UNIVERSIDAD DE LOS ANDES COLOMBIA

FACULTAD DE CIENCIAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

TRABAJO DE GRADO:

FORCING CON COIDEALES SEMISELECTIVOS

Trabajo elaborado para obtener el título de Magíster en matemáticas en la Universidad de los Andes Colombia

Presentado por:
W. Leonardo Pacheco Tobo

Orientador:
Carlos Di Prisco

Forcing con coideales semiselectivos

William Leonardo Pacheco Tobo

17 de junio de 2014

Índice general

1. INTRODUCCIÓN

El objetivo de este trabajo es presentar una prueba del Teorema 5.0.6: *Sea λ un cardinal Π_1^1-**indescriptible**. Sea $M[G]$ la extensión genérica dada por $Col(\omega, < \lambda)$. Entonces, si $\mathcal{H}$ es un coideal semiselectivo en $M[G]$, todo conjunto de números reales en $L(\mathbb{R})$ de $M[G]$ es $\mathcal{H}$-Ramsey.*
La prueba fue publicada en [D] en el año 2012, dónde además se plantea el problema de aclarar si se puede o no, debilitar la hipótesis de la existencia de un cardinal Π_1^1-*indescripitible* y obtener el mismo resultado. Por eso ha sido necesario estudiar conceptos, como la noción de *Coideal semiselectivo* (sección 3.1), *la técnica del Forcing*(sección 3.2), *cardinales* Π_1^1-*indescriptibles* (sección 3.3) y el modelo $L(\mathbb{R})$ (sección 3.2.1). Al explorar cada uno de los temas anteriores y teniendo siempre en mente la prueba del Teorema 5.0.6, se hace imposible seguir adelante sin antes entender resultados, tales como, el lema combinatorio de Nash-Williams, Galvin (Lema 3.1.4), y algunas propiedades de las nociones de Forcing de Levy y de Mathias. Por esta razón se ha elaborado toda una sección (Preliminares), donde se prueban resultados relevantes a la demostración del Teorema 5.0.6.

Debido a la escasez literaria acerca de algunos de los temas tratados en este documento, el camino a tomar debía pasar por el artículo de Ilijas Farah [F] de 1997. Varios de los resultados probados en este documento fueron tomados de ese artículo, sin embargo, en la prueba de Farah de la propiedad de Mathias para un coideal semiselectivo hemos encontrado algunos inconvenientes, al reconstruir tal prueba hallamos un argumento de Fahra que no es muy claro. Lo anterior nos llevó a buscar una prueba diferente a la publicada por Farah. En este trabajo presentamos una demostración alternativa, que sigue los argumentos utilizados por Mathias (en [M]) en la prueba de la misma propiedad para coideales selectivos (Capítulo 4).

Otras de las referencias bibliográficas que necesariamente debimos consultar fueron el artículo de Carlos Di Prisco, Mijares y Uzcátegui [D], donde está el Teorema 5.0.6 y la referencia principal *Happy Families* de Mathias [M].
Adicionalmente, con el ánimo de motivar al lector, se han agregado ideas y

segmentos del libro de Stevo Todorcevic [T][1] , donde se relaciona la teoría de Ramsey con los temas estudiados a continuación.

Dentro de lo posible se ha tratado de crear un documento que sirva de guía para lectores interesados en conocer una introducción a los temas estudiados: coideales semiselectivos, la técnica de Forcing, cardinales Π^1_1-indescriptibles y el modelo $L(\mathbb{R})$. Por obvias razones hay detalles sobre algunos temas, como el Forcing, que no están en este documento, y para los cuales se invita al lector a consultar las referencias citadas.

[1] Hemos traducido del inglés al español partes que se encuentran en [T] y las copiamos en este documento.

2. NOTACIÓN Y DEFINICIONES BÁSICAS

En este documento trabajamos en ZFC (la teoría de Zermelo Frenkel con el axioma de elección) a menos que se especifique lo contrario. La notación introducida a continuación será utilizada en todo el documento. Como es usual ω denota el conjunto de los números naturales $\{0, 1, 2, 3...\}$. Para cada conjunto A y cardinal κ, definimos:

$$[A]^\kappa := \{S \subseteq A : |S| = \kappa\},$$

$$[A]^{<\kappa} := \{S \subseteq A : |S| < \kappa\},$$

donde $|S|$ es el cardinal de S.
Para todo $S \subseteq \omega$ el mínimo de S será denotado por $min(S)$ y si existe el máximo, se denotará por $max(S)$.
Para cada $D \subseteq \omega$ y cada $s \in [\omega]^{<\omega}$ el símbolo D/s representa el conjunto:

$$\{d \in D : d > max(s)\}$$

y escribiremos D/n para referirnos a $D/\{n\}$.
Dados $s \in [\omega]^{<\omega}$ y $S \in \mathcal{P}(\omega)$ escribimos $s \sqsubset S$ si existe $n \in \omega$ tal que $s = S \cap n$. En ocaciones escribiremos $\sqsubseteq$ en vez de $\sqsubset$, pues la igualdad se puede dar cuando $S \in [\omega]^{<\omega}$.
Los conjuntos definidos a continuación, con $s \in [\omega]^{<\omega}$ y $A \in [\omega]^\omega$, forman una base para una topología en $[\omega]^\omega$, llamada la topología de Ellentuck

$$[s, A] := \{B \in [\omega]^\omega : s \sqsubset B \wedge B \subseteq A \cup s\},$$

una topología más fina que la topología heredada de la topología producto en el cubo de Cantor, 2^ω.
Para cada conjunto S, el conjunto $\mathcal{P}(S)$ representa el conjunto de partes de S, es decir:

$$\mathcal{P}(S) := \{T : T \subseteq S\}.$$

Sea $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$, para cada $A \in \mathcal{H}$ definimos

$$\mathcal{H} \restriction A := \{B \subseteq A : B \in \mathcal{H}\}.$$

DCR denota el siguiente axioma: Para toda relación binaria $\mathfrak{R}$ sobre $\mathcal{P}(\omega)$, para cada $S \in \mathcal{P}(\omega)$ existe $W \in \mathcal{P}(\omega)$ tal que $S \,\mathfrak{R}\, W$. Existe una función $f : \omega \longrightarrow \mathcal{P}(\omega)$ tal que para cada $i \in \omega$, $f(i) \,\mathfrak{R}\, f(i+1)$.

ZF-P es la teoría que consiste de los axiomas de *existencia, extencionalidad,fundamentación, esquema de especificación,pares, unión, esquema de reemplazo y el axioma de el infinito*(ver [K]).

Dado que en los capítulos siguientes trabajaremos con la técnica de Forcing, se hace necesario introducir algunos conceptos relacionados con ordenes parciales.
Para $(\mathbb{P}, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado (i.e $\leq$ es una relación binaria, reflexiva, transitiva y antisimétrica en $\mathbb{P}$) abreviado por **c.p.o**:

Definición 2.0.1. Diremos que

- $D \subseteq \mathbb{P}$ es ***denso***, si para cada $p \in \mathbb{P}$ existe $q \in D$ tal que $q \leq p$,
- $D \subseteq \mathbb{P}$ es ***abierto*** si para cada par $p, q \in \mathbb{P}$ tal que $p \in D$ y $q \leq p$, entonces $q \in D$,
- $p, q \in \mathbb{P}$ son incompatibles (en símbolos $p \perp q$) si no existe $r \in \mathbb{P}$ tal que $r \leq p$ y $r \leq q$, y
- $r \in \mathbb{P}$ es un átomo si no existen $p, q \leq r$ tales que $p \perp q$.

Definición 2.0.2. Decimos que $G \subseteq \mathbb{P}$ es un filtro si

- para todo par $p, q \in \mathbb{P}$, tal que $p \in G$ y $p \leq q$ entonces $q \in G$,
- para cada par $p, q \in G$ existe $r \in G$ tal que $r \leq p$ y $r \leq q$.

Si U es un filtro maximal respecto a $\subseteq$ diremos que U es un ultrafiltro.

3. PRELIMINARES

3.1. *Coideales y Lema de Nash-Williams, Galvin*

3.1.1. *Coideales*

Es necesario familiarizarnos con la noción de ***coideal*** sobre ω.

Definición 3.1.1. Decimos que $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ es un **coideal** si satisface lo siguiente:

i. $\omega \in \mathcal{H}$ pero para cada $x \in \omega$ se tiene que $\{x\} \notin \mathcal{H}$

ii. $A \subseteq B \subseteq \omega$ y $A \in \mathcal{H}$ implica $B \in \mathcal{H}$

iii. $A \cup B \in \mathcal{H}$ implica $A \in \mathcal{H}$ o $B \in \mathcal{H}$.

La primera condición y la tercera implican que $\mathcal{H}$ no tiene subconjuntos finitos, en particular $\mathcal{H}$ contiene todos los conjuntos cofinitos de $\mathcal{P}(\omega)$.
Según Stevo Todorcevic (ver [T]), los coideales son nociones de tamaño para familias de subconjuntos de ω que típicamente tienen alguna estructura, y el propósito de la teoría de Ramsey es descubrirlos y organizarlos, como también levantarlos a dimensiones superiores[1]. Consideremos ahora algunos ejemplos.

Ejemplo 3.1.1. Todo Ultrafiltro en $[\omega]^\omega$ es un coideal.

Ejemplo 3.1.2. El conjunto $[\omega]^\omega$ es un coideal.

Es muy sencillo verificar que $[\omega]^\omega$ es un coideal. Existen otros ejemplos de coideales pero con respecto a conjuntos de índices distintos a ω. Dado un conjunto S de indices arbitrario, podemos definir un coideal con respecto a S. Tal definición es análoga a la definición 3.1.1, de hecho bastaría cambiar ω por S en todas la apariciones de ω en la definición 3.1.1 para obtener la definición más general [2]. Sin embargo existe otro ejemplo famoso debido a Mathias.

---

[1] Si el lector desea entender la noción de dimensión mencionada puede remitirse a [T]1.2

[2] En [T] pag 3. se puede encontrar la definición más general de coideal junto con los ejemplos mencionados.

Ejemplo 3.1.3 (Mathias)**.** Sea $\mathcal{A}$ una familia infinita casi disjunta de subconjuntos infinitos de ω, es decir, $A \cap B$ es finito para cada par $A, B \in \mathcal{A}$. Sea $\mathcal{H}$ la colección de todos los conjuntos que no pueden ser cubiertos salvo un conjunto finito por finitos elementos de $\mathcal{A}$, entonces $\mathcal{H}$ es un coideal (ver ejemplo 7.1.2 en [T]).

Los coideales son muy importantes en la teoría local de Ramsey (ver [T] sección 7). Cuando consideramos coloraciones de $[\omega]^\omega$ uno quisiera encontrar un cubo monocrómatico, un $[M]^\omega$ (con $M \subseteq \omega$) de una forma especial. Una situación típica en la que tal necesidad aparece es la siguiente, sean X un espacio topológico, $x \in X$ y (x_n) una ω-sucesión de elementos de $X \setminus \{x\}$, tales que para cada vecindad V de x, existe n tal que $x_n \in V$, y supongamos que queremos encontrar una subsucesión (x_{n_k}) que converja a x. Esto es equivalente a estudiar la siguiente coloración de $[\omega]^\omega$:

$$\mathcal{C}_0 \quad := \quad \{M \in [\omega]^\omega : x \in \overline{\{x_n : n \in M\}}\}$$

$$\mathcal{C}_1 \quad := \quad \{M \in [\omega]^\omega : x \notin \overline{\{x_n : n \in M\}}\}.$$

Note que $(x_n)_{n \in M}$ converge a x si y sólo si $[M]^\omega \subseteq \mathcal{C}_0$. Quizás sirve esta teoría para estudiar convergencia de sucesiones en análisis o topología.
Todorcevic afirma que la teoría local de Ellentuck (ver [T] 7.1) nos da un M tal que $[M]^\omega$ es monocromático, si la coloración tiene cierta complejidad. La teoría desarrollada a continuación sobre coideales *selectivos y semiselectivos* nos permite encontrar un M alternativo (a el M dado por la teoría local de Ellentuck). La diferencia es que en vez de trabajar en $[\omega]^\omega$, consideraremos $\mathcal{H} \subset [\omega]^\omega$ con algunas propiedades que definimos a continuación.

3.1.2. *Coideales selectivos*

Para definir la noción de selectividad es necesario introducir el siguiente concepto.

Definición 3.1.2. Dada una sucesión $\{F_n : n \in \omega\} \subseteq [\omega]^\omega$, decimos que $D \in [\omega]^\omega$ **la diagonaliza** si para cada $n \in D$, $D/n \subseteq F_n$.

Definición 3.1.3. Un coideal $\mathcal{H}$ es **selectivo** si para toda cadena $F_1 \supseteq F_2 ...$ de elementos de $\mathcal{H}$, existe $D \in \mathcal{H}$ que la diagonaliza.

Los coideales selectivos fueron introducidos por Mathias quien los llama *happy families* en [M].
Sin embargo en [M] se define la selectividad de un coideal de una forma distinta. Mathias define que X es una diagonalización de $\{X_s : s \in [\omega]^\omega\}$ (familia elementos de $[\omega]^\omega$) si para cada $s \in [\omega]^\omega$ tal que $max(s) \in X$ vale que $X/s \subseteq X_s$.

Después (Mathias) define que $\mathcal{H}$ es una *happy family* si para toda colección $\{X_s : s \in [\omega]^{<\omega}\}$ tal que el filtro generado por esta colección está contenido en $\mathcal{H}$, existe X que diagonaliza a $\{X_s : s \in [\omega]^{<\omega}\}$ (en el sentido mencionado arriba). La equivalencia de las dos definiciones, se debe, básicamente a que si $\{X_s : s \in [\omega]^{\omega}\}$ es tal que el filtro generado por esta familia está contenido en $\mathcal{H}$ entonces la sucesión

$$(F_n := \bigcap_{max(s)\leq n} X_s)_{n\in\omega},$$

es decreciente y una diagonailización de esta sucesión (en el sentido de la definición 3.1.2) sería también una diagonalización de $\{X_s : s \in [\omega]^{\omega}\}$. Por otra parte si $(F_n)_{n\in\omega}$ es una sucesión decreciente en $\mathcal{H}$ entonces podemos definir para cada $s \in [\omega]^{<\omega}$

$$X_s := \bigcap_{n\leq max(s)} F_n,$$

así una diagonalización de $\{X_s : s \in [\omega]^{<\omega}\}$ también es una diagonalización de $(F_n)_{n\in\omega}$.

En la sección 4 trabajamos con *Ultrafiltros selectivos* (llamados por Mathias Ultrafiltros de Ramsey), por esta razón conviene introducir la sieguiente definición.

Definición 3.1.4. $\mathcal{U}$ es un Ultrafiltro selectivo, si $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro respecto al orden $(\mathcal{P}(\omega), \subseteq)$ y además es selectivo.

El primer ejemplo que consideramos es $[\omega]^{\omega}$.

Ejemplo 3.1.4. $[\omega]^{\omega}$ **es un co-ideal selectivo:** Ya sabemos que es un coideal. Además para cada cadena $F_0 \supseteq F_1 ...$ de elementos de $[\omega]^{\omega}$, podemos encontrar una diagonalización inductivamente: Seleccionamos $n_0 \in F_0/0$, escogemos $n_1 \in F_{n_0}/n_0$ y en general si ya hemos escogido n_k elegimos $n_{k+1} \in F_{n_k}/n_k$. Entonces $D = \{n_k : k \in \omega\}$ es una diagonalización. Para ver esto, sean $n_l \in D$ y $n_k \in D/n_l$, entonces por construcción de D necesariamente $l \geq k+1$, en consecuencia $n_l \in F_{n_k}/n_k \subseteq F_{n_k}$. Luego para cada $m \in D$ vale $D/m \subseteq F_m$ como se quería.

El ejemplo 3.1.3 también es selectivo.
Antes de definir los *coideales semiselectivos* conviene conocer las siguientes definiciones.

Definición 3.1.5. Sea $\mathcal{H}$ un coideal, entonces $\mathcal{X} \subseteq [\omega]^{\omega}$ es $\mathcal{H}-$**Ramsey**, si para cada $[a, A] \neq \emptyset$ tal que $A \in \mathcal{H}$ existe $B \in [a, A] \cap \mathcal{H}$, tal que $[a, B] \subseteq \mathcal{X}$ o $[a, B] \cap \mathcal{X} = \emptyset$.

Definición 3.1.6. Sea $\mathcal{H}$ un coideal, entonces $\mathcal{X} \subseteq [\omega]^\omega$ tiene la **propiedad de** $\mathcal{H}-$**Baire** abstracta, si para cada $[a, A] \neq \emptyset$ tal que $A \in \mathcal{H}$ existe $[b, B] \subseteq [a, A]$ con $B \in [a, A] \cap \mathcal{H}$, tal que $[b, B] \subseteq \mathcal{X}$ o $[b, B] \cap \mathcal{X} = \emptyset$.

Resulta que si $\mathcal{H}$ es selectivo entonces:

$\mathcal{X}$ tiene la propiedad de $\mathcal{H}$-**Baire** $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{X}$ es $\mathcal{H}$-**Ramsey**.

Es apenas natural preguntarse en este punto, qué tipo de coideales satisfacen la anterior equivalencia, es decir para qué tipo de coideal $\mathcal{H}$, vale que $\mathcal{X} \subseteq [\omega]^\omega$ es $\mathcal{H}-$Ramsey si y sólo si $\mathcal{X}$ tiene la propiedad de $\mathcal{H}$-Baire . Pues bien, a continuación los definimos.

3.1.3. Coideales semiselectivos

Definición 3.1.7. Sea $\mathcal{H}$ un coideal. Dada una colección $\{\mathcal{D}_n\}_{n\in\omega}$ de densos abiertos (ver definición 2.0.1) en $(\mathcal{H}, \subseteq)$, un conjunto B **es una diagonalización** de $\{\mathcal{D}_n\}_{n\in\omega}$ si y sólo si $B/n \in \mathcal{D}_n$ para cada $n \in B$.

El lector notará que hemos definido dos nociones de diagonalización, una para sucesiones decrecientes arbitrarias y otra para sucesiones de densos abiertos (definiciones 3.1.2 y 3.1.7). Al igual que la primera definición se utilizó para definir un coideal selectivo, la segunda se utilizará para definir un coideal semiselectivo.

Definición 3.1.8. Un co-ideal $\mathcal{H}$ es semiselectivo si para toda sucesión $\{\mathcal{D}_n\}_{n\in\omega}$ de subconjuntos densos abiertos de $\mathcal{H}$, la colección de todas sus diagonalizaciones es densa en $\mathcal{H}$ (con el orden $\subseteq$) .

Teorema 3.1.1. *Todo coideal selectivo es semiselectivo.*

Demostración. Sea $\mathcal{H}$ un coideal selectivo y sea $\{\mathcal{D}_n\}_{n\in\omega}$ una sucesión de subconjuntos densos de $\mathcal{H}$. Sea $A \in \mathcal{H}$, entonces (por densidad de $\mathcal{D}_0$) existe $D_0 \in \mathcal{D}_0$ tal que $A \supseteq D_0$, en general si ya hemos elegido $D_n \in \mathcal{D}_n$ para algún $n \in \omega$, existe (por densidad de $\mathcal{D}_{n+1}$) $D_{n+1} \in \mathcal{D}_{n+1}$ tal que $D_n \supseteq D_{n+1}$. Como $\{D_n : n \in \omega\}$ es una sucesión decreciente (de elementos en $\mathcal{H}$) y $\mathcal{H}$ es selectivo, tenemos que existe una diagonalización de tal sucesión en $\mathcal{H}$, llamémosla B. Para cada $n \in B$ vale que $B/n \subseteq D_n$, luego $B/n \in \mathcal{D}_n$ (pues $\mathcal{D}_n$ es abierto) para cada $n \in B$, esto termina la prueba, pues A era arbitrario, $B/min(B) \subseteq D_{min(B)} \subseteq A$, más aún $B/min(B) \in \mathcal{H}$, entonces $B/min(B)$ es una diagonalización de $\{\mathcal{D}_n\}_{n\in\omega}$ contenida en A, cómo se requería. $\square$

El siguiente ejemplo muestra que la noción de semiselectividad no implica la de selectividad.

Ejemplo 3.1.5 (Farah)**.** Sea $f : \omega \longrightarrow \omega \times \omega$ una biyección y sea $\mathcal{I}$ el ideal de todos los conjuntos $S \in \mathcal{P}(\omega)$ tales que $|f[S] \cap (\{n\} \times \omega)| < \omega$. Afirmamos que $\mathcal{H} = \mathcal{P}(\omega) \setminus \mathcal{I}$ es semiselectivo pero no es selectivo. Para ver que $\mathcal{H}$ no es selectivo, consideramos la sucesión decreciente de conjuntos en $\mathcal{H}$

$$(A_n := f^{-1}[[n, \omega) \times \omega])_{n\in\omega}.$$

Sea D una diagonalización de la anterior sucesión, entonces para cada $n \in D$ vale que $D/n \subseteq A_n$. En particular para cada $k \in \omega$ vale que $f[D] \cap (\{k\} \times \omega)$ es finito, pues si $d = min\{x \in D : x > k\}$[3] entonces $f[D/d] \subseteq [d, \omega) \times \omega$. Lo anterior implica que $D \in \mathcal{I}$, luego $\mathcal{H}$ no puede ser selectivo.
Veamos ahora que $\mathcal{H}$ es semiselectivo, sean $\{\mathcal{D}_n\}_{n\in\omega}$ una sucesión de densos abiertos en $\mathcal{H}$ y $A \in \mathcal{H}$. Naturalmente, existe $n \in \omega$ tal que $f[A] \cap (\{n\} \times \omega)$ es infinito. Más aún $B := f^{-1}[f[A] \cap (\{n\} \times \omega)] \in \mathcal{H} \upharpoonright A$, y utilizando la densidad de $\mathcal{D}_0$ existe $D_0 \in \mathcal{D}_0$ tal que $B \supseteq D_0$, en general si ya hemos escogido $D_n \in \mathcal{D}_n$ podemos elegir $D_{n+1} \in \mathcal{D}_{n+1}$ tal que $D_n \supseteq D_{n+1}$. Ahora seleccionamos $n_0 \in D_0$, luego $n_1 \in D_{n_0+1}$, de igual manera si ya hemos elegido $n_k \in D_{n_k}$ tomamos $n_{k+1} \in D_{n_k+1}$. Así $C := \{n_k : k \in \omega\} \in \mathcal{H} \upharpoonright B$ (pues $f[C]$ es infinito y está contenido en $\{n\} \times \omega$) y para cada $n_k \in C$ vale que $C/n_k \subseteq D_{n_k}$, en consecuencia $C/n_k \in \mathcal{D}_{n_k}$ para cada $k \in \omega$, esto es, existe $C \in \mathcal{H} \upharpoonright A$ diagonalización de $\{\mathcal{D}_n\}_{n\in\omega}$, como A era arbitrario, podemos concluir que $\mathcal{H}$ es semiselectivo.

3.1.4. ***Lema de Nash-Williams, Galvin***

En esta sección se demuestra un lema combinatorio que será de gran utilidad. El Lema de Nash-Williams, Galvin fue probado originalmente para el coideal selectivo $[\omega]^\omega$, a continuación se prueba una versión más general para coideales semiselectivos, siguiendo la prueba de Ilijas Farah [F].

Lema 3.1.1. *Sea $\mathcal{H}$ un coideal semiselectivo. Para cada $\mathcal{F} \subseteq [\omega]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$,*

a) *existe un conjunto $B \in \mathcal{H}$ tal que $[B]^{<\omega} \cap \mathcal{F} = \emptyset$, o*

b) *existe un conjunto $B \in \mathcal{H}$ tal que todo $C \in [B]^\omega$ tiene un segmento inicial propio en $\mathcal{F}$.*

Si se da la condición *b.* decimos que $\mathcal{F}$ **tiene una barrera contenida en** B.

Demostración. Diremos que $A \in \mathcal{H}$ **acepta** s, si todo elemento de $[s, A]$ tiene un segmento inicial en $\mathcal{F}$; A **rechaza** s si ningún elemento de $\mathcal{H} \upharpoonright A$ acepta a s. Decimos que A **decide** a s si A acepta o rechaza a s. Con las anteriores definiciones a la mano obtenemos las siguientes afirmaciones:

[3] Si D fuese finito concluiríamos inmediatamente que $D \in \mathcal{I}$.

1) Si A acepta (rechaza) s entonces todo $B \in \mathcal{H} \restriction A$, acepta (rechaza) s.

2) Dados $s \in [\omega]^{<\omega}$ y $A \in \mathcal{H}$, existe $B \in \mathcal{H} \restriction A$ que decide a s.

3) Si A acepta s, entonces A acepta $s \cup \{n\}$ para cada $n \in A/s$.

Necesitaremos las siguientes dos proposiciones para culminar la prueba.

Proposición 1: Si A rechaza s, entonces el conjunto B de los $n \in A/s$ tales que A acepta $s \cup \{n\}$, no está en $\mathcal{H}$.
Demostración: Supongamos por contradicción que $B \in \mathcal{H}$. Sean $C \in [s, B]$ y $n = min(C/s)$, como A acepta $s \cup \{n\}$, todo elemento de $[s \cup \{n\}, A]$ tiene un segmento inicial en $\mathcal{F}$, en particular C. Entonces (dado que C era abitrario) B acepta s, contradiciendo 1. y nuestra hipótesis. ■

Proposición 2: Existe $B \in \mathcal{H}$ que decide cada uno de sus subconjuntos finitos.
Demostración: Sea

$$\mathcal{D}_s := \{C \in \mathcal{H} : C \text{ decide a } s\}.$$

Note que (1) y (2) arriba implican, respectivamente, que $\mathcal{D}_s$ es abierto y denso. Veamos que los conjuntos $\mathcal{D}^n := \bigcap_{max(s) \leq n} \mathcal{D}_s$ son abiertos densos en $\mathcal{H}$. Para ver la densidad, sean $A \in \mathcal{H}$ y $s_1, s_2, ...s_{2^{n+1}}$ una enumeración de los subconjuntos de $\{0, 1, ..., n\}$. Por (2) existe $B_1 \in (\mathcal{H} \restriction A) \cap \mathcal{D}_{s_1}$, de nuevo por (2) existe $B_2 \in (\mathcal{H} \restriction B_1) \cap \mathcal{D}_{s_2}$ (como $\mathcal{D}_{s_1}$ es abierto entonces $B_2 \in \mathcal{D}_{s_1}$) , argumentando de esta manera tenemos que para cada $k \in \{3, 4, ..., 2^{n+1}\}$ existe $B_k \in (\mathcal{H} \restriction B_{k-1}) \cap \mathcal{D}_{s_k}$. Entonces $B_{2^{n+1}} \in (\mathcal{H} \restriction A) \cap \mathcal{D}^n$, luego $\mathcal{D}^n$ es denso en $\mathcal{H}$. En segundo lugar al ser $\mathcal{D}^n$ intersección finita de abiertos es abierto.
Ahora bien, sea B una diagonalización de $\{\mathcal{D}^n\}_{n\in\omega}$ y $s \in [B]^{<\omega}$, entonces si $n = max(s)$ como $B \in \mathcal{D}^n \subseteq \mathcal{D}_s$ tenemos que B decide a s, esto termina la prueba pues s era arbitrario.

■

Dado B como en la Proposición 2 arriba, si B acepta a $\emptyset$ entonces (b) del enunciado del lema vale, luego podemos asumir que B rechaza a $\emptyset$. Para cada $s \in [B]^{<\omega}$ rechazado por B sea

$$\mathcal{E}_s := \{C \in \mathcal{H} \restriction B : C \text{ rechaza } s \cup \{n\} \text{para cada } n \in C/s\},$$

de lo contrario definimos $\mathcal{E}_s := \mathcal{H} \restriction B$. Por la Proposición 1, los conjuntos $\mathcal{E}_s$ son densos bajo B en $\mathcal{H}$. Si $\mathcal{E}_s := \mathcal{H} \restriction B$ esto es claro; de lo contrario B rechaza a s, sea $A \in \mathcal{H} \restriction B$ y C el conjunto de los $n \in A$ tales que A no acepta a $s \cup \{n\}$. Por la Proposición 1, $C \in \mathcal{H}$. Además, como B decide cada uno de sus subconjuntos finitos, en este contexto no aceptar es lo mismo que rechazar, luego $C \cup s$ rechaza a $s \cup \{n\}$ para cada $n \in (C \cup s)/s$, esto es $(C \cup s) \in \mathcal{E}_s$ y $(C \cup s) \subseteq A$). Utilizando la semiselectividad de $\mathcal{H}$ encontramos $D \in \mathcal{H}$ tal que

$$D/s \in \mathcal{E}_s \text{ para cada } s \in [B]^{<\omega},$$

entonces se sigue (por inducción en la longitud de s)[4] que D rechaza todos sus subconjuntos finitos; en particular todo $s \subseteq D$ no está en $\mathcal{F}$, luego si tomamos $D = B$ tenemos que (a) en el enunciado del lema vale, esto termina la prueba. $\square$

[4] El caso base sería el siguiente, sea $d \in D$, como $D \in \mathcal{E}_\emptyset$, entonces D rechaza a $\{d\}$. Para el paso inductivo, tomamos $s \in [D]^{n+1}$ y suponemos que D rechaza cada elemento de $[D]^{<n+1}$. Sea r el conjunto de los n primeros elementos de s, entonces D rechaza a r y D/r rechaza a s, sea $C \in [s, D] \cap \mathcal{H}$, entonces $C \in [s, D/r] \cap \mathcal{H}$, luego C no acepta a s. Como C era arbitrario D rechaza a s.

3.2. ***Forcing***

El Forcing es un herramienta muy poderosa para construir modelos de la teoría de conjuntos, inventada en 1963 por Paul Cohen, quien la utilizó para probar la independencia de la hipótesis del continuo (CH)[5], construyendo un modelo de la teoría de conjuntos donde CH falla. Demostrando así que CH no puede ser probada con los axiomas de ZFC.
La idea ingenua es empezar con un modelo M (el *modelo base*) y extenderlo añadiendo un nuevo conjunto G. El modelo resultante $M[G]$, es grosso modo una colección minimal de conjuntos que contiene tanto a M como a G y, lo más importante, también satisface ZFC. Para una mejor comprensión del método es conveniente definir algunos conceptos.

Definición 3.2.1. Un ***orden parcial de forcing*** es una tripla $(\mathbb{P}, \leq, \mathbb{1})$, tal que $\leq$ es un preorden (i.e una relación binaria reflexiva y transitiva) sobre $\mathbb{P}$ y $\mathbb{1}$ es el elemento más grande $(\forall p \in \mathbb{P}\, p \leq \mathbb{1}\ )$.

A los elementos de $\mathbb{P}$ los llamamos condiciones de forcing. La genialidad de Cohen fue introducir condiciones de forcing que dan información parcial sobre un objeto ideal G y después demostrar que un tal G "genérico" existe:

Definición 3.2.2. Un filtro $G \subseteq \mathbb{P}$ es $\mathbb{P}-$genérico sobre M si para todo denso D elemento de $\mathcal{P}(\mathbb{P}) \cap M$ vale que $D \cap G \neq \emptyset$.

La construcción es típicamente de la siguiente forma: fijamos un orden parcial de forcing $\mathbb{P}$ que pertenece a M (modelo base), escogemos G un filtro $\mathbb{P}-$genérico sobre M (existe por el Lemma IV.2.3 en [K]), si $\mathbb{P}$ no tiene átomos (ver definición 2.0.1) $G \notin M$ (por Lemma IV.2.4 en [K]) . Informalmente $M[G]$ es la colección de todos los conjuntos que pueden ser construidos a partir de G y elementos de M utilizando "procesos sencillos de la teoría de conjuntos". Todo elemento de $M[G]$ va a tener un *nombre* en M que describe cómo es construido. Por ejemplo, el filtro G tiene un nombre canónico Γ tal que su valor según G en el modelo $M[G]$ es G (en símbolos $val(\Gamma, G) = G$, ver definición IV.2.6 y Lemma IV 2.12), en consecuencia $G \in M[G]$. Más aún, todo elemento $x \in M$ tiene su nombre $\check{x}$ tal que $val(\check{x}, G) = x$, entonces $M \subseteq M[G]$ (ver Lemma I.V.2.10). En otras palabras, $M[G]$ es la colección de todas las evaluaciones de nombres que se pueden crear con G y elementos de M.
Los siguientes dos lemas solamente los enunciaremos, pero el lector puede encontrar sus pruebas en la sección IV en [K].
Aunque $M \neq M[G]$, tienen algunas cosas en común:

Lema 3.2.1. *Si M es un modelo transitivo de ZF-P con $\mathbb{P} \in M$ y G es un filtro sobre $\mathbb{P}$ entonces:*

[5] CH fue postulada por Georg Cantor y hecha famosa por Hilbert

1. *M y $M[G]$ tienen los mismos ordinales.*
2. *$|M| = |M[G]|$.* $\square$

Definición 3.2.3. Para un c.p.o $\mathbb{P}$, el lenguaje de forcing $\mathcal{FL}_{\mathbb{P}}$ es la clase de fórmulas lógicas formadas usando la relación binaria $\in$ y todos los nombres en $V^{\mathbb{P}}$, como símbolos de constante.[6]

Antes de enunciar el siguiente lema, necesitaremos la definición que fundamenta el forcing:

Definición 3.2.4. Sean M un modelo contable y transitivo de ZF-P, $\mathbb{P} \in M$ un c.p.o de forcing, y ψ una sentencia del lenguaje $\mathcal{FL}_{\mathbb{P}} \cap M$. Entonces $p \Vdash_{\mathbb{P},M} \psi$ si y solamente si : $M[G] \models \psi$ para todo G filtro $\mathbb{P}-$genérico sobre M tal que $p \in G$. Omitiremos el subíndice $\mathbb{P}, M$ en el símbolo $\Vdash$ cuando sean claros del contexto. "$p \Vdash \psi$"se lee " p fuerza a ψ".

Lema 3.2.2. ***(Lema de la verdad)*** *Sea M un modelo contable y transitivo de ZF-P, sea $\mathbb{P} \in M$ un orden parcial de forcing, sea ψ una sentencia en $\mathcal{FL}_{\mathbb{P}} \cap M$, y sea G $\mathbb{P}-$genérico sobre M. Entonces $M[G] \models \psi$ si y sólo si existe $p \in G$ tal que $p \Vdash \psi$.* $\square$

Siempre que $\mathbb{P}, G \in M$ sean un orden parcial y un filtro $\mathbb{P}-$genérico sobre M, respectivamente; existe un modelo $M[G]$ cuya estructura está determinada por $\mathbb{P}$. Por cada $\mathbb{P}$ tenemos una noción de forcing diferente. En este documento estudiamos tres nociones de forcing, incluyendo el Forcing de Levy y el de Mathias, expuestos a continuación.
El Teorema 5.0.6 es válido en la extensión genérica resultante de forzar con el Colapso de Levy y en la demostración se utiliza que en la extensión genérica $M[G]$ hay genéricos correspondientes a el orden de Mathias en M. Por lo anterior debemos familiarizarnos con estas dos nociones de Forcing.

3.2.1. ***Colapso de Levy***

El colapso de Levy es un orden parcial de forcing de gran importancia. En Julio de 1970 Solovay [S] publicó un artículo en el que muestra la existencia de un modelo de ZF con propiedades muy interesantes, tales como que en ese modelo todo conjunto de reales tiene la propiedad de Baire, es Lebesgue medible, y no es contable contiene un conjunto perfecto. La construcción de tal modelo utiliza la técnica del Forcing con respecto al colapso de Levy. A continuación se define y se exponen algunas propiedades de esta noción de Forcing.

Definición 3.2.5. Sea λ un ordinal. Definimos $Col(\omega, < \lambda)$ como el conjunto de todas las funciones tales que:

[6] Para la definición de $V^{\mathbb{P}}$ ver definición IV.2.5 en [K].

1. $dom(f) \in [\lambda \times \omega]^{<\omega}$;
2. $rang(f) \subseteq \lambda$;
3. $f((\alpha, n)) < \alpha$ siempre que $(\alpha, n) \in dom(f)$.

Ordenamos a $Col(\omega, < \lambda)$ por $\supseteq$.

El c.p.o $Col(\omega, < \lambda)$ se conoce como **colapso de Lévy**, el siguiente lema justifica tal nombre.

Lema 3.2.3. *Sea G un filtro M-genérico sobre $Col(\omega, < \lambda)$. Sea $\alpha < \lambda$. Entonces el conjunto:*

$$f_\alpha := \{(n, \beta) : \{((\alpha, n), \beta)\} \in G\},$$

es una función sobreyectiva de ω en α.

Demostración. En primer lugar f_α es una función, pues si (n, β) y $(n, \eta) \in f_\alpha$, entonces $((\alpha, n), \beta)$ y $((\alpha, n), \eta) \in G$. Dado que G es un filtro existe una condición q (función) que extiende a ambas condiciones, luego:

$$\beta = \eta = q((\alpha, n)).$$

En segundo lugar $dom(f_\alpha) = \omega$, para cada $n \in \omega$ el conjunto

$$\{p \in Col(\omega, < \lambda) : (\alpha, n) \in dom(p)\}$$

es denso, así para algún $q \in G$ la dupla $(\alpha, n) \in dom(q)$, consecuentemente $q \leq \{((\alpha, n), q((\alpha, n))\} \in G$, esto implica $n \in dom(f_\alpha)$.
Por último f_α es sobreyectiva, pues si $\beta < \alpha$, entonces el conjunto:

$$\{p \in Col(\omega, < \lambda) : \exists n \in \omega((\alpha, n) \in dom(p) \wedge p(\alpha, n) = \beta)\}$$

es denso, de esta manera para algún $q \in G$ existe $n \in \omega$ tal que $q((\alpha, n)) = \beta$, en consecuencia $q \leq \{((\alpha, n), \beta)\} \in G$. Concluimos $\beta \in rang(f_\alpha)$.

$\square$

Corolario 3.2.1. *Sea G un filtro M-genérico sobre $Col(\omega, < \lambda)$. Entonces $\lambda \leq \aleph_1^{M[G]}$.*

Demostración. Por el lema anterior para cada $\alpha \in [\omega, \lambda)$ existe una sobreyección $f_\alpha : \omega \longrightarrow \alpha$ en $M[G]$. $\square$

En este contexto si λ es inaccesible (ver sección 3.3), el modelo $M[G]$ es llamado el modelo de Levy.

Teorema 3.2.1. ***(Solovay)*** *En el modelo de Levy, todo conjunto de reales en $L(\mathbb{R})$ es Lebesgue medible.*

. $\square$

Para el lector que no este familiarizado con la definición de $L(\mathbb{R})$ la damos a continuación.

$L(\mathbb{R})$ *el modelo interno más pequeño que contiene todos los reales*

Un *modelo interno* de ZF es una clase transitiva que contiene todos los ordinales y satisface todos los axiomas de ZF. El universo de los conjuntos constructibles a partir de $\mathbb{R}$, es decir el modelo interno más pequeño que contiene al conjunto $\mathbb{R}$ es denotado por $L(\mathbb{R})$. La construcción de este modelo se basa en la construcción de L, el universo construible de Gödel, la ilustramos a continuación. En primer lugar, para un conjunto M definimos:

$$\mathrm{def}(M) := \{X \subseteq M : X \text{ es definible sobre } (M, \in)\},$$

donde X es definible sobre $(M, \in)$ si y sólo si existen φ una fórmula del lenguaje de la teoría de conjuntos (i.e del lenguaje $\{\in\}$) y $a_1, ...a_n \in M$, tales que

$$X = \{x \in M : (M, \in) \models \varphi[x, a_1, ..., a_n]\}.$$

Sea T la clausura transitiva de $\{\mathbb{R}\}$ [7] . Entonces definimos inductivamente

$$\begin{aligned} L_0(\mathbb{R}) &= T \\ L_{\alpha+1}(\mathbb{R}) &= \mathrm{def}(L_\alpha(\mathbb{R})) \\ L_\lambda(\mathbb{R}) &= \bigcup_{\alpha<\lambda} L_\alpha(\mathbb{R}) \; (\lambda \text{ ordinal límite}) \\ L(\mathbb{R}) &= \bigcup_{\alpha \in Ord} L_\alpha(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

$L(\mathbb{R})$ satisface ZF pero no el axioma de elección.

3.2.2. **Forcing de Mathias**

El forcing de Mathias es una noción estrechamente relacionada con la Teoría de Ramsey, su nombre se debe a que fue introducida por A.R.D Mathias en 1977 [M].

Sea $\mathcal{H}$ un coideal, el forcing de Mathias asociado a $\mathcal{H}$ es el c.p.o $\mathbb{M}_{\mathcal{H}}$, compuesto de condiciones $(s, A) \in [\omega]^{<\omega} \times \mathcal{H}$ tales que $max(s) < min(A)$, ordenado de tal manera, que una condición (s, A) es más fuerte que otra condición (t, B) si:

i. $s \sqsupseteq t$

ii. $A \cup (s \setminus t) \subset B$

[7] Informalmente la clausura transitiva de un conjunto A es el conjunto que contiene a los elementos de A, los elementos de los elementos de A, los elementos de los elementos de los elementos de A, etc.

La idea es que la condición (s, A), determina un segmento inicial s de un nuevo subconjunto de ω en $\mathcal{H}$, con "raíz"s y "talloçontenido en A. Si $(s, A) \not\perp (t, B)$ (i.e son compatibles) entonces $A \cap B \in \mathcal{H}$ y s determina un segmento inicial de t o viceversa. Así si G es $\mathbb{M}_{\mathcal{H}}$-genérico, entonces G determina un subconjunto de ω (real de Mathias):

$$x_G := \bigcup\{s : \exists A((s, A) \in G)\},$$

Dado que G es $\mathbb{M}_{\mathcal{H}}-$genérico sobre M si y sólo si para todo denso $D \in M$ existe $(s_D, S_D) \in G \cap D$, es apenas natural, decir que $x_G \in [\omega]^\omega$ es un real de Mathias genérico si y sólo si para cada denso $D \in M$, existe $(s_D, S_D) \in D$ tal que $x_G \in [s_D, s_D]$.

A su vez, de manera natural x_G determina a G. En efecto, si

$$H = \{(s, A) \in \mathbb{M}_{\mathcal{H}} : x_G \in [s, A]\}$$

entonces:

a) $G \subseteq H$ y

b) H es $\mathbb{M}_{\mathcal{H}}$-genérico.

Note que (a) y (b) implican $H = G$, pues para cada condición (s, A) el conjunto:

$$\{(t, B) \in \mathbb{M}_{\mathcal{H}} : (t, B) \leq (s, A) \vee (t, B) \perp (s, A)\}$$

es denso en $\mathbb{M}_{\mathcal{H}}$. De esta manera si $(s, A) \in H \setminus G$ entonces por genericidad de G, existe $(t, B) \in G$ tal que $(t, B) \perp (s, A)$, además (por (a)) $(t, B) \in H$ contradiciendo (b) (con mayor presición, se niega la genericidad de H), en consecuencia $H \subseteq G$.
Veamos que (a) y (b) valen. En primer lugar, si $(s, A) \in G$, entonces para cualquier elemento $(t, B) \in G$ (por compatibilidad) $s \sqsubseteq t$ o $t \sqsubseteq s$, luego $s \sqsubseteq x_G$. Además si $n \in x_G \setminus s$ entonces existe $(u, C) \in G$ tal que $n \in u$, necesariamente $u \sqsupseteq s$ y existe (v, D) testigo de la compatibilidad de (u, C) y (s, A). De esta manera $n \in v \setminus s \subseteq A$, luego $n \in A$; concluimos $G \subseteq H$.

Ahora, para verificar (b), afirmamos que si $(s, A), (t, B) \in H$, entonces $(s \cup t, A \cap B)$ es un predecesor común de las anteriores dos condiciones. Para justificar esto probamos primero que las dos condiciones son compatibles. Observamos lo siguiente, al ser s y t segmentos iniciales de x_G, uno debe ser segmento inicial del otro, sin perder generalidad $s \sqsubseteq t$ (luego $s \cup t = t$). Además por la siguiente proposición $A \cap B \in \mathcal{H}$.

Proposición $X := A \cap B \in \mathcal{H}$

Demostración: Trabajamos todo el tiempo en el modelo base M. Dejámos que $\mathcal{H}$ decida, $X \in \mathcal{H}$ (en este caso ya está) o $Z := \omega \setminus X \in \mathcal{H}$. El caso interesante es el último. Consideramos el siguiente conjunto denso en M del orden $\mathbb{M}_{\mathcal{H}}$:

$$\mathcal{D} := \{(e, E) : (\emptyset, Z) \perp (e, E) \vee (e, E) \leq (\emptyset, Z)\}$$

Ahora utilizando la genericidad de G, sabemos que existe $(r, R) \in \mathcal{D} \cap G$. Hay dos casos $(r, R) \leq (\emptyset, Z)$ o $(r, R) \perp (\emptyset, Z)$. Con el primer caso llegamos a una contradicción pues tendríamos $x_G \subseteq r \cup R \subseteq Z$ (la primera contenencia se tiene porque $(r, R) \in G$) y $x_G \subseteq A \cap B (= \omega \setminus Z)$. Ahora bien, en el segundo caso no existe $(j, J) \in \mathbb{M}_{\mathcal{H}}$ testigo de la compatibilidad entre $(\emptyset, Z)$ y (r, R), además $R = (R \setminus Z) \cup (B \cap Z)$, entonces $R \cap (A \cap B) = R \setminus Z \in \mathcal{H}$ (de lo contrario $(r, R \cap Z)$ sería téstigo de la compatibilidad de las dos condiciones). Lo anterior implica $X \in \mathcal{H}$ por la definición de un coideal. En cualquier caso $X \in \mathcal{H}$ ■

Trivialmente $(t, A \cap B) \leq (t, B)$, por otra parte $t \setminus s \subseteq x_G \setminus s \subseteq A$, entonces $(A \cap B) \cup (t \setminus s) \subseteq A$, esto es $(t, A \cap B) \leq (s, A)$. Ahora probamos que H es cerrado hacia arriba, si $(s, A) \leq (u, C)$ entonces $u \sqsubseteq s \sqsubset x_G$ y $x_G \setminus u = (x_G \setminus s) \cup (s \setminus u) \subseteq A \cup (s \setminus u) \subseteq C$. Lo anterior muestra que H es filtro. Por último H intersecta todos los densos en $\mathbb{M}_{\mathcal{H}}$ pues a. vale y G es $\mathbb{M}_{\mathcal{H}}$-genérico. Acabamos de mostrar que $V[G] = V[x_G]$. Llamamos a x_G un real de Mathias, más precisamente, si M es un $\in$-modelo transitivo de ZFC y $x \subseteq \omega$:

x es un ***real de Mathias*** sobre $M \Leftrightarrow x = x_G$ para algún G, $\mathbb{M}_{\mathcal{H}}^{M}$-genérico sobre M

El siguiente teorema fue demostrado por Mathias para $\mathcal{H}$ un coideal selectivo.

Teorema 3.2.2. *Sea $\mathcal{H}$ un coideal semiselectivo entonces:*

1) *Para cada condición $(s, A) \in \mathbb{M}_{\mathcal{H}}$ y toda fórmula φ en el lenguaje de forcing, existe $B \in \mathcal{H} \upharpoonright A$ tal que (s, B) decide φ (en símbolos $(s, B) \parallel \varphi$) es decir o bien $(s, B) \Vdash \varphi$ o $(s, B) \Vdash \neg\varphi$.*

2) *Si x es un real de Mathias sobre M, entonces cada elemento $y \in [x]^{\omega}$ también es un real de Mathias sobre M.*

En la literatura (1) y (2) se conocen como la *propiedad de Prikry* y *propiedad de Mathias*, respectivamente.

Demostración. Veamos que (1) vale, sea $(s, A) \in \mathbb{M}_{\mathcal{H}}$ y φ una fórmula en el lenguaje de forcing. Para cada $t \sqsupseteq s$ definimos

$$\mathcal{D}_t := \{B \in \mathcal{H} \upharpoonright A : ((t, B) \parallel \varphi) \vee (\forall C \in \mathcal{H} \upharpoonright B (t, C) \not\parallel \varphi)\}.$$

Los conjuntos $\mathcal{D}_t$ son abiertos densos en $(\mathcal{H} \upharpoonright A, \subseteq^*)$. Sea B una diagonalización de $\{\mathcal{D}_n := \bigcap_{max(t)\leq n} \mathcal{D}_t\}_{n\in\omega}$. Definimos

$$\mathcal{F}_1 := \{t \in [\omega]^{<\omega} : (s \cup t, B) \Vdash \varphi\}, \mathcal{F}_2 := \{t \in [\omega]^{<\omega} : (s \cup t, B) \Vdash \neg\varphi\}.$$

Aplicando el lema 3.1.4 de Nash- Williams, Galvin para coideales semiselectivos a $\mathcal{F}_1$ y después a $\mathcal{F}_2$, obtenemos $C \in \mathcal{H} \upharpoonright B$ tal que $\mathcal{F}_1$ tiene una barrera en C o C no contiene subconjuntos finitos en $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$ tiene una barrera en C o C no contiene subconjuntos finitos en $\mathcal{F}_2$.
Afirmamos que $(s, C) \parallel \varphi$. De lo contrario existen $(t_1, C_1), (t_2, C_2) \leq (s, C)$ tales que $(t_1, C_1) \Vdash \varphi$ y $(t_2, C_2) \Vdash \neg\varphi$.
Para $i = 1, 2$ vale que $t_i \setminus s \in \mathcal{F}_i \cap [C]^{<\omega}$ (pues $B \in \mathcal{D}_{t_i}$), así si $O \in [C]^\omega$, entonces O posee un segmento inicial $u_i \in \mathcal{F}_i$ (para $i = 1, 2$). Por lo tanto $(s \cup u_i, B)$(para $i = 1, 2$) son condiciones compatibles (pues $(s \cup u_1 \cup u_2, O)$ es predecesor común) tales que una fuerza φ y otra $\neg\varphi$; una contradicción. .

La demostración de (2) se dará en el capítulo 4. Estudiando la prueba Ilijas Farah de esta afirmación en [F], encontramos algunos inconvenientes. Presentamos una prueba alternativa que sigue la demostración de Mathias de la misma propiedad para coideales selectivos.

□

3.3. Grandes cardinales

En esta sección se presentan algunos cardinales que se denominan grandes, esto debido en parte a que tienen la propiedad que su existencia es indemostrable en ZFC y son cardinales que tienen propiedades que los sitúan por encima de cardinales menores de modo que resultan inalcanzables mediante operaciones aplicadas a esos cardinales más pequeños. Recordemos, por el segundo Teorema de incompletitud de Gödel, si ZFC es consistente, entonces

$$\text{ZFC}\nvdash\text{“ZFC es consistente”}.$$

La existencia de un cardinal *fuertemente inaccesible* (ver definición 3.3.5) implica que existe un modelo de ZFC, así, asumir su existencia conlleva a estudiar otra teoría más rica que (de nuevo por el segundo Teorema de incompletitud de Gödel) “hereda la misma enfermedad”, es decir no puede probar su propia consistencia. En ZFC no se puede entonces probar que exista un cardinal fuertemente inaccesible, pues ZFC no puede deducir que tiene modelos.
Admitir la existencia de un cardinal fuertemente inaccesible, nos permite definir nuevos cardinales más grandes, como los cardinales *Mahlo* (ver definición 3.3.6) introducidos por Paul Mahlo.
La hipótesis más fuerte que consideraremos será la existencia de un cardinal Π^1_1-*indescriptible* (ver definición 3.3.2).

Decimos que una fórmula ϕ es Π^1_1, si es de la forma

$$\forall X\varphi,$$

donde X es una variable de orden 2 (i.e X hace referencia a un subconjunto del universo, que puede ser una clase propia de ese universo). Por ejemplo, si $\psi(X)$ es una fórmula que dice “X es un nombre para una sucesión de densos abiertos de $\dot{\mathcal{H}}$ ”, la fórmula

$$\forall\dot{D}\forall\tau(p\Vdash_{col(\omega,<\lambda)}(\psi(\dot{D})\wedge\tau\in\dot{\mathcal{H}})\longrightarrow(\exists x(x\in\dot{\mathcal{H}},x\subseteq\tau,x\text{ diagonaliza }\dot{D})))$$

es Π^1_1. En este caso φ tiene a $p,\dot{\mathcal{H}}$ como parámetros. Este ejemplo, aunque parece un poco esotérico, será útil en la prueba del Teorema 5.0.6.

Definición 3.3.1. Sea α un ordinal. Una fórmula ϕ ***describe*** a α con parámetros $U_1,...,U_k\subseteq V_\alpha$, si

$$(V_\alpha,E(V_\alpha))\models\phi(U_1,...,U_k),$$

pero para cada $\beta<\alpha$

$$(V_\beta,E(V_\beta))\not\models\phi(U_1\cap V_\beta,...U_k\cap V_\beta).$$

Ahora, si Ω es una colección de fórmulas definimos:

Definición 3.3.2. α es $\Omega-$indescriptible si ninguna fórmula en Ω describe a α.

Un caso particular de la anterior definición, se da cuando Ω es la colección de las fórmulas Π_1^1, de ser esta la situación decimos que α es Π_1^1-***indescriptible***.

Para entender mejor el tamaño de los ordinales que acabamos de definir, es útil introducir los siguientes conceptos.

Definición 3.3.3. Sea β un ordinal, definimos

$$cof(\beta) := min\{\kappa : \kappa \text{ es ordinal límite y } \exists(\xi_\alpha \in \beta)_{\alpha\in\kappa}(\bigcup_{\alpha\in\kappa} \xi_\alpha = \beta)\}$$

Definición 3.3.4. Un cardinal κ es regular si $cof(\kappa) = \kappa$.

Si un cardinal κ no es regular decimos que es *singular*.

Definición 3.3.5. Un cardinal κ es fuertemente inaccesible si es regular y para cada $\eta < \kappa$ vale que $2^\eta < \kappa$.

Definición 3.3.6. κ es ***Mahlo*** si y sólo si toda función normal sobre κ tiene un punto fijo fuertemente inaccesible.

Teorema 3.3.1. *Si κ es Π_1^1 indescriptible entonces κ es fuertemente inaccesible.*

Demostración. Supongamos que κ no es fuertemente inaccesible. Entonces o bien κ es sucesor, o κ es singular, o existe $\alpha < \kappa$ tal que $\kappa \leq 2^\alpha$.
En el primer caso si existe γ ordinal tal que $\kappa = \gamma + 1$ entonces si A_1 es el símbolo del predicado unario $\{\gamma\}$, tenemos

$$(V_\kappa, E(V_\kappa), \{\gamma\}) \models \exists x(A_1(x)),$$

pero para cada $\beta < \kappa$ vale $V_\beta \cap \{\gamma\} = \emptyset$, luego

$$(V_\beta, E(V_\beta), V_\beta \cap \{\gamma\}) \models \neg\exists x(A_1(x)).$$

Entonces existe una fórmula Π_1^1 que describe κ, contradiciendo la hipótesis. Ahora, si κ es singular, existen $\gamma < \kappa$ y $f : \gamma \longrightarrow \kappa$ no acotada en κ. Entonces si tomamos $\{\gamma\}$ y f como paramétros con A_1 y A_2 como símbolos correspondientes, tenemos

$$(V_\kappa, E(V_\kappa), \{\gamma\}, f) \models \exists x(A_1(x) \wedge A_2 : x \longrightarrow Ord).$$

Sin embargo si $\beta < \kappa$

$$(V_\beta, E(V_\beta), V_\beta \cap \{\gamma\}, f \cap V_\beta) \models \neg\exists x(A_1(x) \wedge A_2 : x \longrightarrow Ord),$$

pues si $\beta \leq \gamma$ entonces $V_\beta \cap \{\gamma\} = \emptyset$ y si $\beta > \gamma$ existe $\eta \in \gamma$ tal que $f(\eta) > \beta$ luego η no tiene imágen en V_β, esto implica que $dom(f) \neq \gamma$ en V_β. De nuevo llegamos a que κ es Π^1_1-descriptible, una contradicción.
Finalmente, si se da el último caso, sea $f : \mathcal{P}(\alpha) \longrightarrow \kappa$ sobre. Tomamos $\{\alpha\}$ y f como paramétros con símbolos de predicados A_1 y A_2, respectivamente, así

$$(V_\kappa, E(V_\kappa), \{\alpha\}, f) \models \exists x(A_1(x) \wedge A_2 : \mathcal{P}(x) \longrightarrow Ord).$$

Pero si $\beta \leq \alpha$ entonces $V_\beta \cap \{\alpha\} = \emptyset$ y si $\alpha < \beta < \kappa$ como f es sobre en κ muchos elementos de $\mathcal{P}(\alpha)$ no tienen imágen en V_β, entonces f no sería función. Lo anterior muestra que para cada $\beta < \kappa$

$$(V_\beta, E(V_\beta), \{\alpha\} \cap V_\beta, f \cap V_\beta) \models \neg\exists x(A_1(x) \wedge A_2 : \mathcal{P}(x) \longrightarrow Ord),$$

igualmente una contradicción. □

Teorema 3.3.2. *Si κ es Π^1_1-indescriptible, entonces κ es Mahlo.*

Demostración. Tenemos que probar que si $f : \kappa \longrightarrow \kappa$ es una función normal (i.e creciente y continua) entonces existe $\beta < \kappa$ fuertemente inaccesible tal que $f(\beta) = \beta$. Primero notamos que la inaccesibilidad fuerte puede ser expresada por la fórmula Π^1_1

$$\forall X[(FUNC(X) \wedge \exists x(x = dom(X) \vee \mathcal{P}(x) = dom(X)) \rightarrow \exists y(y = rang(X))]$$

(donde X es una variable de segundo orden y x una variable de primer orden), llamaremos a la anterior fórmula $Inac$. Entonces

$$((V_\beta, E(V_\beta)) \models Inac) \Longleftrightarrow \beta \,\text{es fuertemente innaccesible.}$$

Sea $B := rang(f)$, y A su símbolo de predicado unario, entonces por el Teorema 3.3.1

$$(V_\kappa, E(V_\kappa), B) \models Inac \wedge A \,\text{es no acotado.}$$

Ahora utilizando que κ es Π^1_1-indescriptible, sabemos que existe $\beta < \kappa$ tal que

$$(V_\beta, E(V_\beta), B \cap V_\beta) \models Inac \wedge A \,\text{es no acotado.}$$

Entonces β es fuertemente inaccesible y como $B \cap V_\beta = \{f(\alpha) : \alpha < \beta\}$ es no acotado en β, tenemos que $\beta = sup_{\alpha<\beta} f(\alpha) = f(\beta)$, luego β es un punto fijo fuertemente inaccesible de f.

□

4. PROPIEDADES DEL FORCING CON COIDEALES SEMISELECTIVOS

El propósito de este capítulo es probar la propiedad de Mathias de $\mathbb{M}_{\mathcal{H}}$ para $\mathcal{H}$ un coideal semiselectivo (ver Teorema 4.0.5). Informalmente la idea de la prueba es la siguiente: se muestra que al forzar con el orden $(\mathcal{H}, \subseteq^*)$ se agrega $\mathcal{U}$ un ultrafiltro selectivo (Lema 4.0.2), y no se agregan nuevos reales (Corolario 4.0.1). Dado que $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro selectivo, podemos considerar el orden $\mathbb{M}_{\mathcal{U}}$ en la extensión genérica. Resulta que para cada G filtro $\mathbb{M}_{\mathcal{H}}-$genérico sobre M, existen un ultrafiltro selectivo $\mathcal{U}$ (agregado por $(\mathcal{H}, \subseteq^*)$) y H un filtro $\mathbb{M}_{\mathcal{U}}-$genérico sobre $M[\mathcal{U}]$, tales que $M[G]{=}M[\mathcal{U}][H]$ (Teorema 4.0.4). Con los anteriores ingredientes a la mano, es muy sencillo probar que $\mathbb{M}_{\mathcal{H}}$ tiene la propiedad de Mathias (Teorema 4.0.5).
Comenzamos probando unos lemas:

Aunque el recíproco del siguiente lema también es cierto (ver 0.10 Proposición en [M]), no lo probaremos, pues no lo necesitaremos en la demostración del teorema principal de esta sección (Teorema 4.0.5).

Lema 4.0.1. *Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro no principal en $[\omega]^\omega$, supongamos que para toda coloración $[\omega]^2 = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ existe un conjunto homogéneo $B \in \mathcal{U}$, entonces $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro selectivo* [1] *.*

Demostración. Sea $(A_n)_{n\in\omega}$ una sucesión decreciente (respecto al orden $\supseteq$) de elementos de $\mathcal{U}$. Para cada conjunto A_i definimos:

$$\mathcal{O}_i := \{\{i, a\} : a \in A_i/i\},$$

y consideramos la coloración $\mathcal{C}_1 = \bigcup_{i\in\omega} \mathcal{O}_i$, $\mathcal{C}_2 = [\omega]^2 \setminus \mathcal{C}_1$. Por hipótesis existe $B \in \mathcal{U}$ homogéneo asociado a esta coloración. Hay dos casos, el primero es $[B]^2 \subseteq \mathcal{C}_1$, en este caso escogemos $n \in B$ y $m \in B/n$, entonces $\{n, m\} \in \mathcal{O}_n$, esto implica $m \in A_n/n$, es decir B diagonaliza a $(A_n)_{n\in\omega}$. El segundo caso es $[B]^2 \subseteq \mathcal{C}_2$, pero esto no se da pues $[B]^2 \subseteq \bigcap_{n\in\omega}[\omega]^2 \setminus \mathcal{O}_n$ implica que $B/n \cap A_n = \emptyset$, contradiciendo que $\mathcal{U}$ es ultrafiltro no principal.

□

[1] Mathias llama ultrafiltros de Ramsey a los ultrafiltros selectivos.

Lema 4.0.2. *Sea $\mathcal{H}$ un coideal semiselectivo entonces al forzar con el orden parcial $\mathbb{P} := (\mathcal{H}, \subseteq^*)$ se añade un ultrafiltro selectivo del orden contenido en $\mathcal{H}$. De hecho si $\mathcal{U}$ es $\mathbb{P}$-genérico entonces $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro selectivo.*

Demostración. Sea $\mathcal{U}$ un filtro $\mathbb{P}-$genérico, veamos que $\mathcal{U}$ es un ultrafiltr, note que la relación $\subseteq$ está contenida en $\subseteq^*$, así, si $A \in \mathcal{U}$ y $A \subseteq B$ entonces $B \in \mathcal{U}$. Por otra parte, si $A, B \in \mathcal{U}$, entonces existe $C \in \mathcal{U}$ tal que $C \subseteq^* A \cap B$ (pues son compatibles), luego $A \cap B \in \mathcal{U}$; esto es, $\mathcal{U}$ es un filtro del orden $(\mathcal{H}, \subseteq)$. Además, si $A \in [\omega]^\omega$, sabemos que $\mathcal{H}$ decide, $A \in \mathcal{H}$ o $\omega \setminus A \in \mathcal{H}$, en consecuencia el conjunto

$$\{X \in \mathcal{H} : X \subseteq A \vee X \subseteq \omega \setminus A\}$$

es denso en $\mathbb{P}$. Concluimos por la genericidad de $\mathcal{U}$ que $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro.
Ahora para ver que $\mathcal{U}$ es selectivo, observamos que toda coloración $[\omega]^2 = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ tiene un conjunto homogéneo en $\mathcal{U}$. En efecto si $C \in \mathcal{H}$, por el lema de Nash-Williams, Galvin aplicado a la familia $\mathcal{C}_1$ y al coideal semiselectivo $\mathcal{H} \upharpoonright C$, tenemos que existe $B_C \in \mathcal{H} \upharpoonright C$ tal que $\mathcal{C}_1$ tiene una barrera contenida en B_C o $[B_C]^{<\omega} \cap \mathcal{C}_1 = \emptyset$, en el primer caso $[B_C]^2 \subseteq \mathcal{C}_1$ y en el segundo $[B_C]^2 \subseteq \mathcal{C}_2$. Lo anterior muestra que el conjunto $\{B_C : C \in \mathcal{H}\}$ es denso en $(\mathcal{H}, \subseteq^*)$, entonces por genericidad de $\mathcal{U}$ existe $B \in \mathcal{U}$ homogéneo, tal como lo habíamos afirmado. Por último el lema 4.0.1 implica que $\mathcal{U}$ es selectivo. □

En teoría de conjuntos se dice que un orden parcial de forcing es $\sigma-$*distributivo* si toda colección $\{\mathcal{D}_n\}_{n\in\omega}$ de conjuntos densos abiertos en este orden, tiene la propiedad que $\bigcap_{n\in\omega} \mathcal{D}_n$ también es denso abierto.

El orden $(\mathcal{H}, \subseteq^*)$ es $\sigma-$distributivo, pues si $\mathcal{D}$ es denso abierto en $(\mathcal{H}, \subseteq^*)$ también es denso abierto en $(\mathcal{H}, \subseteq)$, así si $\{\mathcal{D}_n\}_{n\in\omega}$ es una colección de densos abiertos en $(\mathcal{H}, \subseteq^*)$, para cada $k \in \omega$ definimos:

$$\mathcal{D}^k := \bigcap_{i\leq k} \mathcal{D}_i.$$

Naturalmente para cada $k \in \omega$ vale que $\mathcal{D}^k$ es denso abierto en $(\mathcal{H}, \subseteq)$, entonces como $\mathcal{H}$ es semiselectivo, el conjunto de diagonalizaciones de $\{\mathcal{D}^k\}_{k\in\omega}$ es denso en $(\mathcal{H}, \subseteq)$. Más aún, si B es una diagonalización de $\{\mathcal{D}^k\}_{k\in\omega}$ y $n \in \omega$, tenemos que para algún $k \in B$ vale que $k > n$, entonces $B/k \in \bigcap_{i\leq k} \mathcal{D}_i$; esto es, $B/k \in \mathcal{D}_n$, y como $\mathcal{D}_n$ es denso abierto en $(\mathcal{H}, \subseteq^*)$ es cierto que $B \in \mathcal{D}_n$. Lo anterior muestra que el conjunto de todas las diagonalizaciones de $\{\mathcal{D}^k\}_{k\in\omega}$ está contenido en $\bigcap_{n\in\omega} \mathcal{D}_n$, en consecuencia la intersección es densa abierta.

El siguiente teorema lo enunciamos sin demostrarlo en su versión más general, de todos modos el lector puede encontrar su prueba en [J] Thm 15.6.

Teorema 4.0.3. *Sea $\mathbb{P}$ un orden parcial de forcing $\sigma-$distributivo, entonces si G es $\mathbb{P}-$genérico sobre M y $f \in M[G]$ es una función de ω en M se tiene que $f \in M$.*

Demostración . Sea $\dot{f}$ un nombre para la función f, entonces por el lema 3.2.2 existen $p_0 \in \mathbb{P}$, y $A \in M$ tales que:

$$p_0 \Vdash \dot{f} : \check{\omega} \to \check{A} \, \text{es una función.}$$

Además, por propiedades generales de forcing, para cada $n \leq \omega$ el conjunto

$$\mathcal{D}_n := \{p \leq p_0 : \exists x \in A(p \Vdash \dot{f}(\check{n}) = \check{x})\},$$

es denso abierto bajo p_0[2]. Entonces como $\mathbb{P}$ es $\sigma-$distributivo $\mathcal{D} := \bigcap_{n\in\omega} \mathcal{D}_n$ es denso abierto bajo p_0. De esta manera, por la genericidad de G existe $q \in G \cap \mathcal{D}$ tal que para cada $n \in \omega$ existe $x_n \in A$ y

$$q \Vdash \dot{f}(\check{n}) = \check{x}_n.$$

Definimos $g : \omega \to A$ de manera natural $g(n) = x_n$. Sea $n \in \omega$ entonces $g(n) = x_n = val(\check{x}_n, G) = val(\dot{f}(\check{n}), G) = f(n)$; esto es, $f \in M$.

□

Corolario 4.0.1. *Sea $\mathcal{H}$ un coideal semiselectivo, entonces al forzar con $(\mathcal{H}, \subseteq^*)$ no se añaden nuevos reales.*

Demostración. Es inmediato del teorema anterior, pues como observamos arriba, $(\mathcal{H}, \subseteq^*)$ es $\sigma-$distributivo, y todo subconjunto de ω está codificado por su función característica. □

Para probar el Teorema 4.0.4 necesitamos introducir algo de notación y enunciar un lema probado por Mathias en [M].

Definición 4.0.7. Sean $\mathcal{U}$ un ultrafiltro selectivo, $D \subseteq \mathbb{M}_{\mathcal{U}}$ y $s \in [\omega]^{<\omega}$. Diremos que X **captura** al par $\langle s, D\rangle$, si

1. $X \in \mathcal{U}$ y $max(s) \leq min(X)$
2. $\forall Y \in [X]^\omega \exists t \sqsubseteq Y((s \cup t, X/max(t)) \in D)$

Lema 4.0.3. *Sean $\mathcal{U}$ un ultrafiltro selectivo y $D \subseteq \mathbb{M}_{\mathcal{U}}$ denso abierto. Entonces para cada $s \in [\omega]^{<\omega}$ existe X que captura a $\langle s, D\rangle$.*

La siguiente prueba ha sido modificada de [M], la mayor diferencia es que Mathias no utiliza el Lema 3.1.4.

[2] Ver Lema 2.32 en [K]

Demostración. Definimos $Z := \omega/s$, para cada $t \in [\omega]^{<\omega}$ escogemos $Y_t \in \mathcal{U}$ tal que $(s \cup t, Y_t) \in D$ si existe, de lo contrario $Y_t = Z/t$. Sea Y una diagonaliación de $\{Y_t\}_{t\in[\omega]^{<\omega}}$, así para cada $t \in [Y]^{<\omega}$, si existe Y' tal que $(s \cup t, Y') \in D$ entonces $(s \cup t, Y/t) \leq (s \cup t, Y_t) \in D$, luego $(s \cup t, Y/t) \in D$. Consideramos la siguiente familia

$$\mathcal{F} := \{t \in [Y]^{<\omega} : \exists Y'((s \cup t, Y')) \in D\},$$

aplicamos el Lema 3.1.4 (Nash-Williams, Galvin) a el coideal semiselectivo $\mathcal{U}$; existe $X \in \mathcal{U}$ tal que $[X]^{<\omega} \cap \mathcal{F} = \emptyset$ o para cada $W \in [X]^{\omega}$ existe $t \sqsubseteq W$ tal que $t \in \mathcal{F}$. Si se da el segundo caso abríamos acabado la prueba, pues X/s capturaría a $\langle s, D\rangle$. Dado que existe $(a, A) \in D$ tal que $(a, A) \leq (s, X/s)$ entonces $a \setminus s \in [X]^{<\omega} \cap \mathcal{F}$, en consecuencia el primer caso no se da, esto termina la prueba. □

Lema 4.0.4. *Sea $D \in M$ denso en $\mathbb{M}_{\mathcal{H}}$, entonces*

$$\begin{aligned} D' &:= \{(s, A) \in D : A \in \mathcal{U}\} \in M[\mathcal{U}] \text{ y} \\ D'' &:= \{S : \exists s((s, S) \in D)\} \end{aligned}$$

son densos, respectivamente, en $\mathbb{M}_{\mathcal{U}}$ y $(\mathcal{H}, \subseteq^*)$.

Demostración. Dado que $M \subseteq M[\mathcal{U}]$ y $D \in M$ tenemos que $D \in M[\mathcal{U}]$, naturalmente también $\mathcal{U} \in M[\mathcal{U}]$, entonces $D' \in M[\mathcal{U}]$. Queremos ver que D' es denso en $\mathbb{M}_{\mathcal{U}}$, para esto sea $(s, A) \in \mathbb{M}_{\mathcal{U}}$, si encontramos $(t, B) \in D'$ tal que $(t, B) \leq (s, A)$ acabaríamos la prueba. Consideremos el conjunto

$$\mathcal{X} := \{X \in \mathcal{H} : \exists t \sqsupseteq s((t, X) \in D)\}.$$

Veamos que $\mathcal{X}$ es denso bajo A respecto al orden $(\mathcal{H}, \subseteq^*)$. Sea $C \in \mathcal{H}$ tal que $C \subseteq^* A$, definimos

$$R := C \cap A \subseteq A,$$

note que si $C = R \cup r$ donde $|r| < \omega$ entonces $R \in \mathcal{H}$. Además por la densidad de D, existe $(t, X) \in D$ tal que $(t, X) \leq (s, R)$ luego $X \in \mathcal{X}$ y $X \subseteq R \subseteq^* C$; esto es, $\mathcal{X}$ es denso.
Ahora bien, dado que $\mathcal{U}$ es $(\mathcal{H}, \subseteq^*)$-genérico sobre M, existe $B \in \mathcal{X} \cap \mathcal{U}$, esto implica que existe $t \sqsupseteq s$ tal que $(t, B) \in D \cap D' = D'$ y $(t, B) \leq (s, A)$, como fue anunciado, lo anterior concluye la prueba para D'.
Por otra parte si $X \in \mathcal{H}$, existe $(s, S) \in D$ tal que $(s, S) \leq (\emptyset, X)$ luego $S \subseteq^* X$ y $S \in D''$.

□

El siguiente teorema ha sido adaptado de [M] a nuestra notación.

Teorema 4.0.4. *Sean M un modelo transitivo de ZF+DCR, y $\mathcal{H}$ un coideal semiselectivo en M.*

i. Si x es $\mathbb{M}_{\mathcal{H}}$ genérico sobre M y $\mathcal{U} := \{X \in ([\omega]^\omega)^M : |x \setminus X| < \omega\}$, entonces $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro selectivo en $M[\mathcal{U}]$ y es genérico sobre M con respecto al orden $(\mathcal{H}, \subseteq^*)$. Más aún x es $\mathbb{M}_{\mathcal{U}}-$genérico sobre $M[\mathcal{U}]$.

ii. Si $\mathcal{U}$ es $(\mathcal{H}, \subseteq^*)-$genérico sobre M, y x es $\mathbb{M}_{\mathcal{U}}-$genérico sobre $M[\mathcal{U}]$, entonces x es $\mathbb{M}_{\mathcal{H}}-$genérico sobre M.

Demostración de (i). Sea x $\mathbb{M}_{\mathcal{H}}-$ genérico. Como para cada $Y \in ([\omega]^\omega)^M \setminus \mathcal{H}$ el conjunto

$$\{(s, S) \in \mathbb{M}_{\mathcal{H}} : S \cap Y = \emptyset\},$$

es denso, necesariamente $Y \cap x$ es finito. En consecuencia al ser la siguiente igualdad verdadera

$$x = (x \setminus Y) \cup (Y \cap x),$$

$\mathcal{U} \subseteq \mathcal{H}$. Sea $\mathcal{D} \in M$ denso abierto en $(\mathcal{H}, \subseteq^*)$, definimos

$$\mathcal{D}' := \{(s, S) \in \mathbb{M}_{\mathcal{H}} : S \in \mathcal{D}\};$$

para cada $(s, S) \in \mathbb{M}_{\mathcal{H}}$ existe $A \in \mathcal{D}$ tal que $A \subseteq^* S$, por este motivo existe $k \in \omega$ tal que $(s, A/k) \leq (s, S)$, y como $\mathcal{D}$ es abierto $(s, A/k) \in \mathcal{D}'$; esto es, $\mathcal{D}'$ es denso. Además $\mathcal{D}' \in M$, entonces por genericidad de x existe $(s, S) \in \mathcal{D}'$ tal que $x \in [s, S]$, entonces $|x \setminus S| < \omega$; es decir, $S \in \mathcal{U} \cap \mathcal{D}$. Ya que $\mathcal{D}$ era arbitraio $\mathcal{U}$ es $(\mathcal{H}, \subseteq^*)-$genérico sobre M. Por el corolario 4.0.1 $[\omega]^\omega \cap M[\mathcal{U}] \subseteq M$, en consecuencia tenemos la siguiente proposición

Proposición x es $\mathbb{M}_{\mathcal{U}}-$genérico sobre $M[\mathcal{U}]$.
Demostración: Sea $D \subseteq \mathbb{M}_{\mathcal{U}}$ denso abierto en $M[\mathcal{U}]$. Por el lema 4.0.3, para cada $s \in [\omega]^{<\omega} \cap M[\mathcal{U}]$ podemos escoger X_s que capture a $\langle s, D\rangle$ (existe por ser $\mathcal{U}$ selectivo). Sea $X \in \mathcal{U}$ una diagonalización de $\{X_s\}_{s \in [\omega]^{<\omega}}$. Por definición de $\mathcal{U}$ sabemos que $|x \setminus X| < \omega$, entonces existe $n \in x$ tal que $x \setminus X \subseteq x \cap n$. Sea $s = x \cap (n+1)$, así $max(s) \in X$, luego $x/max(s) \subseteq X/max(s) \subseteq X_s$; ya que X_s captura a $\langle s, D\rangle$ entonces $X/max(s)$ también captura a $\langle s, D\rangle$. De lo anterior sabemos que la siguiente afirmación es cierta en $M[\mathcal{U}]$:

$$\forall Y \subseteq X/max(s) \exists t \sqsubseteq Y ((s \cup t, X/max(t \cup s)) \in D). \tag{4.1}$$

Sea $\mathcal{O} := \{t \in [\omega]^{<\omega} : t \subset X/max(s), (s \cup t, X/max(s \cup t)) \notin D\}$, y ordenemos a $\mathcal{O}$ por $t \prec r$ si y sólo si $r \sqsubseteq t$ y $t \neq r$. Entonces $(\mathcal{O}, \prec) \in M[\mathcal{U}]$ y está bien fundamentado, pues para cada condición $t \in \mathcal{O}$ existe r tal que $t \sqsubseteq r \notin \mathcal{O}$ y ningún $s \sqsupseteq r$ está en $\mathcal{O}$, esto último implica que no pueden haber $\prec$ cadenas descendentes infinitas.
Dado que estar bien fundamentado es una noción absoluta para modelos de

ZF-P [3], en $M[x]$ el orden $\mathcal{O}$ también está bien fundamentado. En consecuencia la afirmación 4.1 también vale en $M[x]$, esto es, existe $t \sqsubset x/max(s)$ tal que $(s \cup t, X/max(s \cup t)) \in D$, entonces $s \sqsubseteq x \subseteq (X/max(s \cup t)) \cup (s \cup t)$, luego x es $\mathbb{M}_{\mathcal{U}}-$genérico sobre $M[\mathcal{U}]$.

■

Falta mostrar que $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro, pero esto es sencillo, si $X, Y \in \mathcal{U}$ entonces $x \setminus (X \cap Y) = (x \setminus X) \cup (x \setminus Y)$, luego $X \cap Y \in \mathcal{U}$, además si $X \subseteq Z$ tenemos que $x \setminus X \supseteq x \setminus Z$, luego $Z \in \mathcal{U}$, esto muestra que $\mathcal{U}$ es filtro. Para ver que $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro, sea $X \in [\omega]^\omega$ observe que

$$\{(s, S) : S \subseteq X \vee S \subseteq \omega \setminus X\},$$

es denso en $\mathbb{M}_{\mathcal{H}}$, entonces $X \in \mathcal{U}$ o $\omega \setminus X \in \mathcal{U}$. □

Demostración de ii. Por genericidad de $\mathcal{U}$, $\mathcal{P}(\omega) \cap M[\mathcal{U}] \subseteq M$ y $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{H}$.

Proposición $\mathcal{U} \subseteq \{X \in M : |x \setminus X| < \omega\}$
Demostración: Basta probar que para cada $X \in \mathcal{U}$; $x \setminus X$ es finito y x es infinito. Para mostrar esto último, observamos que el conjunto

$$\{(s, S) \in \mathbb{M}_{\mathcal{U}} : |s| \geq n\},$$

es denso abierto, entonces $n \leq |x|$ para cada $n \in \omega$: es decir x es infinito. Ahora, para mostrar lo primero, sea $X \in \mathcal{U}$; el conjunto

$$D := \{(s, S) \in \mathbb{M}_{\mathcal{U}} : S \subseteq X\},$$

es denso, pues para cada condición $(t, T) \in \mathbb{M}_{\mathcal{U}}$ vale que $(t, T) \geq (t, T \cap X) \in D$. Entonces existe $(s, S) \in D$ tal que $s \sqsubseteq x \subseteq S \cup s$ entonces $x/max(s) \subseteq X$, esto es $x \setminus X$ es finito. Esto termina la demostración.

■

Sea $D \subseteq \mathbb{M}_{\mathcal{H}}$ denso abierto, definamos

$$D' := \{(s, S) \in D : S \in \mathcal{U}\},$$

entonces por el lema 4.0.4, D' es denso en $\mathbb{M}_{\mathcal{U}}$ sobre $M[\mathcal{U}]$. Entonces existe $(s, S) \in D' \subseteq D$ tal que $s \sqsubseteq x \subseteq S \cup s$, luego x es $\mathbb{M}_{\mathcal{H}}-$genérico sobre M.

□

[3] Se puede mostrar que en modelos de ZF-P si R es una relación binaria sobre un conjunto A, entonces "A está bien fundamentado por R" es una noción absoluta. Ver [K] Lema II.4.7. En este caso, la fórmula $\varphi(A, R)$ = "A está bien fundamentado por R" es absoluta para $M[x]$ y $M[\mathcal{U}]$; esto es, $M[x] \models \varphi(X, Y) \Leftrightarrow M[\mathcal{U}] \models \varphi(X, Y)$ para todas las asignaicones de X, Y en $M[\mathcal{U}]$.

Mathias probó que el forcing que lleva su nombre, con respecto a un coideal selectivo $\mathcal{U}$ tiene la *propiedad de Mathias*, es decir si x es $\mathbb{M}_{\mathcal{U}}$-genérico sobre el modelo base, entonces todo $y \subseteq x$ infinito también lo es. A continuación se prueba el mismo resultado para un coideal semiselectivo.

Teorema 4.0.5 (**Propiedad de Mathias, coideales semiselectivos**). *Sean $\mathcal{H}$ semiselectivo y x $\mathbb{M}_{\mathcal{H}}-$genérico sobre M, entonces todo elemento de $[x]^{\omega}$ es $\mathbb{M}_{\mathcal{H}}-$genérico sobre M.*

Demostración. Sea $y \in [x]^{\omega}$ y sea $D \in M$ denso, entonces por el lema 4.0.4 el conjunto D' es denso en $\mathbb{M}_{\mathcal{U}}$, además por el Teorema 4.0.4 sabemos que x es $\mathbb{M}_{\mathcal{U}}$-genérico sobre $M[\mathcal{U}]$. Como $\mathbb{M}_{\mathcal{U}}$ tiene la propiedad de Mathias, sabemos que y es $\mathbb{M}_{\mathcal{U}}$-genérico sobre $M[\mathcal{U}]$. Lo anterior implica que existe $(s, A) \in D' \subseteq D$ tal que $s \sqsubseteq y \subset s \cup A$. Como D era arbitrario, y es $\mathbb{M}_{\mathcal{H}}$-genérico. $\square$

5. CONJUNTOS RAMSEY RESPECTO A UN COIDEAL SEMISELECTIVO

Necesitamos la siguiente definición para entender el teorema de esta sección.

Definición 5.0.8. Sea $\mathcal{H}$ un coideal, $\mathcal{X} \subseteq [\omega]^\omega$ es $\mathcal{H}-$**Ramsey** si para cada $[a, A] \neq \emptyset$ tal que $A \in \mathcal{H}$ existe $B \in [a, A] \cap \mathcal{H}$ tal que $[a, B] \subseteq \mathcal{X}$ o $[a, B] \cap \mathcal{X} = \emptyset$.

Teorema 5.0.6. *Sea λ un cardinal Π^1_1-indescriptible. Sea $M[G]$ la extensión genérica dada por $Col(\omega, < \lambda)$. Entonces, si $\mathcal{H}$ es un coideal semiselectivo en $M[G]$, todo conjunto de números reales en $L(\mathbb{R})$ de $M[G]$ es $\mathcal{H}$-Ramsey.*

Demostración. Sea $\mathcal{H}$ un coideal semiselectivo en $M[G]$. Sea $\mathcal{A}$ un conjunto de reales en $L(\mathbb{R})^{M[G]}$, entonces $\mathcal{A}$ está definido en $M[G]$ por una fórmula φ con una sucesión de ordinales como parámetros. Sea $[a, A]$ una condición del forcing de Mathias $\mathbb{M}_\mathcal{H}$. Finalmente, sea $\dot{\mathcal{H}}$ un nombre para $\mathcal{H}$. Note que $\dot{\mathcal{H}} \subseteq V_\lambda$.
Dado que $M[G]$ satisface que $\mathcal{H}$ es semiselectivo, la siguiente afirmación vale en $M[G]$: para toda suceción $\mathcal{D} = (D_n : n \in \omega)$ de subconjuntos densos abiertos en $(\mathcal{H}, \subset)$ y para todo $A \in \mathcal{H}$, existe $B \in \mathcal{H}$ tal que $B \subseteq A$ y B diagonaliza a $\mathcal{D}$.
Por el lema de la verdad (ver lema 3.2.2), si $\psi(X)$ es una fórmula que dice "X es un nombre para una sucesión de densos abiertos de $\dot{\mathcal{H}}$ ", la anterior afirmación implica que existe un $p \in G$ tal que la siguiente aserción vale en M:

$$\forall \dot{\mathcal{D}} \forall \tau (p \Vdash_{col(\omega,<\lambda)} (\psi(\dot{\mathcal{D}}) \wedge \tau \in \dot{\mathcal{H}}) \longrightarrow (\exists x (x \in \dot{\mathcal{H}}, x \subseteq \tau, x \text{ diagonaliza } \dot{D}))).$$

Note que cada real en $M[G]$ tiene un nombre en V_λ, y nombres de subconjuntos de $\mathcal{H}$ están contenidos en V_λ. Además, $Col(\omega, < \lambda) \subseteq V_\lambda$. Por lo tanto la misma afirmación es válida en la estructura $(V_\lambda, \in, \dot{\mathcal{H}}, Col(\omega, < \lambda))$. Más aún, al ser ψ una fórmula Π^1_1, sabemos que existe $\kappa < \lambda$ tal que la estrucutra $(V_\kappa, \in, \dot{\mathcal{H}} \cap V_\kappa, Col(\omega, < \lambda) \cap V_\kappa)$ satisface

$$\forall \dot{\mathcal{D}} \forall \tau (p \Vdash_{col(\omega,<\kappa)} (\psi(\dot{\mathcal{D}}) \wedge \tau \in \dot{\mathcal{H}} \cap V_\kappa) \longrightarrow (\exists x (x \in \dot{\mathcal{H}} \cap V_\kappa, x \subseteq \tau, x \text{ diagonaliza } \dot{D}))).$$

Dado que λ es Π^1_1- indescriptible podemos asumir que κ es fuertemente inaccesible, porque la fórmula que define a un cardinal fuertemente inaccesible es Π^1_1.

Ahora, definimos $G_\kappa := G \cap col(\omega, < \kappa)$, entonces G_κ es $col(\omega, < \kappa)-$genérico sobre M. Además $p \in G_\kappa$. En este contexto, $\dot{\mathcal{H}} \cap V_\kappa$ es un $col(\omega, < \kappa)-$nombre en M que es interpretado en $M[G_\kappa]$ como $\mathcal{H} \cap M[G_\kappa]$. Lo anterior provoca que $\mathcal{H} \cap M[G_\kappa] \in M[G_\kappa]$. Más aún, debido a que cada subconjunto (o sucesión de subconjuntos) de $\mathcal{H} \cap M[G_\kappa]$ que está en $M[G_\kappa]$ tiene un nombre contenido en V_κ, tenemos que en $M[G_\kappa]$ el conjunto $\mathcal{H} \cap M[G_\kappa]$ es semiselectivo; en consecuencia, tiene tanto la propiedad Mathias como la de Prikry.

Finalmente, sea $\dot{r}$ el nombre canónico para un real $\mathbb{M}_{\mathcal{H} \cap M[G_\kappa]}$−genérico y consideremos la fórmula $\varphi(\dot{r})$ en el lenguaje de forcing de $M[G_\kappa]$. Por la propiedad de Prikry de $\mathcal{H} \cap M[G_\kappa]$, existe $A' \in \mathcal{H} \cap M[G_\kappa] \restriction A$, tal que (a, A') decide a $\varphi(\dot{r})$. Dado que 2^{2^ω} calculado en $M[G_\kappa]$ es enumerable en $M[G]$, existe (en $M[G]$) x un real $\mathbb{M}_{\mathcal{H} \cap M[G_\kappa]}$−genérico sobre $M[G_\kappa]$, tal que $x \in [a, A']$. Para ver que existe ese real, se argumenta como en 5,5 de [M] utilizando la semiselectividad de $\mathcal{H}$ y el hecho que $\mathcal{H} \cap M[G_\kappa]$ es enumerable en $M[G]$ para obtener un elemento de $\mathcal{H}$ que es genérico. Por la propiedad de Mathias para $\mathcal{H} \cap M[G_\kappa]$, todo $y \in [a, x/a]$ también es $\mathbb{M}_{\mathcal{H} \cap M[G_\kappa]}$−genércio sobre $M[G_\kappa]$, también $y \in [a, A']$. Entonces $\varphi(x)$ si y sólo si $(a, A') \Vdash \varphi(\dot{r})$ si y sólo si $\varphi(y)$. De esta manera $[a, x \setminus a]$ está contenido en $\mathcal{A}$ o es disjunto de $\mathcal{A}$. $\square$

6. CONCLUSIONES

Sería bueno encontrar una prueba alternativa de la propiedad de Mathias para coideales semiselectivos utilizando alguna técnica diferente a la presentada en este documento. En particular arreglar la prueba de Farah.

No se sabe si las hipótesis del Teorema 5.0.6 son óptimas. Más precisamente, no se sabe si la hipótesis referente a un cardinal Π^1_1 indescriptible es necesaria o si se puede obtener el mismo resultado con una hipótesis más débil.

Bibliografía

[D] C. Di Prisco, J. Mijares, C. Uzcátegui. *Ideal games and Ramsey sets.*Proc. Amer. Math. Soc.,Volume 140, Number 7, July 2012, MR2898689

[F] Farah, I., *Semiselective coideals.* Mathematika, 45(1997), 79-103. MR1644345 (2000b:03165)

[J] Jech, T., *Set Theory.* Springer Verlag, 2003.

[K] Kunen, K. *Set Theory.* Studies in Logic, Mathematical Logic and Foundations, 2011.

[M] Mathias, A.R.D., *Happy families.* Annals of Mathematical Logic, 12 (1977), 59-111. MR0491197 (58:10462)

[T] Todorcevic, S., *Introduction to Ramsey Spaces*, Princeton University Press, 2010.

[S] Solovay, R. M., *A model of set-theory in which every set of reals is Lebesgue measurable.* Annals of Mathematics (2), 92 (1970), 1-56. MR0265151 (42:64)