31}+m_{33}$	m_{12}	m_{21}	$m_{22}+m_{23}+m_{32}$
5	$m_{11}+m_{31}$	$m_{12}+m_{13}+m_{32}+m_{33}$	$m_{21}+m_{23}$	m_{22}
6	$m_{11}+m_{31}$	$m_{12}+m_{13}+m_{32}+m_{33}$	m_{21}	$m_{22}+m_{23}$
7	m_{11}	$m_{12}+m_{13}+m_{32}+m_{33}$	$m_{21}+m_{23}+m_{31}$	m_{22}
8	m_{11}	$m_{12}+m_{13}+m_{32}+m_{33}$	$m_{21}+m_{31}$	$m_{22}+m_{23}$
9	$m_{11}+m_{13}$	m_{12}	$m_{21}+m_{23}+m_{31}+m_{33}$	$m_{22}+m_{32}$
10	$m_{11}+m_{13}$	$m_{12}+m_{32}$	$m_{21}+m_{23}+m_{31}+m_{33}$	m_{22}
11	m_{11}	$m_{12}+m_{13}$	$m_{21}+m_{23}+m_{31}+m_{33}$	$m_{22}+m_{32}$
12	m_{11}	$m_{12}+m_{13}+m_{32}$	$m_{21}+m_{23}+m_{31}+m_{33}$	m_{22}
13	$m_{11}+m_{13}$	m_{12}	$m_{21}+m_{31}$	$m_{22}+m_{23}+m_{32}+m_{33}$
14	$m_{11}+m_{13}+m_{31}$	m_{12}	m_{21}	$m_{22}+m_{23}+m_{32}+m_{33}$
15	m_{11}	$m_{12}+m_{13}$	$m_{21}+m_{31}$	$m_{22}+m_{23}+m_{32}+m_{33}$
16	$m_{11}+m_{31}$	$m_{12}+m_{13}$	m_{21}	$m_{22}+m_{23}+m_{32}+m_{33}$

Cuadro 4.3: Combinaciones permitidas para e_1 y e_2.

Caso	m_{11}	m_{12}	m_{13}	m_{21}	m_2	m_{23}	m_{31}	m_{32}	m_{33}
1	0,06	0,00	0,24	0,09	0,15	0,06	0,05	0,35	0,00
2	0,06	0,00	0,24	0,14	0,15	0,01	0,00	0,35	0,05
3	0,06	0,09	0,15	0,00	0,15	0,15	0,14	0,26	0,00
4	0,06	0,24	0,00	0,00	0,15	0,15	0,14	0,1	0,15
5	0,06	0,24	0,00	0,14	0,15	0,01	0,00	0,11	0,29

Cuadro 4.4: Algunos valores permitidos para $m_{11}, \ldots, m_{33}$.

i	**C1:**$\underline{P}(h)$	**C1:**$\overline{P}(h)$	**C2:**$\underline{P}(h)$	**C2:**$\overline{P}(h)$	**C3:**$\underline{P}(h)$	**C3:**$\overline{P}(h)$	**C4:**$\underline{P}(h)$	**C4:**$\overline{P}(h)$	**C5:**$\underline{P}(h)$	**C5:**$\overline{P}(h)$
1	0,45	0,87	0,45	0,87	0,45	0,87	0,45	0,87	0,45	0,87
2	0,21	0,91	0,21	0,91	0,27	0,90	0,37	0,88	0,37	0,88
3	0,44	0,89	0,45	0,87	0,42	0,93	0,42	0,93	0,45	0,87
4	0,19	0,93	0,20	0,91	0,24	0,96	0,34	0,94	0,37	0,89
5	0,19	0,89	0,19	0,89	0,23	0,85	0,29	0,79	0,29	0,79
6	0,44	0,86	0,44	0,86	0,41	0,83	0,36	0,78	0,36	0,78
7	0,24	0,89	0,24	0,89	0,26	0,85	0,29	0,79	0,29	0,79
8	0,48	0,86	0,48	0,86	0,44	0,83	0,36	0,78	0,36	0,78
9	0,50	0,87	0,51	0,87	0,48	0,87	0,48	0,87	0,51	0,87
10	0,49	0,89	0,51	0,87	0,45	0,93	0,45	0,93	0,51	0,87
11	0,48	0,86	0,51	0,87	0,44	0,83	0,44	0,83	0,51	0,87
12	0,47	0,88	0,51	0,87	0,41	0,89	0,41	0,89	0,51	0,87
13	0,18	0,91	0,18	0,91	0,20	0,91	0,23	0,91	0,23	0,91
14	0,19	0,93	0,18	0,91	0,24	0,96	0,27	0,96	0,23	0,91
15	0,23	0,91	0,23	0,91	0,23	0,91	0,23	0,91	0,23	0,91
16	0,24	0,93	0,23	0,91	0,27	0,96	0,27	0,96	0,23	0,91

Cuadro 4.5: Cálculo de $\underline{P}(h)$ y de $\overline{P}(h)$ utilizando el cuadro 4.4.

4.4. Aplicaciones

Tal como plantea Walley (1991), "muchas de las contribuciones basadas en probabilidades imprecisas siguen un enfoque bayesiano generalizado". Es por esto que en la mayoría de las aplicaciones que se muestran a continuación se tienen conceptos similares a los considerados en el bayesianismo, salvo que el tratamiento aquí necesita de técnicas más generales, razón por la cual la complejidad matemática y probabilística aumentan considerablemente. En esta sección comento algunas situaciones específicas de variados campos del conocimiento, donde las probabilidades imprecisas han mostrado su ventaja respecto a la teoría bayesiana clásica de la evidencia.

4.4.1. Probabilidades imprecisas en el ámbito clínico

Walley et. al., (1996) describen un nuevo método basado en la teoría de probabilidades imprecisas para el análisis de datos clínicos. Estas probabilidades las aplican a un conjunto de datos estadísticos, correspondientes a ensayos clínicos aleatorios en los cuales se aplican dos tratamientos diferentes para la insuficiencia cardiorespiratoria en los recién nacidos. Los autores distinguen dos problemas a saber: (i) el problema de inferencia que consiste en extraer conclusiones sobre qué tratamiento es el más eficaz, y (ii) el problema de decisión que quiere determinar si un tratamiento debe preferirse con respecto al otro para un paciente, o si tal vez debe seleccionarse al azar uno de los dos tratamientos. Los dos problemas son analizados utilizando tres modelos posibles para la ignorancia previa sobre los parámetros estadísticos, donde uno de ellos se ha modificado para tener en cuenta la historia de los datos clínicos anteriores.

Para ilustrar el método, se analizan los datos de uno de los ensayos controlados de oxigenación por membrana extracorpórea (ECMO), un tratamiento para la insuficiencia cardiorespiratoria en los recién nacidos. Walley et. al., (1996) argumentan que hay dos razones para estudiar este conjunto de datos utilizando técnicas no clásicas. En primer lugar, los datos han sido previamente sometidos a un análisis en términos frecuentistas, por lo que resulta interesante compararlo con las conclusiones que se obtengan mediante otros enfoques; en segundo lugar, la interpretación adecuada de estos datos es aún objeto de debate, y ellos creen que su análisis brinda algunas ideas útiles para este fin.

Brevemente, la descripción del modelo que allí se plantea es la siguiente: sean Θ_c y Θ_e las probabilidades de supervivencia de los bebés tratados con CT (terapia convencional) y ECMO, respectivamente. El problema estadístico es comparar las dos posibilidades desconocidas Θ_c y Θ_e, utilizando los datos en forma de una tabla de contingencias, la cual contiene las cantidades de sobrevivientes y las muertes después de realizar cada tratamiento. Hasta este punto, un análisis bayesiano clásico sería analizar los datos mediante la elección de una función de densidad de probabilidad, que permita modelar la incertidumbre previa sobre los parámetros desconocidos (Θ_c, Θ_e). Sin embargo, la elección de una única función de densidad es bastante arbitraria, pues no hay garantía alguna que el comportamiento pasado con cada uno de los tratamientos, sea el mismo en el futuro. Con el fin de remediar esta elección arbitraria de tal función, Walley y sus colegas consideran un conjunto $\mathcal{M}$ de funciones de densidad de probabilidad. A partir de este conjunto, se generan probabilidades inferiores $\underline{P}(h)$ y superiores $\overline{P}(h)$ para una hipótesis que trata sobre la supervivencia de los bebés.

4.4.2. Evaluación sísmica

Egozcue y Rüttener (1997) presentan un trabajo en el que introducen métodos bayesianos con datos inexactos con el fin de evaluar la peligrosidad sísmica. La justificación para tratar con datos imprecisos viene de la incertidumbre en la intensidad de los terremotos, así como el desconocimiento de su frecuencia. Como puede verse allí, el proceso para estimar una distribución de Poisson es más factible mediante técnicas imprecisas que utilizando una metodología bayesiana, distribución que lo que busca es estimar el riesgo sísmico. Brevemente, el trabajo se lleva a cabo suponiendo imprecisión, tanto en tamaño como en ubicación (es decir, los errores en el epicentro), en los datos de una región donde se desea estimar este riesgo. Mediante cálculos de la teoría imprecisa de la probabilidad, se obtienen períodos posibles de ocurrencia teniendo en cuenta los factores del terreno y de la incertidumbre acerca de lo que se desconoce.

4.4.3. Otros campos de aplicación

Colecciones recientes (Augustin et al 2009;. Coolen-Schrijner et al 2009; de Cooman et. al., 2007) dan una idea de la enorme variedad de campos de posible aplicación de las probabilidades imprecisas. En inteligencia artificial, por ejemplo, en el reconocimiento de patrones (Loquin y Strauss, 2010), y la información de fusión (Benavoli y Antonucci, 2010), el conocimiento experto incierto puede ser representado con mayor precisión por medio de probabilidades imprecisas. Dado que los métodos de probabilidad imprecisas pueden procesar la información sin tener que anadir supuestos injustificados, son de gran importancia en las evaluaciones de riesgo y seguridad, diseño de ingeniería (Aughenbaugh y Paredis 2006) y fiabilidad (Coolen y Utkin 2010). El intenso debate en curso sobre la racionalidad limitada hace que la teoría de decisiones fiable basado en probabilidades imprecisas sea llamativo en la microeconomía y teoría de la elección social. En las finanzas, la probabilidad imprecisa toma fuerza debido a su influencia debido a su muy estrecha relación con las medidas de riesgo (Artzner et. al., 1999; Vicig, 2008). La probabilidad imprecisa también da una visión más profunda de la valoración de activos (Richmond et. al., 2008). El estudio de cadenas de Markov con probabilidades de transición imprecisas (de Cooman et. al., 2009) también es importante para muchas áreas de aplicación.

En este capítulo vimos el cálculo de intervalos de probabilidad para proposiciones compuestas e inferencias lógicas. Mencioné que la teoría de Dempster-Shafer es un caso particular de la teoría de intervalos de probabilidad, así que a continuación justifico esta afirmación.

Como vimos en la Definición 3.3.3, Shafer asume que

$$Bel(A \cup B) \geq Bel(A) + Bel(B) - Bel(A \cap B),$$

y de su definición de plausibilidad $Pl(A) = 1 - Bel(\sim A)$, podemos ver que

$$Pl(A \cup B) \leq Pl(A) + Pl(B) - Pl(A \cap B).$$

En la teoría de intervalos de probabilidad, Cui y Blockley (1990) muestran que

$$\underline{P}(A \cup B) \leq Bel(A \cup B)$$

$$\overline{P}(A \cup B) \geq Pl(A \cup B)$$

de manera que el límite inferior $\underline{P}(A \cup B)$ es menor que $Bel(A \cup B)$, y $\overline{P}(A \cup B)$ es mayor que $Pl(A \cup B)$. Así, la relación entre los valores de la teoría DS y los de la teoría de intervalos de probabilidades puede describirse como $[Bel(A), Pl(A)] \subseteq [\overline{P}(A), \underline{P}(A)]$. De esta manera, la teoría DS brinda, en general, una mejor aproximación de la incertidumbre de un agente.

La pregunta acerca de bajo qué condiciones la teoría de intervalos coincide con la teoría DS puede responderse estudiando el parámetro ρ. Como vimos antes, en el caso que $\rho = \max\{P(A), P(B)\}$ (comparar con la expresión 4.1.1) en la teoría de intervalos se obtienen las igualdades $P(A \cap B) = P(A)P(B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$, donde esta última igualdad corresponde precisamente a la regla de combinación de Dempster (Cui y Blockley, 1900, p. 185). Dicho de otra forma, si las proposiciones A y B son independientes, entonces la teoría de intervalos se reduce a la teoría de Dempster-Shafer.

Por supuesto, la teoría de intervalos al ser más general que la teoría DS, también generaliza a la teoría bayesiana de la evidencia. Sumado a esto, uno de los hechos más importantes de la teorías de intervalos es su *flexibilidad* en la dependencia en las proposiciones, tal como se vió en el párrafo inmediatamente anterior. Esta *flexibilidad* permite que en diversas situaciones donde deben hacerse inferencias a partir de un conjunto de proposiciones, la teoría de intervalos permita reflejar la incertidumbre que no es considerada en el bayesianismo, y hasta en la misma teoría DS.

Capítulo 5

Conclusiones

En este trabajo discutí las ventajas y las debilidades de algunas de las teorías de la evidencia, teorías que fueron clasificadas como teorías bayesianas y no bayesianas. Teniendo en cuenta esta clasificación, a continuación repasaré los principales puntos de cada capítulo, para luego cuestionar si necesariamente las teorías de la evidencia deben tener un enfoque probabilista. A partir de esta discusión, sugeriré un trabajo futuro que tenga como propósito formular una teoría de la evidencia lo más general posible.

En el capítulo 1 pudimos ver los primeros planteamientos que se realizaron para una teoría de la confirmación. Los trabajos de Hempel nos dieron una idea de la dificultad que se presenta al plantear una teoría de la evidencia con la noción de satisfacción. Sumado a esto, observamos que el origen de una concepción probabilística de la evidencia es debido a Carnap, origen que estuvo marcado por diversas dificultades en las funciones que él definió. Además de estos dos enfoques, vimos con cierto detalle la propuesta de Glymour, la cual es una mejora del trabajo de Hempel, propuesta que no considera argumentos probabilistas como sí lo hace Carnap[1].

En el capítulo 2 estudiamos las teorías probabilísticas de la evidencia, aun cuando ya en el capítulo 1 habíamos recordado la relación entre evidencia, hipótesis y probabilidad. Como vimos en este segundo capítulo, justificar la importancia de las teorías probabilísticas puede hacerse desde diversos enfoques, tantos como interpretaciones del término *probabilidad* hay. De igual manera, vimos que uno de los puntos a favor de estas teorías, por ejemplo la bayesiana, es la solución que ésta brinda a problemas particulares - como lo es la paradoja de los cuervos (descrita en el capítulo 1) -, a la vez que tienen un constructo teórico tan potente, como para modelar situaciones

[1]Precisamente, Glymour en el tercer capítulo de su libro *Theory and Evidence* (1980), explica el por qué no es bayesiano y por qué no considera que una teoría de la evidencia debe regirse por argumentos probabilistas.

en las que tenemos información completa sobre las probabilidades de ocurrencia de eventos, o en nuestro caso, cuando tenemos una valoración precisa de la validez de una hipótesis o una evidencia.

Sin embargo, y como se mostró en el siguiente capítulo, poseer información completa no siempre es el caso, y es por esto que se han formulado otras teorías - como la de Demspter-Shafer - en la cual se debilita la imposición bayesiana de valoraciones cuantitativas exactas, y se es "más fiel" a la incertidumbre que tenemos en el momento de asignar valores probabilísticos; el concepto que permite llevar a cabo esto es el de función de creencia. La teoría DS fue estudiada con cierto detalle en este capítulo, al discutir sus ventajas, algunas de sus dificultades, y posibles resultados no esperados que se obtienen al aplicarla, pues tal como resaltó Zadeh (1979), la regla de combinación de la evidencia de Dempster puede generar resultados contraintuitivos, todo producto de la aplicación de la normalización. La razón de este hecho es que esta normalización elimina la opinión de aquellos expertos que aseguran que el objeto bajo consideración no existe.

Este tipo de dificultades en las teorías probabilísticas de la evidencia, muestran que si bien se ha avanzado considerablemente desde los primeros acercamientos propuestos por Hempel y Carnap, aun necesitamos de mayores desarrollos que nos permitan construir una teoría de la evidencia que sea aplicable en todos los escenarios del conocimiento donde necesitemos realizar inferencias. Sumado a esto, y ya sea que adoptemos una teoría bayesiana, o una teoría imprecisa de la evidencia (pues ambas comparten el componente probabilístico en sus valoraciones de las evidencias y de las hipótesis), una pregunta que surge es si todas las teorías de la evidencia deben ser probabilísticas.

Al revisar la literatura en filosofía de la ciencia, y en particular sobre teorías de la evidencia, encontramos que la respuesta a la anterior pregunta es no. Una de las principales teorías no probabilísticas de la evidencia, y que es utilizada con el fin de realizar inferencias causales, es la teoría de la coherencia explicativa. En general, como lo plantea Thagard (2004, p. 232), actualmente hay dos modelos para tratar la inferencia causal, uno de ellos basado en reyes bayesianas (grafo bayesiano como el que vimos en el Ejemplo 2.6), y el otro en la coherencia explicativa.

La coherencia es una propiedad de un conjunto de informaciones que aumenta nuestra confianza en que su contenido es verdadero cuando recibimos información de fuentes independientes y parcialmente confiables. Sumado a esto, una teoría de la justificación coherentista proporciona una respuesta al desafío escéptico, pues aun cuando reconocemos que los procesos por los cuales obtenemos información sobre el mundo tienen ciertas falencias y no son del todo confiables, la coherencia interna de la información nos proporciona la justificación de nuestras creencias empíricas.

La teoría coherentista explicativa *TEC*[2] originada en "Explanatory Coherence" (Thagard, 1989) es una de las teorías no bayesianas más populares[3] de la coherencia explicativa, y ha mostrado su aplicabilidad en contextos científicos y judiciales (véase Eliasmith y Thagard, 1997; Nowak y Thagard, 1992; Thagard, 2004). En el ámbito judicial, Thagard ha planteado la discusión sobre su aplicabilidad en comparación con las teorías probabilísticas. Dentro de los argumentos de los coherentistas está el que ellos no requieren la formulación de probabilidades subjetivas, así como la superioridad de la coherencia explicativa, como un relato descriptivo para describir la manera en la que los miembros del jurado razonan a la hora de dar un veredicto, pues para Thagard el enfoque bayesiano presenta serios problemas de interpretación y aplicación en este contexto judicial, problemas que dificultan modelar el razonamiento que los jurados llevan a cabo; la naturaleza de la probabilidad y la causalidad muestran la superioridad de la coherencia explicativa de la inferencia causal en el razonamiento jurídico (Thagard, 2004, p. 232).

Los problemas de interpretación a los que se refiere Thagard tienen que ver con el concepto de probabilidad. Para Thagard, ya sea que consideremos una interpretación de la probabilidad como frecuentista o como representativo de nuestro grado de creencia, ninguna de estas es posible en el ámbito judicial, pues es claro que las probabilidades frecuentistas son irrelevantes para un juicio, ya que nadie, incluyendo a los miembros del jurado, cuenta con información de la frecuencia de ocurrencia de este caso en tiempos anteriores. Con respecto a la segunda interpretación de la probabilidad, Thagard afirma que si bien en las redes bayesianas se considera que las probabilidades codifican grados de creencia de los acontecimientos del mundo, hay abundante evidencia psicológica que muestra que los grados de creencia de la gente no se ajustan a los cálculos de probabilidad[4] (Thagard, 2004, p. 243).

[2] *TEC* es modelada por el programa computacional *ECHO* (Explanatory Coherence by Harmany Optimization).

[3]Debe decirse que estas teorías no han sido indagadas tanto como las bayesianas, lo cual puede verse al comparar la cantidad de trabajos alrededor de cada una de éstas (Howson y Urbach, 2006, p. xi muestran en cifras, cómo se ha venido incrementando en las últimas décadas la cantidad de artículos investigativos con la palabra "Bayes" en su título).

[4]Para Thagard, el espectro matemático de probabilidades es excelente para la expresión de frecuencias, pero no se correlaciona en absoluto con grados de creencia. Esto no es un impedimento en una teoría de la coherencia explicativa pues allí se no atribuye ninguna importancia a valores numéricos en los nodos de la red, ya que en este modelo la cuestión importante es si una proposición es aceptada o no, a diferencia del modelo bayesiano que requiere una interpretación de probabilidades como frecuencias o grados de creencia, ninguna de las cuales es plausible en el contexto de la toma de decisiones legales.

Con respecto a la dificultad para modelar el razonamiento que los jurados llevan a cabo, Thagard afirma que la explicación del razonamiento bayesiano presenta dudas en lo que él llama el *problema de la interpretación* y el *problema de la aplicación*. La interpretación tiene que ver con que además de las relaciones causales que se tienen en el modelo bayesiano, no hay un significado plausible para las probabilidades utilizados en la simulación, significado que hace alusión a una interpretación probabilística que demanda la asignación de probabilidades puntuales; sin estos valores, el manejo los programas computacionales de las redes bayesianas no tiene aplicación. Esto muestra que el problema de este modelo radica en que en el ámbito judicial no hay una interpretación satisfactoria de las probabilidades que se necesitarían en este modelo de red. Por otro lado, con el *problema de la aplicación* de las redes bayesianas, Thagard se refiere a la dificultad de tratar con todas las probabilidades condicionales que se requiere en el análisis de un caso particular. Según él, el aparato de la teoría de la probabilidad es en gran parte superflua, pues "todo lo que realmente importa es la estructura causal y explicativa de la coherencia, pues ella no se ocupa en absoluto con probabilidades" (Thagard, 2004, p. 243). Para Thagard, un bayesiano honesto tendría que estar dispuesto a atribuir a los miembros del tribunal y a otras personas un gran número de probabilidades numéricas, y es claro que no hay forma alguna de hacer esto.

Las anteriores observaciones sobre los problemas de interpretación y aplicación, muestran que las redes bayesianas en las inferencias judiciales son menos plausibles que un modelo de coherencia explicativa, pues "la inferencia legal es la inferencia de la historia causal más plausible, pero el mecanismo psicológico por el cual los miembros del tribunal evalúan historias causales parece basado, no en los cálculos de probabilidad bayesiano, sino en la coherencia explicativa" (Thagard, 2004, p. 244).

Como he visto en este trabajo, las teorías probabilísticas admiten diversas críticas, aun cuando en la práctica científica han mostrado ser de gran ayuda a la hora de realizar inferencias bajo incertidumbre. Uno de los principales aspectos que se han venido trabajando desde hace algunos años, es la inclusión de nuevos paramétros que buscan una *mejor* medición de la incertidumbre presente. Como ya lo anunciamos en la sección 3.3.2, la lógica difusa se presenta como una alternativa para lograr teorías de la evidencia más generales, y sobre todo más aplicables. Veamos con detalle qué podría aportar esta lógica a una teoría probabilística de la evidencia.

La relación entre la teoría de la probabilidad y la lógica difusa ha sido objeto de discusión durante mucho tiempo. Preguntas en torno a las conexiones entre estos dos tratamientos, conexiones que tratan sobre la posibilidad de ver una como caso particular de la otra[5], o la efectividad de los métodos de cada una de éstas - que

[5]Un hecho para destacar es la generalización que se realiza en la lógica difusa de conceptos

alguna lo haga de *mejor forma* que la otra - o tal vez las limitaciones de una teoría que son solventadas por la otra, así como lo que se puede hacer con una teoría que no es posible con la otra, han dado lugar a un número considerable de artículos. Respuestas a estos interrogantes pueden encontrarse en trabajos del percursor de esta lógica difusa, pues es Zadeh quien en 1986 establece seis razones por las cuales la teoría de probabilidad clásica no brinda una metodología integral para hacer frente a la incertidumbre y la imprecisión. Éstas son[6]:

- no es compatible con el concepto de evento difuso. Ejemplos sencillos de estos eventos son por ejemplo, mañana será un día cálido, o los precios se estabilizarán a largo plazo;

- no tiene técnicas para tratar con cuantificadores difusos como *muchos, la mayoría, algunos, pocos*;

- no permite realizar cálculos con probabilidades del tipo *probable, poco probable, no es muy probable*, etc, probabilidades que no son de segundo orden;

- no proporciona métodos para la estimación de probabilidades difusas;

- no es suficientemente *expresiva* para brindar un significado a expresiones del lenguaje. Por ejemplo, ¿cuál es el significado de "no es probable que haya un aumento en el precio del petróleo en un futuro próximo"?

- las limitaciones de la teoría clásica hacen que sea difícil analizar problemas en los que los datos se describen en términos difusos. Por ejemplo, consideremos la siguiente situación: Una urna contiene aproximadamente 20 bolas de diferentes tamaños, de los cuales varios son grandes, algunos pequeños, y el resto son de tamaño medio. ¿Cuál es la probabilidad que una bola extraída al azar no sea ni grande ni pequeña?

Precisamente, estas teorías de la inferencia fueron discutidas en el capítulo 4. Si bien su construcción matemática es más elaborada que en el caso bayesiano o de la teoría DS, pudimos ver que estos dos tratamientos - al igual que la teoría de conjuntos difusos (Dubois y Prade, 1980) - son casos particulares de la teoría de

---

de la teoría clásica de la probabilidad. Conceptos como el de evento, muestra, independencia y convergencia son algunos de los que en lo difuso tienen una concepción más general. Sumado a esto, el alcance de los métodos de cada una de las dos teorías permite vislumbrar sus posibles campos de aplicación. Al respecto, Kandel et. al., (1995) presentan una discusión interesante acerca de algunas de las diferencias entre las técnicas estadísticas y las técnicas difusas.

[6] Para un tratamiento detallado de la lógica difusa, véase Dubois y Prade (1980), Yager et al., (1987), y Zadeh (1995), trabajos donde además pueden encontrarse discusiones acerca de cómo la lógica difusa generaliza diversas lógicas multivaluadas.

intervalos de probabilidad.

En este punto, y con respecto a los seis puntos arriba resaltados por Zadeh, considero que la formulación de una teoría de la evidencia mediante lógica difusa sólo tendrá éxito si se logra determinar con exactitud, las situaciones en las que ésta pueda ser aplicada. Mi opinión se basa en los resultados contraintuitivos que resulta de la inadecuada implementación de la teoría de Dempster-Shafer, pues más allá que la teoría sea aplicable, considero que hay que ir un paso atrás, y preguntarnos por el *rango* de aplicabilidad de cada teoría de la evidencia que se formule. Indudablemente, y como varios ejemplos lo muestran, aun cuando una teoría haya sido determinante en una situación, hay que ser sinceros y reconocer las debilidades de ésta misma en otro contexto donde no tenga el mismo éxito que antes.

Si bien este camino de trabajo posterior es lo suficientemente importante, la idea de no abandonar el problema de la coherencia y la probabilidad, me lleva a cuestionarme acerca de la posibilidad de una teoría coherentista *medible*, medible en el sentido de tener algún tipo de parámetro - no sé si probabilístico o no - que permita discriminar entre un par de teorías coherentistas. Pensar en una teoría de esta magnitud, necesariamente implicará pensar su construcción teórica, junto con su alcance en el campo científico donde cada una de las teorías anteriores ha sido puesta en duda. Sumado a esto, la elaboración de un programa computacional que permita realizar cálculos en esta teoría sería otra etapa en el proceso, etapa que estaría condicionada por la complejidad computacional de los algoritmos involucrados, pues tal como vimos en la sección 3.6, ya hay trabajos en los que se ha mostrado que en situaciones particulares, algunas teorías probabilísticas de la evidencia son problemas computacionales NP-completos. Esto, por supuesto, significa un gran desafío para quien desee formular una teoría de la evidencia que sea lo suficientemente general.

Formular esta teoría podría ser un trabajo posterior a la presente tesis, pues una teoría más general que ésta representaría un avance significativo en la unificación de una teoría de la evidencia, problema suficientemente importante para ser indagado. Esto muestra que, y tal como bien lo comenta Schum (2001), no existe una teoría de la evidencia, sino una *ciencia de la evidencia*[7].

[7]Schum (2001) argumenta que ya en los trabajos de Henry Wigmore, particularmente el publicado en 1937 bajo el título *Science of Juridical Proof*, puede apreciarse los primeros intentos en mostrar que hay una ciencia de la evidencia.

Bibliografía

[1] Achinstein, P. (2001). *The Book of Evidence*. New York, Oxford University Press.

[2] Bayes, T. 1958 [1763]. An Essay towards Solving a Problem in the Doctrine of Chances. *Philosophical Transactions of the Royal Society*, Volume 53, 370-418. Reprinted with a biographical note by G.A. Barnard in *Biometrika* (1958), Volume 45, 293-315.

[3] Boole, G. (1854). *An investigation of the laws of thought on which are founded the mathematical theories of logic and probabilities*. Walton and Maberly, London.

[4] Carnap, R. (1950). *Logical Foundations of Probability*. Chicago, The University of Chicago Press.

[5] Carnap, R. (1952). *The Continuum of Inductive Methods*. U. Chicago Press.

[6] Carnap, R. (1971). Inductive logic and rational decisions. Chapter 1 of *Studies in Inductive Logic and Probability*, Vol. 1, eds. R. Carnap and R.C. Jeffrey. U. California Press, Berkeley.

[7] Cohen, L. J. (1977). *The Probable and the Provable*. Clarendon, Oxford.

[8] Cohen, L. J. (1989). *An Introduction to the Philosophy of Induction and Probability*. Clarendon, Oxford.

[9] Cui, W., Blockley, D. (1990). Interval probability theory for evidential support, *Int. J. Intelligent Systems* 5, pp 183-192.

[10] de Cooman, G. (2000). Imprecise probabilities. *Risk Decision Policy*, pp 107-109.

[11] de Finetti, B. (1937 [1980]). La prévision: Ses lois logiques, ses sources subjectives. Annales de l'Institut Henri Poincaré 7, 1-68 (1937); Translated by H. E. Kyburg as Foresight: Its logical laws, its subjective sources. In: Kyburg, H.

E., Smokler, H.E. (eds.). Studies in Subjective Probability. Robert E. Krieger, New York, pp 57-118.

[12] Dempster, A. (1967). Upper and lower probabilities induced by a multivalued mapping. *Ann. Math. Statist*, Vol. 38, pp 325-339.

[13] Dempster, A. (1968). A generalization of Bayesian inference. *Journal of the Royal Statistical Society*, Series B 30, pp 205-247.

[14] Dempster, A. (1969). Upper and lower probability inferences for families of hypotheses with monotone density ratios. *Ann. Math. Statist.* 40 (3), pp 953-969.

[15] Dubois, D. H. Prade. (1980). *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications*, Academic, New York.

[16] Dubois, D., Godo, L., de Mántaras, R., Prade, H. (1993). Qualitative reasoning with imprecise probabilities. *J. Intell. Inf. Syst.* 2(4), pp 319-363.

[17] Earman, J. (1992) *Bayes or Bust? : a critical examination of Bayesian confirmation theory*, The MIT Press.

[18] Fine, T.L. (1973). *Theories of Probability.* Academic Press. New York.

[19] Glymour, C. (1980). *Theory and Evidence*, Princeton University Press, New York.

[20] Hall, J., Blockley, D., Davis, J. (1998). Uncertain inference using interval probability theory. *Int. J. Approximate Reasoning*, 19, pp 247-264.

[21] Hempel, C. (1945a). Studies in the Logic of Confirmation I. *Mind* 54, pp 1-26.

[22] Hempel, C. (1945b). Studies in the Logic of Confirmation II. *Mind* 54, pp 97-121.

[23] Hempel, C. (1965). *Aspects of Scientific Explanation and Other Essays in the Philosophy of Science*, Mcmillan, New York.

[24] Hempel, C. (2000) *Selected Philosophical Essays*, Edited by Richard Jeffrey, New York, Cambridge University Press.

[25] Howson, C., Urbach, P. (2006). *Scientific Reasoning. The Bayesian Approach.* Third Edition. La Salle: Open Court.

[26] Jevons, W. S. (1874). *The Principles of Science*. London: Macmillan.

[27] Kolmogorov, A.N. (1956). *Foundations of the Theory of Probability* (1933). 2 ed English ed. Chelsea Publishing, New York.

[28] Kyburg, H. E., Teng C. M. (2001). *Uncertain inference*. Cambridge University Press.

[29] Laplace P. S. (1814). *A Philosophical Essay on Probabilities*, English edition 1951, New York: Dover Publications Inc.

[30] Maher, P. (1996). Subjective and Objective Confirmation. *Philosophy of Science* 63, pp 149-174.

[31] Maher, P. (2004). Probability captures the logic of scientific confirmation. In: Hitchcock C (ed) Contemporary debates in the philosophy of science. Blackwell, Oxford, pp 69-93.

[32] Morton, A. (1981). Theory and Evidence by Clark Glymour. Review. *Philosophy of Science*, 48 (3), pp 498-500.

[33] Nicod, J. (1930). Foundations of Geometry and Induction, *P.P. Wiener* (trans.). London: Kegan Paul, Trench, Trubner and Co.

[34] Pearl, J. (1990). Reasoning with belief functions: An analysis of compatibility. *International Journal of Approximate Reasoning*, Vol. 4, pp 363-389.

[35] Schum, D. (2001). *The Evidential Foundations of Probabilistic Reasoning*. Northwestern University Press, Evanston.

[36] Shafer, G. (1976). *A Mathematical Theory of Evidence*, Princeton University Press, Princeton.

[37] Shafer, G. (1981). Constructive probability. *Synthese* 48, pp 1-60.

[38] Shafer, G. (1990). Perspectives on the theory and practice of belief functions. *International Journal of Approximate Reasoning* 3, pp 31-40.

[39] Shafer, G., Logan, R. (1987). Implementing Dempster's rule for hierarchical evidence, *Artificial Intelligence* 33, pp 271-298.

[40] Swinburne, R. (1981). Theory and Evidence by Clark Glymour. Review. *The British Journal for the Philosophy of Science*, 32 (3), pp 314-318.

[41] Thagard, P. (1989). Explanatory coherence. *Behavioral and Brain Sciences* 12, pp 435-467.

[42] Thagard, P. (2004). Causal Inference in Legal Decision Making: Explanatory Coherence vs. Bayesian Networks. *Applied Artificial Intelligence*, 18, pp 231-249.

[43] Walley, P (1991). *Statistical Reasoning with Imprecise Probabilities*. Chapman and Hall, London.

[44] Wang, P. (1994). A defect in Dempster-Shafer theory. *Proc. of 10th Conf. on Uncertainty in AI*, pp 560-566.

[45] Weatherford, R. (1982). *Philosophical Foundations of Probability Theory*, Routledge, Kegan Paul, London.

[46] Wigmore, H. (1937). *The Science of Judicial Proof: As Given by Logic, Psychology, and General Experience and Illustrated in Judicial Trials*. 3d ed. Little, Brown, Boston.

[47] Yager, R., Ovchinnikov, S., Tong, R., Nguyen, H. (1987). *Fuzzy Sets and Applications: Selected Papers by L. A. Zadeh*, Wiley. New York.

[48] Yager, R.R., Kreinovich, V. (1999). Decision making under interval probabilities. *International Journal of Approximate Reasoning* 22, pp 195-215.

[49] Zadeh, L. (1965). Fuzzy sets. *Information and Control* 8, pp 338-353.

[50] Zadeh, L. A. (1979). On the validity of Dempster's rule of combination, em Memo M 79/24. University of California, Berkeley, U.S.A.

[51] Zadeh, L.A. (1986). A simple view of the Dempster-Shafer theory of evidence and its implication for the rule of combination, *AI Mag.*, 7, pp 85-90.

Bibliografía

[1] Akiba, K. (2000). Shogenji's probabilistic measure of coherence is incoherent. *Analysis* 60, pp 356-359.

[2] Anscombe F.J., Aumann, R. J. (1963). A Definition of Subjective Probability. *Annals of Mathematical Statistics* 34, pp 199-205.

[3] Arrow K. J. (1970). The theory of Risk Aversion, in his *Essays in the Theory of Risk-Bearing*, North-Holland Publ. Comp.

[4] Aughenbaugh, J. M., Paredis, C. J. J. (2006). The value of using imprecise probabilities in engineering design. *Journal of Mathematical Design*, Vol. 128, pp 969-979.

[5] Augustin T, Coolen FPA, Moral S, Troffaes, MCM (eds) (2009). *ISIPTA'09: Proceedings of the Sixth International Symposium on Imprecise Probability: Theories and Applications*. Durham University, Durham, UK, July 2009. SIPTA.

[6] Augustin T, Cattaneo, M. (2010). *International encyclopedia of statistical sciences*, Chapter Foundations of probability. Springer Verlag.

[7] Artzner P, Delbaen F, Eber J-M, Heath D. (1999). Coherent measures of risk. *Math Finance* 9 (3), pp 203-228.

[8] Ayyub, B., Klir, G. (2006). *Uncertainty Modeling and Analysis in Engineering and the Sciences*. Chapman y Hall/CRC, London, New York.

[9] Baldwin, J.F. (1986). Support logic programming, *Int. J. Intelligent Systems* 1, pp 73-204.

[10] Barker, S. (1994). Causation, Facts and Coherence. *Analysis* 54, pp 179-182.

[11] Barnett, J. A. (1981). Computational methods for a mathematical theory of evidence, *Proceedings, 7th Int. Joint Conf. Artificial Intelligence*, Vancouver, BC, pp 868-875.

[12] Berger, J. O. (1994). An overview of robust Bayesian analysis (with discussion). *Test*, Vol. 3, pp 5-124.

[13] Brossel, P. (2014). Assessing Theories: The Coherentist Approach, *Erkenn* 79 (3), pp 593-623.

[14] Cano, A., Moral, S. (2002). Using probability trees to compute marginals with imprecise probabilities. *International Journal of Approximate Reasoning* 29, pp 1-46.

[15] Coolen-Schrijner P, Coolen F, Troffaes M, Augustin, T. (2009). Special issue on statistical theory and practice with imprecision. *J Stat Theor Practice* 3 (1). Appeared also with Sat Gupta as additional editor under the title Imprecision in statistical theory and practice. Grace, Greensboro.

[16] Coolen FPA, Utkin, LV. (2010). *International encyclopedia of statistical sciences, chapter Imprecise reliability*. Springer Verlag.

[17] Cox, R. (1946). Probability, frequency and reasonable expectation. *American Journal of Physics* 14 (1), 1-13.

[18] Corani, G., Antonucci, A., Zaffalon, M. (2012). Bayesian Networks with Imprecise Probabilities: Theory and Application to Classification. *Foundations and Intelligent Paradigms Intelligent Systems Reference Library* 23, pp 49-93.

[19] Cozman, F. G. (2000). Credal Networks. *Artificial Intelligence*, Vol. 120, pp 199-203.

[20] Cozman, F. G. (2005). Graphical models for imprecise probabilities. *International Journal of Approximate Reasoning*, Vol. 39, pp 167-184.

[21] Cross, C. (1999). Coherence and truth conducive justification. *Analysis* 59, pp 186-193.

[22] Dawid, P. (2005). Probability and statistics in the law. In: *Proceedings of the 10th international workshop on artificial intelligence and statistics*, pp 89-95.

[23] de Campos, L., Huete, J., Moral, S. (1994). Probability intervals: A tool for uncertain reasoning. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems* 2, pp 167-196.

[24] de Cooman G, Vejnarová J, Zaffalon M (eds) (2007). ISIPTA'07: *Proceedings of the Fifth International Symposium on Imprecise Probabilities and Their Applications*, Charles University, Prague, Czech Republic, July 2007. SIPTA.

[25] de Cooman G, Hermans F, Quaeghebeur, E (2009). Imprecise Markov chains and their limit behavior. *Probab Eng Inform Sci* 23 (4), pp 597-635.

[26] Dezert, J., Wang, P., y Tchamova, A. (2012). On The Validity of Dempster-Shafer Theory. *Fusion 2012 - 15th International Conference on Information Fusion*, Singapour.

[27] Dojer, N. (2006). Learning Bayesian Networks Does Not Have to Be NP-Hard, Mathematical Foundations of Computer Science, *Lecture Notes in Computer Science* Vol. 4162, pp 305-314.

[28] Dong, W., Shah, H.C. (1987). Vertex method for computing functions of fuzzy variables, *Fuzzy Sets and Systems*, 24, pp 65-78.

[29] Douven, I. Meijs, W. (2006). Bootstrap Confirmation Made Quantitative. *Synthese* 149, pp 97-132.

[30] Egozcue, J.J., Rüttener, E. (1997). Bayesian Techniques for Seismic Hazard Assessment Using Imprecise Data. *Natural Hazards* 14, pp 91-112.

[31] Eliasmith, C., Thagard, P. (1997). Waves, Particles, and Explanatory Coherence. *British Journal for the Philosophy of Science* 48, pp 1-19.

[32] Frisch, A., Haddawy, P. (1994). Anytime deduction for probabilistic logic. *Artif. Intell.* 69 (1-2), pp 93-122.

[33] Gaifman, H. (1979). Subjective Probability, Natural Predicates and Hempel's Ravens. *Erkenntnis*, 14 (2), pp 105-147.

[34] Garey, M. R., Johnson, D. S. (1979). *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-completeness*, W. H. Freeman & Co., New York.

[35] Gardner, M. (1961). *Second Scientific American book of mathematical puzzles and diversions*. New York: Simon and Schuster.

[36] Gillies, D. (1991). Intersubjective probability and confirmation theory. *British Journal for the Philosophy of Science* 42, 513-533.

[37] Goodman, I. R. (1987). A measure-free approach to conditioning. *Proc. 3rd Workshop on Uncertainty in AI*, Seattle, pp 270-277.

[38] Goodman, N. (1954). *Fact, Fiction, and Forecast* . Athlone Press, London.

[39] Gordon, J., Shortliffe, E. H. (1985). A method for managing evidential reasoning in a hierarchical hypothesis space, *Artificial Intelligence* 26, pp 323-357.

[40] Ha, Vu A., Doan, A., Vu, V., Haddawy, P. (1998). Geometric foundations for interval-based probabilities. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence* 24, pp 1-21.

[41] Hable, R. (2010). Minimum distance estimation in imprecise probability models. *J Stat Plann Infer* 140, pp 461-479.

[42] Hacking, I. (1975). *The Emergence of Probability.* Cambridge University Press.

[43] Hajék, A., Smithson, M. (2012). Rationality and indeterminate probabilities. *Synthese* 187, pp 33-48.

[44] Hall, J., Fu, G., Lawry, J. (2007). Imprecise probabilities of climate change: aggregation of fuzzy scenarios and model uncertainties. *Climatic Change* 81, Issue 3-4, pp 265-281.

[45] Hampel, F. (2009). Nonadditive probabilities in statistics. *J. Stat. Theor. Practice* 3 (1), pp 11-23.

[46] Hummel, R., Manevitz, L. M. (1987). Combining bodies of dependent information. *Proc. 10th Intl. Joint Conf. on AI* (IJCAI-87), Milan, pp 1015-1017.

[47] Hunter, D. (1987). Dempster-Shafer vs. probabilistic logic, Proc. *Third AAAI uncertainty in artificial intelligence workshop*, pp 22-29.

[48] Guerrero, G. (2008). *Entre ciencia y filosofía: algunos problemas actuales.* Programa Editorial Universidad del Valle.

[49] Hansson B. (1988). Risk Aversion as a Problem of Conjoint Measurement, in Gäredenfors & Sahlin (1988): *Decision, Probability, and Utility*, Cambridge University Press.

[50] Insua, D. R., Ruggeri, F. (2000). *Robust Bayesian Analysis*, Springer.

[51] James, A., Low Choy, S., Mengersen, K. (2010). Elicitator: an expert elicitation tool for regression in ecology. *Environmental Modelling y Software* 25 (1), pp 129-145.

[52] Keynes J. M. (1921). *A Treatise on Probability*, MacMillan & Co.

[53] Klein, P., Warfield, T. (1994). What Price Coherence? *Analysis* 54, pp 129-132.

[54] Klein, P., Warfield, T. (1996). No help for the coherentist? *Analysis* 56, pp 118-121.

[55] Kuznetsov, V. (1991). *Interval statistical models.* Radio i Svyaz Publ., Moscow, In Russian.

[56] Lakatos, I. (1978). *Philosophical Papers.* Two volumes. Edited by J. Worrall and G. Currie. Cambridge University Press.

[57] Lemmer J. (1985). Confidence factors, empiricism and the Dempster-Shafer theory of evidence. *Proc. of 1st Conf. on Uncertainty in Artificial Intelligence* (UAI-85), pp 117-126.

[58] Liu, W. (2001). The Dempster-Shafer Theory of Evidence. *Propositional, Probabilistic and Evidential Reasoning Studies in Fuzziness and Soft Computing* 77, 2001, pp 119-158.

[59] Lukasiewicz, T. (1998) Probabilistic logic programming. *ECAI*, pp 388-392.

[60] Malmnäs, P-E. (1994). Axiomatic Justifications of the Utility Principle - A Formal Investigation, Synthese, 99, pp 233-249.

[61] Maher, P. (1996). *Betting on Theories.* Cambridge: Cambridge University Press.

[62] Maher, P. (1999). Inductive Logic and the ravens paradox, *Philos Sci* 66, pp 50-70.

[63] Maxwell, D. (1996). Learning Bayesian Networks is NP-Complete, *Lecture Notes in Statistics* 112, pp 121-130.

[64] Merricks, T. (1995). On behalf of the coherentist. *Analysis* 55, pp 306-309.

[65] Meyer, M., Booker, J. (1991). *Eliciting and Analyzing Expert Judgment: A Practical Guide.* Academic Press Limited, London.

[66] Millgram, E. (2000). Coherence: The Price of the Ticket. *The Journal of Philosophy* 97, pp 82-93.

[67] Neumaier, A. (2004). Clouds, fuzzy sets, and probability intervals. *Reliable Computing* 10, pp 249-272.

[68] Nowak, G., Thagard, Paul. (1992). Copernicus, Ptolemy, and Explanatory Coherence. Giere, Ronald N. (ed.): *Cognitive Models of Science, Minnesota Studies in the Philosophy of Science*, Vol. 15, Minneapolis: University of Minnesota Press, pp 274-309.

[69] O'Hagan, A., Oakley, J.E. (2004). Probability is perfect, but we can't elicit it perfectly. *Reliability Engineering and System Safety* 85, pp 239-248.

[70] Olsson, E. (2001). Why coherence is not truth-conducive. *Analysis* 61, pp 236-241.

[71] Olsson, E. (2002). What is the Problem of Coherence and Truth? *The Journal of Philosophy* 99, pp 246-272.

[72] Orponen, P. (1990). Dempster's rule of combination is #P-complete, *Artificial Intelligence*, 44, pp 245-253

[73] Pearl, J. (1992). Rejoinder of comments on "Reasoning with belief functions: An analysis of compatibility". *International Journal of Approximate Reasoning* 6, pp 425-443.

[74] Peterson, M. (2008). *Non-Bayesian Decision Theory. Beliefs and Desires as Reasons for Action*. Springer.

[75] Petruzzi, N.C., Dada, M. (1999). Pricing and the newsvendor problem: A review with extensions. *Operations Research* 47, pp 183-194.

[76] Poincaré, H. (1905). *Science and Hypothesis*. Page references are to the edition of 1952, New York: Dover.

[77] Pollino, C.A., Woodberry, ,O., Nicholson, A., Korb, K., Hart, B.T., (2007). Parameterisation and evaluation of a bayesian network for use in an ecological risk assessment. *Environmental Modelling and Software* 22 (8), pp 1140-1152.

[78] Popper, K. R. (1957). The Propensity Interpretation of the Calculus of Probability and the Quantum Theory, in S. Krner (ed.), *The Colston Papers*, 9, pp 65-70.

[79] Provan, G. M. (1990). A logic-based analysis of Dempster-Shafer theory, *International Journal of Approximate Reasoning* **4**, pp 451-495.

[80] Quine W,V,O. (1969). Natural kinds. In: Quine WVO (ed) *Ontological relativity and other essays*. Columbia University Press, New York, pp 114-138.

[81] Ramsey, F. (1931). *The Foundations of Mathematics and Other Logical Essays*. Routledge and Kegan Paul Ltd., London.

[82] Reichert, P., Borsuk, M., Hostmann, M., Schweizer, M., Spörri, S., Tockner, C., Truffer, B. (2007). Concepts of decision support for river rehabilitation. *Environmental Modelling and Software* 22 (2), pp 188-201.

[83] Richmond V, Jose R, Nau R., Winkler, R. (2008). Scoring rules, generalized entropy, and utility maximization. *Oper. Res* 56 (5), pp 1146-1157.

[84] Rinderknecht, S., Borsuk, M., Reichert, P. (2012). Bridging uncertain and ambiguous knowledge with imprecise probabilities. *Environmental Modelling and Software* 36, pp 122-130.

[85] Shenoy, P.P., Shafer, G. (1986). Propagating belief functions with local computations, *IEEE Expert*, **1** (3), pp 43-52.

[86] Shogenji, T. (1999). Is coherence truth conducive? *Analysis* 59, pp 338-345.

[87] Shogenji, T. (2001a). Reply to Akiba on the probabilistic measure of coherence. *Analysis* 61, pp 147-150.

[88] Shogenji, T. (2001b). The Role of Coherence in Epistemic Justification. *Australasian Journal of Philosophy* 79, pp 90-106.

[89] Smarandache, F., Dezert, J. (2004). *Advances and applications of DSMT for information fusion*, Volumes 1, 2 & 3, ARP.

[90] Smets, P. (1988). Belief functions, *Non-Standard Logics for Automated Reasoning*, (Smets, Mamdani, Dubois and Prade Eds.), pp 253-286.

[91] Smets, P. (1999). Practical uses of belief functions, in K. B. Lskey and H. Prade, Editors, *Uncertainty in Artificial Intelligence* 15 (UAI 99), pp 612-621, Stockholm, Sweeden, 1999.

[92] Smets, P., Kennes, R. (1994). The transferable belief model. *Artif. Int.*, Vol. 66, pp 191-234.

[93] Venn J. (2011). *The Logic of Chance*, Dover Books on Mathematics

[94] Vicig, P. (2008). Imprecise probabilities in finance and economics. *International Journal of Approximate Reasoning* 49 (1), pp 99-100.

[95] Voorbraak, F. (1991). On the justification of Dempster's rule of combination, *Artificial Intelligence*, 48, pp 171-197.

[96] Walley, P., Gurrin, L., Burton, P. (1996). Analysis of Clinical Data Using Imprecise Prior Probabilities. *Journal of the Royal Statistical* Series D (The Statistician) 45 (4), pp 457-485.

[97] Weichselberger, K. (2000). The theory of interval-probability as a unifying concept for uncertainty. *International Journal of Approximate Reasoning* 24 (1), pp 149-170.

[98] Zadeh, L.A. (1981). Possibility theory and soft data analysis. *Mathematical frontier of the social and policy sciences*, ed. L. Cobb and R.M. Thrall, pp 69-129.

[99] Zaffalon, M. (2002). The naive credal classifier. *J Stat Plann Infer* 105(1), pp 5-21.

[100] Zynda L. (2000). Representation Theorems and Realism About Degrees of Belief, *Philosophy of Science* 67, pp 45-69.

Departamento de Filosofía
Universidad de los Andes
Bogotá, Colombia
e-mail: `ma.reyes115@uniandes.edu.co`