UNIVERSIDAD DE LOS ANDES

FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA DEL MÉTODO PARA EL APRENDIZAJE NATURAL DE LAS MATEMÁTICAS

CARLOS ALBERTO DÍEZ FONNEGRA

Maestría en Educación, CIFE
Bogotá, Colombia
2014

FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA DEL MÉTODO PARA EL APRENDIZAJE NATURAL DE LAS MATEMÁTICAS

CARLOS ALBERTO DÍEZ FONNEGRA

Tesis presentada como requisito parcial para optar al título de:
Magíster en Educación

Directores:
ÁNGELA MARÍA RESTREPO SANTAMARÍA
LUIS ÁNGEL BOHÓRQUEZ ARENAS

Universidad de los Andes
Maestría en Educación, CIFE
Bogotá, Colombia
2014

TABLA DE CONTENIDO

ÍNDICE DE TABLAS Y GRÁFICAS

RESUMEN

El método para el aprendizaje natural de las matemáticas es una construcción pedagógica que pretende dar lineamientos específicos sobre la forma de desarrollar los procesos de pensamiento matemático y los objetos matemáticos en la educación inicial. Esta construcción nace de la experiencia del autor de este trabajo al hacer un año de observación participativa y no participativa de sesiones de clase de matemáticas, grupos focales y análisis de currículo en diversas instituciones educativas del país. Al tener un carácter inductivo, esta construcción requería una fundamentación teórica que le diera mayor fortaleza a la propuesta.

Por eso, en este trabajo de carácter teórico se busca responder la pregunta: ¿Cuáles ideas sobre educación matemática y psicología del aprendizaje sustentan los principios que dan estructura al método para el aprendizaje natural de las matemáticas?

Los principios a los que se refiere la pregunta son analizados en este escrito a partir de las ideas de diversos autores como: Artigue, Bishop, Brousseau, Bruner, D'Amore, Duval, Freudenthal, Godino, Moreno, Piaget, Perkins, Radford, Rico, Tall y Vygotsky, entre otros, con base en la metodología de investigación documental, que permitió hacer el replanteamiento o reafirmación de la formulación original de los principios, y establecer relaciones entre estos, demostrando la coherencia de la estructura que conforman y que permite la formulación de una propuesta pedagógica más sólida.

INTRODUCCIÓN

Siempre he tenido una vocación por la enseñanza y, específicamente, por la enseñanza de las matemáticas. Esto me ha llevado a desempeñarme como profesor en diversos contextos. En esta labor, que he realizado por más de veinte años, me he dado cuenta de que algunos de los problemas de los estudiantes son recurrentes: los objetos matemáticos que causan dificultad son los mismos y los estudiantes cometen, generalmente, los mismos errores. De esta observación, empecé a deducir que el problema no podía ser de los estudiantes, pues su variedad en género, edad, estrato socioeconómico, origen, etc. los hacía suficientemente diferentes para que causas comunes intrínsecas a ellos los afectaran. De modo que todo apuntaba a que las causas del problema estuvieran relacionadas con las formas metodológicas que los profesores usaban para hacer que los estudiantes desarrollaran conocimientos sobre los objetos matemáticos y las concepciones que los mismos profesores tenían sobre dichos objetos.

Por tal razón, hace unos ocho años, y durante un periodo de un año en particular, recorrí diferentes colegios del país estudiando una gran cantidad de aulas de matemáticas, mediante observación, entrevistas, grupos focales y análisis de resultados de desempeño. En este estudio confirmé que los problemas de los estudiantes derivaban en gran medida de la metodología de enseñanza de los profesores, e incluso, de la falta de comprensión sobre los objetos matemáticos que estos tenían.

Toda esta situación me motivó a crear un programa pedagógico que preparara mejor a los profesores de matemáticas para que enseñaran más efectivamente la materia. Este programa lo denominé: 'matemáticas para la vida'.

Dado que las causas que mencioné antes afectaban a los estudiantes desde los primeros años y originaban un efecto de *bola de nieve* en los grados superiores, dediqué esfuerzos especiales en desarrollar una metodología para la enseñanza de las matemáticas en la educación inicial a la que llamé: 'método para el aprendizaje natural de las matemáticas'. Este método tiene su base en siete principios pedagógicos que fueron postulados por mí a partir de un proceso de inducción realizado con base en observaciones de clases, en las que ejercí el rol de observador no participante, y la integración de los resultados de estas observaciones con mi propia experiencia como docente de matemáticas, sin embargo, estos principios no estaban conscientemente fundamentados en la teoría, por lo tanto este trabajo pretende analizar estos principios y contrastarlos con trabajos formales y literatura académica para teorizar sobre ellos.

En este punto es importante tener en cuenta que, al nacer de la experiencia y de los conocimientos que se tenían al momento de la postulación de los principios, dicha postulación hace una síntesis de múltiples enfoques educativos, de algunas teorías de la didáctica de las matemáticas y de diferentes aproximaciones a la psicología del aprendizaje, en las que el autor ha estado imbuido sin ser consciente.

Teniendo en cuenta todo lo anterior, el problema que pretende resolver esta investigación de carácter teórico se puede formular como la necesidad de fundamentar, de manera coherente, en ideas de la teoría de la didáctica de las matemáticas y en principios psicológicos del aprendizaje, los principios pedagógicos que dan estructura al método para el aprendizaje natural de las matemáticas.

Para hacer operativa la resolución de este problema de investigación se plantean unas preguntas orientadoras; a continuación procedo a enunciarlas y a dar una pequeña explicación en cada caso:

1. ¿De qué tipo son los principios que se formularon para fundamentar el método?
   Como dije antes, los principios que fundamentan el método que propongo, fueron postulados a partir de la inducción realizada en la observación de un

número considerable de sesiones de clase. Este hecho permite pensar que esos principios son de tipo didáctico (principios 2, 3 y 6), ya que buscan describir buenas prácticas de aula en relación con la enseñanza de las matemáticas; sin embargo algunos de ellos tienen un tinte más curricular (principios 1, 4, 5 y 7), es decir, pretenden ir más allá del aula de clase, para centrarse en el diseño de las enseñanzas y su secuencia. Mi intención, dentro de esta fundamentación, es aportar elementos para una clasificación lo más clara posible de estos principios en estas dos categorías.

2. ¿Qué relaciones existen entre los principios?
   En la medida en que los principios que fundamentan el método tengan más y mejores relaciones entre ellos, su estructura pedagógica será más fuerte, por eso es importante encontrar y caracterizar dichas relaciones.

3. ¿Son coherentes los principios entre sí?
   Dado que los principios que fundamentan el método surgieron a partir de un proceso de inducción, puede que estos no sean todos los principios que se necesiten para darle base; más aún, puede ser que algunos de ellos redunden entre sí. Poderlos relacionarlos (con base en la respuesta a la pregunta 2), permitiría saber si quedan aspectos por cubrir o si hay principios redundantes o contradictorios.

4. ¿Qué evidencias existen en la teoría sobre la veracidad de los principios?
   La respuesta a esta pregunta busca sustentar (o refutar) cada uno de los principios con base en la información disponible sobre didáctica de las matemáticas y psicología del aprendizaje. Sin embargo, hay que tener en cuenta que el hecho de no encontrar referencias teóricas sobre alguno o algunos de los principios no implica que estos no tengan características de veracidad, porque cabe la posibilidad de que no se hayan abordado previamente en las investigaciones sobre educación matemática o sobre psicología del aprendizaje.

El ejercicio de formulación *a priori* de estas preguntas permite orientar la búsqueda de la información para fundamentar los principios, sin embargo, dada la naturaleza de este tipo de investigación, dichas preguntas podrán ser reformuladas con el avance del proceso.

Con el fin de llevar un orden que permita una fácil lectura de las ideas de este trabajo y que sea provechoso a la hora de dar solución al problema de investigación, daré la siguiente estructura a cada capítulo que sustente un principio:

1. Enunciaré los elementos (conceptos, términos y proposiciones) que componen analíticamente el principio.
2. Presentaré los soportes de los elementos y estableceré relaciones entre ellos y, posiblemente, entre otros principios. Al momento de presentar estos soportes teóricos y establecer las relaciones entre ellos, ejemplificaré con casos desde la educación inicial de las matemáticas.
3. Por último, estudiaré la formulación original del principio y propondré, si es necesario, una reformulación, según la comprensión que se ha alcanzado durante el desarrollo del capítulo de los elementos que lo componen.

CAPÍTULO 1: METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN

Siendo el propósito de este trabajo sustentar, validar o reformular los principios del método para el aprendizaje natural de las matemáticas, la investigación documental se constituyó en la base metodológica de esta tesis. El proceso metodológico, de carácter cualitativo, condujo a la construcción de conocimiento en las áreas de educación matemática y psicología del aprendizaje, a partir de una reflexión personal originada durante la observación en aulas del proceso de enseñanza – aprendizaje, la discusión en grupos focales y el análisis de currículo que realicé durante un año en varios colegios del país.

Teniendo en cuenta que la pregunta de investigación que motiva este trabajo es: **¿Cuáles ideas sobre educación matemática y psicología del aprendizaje sustentan los principios que dan estructura al método para el aprendizaje natural de las matemáticas?**, la metodología de la investigación documental se presenta como el tipo más pertinente para resolverla porque en ella se procura llevar a cabo un trabajo sistemático, objetivo, producto de la lectura, análisis y síntesis de la información producida por otros, para dar origen a una nueva información, con el sello del nuevo autor (Morales, 2003).

Más aun, el paradigma humanístico interpretativo explicado por Justo Arnald (citado por Gómez, 2011), tiene tres características que coinciden con las de este trabajo. La primera es "ser holístico, de tal manera que se busca (…) una comprensión global del fenómeno para visualizarlo en un contexto mayor que le dé fuerza y sentido" (p. 229). Esta investigación cumple con esta primera característica, puesto que el fenómeno estudiado, es la estructura que los principios le dan al método para el aprendizaje natural de las matemáticas. Adicionalmente, dicha estructura se enmarca en las teorías, más generales, de la educación matemática y la psicología del aprendizaje, con el fin de dotarla de sentido y mostrar su coherencia.

Una segunda característica del paradigma humanístico interpretativo es el hecho de ser inductivo, es decir, “ser expresado como un proceso de interacción entre la teoría y la realidad del objeto de estudio” (p. 229). Característica que también se adapta al desarrollo de este trabajo, durante el cual se presenta un proceso de interacción entre la teoría que proponen diversos autores y la realidad del objeto de estudio que procede de la experiencia que tuve en campo durante el acompañamiento a clases.

Y la tercera característica propuesta por Arnald dentro del paradigma interpretativo es su condición idiográfica, es decir, “la razón por la cual el tema resulta ser singular, único, alejado de generalizaciones, y no como perteneciente a alguna clase de teoría, movimiento o modalidad” (p. 230). Acá, el método para el aprendizaje natural de las matemáticas es el tema que cumple con los elementos de singularidad y alejamiento de generalizaciones, el cual surge de una experiencia particular de un individuo cuando se pone frente a la realidad de la enseñanza de las matemáticas.

Al cumplir las tres características del paradigma humanístico interpretativo, se puede justificar de manera suficiente que esta investigación se inscriba en dicho paradigma, y dentro del tipo de investigación documental.

Sobre la investigación documental Morales afirma que:

> Existen autores que señalan que no se puede llamar investigación a este tipo de ejercicio, ya que toda investigación conlleva la documentación. Sin embargo, reivindicamos el sentido de investigación de esta práctica, puesto que la entendemos como un proceso de construcción de conocimientos, un proceso de descubrimiento, de explicación de una realidad que se desconocía. (Morales, 2003, p. 1)

En esta investigación, en efecto, se realiza un proceso de construcción de conocimiento y de descubrimiento para explicar una realidad que antes se desconocía, de tal suerte que algunos de los principios originalmente propuestos *a* *priori* de la validación y la sustentación, se ven reformados e incluso eliminados con base en la comprensión de las nuevas ideas surgidas en la investigación.

Siguiendo la metodología de la investigación documental, esta tesis pasa por cinco etapas, las cuales corresponden al proceso propuesto por Morales (2003) y Cortés & García (2003). La primera, la selección y delimitación del tema; la segunda, el acopio de las fuentes de información; la tercera, la organización de los datos y la conceptualización; la cuarta, el análisis de los datos; y la quinta, la escritura de la respuesta a la pregunta de investigación, a partir de la reelaboración de los conceptos involucrados en la tesis.

En la primera etapa, la selección y delimitación del tema se realizó desde la revisión preliminar de cada uno de los siete principios que fundamentan el método. Esta revisión permitió el reconocimiento de los términos clave en cada uno de los principios expuestos, evidenciando las necesidades de definición profunda y establecimiento de relaciones que existen entre estos términos.

A continuación se procede a explicitar cada uno de los conceptos y términos clave que se rastrearon en cada principio.

PRINCIPIO	TÉRMINOS (CONCEPTOS) CLAVE
1	Objeto de conocimiento de las matemáticas Objeto matemático Evolución histórica del pensamiento matemático Obstáculo epistemológico Epistemología genética Principio (ley) biogenético Principio de paralelismo
2	Aprendizaje *Nocionalización* Noción Representación Comprensión
3	Abstracción Generalización

4	Pensamiento Pensamiento matemático Pensamiento numérico Pensamiento variacional Pensamiento métrico Pensamiento geométrico
5	Tipos de objetos de pensamiento (objetos matemáticos)
6	Lenguaje Aprendizaje social de la matemática
7	Aprendizaje en espiral Comprensión

Tabla 1. Términos clave de cada principio.

La segunda etapa, el acopio de las fuentes de información, se adelantó a partir de las necesidades de definición y relación de términos que se percibieron en la primera etapa, generando 'vetas' de información documental que contienen dos tipos de fuentes: primarias, es decir, documentos de los que se obtuvo información producida por el mismo autor del documento que tomé como referencia, ya sea en el mismo o citada de sus trabajos anteriores; y secundarias, esto es, documentos de los que obtuve información que el autor del documento tomó de otros autores diferentes.

Considero que el rastreo documental que hice para este trabajo fue el necesario para hacer una correcta sustentación de los principios, puesto que para hacer dicho rastreo me guié por los autores principales que hablan sobre cada uno de los conceptos que expongo en la tabla anteriormente presentada; estos autores los obtuve de mi conocimiento y experiencia previas y de las sugerencias de los directores de este trabajo. Después de la lectura de estos textos de autores principales, revisé su bibliografía, y así fui derivando en otros autores. Seguí este proceso hasta el momento en que la información llegaba a puntos comunes entre unos y otros.

La organización de los datos y la conceptualización, pasos adelantados durante la tercera etapa, se realizaron a través del rastreo de términos, conceptos y proposiciones claves identificadas en las fuentes de información, cuyo criterio de selección fue su aporte a la argumentación a favor o en contra de los principios, así como a la articulación entre los mismos. Con estos elementos (términos, conceptos y proposiciones claves) se realizaron conceptualizaciones en tres niveles: un primer nivel relacionado con los principios generales de la psicología del aprendizaje, el cual da sustento o refutación al principio; un segundo nivel concerniente a las ideas específicas de la didáctica de las matemáticas relacionadas con cada principio; y un tercer nivel orientado hacia la educación matemática inicial.

Esta lógica deductiva para el análisis de los datos, correspondiente a la cuarta etapa, permitió tener los elementos necesarios para tomar decisiones sobre la formulación de los principios y continuando con la óptica de la investigación documental, dio paso a la reflexión para la reformulación, eliminación o confirmación de dichos principios.

Por último, en la quinta etapa se dio respuesta a la pregunta de investigación a través de la articulación de las ideas que sustentan el método para el aprendizaje natural de las matemáticas, mediante la formulación de una propuesta pedagógica más sólida y sustentada por la documentación adelantada bajo el paradigma humanístico interpretativo.

CAPÍTULO 2: SOBRE EL MÉTODO PARA EL APRENDIZAJE NATURAL DE LAS MATEMÁTICAS

Descripción del método

Lo primero a considerar, en este sentido, es su nombre: *método para el aprendizaje natural de las matemáticas*. Dicho nombre describe su esencia: se trata de un método, es decir, un conjunto de pasos ordenados para conseguir un producto. Dicho método está basado en la noción de aprendizaje natural, una noción que sigue lineamientos constructivistas, en la medida en que promulga que las personas aprenden siguiendo el orden del proceso histórico de desarrollo del pensamiento del ser humano, basándose en la construcción de los instrumentos de conocimiento desde las necesidades reales de los individuos que aprenden (Carretero, 2001).

El método para el aprendizaje natural de las matemáticas describe conceptual y procedimentalmente cada uno de los procesos iniciales involucrados en los cuatro ejes de pensamiento matemático (numérico, variacional, métrico y geométrico), en una adaptación de los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998). Para cada eje de pensamiento, el método propone una serie de logros que deben alcanzar los aprendices, con el propósito de conducirlos hacia un correcto desarrollo de su pensamiento matemático. Particularmente, el método propone indicadores específicos (estadios) para cada uno de estos logros, a manera de guía que permite a los maestros determinar el avance de los estudiantes. Además el método propone estrategias didácticas asociadas a cada uno de estos estadios para que los profesores las desarrollen con los estudiantes (Díez, Pantano & Camargo, 2012).

El programa pedagógico que está basado en el método se implementa en los colegios, formando a los profesores para que comprendan los procesos de pensamiento matemático y, así mismo, dominen y apliquen las estrategias diseñadas para los estadios de cada proceso. Esto se logra mediante talleres de formación a los docentes y posterior acompañamiento en el aula durante las clases.

La característica de ser natural que da forma al método no es exclusiva de este, sino que viene dada por su naturaleza constructivista. Existen otros acercamientos a la enseñanza de las matemáticas basados también en el abordaje constructivista, que están disponibles en la literatura. Uno, particularmente afín a la estructura del método para el aprendizaje natural de las matemáticas, es el que está incluido en la propuesta de Clements & Sarama (2009), Learning and teaching early mathematics, que también está estructurado en forma de procesos, y que tiene excelentes estrategias didácticas.

Los principios que soportan el método

El método para el aprendizaje natural de las matemáticas se ha implementado en varios colegios de Colombia, logrando que los profesores que participan en estas implementaciones cualifiquen la forma como desarrollan el pensamiento matemático de sus estudiantes y den nuevos significados a sus prácticas pedagógicas en torno a las matemáticas.

Este método se fundamenta en siete principios que se establecen de manera inductiva a partir de observaciones de clases y de discusiones con los profesores y los estudiantes. A continuación y antes de realizar la sustentación teórica de los principios, haré una breve explicación de cómo se llegó a la formulación de cada uno, aclarando que aparte de lo observado en las clases, conté en un primer momento y antes de la preparación de este documento con el texto de Savery & Duffy (1996): Problem based learning: an instructional model and its constructivism framework.

Principio 1. Los objetos matemáticos se aprenden en el mismo orden en que la evolución histórica los ha dispuesto.

En las observaciones de clase que dieron lugar a la creación del método fue recurrente darme cuenta de que los profesores de preescolar buscaban que los niños aprendieran las matemáticas con base en la memoria, con actividades como escribir los números por su parecido con la forma de objetos cotidianos, escribir y recitar la serie numérica hasta un número determinado, aprender las características de las formas (pero no hacer el ejercicio de caracterización), etc. También me puede dar cuenta de que esta forma de proceder no permitía que los estudiantes desarrollarán su pensamiento matemático, puesto que cuando se hicieron evaluaciones que implicaran poner en juego algunos procesos en este sentido, los estudiantes no dieron buenos resultados.

Más aún, durante los grupos focales con los profesores era común notar que ellos mismos no tenían seguridad sobre el orden ni las metodologías para formar los procesos de pensamiento y acercar a los estudiantes a los objetos matemáticos, dado que la mayoría de ellos no tenían estudios específicos acerca de esto.

Teniendo en cuenta el caso específico de la aproximación a los conceptos de cantidad y número, y sabiendo que en el desarrollo evolutivo del pensamiento matemático, la llegada a la serie numérica, y más aún a su escritura, fue muy posterior a la consecución de los procesos de asignación y agrupación de cantidades, con los que se debería empezar el desarrollo del pensamiento numérico, empecé a pensar que la historia de las matemáticas podría servir de guía para la organización de la formación de los procesos de pensamiento matemático.

De hecho, en la historia del ser humano ha habido un período mucho más largo de aprendizaje autónomo que de aprendizaje mediado por la enseñanza. Este aprendizaje autónomo de las matemáticas ha sido propiciado por las diferentes necesidades de cada uno de los pensamientos, a saber: contar, en el pensamiento numérico; comparar, en el pensamiento métrico; predecir, en el pensamiento variacional; y, ubicarse y describir el mundo, en el pensamiento geométrico. Esto lo refuerzan Savery & Duffy (1996), quienes al referirse a los principios enmarcados en el enfoque constructivista, dicen que los conflictos cognitivos son los estímulos para el aprendizaje y determinan la organización y la naturaleza de lo que es aprendido.

Por eso, en este principio propongo que estos conflictos cognitivos se estructuren según las necesidades de pensamiento que se han dado en la historia del desarrollo del conocimiento en las matemáticas y que han hecho que la mente del ser humano se haya constituido de una manera específica con respecto a los procesos de pensamiento en general, y específicamente de pensamiento matemático.

Resumiendo y coincidiendo con Savery & Duffy (1996), el aprendizaje nace de las necesidades y conflictos cognitivos, y lo que este principio propone es que éstas deben disponerse en el mismo orden en que aparecieron en la evolución del pensamiento matemático. Además, estas necesidades sirven de ancla para el desarrollo del pensamiento, garantizándose que, tanto estudiantes como profesores, encuentren un propósito significativo en el aprendizaje.

Principio 2. El aprendizaje de las matemáticas se basa en la *nocionalización* de los objetos matemáticos.

Una consecuencia de la tendencia de los profesores a realizar enseñanzas de carácter memorístico y mecánico es que "les cuentan" a los estudiantes las enseñanzas, sin buscar que ellos usen su pensamiento para garantizar mejores niveles de comprensión. Esto lo noté mucho en las clases que pude observar, pero más aún, cuando intenté hacérselo notar a los profesores, ellos no tenían claro de qué les estaba hablando, lo que muestra que, de alguna manera, ellos también aprendieron del mismo modo y no han hecho un acercamiento diferente a los objetos matemáticos en ningún momento.

Un ejemplo de esto es la enseñanza de los polígonos en el pensamiento geométrico. Muchos niños vienen desde sus casas con los nombres de algunos de los polígonos, pero no pueden reconocer sus características y, por lo tanto tienen confusiones al momento de comparar polígonos similares.

En algunas clases, sin embargo, pude ver profesores que presentaban los objetos matemáticos a los estudiantes con base en material concreto y lograban que ellos hicieran buenas representaciones de los objetos que se querían enseñar. En todas estas clases, el factor común era que se partía de materiales concretos y se orientaba a los estudiantes para descubrir las características de los objetos matemáticos generando nociones a partir del material.

Esas experiencias, unidas a la aproximación natural a los objetos, es decir al abordaje a partir de las necesidades de pensamiento, me permitieron ver que era necesario que los objetos de conocimiento, en este caso matemáticos, se enseñaran y se aprendieran desde la *nocionalización*, o sea desde la construcción concreta del objeto en términos de manipulación, experimentación y posterior representación.

Principio 3. La abstracción de los objetos matemáticos se debe hacer de forma gradual.

Según mi experiencia de observación, dos conductas normales de los profesores al enseñar son no usar la *nocionalización* de los objetos matemáticos y hacer una abstracción demasiado rápida de los mismos. Estas dos conductas llevan a que muchos de los estudiantes queden con vacíos de comprensión durante su proceso aprendizaje.

Como uno de los objetivos más importantes del método para aprendizaje natural de las matemáticas es que todos los niños puedan desarrollar su pensamiento matemático según sus propias posibilidades, este principio propone que es necesario llevar una gradualidad estricta en la abstracción de los objetos de conocimiento, de modo que sean accesibles a todos los estudiantes, porque, siendo coherente con el principio 1, la historia del desarrollo de las matemáticas pasa por momentos específicos de abstracción como resultado del desarrollo del pensamiento matemático, y esto mismo debe suceder en la mente de los aprendices cuando se enfrentan a la comprensión de objetos matemáticos.

La gradualidad de la que hablo en este principio la pude percibir durante las clases cuando notaba que algunos estudiantes quedaban con faltas de comprensión en los objetos matemáticos. Fue sorprendente ver que la mayoría de profesores no notaba por qué sus estudiantes no estaban comprendiendo, sino que por el contrario, usaban como estrategia didáctica la repetición de la misma enseñanza, casi de la misma forma, con la esperanza de que de esta manera los estudiantes pudieran comprender.

Por eso, coincidiendo con Savery & Duffy (1996), los profesores deben tener una actitud autorreflexiva para ayudar a que se dé esta gradualidad de la abstracción. En efecto, cuando una parte de los estudiantes interroga (explícita o implícitamente) sobre una conclusión de clase, es probable que el proceso de abstracción haya sido demasiado abrupto. Este indicador debería llevar a un proceso de autorreflexión que permitiera identificar en qué momento hubo un corte en la abstracción.

Principio 4. Los pensamientos numérico y métrico están a la base del desarrollo del pensamiento matemático; estos soportan a los pensamientos variacional y geométrico, respectivamente.

La investigación que realicé en los colegios me permitió no solo observar clases y tener discusiones con los docentes y los estudiantes, sino analizar las mallas curriculares de matemáticas. En este análisis me di cuenta de que había ciertas características comunes que no me parecían las más adecuadas: repetición exacta de los mismos contenidos grado a grado, mezcla de ejes de pensamiento matemático sin un criterio específico, ordenamiento de los objetos matemáticos sin una sustentación didáctica clara, entre otros.

Con el principio 1 como referente y analizando el desarrollo histórico del pensamiento matemático, propuse este principio, ya que el ser humano requirió y, por lo tanto, desarrolló primero sus pensamientos numérico y métrico antes que sus pensamientos variacional y geométrico, debido a que para poder predecir (variacional) y orientarnos espacialmente (geométrico), se hizo necesario que comprendiéramos el conteo (numérico) y la comparación de magnitudes (métrico). Esto hace que el desarrollo de los ejes de pensamiento numérico y métrico sea la base para el desarrollo de los ejes variacional y geométrico.

Principio 5. Los objetos matemáticos nucleares son los procesos asociados a cada eje de pensamiento matemático.

Es normal, según mi experiencia, que la enseñanza de las matemáticas se centre en los objetos matemáticos, entendidos como conceptos y algoritmos para el cálculo. Sin embargo, este abordaje está basado, en la mayoría de los casos, en la memoria dada a partir de la práctica.

Este principio propone que el aprendizaje de los conceptos y algoritmos es consecuencia de la comprensión de los procesos de pensamiento matemático, es decir, que desde este abordaje es más importante aprender a pensar con las matemáticas, que aprender los métodos matemáticos *per se*, propuesta que coincide con lo que postulan los Lineamientos Curriculares de Matemáticas de Colombia (1998).

Por otra parte, pero en el mismo marco de la fundamentación teórica de este principio, uno de los objetivos de este trabajo, tiene que ver con la definición clara del concepto de objeto matemático y su diferenciación o articulación con el de proceso de pensamiento matemático, puesto que creo que en la falta de claridad de la diferencia entre estos dos conceptos radican gran parte de las falencias que pude notar durante las observaciones de clase.

Principio 6. El lenguaje media el proceso de enseñanza-aprendizaje, por eso las palabras relacionadas con los objetos matemáticos deben ser pensadas y dichas con exactitud.

A partir de las observaciones de clase y de mi propia experiencia como docente recibiendo estudiantes formados por otros docentes, me di cuenta de que bastantes profesores de matemáticas no usan correctamente el lenguaje propio de la disciplina al momento de enseñar a sus estudiantes. Esto es una causa importante de muchos problemas de comprensión de los objetos matemáticos y de posteriores vacíos que van ralentizando el aprendizaje de objetos más complejos en niveles superiores.

Al igual que en el principio 2, muchos de los profesores a los que les pedí usar un lenguaje más específico y más propio de los objetos matemáticos que estaban enseñando, me manifestaban su desconocimiento e incapacidad para lograrlo, lo que parecía indicar que ellos mismos habían aprendido, tanto en su etapa escolar, como en su formación universitaria con un lenguaje impreciso y poco adecuado para garantizar la comprensión.

Otro problema que pude notar y que me motivó a la formulación de este principio es que los profesores no exigían a los estudiantes que hablaran con un lenguaje matemático correcto, sino que les "entendían" cuando hablaban de forma imprecisa e incompleta, al formular preguntas y responder a cuestiones propuestas por ellos. Esto entraba en contradicción con lo que dicen Savery & Duffy (1996), acerca de que "el conocimiento es socialmente negociado" (p. 5), por lo tanto, el uso incorrecto del lenguaje impedía que esta negociación fuera efectiva.

Según mis observaciones, el hecho de que los profesores no exigieran que los estudiantes se comunicaran de forma precisa y completa podría obedecer en algunos casos a un *sobreentendimiento* por parte de los profesores, pero en otros casos podría obedecer al hecho de que los mismos profesores, fruto de su formación, desconocían los términos y conceptos precisos sobre los que estaban hablando.

Principio 7. La curva de aprendizaje en matemáticas tiene una forma fractal, comenzando lentamente y acelerándose con base en la comprensión cabal de los objetos matemáticos.

La experiencia la observación de clases me permitió clasificar las aulas en las que estuve en dos grandes tipos: las que estaban dirigidas por profesores que basaban su enseñanza en procesos de comprensión y las que estaban dirigidas por profesores que basaban su enseñanza en procesos de repetición y memoria.

Como característica común de todas las aulas del primer tipo, pude observar que los estudiantes tardaban en alcanzar la suficiencia en la comprensión, pero esto les permitía luego ser ágiles en los momentos de ejercitación y aplicación de las ideas. Mientras que en las aulas del segundo tipo, los estudiantes “aprendían” las características de los objetos matemáticos mucho más rápidamente, pero tenían dificultades al momento de ejercitar los objetos matemáticos y aplicar las ideas que habían aprendido, lo que hacía que este proceso fuera más lento.

La formulación que hice de este principio a partir de estas observaciones y con la intuición de que procesos de comprensión mejor cimentados dan más autonomía a los estudiantes para aprender objetos matemáticos relacionados, se puede explicar diciendo que cada ciclo de aprendizaje de un objeto matemático debe comenzar con un desarrollo lento, basado en la comprensión, para luego ir acelerándose hacia la adquisición de la destreza en su operación; y de la misma manera, un conjunto coherente de ciclos de aprendizaje fluye lentamente al inicio, para luego ir acelerándose con base en el desempeño de los estudiantes.

CAPÍTULO 3: SOBRE EL PRINCIPIO 1

Los objetos matemáticos se aprenden en el mismo orden en que la evolución histórica los ha dispuesto.

Para entender lo que este principio implica es necesario tener claridad en los conceptos de principio biogenético (o de paralelismo) y obstáculo epistemológico.

Ideas que fundamentan el principio

Los seres humanos usamos las matemáticas por naturaleza. De hecho, hay evidencias de que el registro de cantidades en forma de muescas y huesos y piedras es muy anterior a la invención de la escritura. Diferentes tipos de necesidades llevaron a la humanidad a contar y a registrar estos conteos. La primera evidencia arqueológica del registro de cantidades la han hallado los arqueólogos en el hueso de Lebombo, encontrado en Suazilandia y fechado en 35.000 años de antigüedad. Este hueso es un peroné de babuino con un total de 29 hendiduras que se suponen que fue usado por las mujeres de la época para mantener la cuenta de sus ciclos menstruales. También dentro los restos arqueológicos más antiguos está el del hueso de Ishango, hallado cerca del nacimiento del río Nilo, con una antigüedad de unos 20.000 años.

Mucho antes de que alguien nos enseñara las matemáticas, los seres humanos desarrollábamos las primeras intuiciones en este sentido, empezando primero por los pensamientos numérico y métrico (en el conteo de cantidades y la medición de tierras y provisiones), y evolucionando después a pensamientos más complejos como el variacional y el geométrico (en la elaboración de calendarios y la edificación de estructuras). En otras palabras, la evolución nos ha ido dotando de ciertas formas de aprender matemáticas, y reconocer estas formas nos puede permitir desarrollar currículos y metodologías más connaturales a nuestras propias formas de pensar.

Esta idea ha sido considerada a lo largo del historia de las matemáticas y, específicamente, de la didáctica de las matemáticas, de una manera unánime entre estas dos áreas de conocimiento (Schubring, 2011), de modo que hay un consenso en que el uso de la historia de las matemáticas debería ayudar a mejorar la calidad de la enseñanza de las matemáticas. Schubring afirma también que ese principio recibe el nombre de: principio biogenético o principio de paralelismo, y que ha sido un tópico abundantemente estudiado desde fines del siglo XIX y principios del siglo XX en el campo de la educación matemática.

Ya Klein postulaba:

> …this basic law should apply to mathematics instruction, too, like any instruction, at least in general: teaching should, by tieing to the natural disposition of the youth, lead them slowly to higher things and eventually even to abstract formulations, by following that same path on which the entire mankind struggled to climb from its naïve primitive state upwards to more developed insight. (citado por Schubring, 2011, p. 82)

Esto reafirma lo que está expresado en el principio 1 que soporta el método para el aprendizaje natural de las matemáticas. Pero en el mismo texto, Klein apuntaba a que un obstáculo decisivo para la designación de esta metodología de enseñanza es la falta de conocimiento histórico del desarrollo de las matemáticas. En este punto es necesario resaltar que, si bien, sobre la historia de las matemáticas se conoce en buena medida, sobre su prehistoria no se conoce muy bien, y este es directamente el período que corresponde al desarrollo matemático en la educación inicial.

De manera más general, Spencer (citado por Branford, 1908) señala que la biología influenció a la psicología y a la educación modificando el orden que históricamente se concebía para la educación de los niños; en otras palabras, propone que la génesis del conocimiento en el individuo debe seguir el mismo curso que la génesis del conocimiento en la raza humana.

No obstante, se atribuye a Benchara Branford el haber sido el propagador del paralelismo para propósitos de la educación matemática con su libro: A Study of Mathematical Education including The Teaching of Arithmetic:

> Las investigaciones del autor del presente trabajo [Benchara Branford] se limitan a la educación matemática del individuo por la génesis del conocimiento geométrico de la raza, a demostrar el paralelismo entre el actual modo de evolución del conocimiento doméstico de la raza desde los tiempos más antiguos a que puede llegar la auténtica información histórica, y el que se sigue para que los jóvenes escolares puedan formar más fácil y eficazmente el suyo en esta rama de la ciencia (Branford, 1899, p. 46, citado por Sierra, 1997)

El mérito de Branford es haber llamado a que la investigación se dedicara a estudiar este principio; este llamado hizo que se diera prevalencia a los estudios sobre historia de las matemáticas a principios de siglo XX, y se relacionara dicha historia con el carácter biológico, según el cual la génesis del conocimiento de cada niño sigue el mismo camino que la de la raza humana (Sierra, 1997). Este fue un pensamiento clave de Herbert Spencer, quien influyó en educación desde 1860:

> La educación del niño ha de coincidir, tanto en modo como en disposición, con la educación del género humano considerado históricamente; o en otras palabras, la génesis del conocimiento a nivel individual debe seguir el mismo curso que la génesis del conocimiento en la especie. (Citado por Fauvel, 1991).

Esta idea también se encuentra en los trabajos de Benchara Branford en los primeros años del siglo XX , que fue cuando alcanzó su máxima aceptación. Sin embargo, el estudio del principio biogenético desapareció de las agendas de investigación hasta que en los años 60, como reacción a la llamada “matemática moderna”, y usando casi las mismas palabras que había usado Felix Klein, se produjo en 1962 el famoso memorando de 65 matemáticos de Canadá y Estados Unidos, entre los que se encontraban: Birkhoff, Courant, Kline, Polya, André Weil, y Wittenberg, que a la letra decía:

> …in order to explain an idea (one should) refer to its genesis and retrace the historical formation of the idea. This may suggest a general principle: The best way to guide the mental development of the individual is to let him retrace the mental development of the race—retrace its great lines, of course, and not the thousand errors of detail. (Memorandum, 1962, p. 192)

Le tomó más de 20 años a la ley biogenética para volver entrar al panorama de investigación en educación matemática; primero, por prácticas más frecuentes del uso de la historia en la enseñanza de las matemáticas y, segundo, por la aplicación de la psicogénesis de Piaget. Este autor sugiere un paralelismo entre la ontogenia y la psicogénesis: "…the fact of fundamental importance for epistemology is that the subject, beginning with very low level prelogical structures, comes to develop rational norms that are isomorphic with those of the early days of science" (Piaget & García, 1989, p. 5)

Lo que Piaget y García argumentaban no es que hubiera una convergencia de los contenidos, sino una convergencia de los mecanismos. Su idea era mostrar que los mecanismos que mediaban las transiciones de un período histórico al siguiente eran análogas a las que mediaban las transiciones de un estadio psicogenético al siguiente (Schubring, 2011). En otras palabras, no se trataba de que el orden de los objetos matemáticos fuera el mismo que se había seguido a través de la historia de las matemáticas, sino que la evolución psicogenética de la humanidad debía corresponder a la evolución psicogenética del individuo. En mi opinión esto tiene que ver con la superación paulatina de obstáculos epistemológicos, tanto en el proceso de aprendizaje del género humano como en el proceso individual. En esto coincido con Radford y Empey cuando afirman que:

> Si bien es cierto que los individuos crean las matemáticas, no es menos cierto que, a su vez, las matemáticas influyen en la forma como los individuos son, viven y piensan sobre sí mismos y los demás. Otra forma de decir esto es que, en el acto de conocer, sujeto y objeto se constituyen mutuamente. Hay una relación dialéctica entre el saber y el ser: conocer algo es a la vez ser alguien. Pero la forma en que esta constitución mutua

> se produce no es el mero efecto de una relación de dos términos (una relación entre sujeto y objeto). Está mediada por, y sólo es posible a través de la praxis social. (Radford y Empey, 2007, p. 250)

Así el proceso individual de superación de obstáculos epistemológicos se da a través de la praxis social que, a su vez, incluye la superación cultural de dichos obstáculos.

Sfard (1995) confirma su intención de encontrar "invariantes de desarrollo" que son observados en el desarrollo histórico de las matemáticas y también en el proceso individual de aprendizaje. Su posición es aún más fuerte, pues afirma que es posible predecir el comportamiento de los estudiantes a partir de los hechos históricos en el desarrollo de las matemáticas.

Furinghetti y Radford (2002) tratan el problema del paralelismo y la ley biogenética proponiendo superar las debilidades en el abordaje de Piaget y García, mediante la concepción del impacto social y cultural en la formación cognitiva que está también presente en la aproximación que Vygotsky hace en su propuesta del constructivismo.

Otra línea de aplicación de este principio reside en la forma como Brousseau interpreta el concepto de obstáculo epistemológico. Según Schubring (2011), Brousseau propone dos tipos de obstáculos:

- Obstáculo didáctico o didáctico-genético: que son dificultades que se originan de la concepción o la estructura del currículo, desde el concepto particular enseñado hasta la forma de enseñarlo.
- Obstáculo epistemológico: esos son dificultades que están basadas en la naturaleza del conocimiento matemático (por ejemplo, la dificultad para abordar el concepto del cero, o de los números relativos, etc.) (Barrantes, 2006) y que pueden ser afrontadas pero no evitadas. Esos obstáculos son visibles en las etapas del desarrollo histórico de las matemáticas y, por lo tanto, pueden ser

identificados con un análisis histórico. Este segundo tipo de obstáculo, implícitamente, confirma el principio biogenético.

Sierpinska (1994) propone también que hay dos fuentes de obstáculos epistemológicos, coincidiendo con Brousseau:

> ejemplos de actividades de los estudiantes en las que se manifiestan sus formas de conocimiento (sus obstáculos epistemológicos) y en equivalencias entre los procesos de comprensión que un sujeto puede realizar y la evolución del conocimiento de la humanidad con respecto a un concepto. (Gómez, 1996, p. 3)

A esto último ella lo llama análisis histórico–epistemológico. Para esta formulación, ella usa el argumento de que se puede establecer una equivalencia entre las formas de conocimiento (y sus consecuentes reorganizaciones) de un sujeto y la forma como la humanidad ha evolucionado en su conocimiento de un concepto, esto hace explícita la dimensión de las matemáticas como saber cultural.

En este punto ella toca el asunto de la necesidad del progreso de los objetos matemáticos, y afirma que: "[…] cada estadio es el resultado de posibilidades abiertas por el estadio anterior y la condición necesaria para el siguiente" (Sierpisnka, 1994, p. 122). Esto dice que, de alguna manera, la intersección entre la necesidad de resolver un problema y la posibilidad cognitiva, ya sea de la humanidad o del sujeto, genera un camino inequívoco de desarrollo de los objetos matemáticos.

En resumen, y coincidiendo con Gómez:

> esta equivalencia entre el desarrollo cognitivo y el desarrollo histórico–epistemológico es importante desde el punto de vista de la enseñanza y de la investigación. Desde el punto de vista de la enseñanza, porque si conocemos los obstáculos epistemológicos que ha tenido que sobrepasar la humanidad, podemos tener una idea de aquellos que tienen que sobrepasar nuestros estudiantes y tendremos luces para saber qué hacer como

> profesores para ayudarles a sobrepasarlos. Desde el punto de vista de la investigación, porque si conocemos estos obstáculos epistemológicos, podremos tener luces para construir categorías que nos permitan explorar los procesos de comprensión de los estudiantes. (Gómez, 1996, p. 3).

Por eso, la relación de la historia de las matemáticas con la enseñanza de las matemáticas es un asunto de interés no solo para el establecimiento de los currículos, sino para el estudio de los obstáculos epistemológicos. De hecho, la verificación empírica de este principio es un campo abierto de investigación, a partir de su aplicación en objetos matemáticos específicos.

El principio en la enseñanza de las matemáticas en la educación inicial

Específicamente en el campo de la enseñanza de las matemáticas en la edad inicial, este abordaje propone que desde tempranas edades, los niños tienen contacto con entes matemáticos aplicados en las diversas situaciones de su vida: su edad, la cantidad de juguetes, las formas, el tamaño y la posición de las cosas, la variación del clima, el orden de los sucesos, etc. Las investigaciones de Ginsburg (citado por Dickson, Brown y Gibson, 1991) señalan que los niños poseen una potente aritmética informal y que lo que comprenden y hacen a nivel intuitivo es mucho más amplio y de mayor magnitud que lo que hacen en el nivel escrito y simbólico del cálculo. Resaltan la potencia de los métodos de recuento de que se valen los niños, como por ejemplo contar con los dedos, contar marcas, contar a partir de uno o contar a partir del mayor de los números, y los considera la base para los métodos informales. También dice que los niños no utilizan los algoritmos aprendidos en la escuela, sino que más bien los integran en su propia estructura mental para inventar métodos basados en la aritmética escrita y codificada y en parte en su enfoque característico.

Es normal que en los colegios se transgreda el paralelismo y se salte a la institucionalización de los objetos matemáticos sin hacer la construcción desde su ontogenia. Más aún, es también común que no se tenga en cuenta la psicogenética de los estudiantes, para comprender si tienen las capacidades cognitivas para acercarse a la formulación de los objetos matemáticos. Para esto, es necesario recordar que los objetos matemáticos se desarrollan en la medida en que hay una intersección entre las necesidades propuestas y las capacidades de los estudiantes (Gutiérrez, 1991). Así como cita Moreno (1999) a Vygotsky en su libro: Pensamiento y lenguaje:

> Como sabemos por las investigaciones del proceso de formación de conceptos, un concepto es más que la suma de ciertos vínculos asociativos formados por la memoria (...) es un auténtico y complejo acto de pensamiento que no puede enseñarse mediante la ejercitación y al que solo se puede llegar cuando el desarrollo mental del niño ha alcanzado el nivel requerido (...) El desarrollo de los conceptos, o significados de las palabras, presupone el desarrollo de muchas funciones intelectuales (atención, memoria lógica, abstracción, capacidad para comparar y diferenciar). (Vygotsky, 1995, p. 155)

Moreno afirma que Kant, en *Crítica de la Razón Pura* también formula que: "así como el líquido adopta la forma del recipiente que lo contiene, así también las impresiones sensoriales adoptan las formas que les son impuestas por las estructuras cognitivas que las procesan; el resultado de este procesamiento es el conocimiento" (1999, p. 107), lo que indica que solo cuando el sistema cognitivo de los aprendices está dispuesto, pueden procesar los estímulos propiciados por las necesidades que se les propongan dentro del proceso de enseñanza.

En otras palabras, eso significa que las condiciones evolutivas que hemos experimentado como seres humanos en el desarrollo histórico de nuestro pensamiento matemático, nos han llevado a configurarlo de tal forma, que la estructura de nuestra mente está diseñada para ir comprendiendo y construyendo gradualmente los objetos matemáticos, en un orden específico y a un ritmo determinado.

Siguiendo en este orden de ideas, la teoría de la epistemología genética de Jean Piaget, permite evidenciar cómo la mente humana necesita tiempo para estructurarse, y parte de una base determinada para poder construir conocimiento, de ahí su visión del aprendizaje como una sucesión de estructuras de conocimiento, que llama fases de la inteligencia.

El principio en el método para el aprendizaje natural de las matemáticas

Siguiendo este mismo modelo, el diseño del método para aprendizaje natural de las matemáticas está basado, por cada uno de los ejes de pensamiento matemático, en la descripción clara de los procesos que sigue el ser humano para desarrollarlos; esta descripción incluye el establecimiento de estadios específicos, que son evidencias del desempeño de los niños en cada uno de los procesos. En este diseño se tuvo también en cuenta, tal como lo propone Puig en el principio II de su *Decálogo de la didáctica matemática media*: "No olvidar el origen concreto de la matemática y los procesos históricos de su evolución" (Puig, 1960, p. 2).

Además de tener una estructura de procesos y estadios que generan trayectorias de aprendizaje, el método tiene en cuenta que los intervalos históricos de tiempo en los que se ha ido desarrollando el pensamiento matemático son aproximadamente proporcionales a los intervalos de la vida de cada individuo que se requieren para desarrollar su propio pensamiento matemático; es decir, mientras más tiempo ha usado la humanidad para desarrollar un proceso de pensamiento matemático, más tiempo debe darse en la educación para este mismo proceso. Esto deja ver que existe la necesidad de tener claras cada una de las etapas en el origen del desarrollo del pensamiento matemático. En resumen, para garantizar el desarrollo significativo y sólido del pensamiento matemático, es necesario no solo replicar las condiciones evolutivas del desarrollo del pensamiento matemático en la humanidad, sino dar tiempos de aprendizaje proporcionales a los tiempos usados por los seres humanos durante su evolución.

Lo anterior puede evidenciarse en toda la construcción del método para el aprendizaje natural de las matemáticas. Por ejemplo, en el desarrollo del eje de pensamiento numérico, se comienza por el proceso de asignación, que fue el primer proceso matemático, relacionado al conteo, que el ser humano realizó. Este proceso se hizo necesario para los primeros hombres cuando dejaron de ser nómadas (por el descubrimiento del fuego) y empezaron a establecerse en comunidades alrededor de refugios; esto hizo que la consecución de recursos fuera más difícil y que cada uno de los suministros conseguidos tuvieran que ser atesorados y, por lo tanto, contados, aun de una manera rudimentaria, asignando a cada elemento que se quería contar, un referente de conteo más abstracto, como piedras, marcas en un palo o hueso o hendiduras en tablas de arcilla o en el piso. Este mismo proceso de asignación es recorrido por los niños cuando, aproximadamente entre los dos o tres años, ellos empiezan a diferenciar entre un objeto y muchos objetos, y empiezan a asignar referentes abstractos a cada objeto que poseen (definitivamente, como sus juguetes, o transitoriamente, como los lápices de colores en el salón de clases). Este proceso de pensamiento matemático, que tomó largo tiempo en el desarrollo evolutivo de la humanidad, hasta que las primeras civilizaciones empezaron a usar la agrupación no posicional de cantidades, podría parecer sencillo a los ojos del adulto, pero en la implementación del método se le da una duración que busca ser proporcional al tiempo que la humanidad hizo uso de este; es decir, más o menos la mitad del tiempo que dura todo el proceso de perfeccionamiento del conteo, que llega hasta la agrupación posicional, más o menos a los 5 años.

Lo anterior es un ejemplo de como el método para el aprendizaje natural replica el proceso evolutivo del desarrollo del pensamiento matemático y aproxima los tiempos proporcionalmente a los tiempos que requirió la humanidad para este desarrollo.

En la misma línea, Piaget (citado por Rivero, 2012) nos explica que en cada momento del desarrollo, el ser humano posee un cúmulo de capacidades de razonamiento que pone en funcionamiento al abordar cualquier tarea cognitiva, sea cual fuere su contenido específico, evidenciando que según el estadio en el que se encuentre, cuenta con una serie de herramientas que permiten abordar tareas que estén relacionadas con la capacidad de resolución que tenga el niño en el momento determinado en el que está. Esta perspectiva del desarrollo del pensamiento permite sostener esta característica del primer principio del método, ya que evidencia la necesidad de respetar los tiempos en el desarrollo del pensamiento matemático, yendo por instancias, asegurando procesos, edificando nociones, para poder garantizar una comprensión suficiente y bases sólidas que permitan acceder a los objetos matemáticos más complejos a los que nos enfrentamos los seres humanos, en cada una de las etapas de nuestro desarrollo cognitivo.

En este mismo sentido, Steffe (1991) plantea la necesidad de partir de la aritmética de los niños y no de las formas canónicas de resolver la matemática, creando puentes que permitan transformar los procedimientos intuitivos y poco elaborados, que los niños poseen, en conocimiento matemático abstracto y general. Esto refuerza que hay necesidad de generar un cambio en las prácticas de enseñanza utilizadas, para que los maestros sean capaces de orientar y apoyar a los alumnos en la transformación de los procedimientos primitivos, que ellos espontáneamente desarrollan y comúnmente utilizan para resolver todo tipo de situaciones problema, en procedimientos más elaborados, de tipo operatorio que permitan la construcción de objetos verdaderamente matemáticos. (Orozco-Hormaza, 2003).

Reformulación del principio 1

Con base en los elementos desarrollados en este capítulo, se puede ver que el principio 1 de los que dan soporte al método para el aprendizaje natural de las matemáticas es una reformulación del principio biogenético o principio del paralelismo que lleva estudiándose en la educación matemática durante más de un siglo. Sin embargo, en la formulación del principio 1, hay tres elementos que vale la pena dejar expresamente destacados: uno es el del orden histórico de desarrollo de los objetos matemáticos, otro es de la epistemología de cada uno de estos objetos y el otro es el de la proporcionalidad de los tiempos de aprendizaje. De esta manera, se propone una nueva redacción para este principio en los siguientes términos:

El desarrollo del pensamiento matemático individual coincide con el desarrollo del pensamiento matemático de la humanidad, en el orden y las concepciones epistemológicas de los objetos matemáticos. Y los tiempos de desarrollo de estos objetos en el individuo son proporcionales a los tiempos históricos requeridos por el género humano.

CAPÍTULO 4: SOBRE EL PRINCIPIO 2

El aprendizaje de las matemáticas se basa en la *nocionalización* de los objetos matemáticos.

Para entender lo que este principio implica es necesario tener claridad en los conceptos de aprendizaje, comprensión, objeto matemático, *nocionalización*, representación y objeto de conocimiento.

Ideas que fundamentan el principio

El problema del conocimiento se estudia desde la antigüedad. Platón, en el Mito de la Caverna, postuló que nuestro conocimiento es representación de un mundo de ideas, a las cuales tenemos acceso indirectamente, mostrando que de alguna manera el conocimiento está mediado por la representación de las ideas. Desde ese momento, la definición de conocimiento se separa de la definición de verdad y se ordena hacia la de representación.

Rico habla de Cuervo (1998) y Seco, Andrés y Ramos (1999) diciendo que:

> conocer consiste en tener la idea o noción de alguna cosa; llegar a saber por el ejercicio de las facultades intelectuales la naturaleza, cualidades y relaciones de las cosas; tener en la mente la representación de alguien o algo; percibir el objeto como distinto de todo lo que no es él; distinguir a alguien o algo entre otros semejantes (Rico, 2010, p. 2).

En esa definición, el autor menciona el término de noción, y lo relaciona por sinonimia con el término de representación, afirmando que conocer consiste en tener la idea o noción, y en tener en la mente una representación.

El mismo autor también habla de la relación que hay entre conocimiento y representación al citar a Krings, Baumgartner y Wild (1978), quienes dicen que: “Conocer es una actividad intencional, dirigida a un estado de cosas que debe aprehenderse, que tiene como resultado lo que se denomina saber disponible intersubjetivo, organizado y estructurado mediante representaciones” (Rico, 2010, p. 2). De esto se puede inferir que el proceso de acceder al conocimiento pasa por el proceso de la representación, lo que coincide con la tradición racionalista que supone que entre el objeto de conocimiento y el sujeto que conoce existe una entidad intermedia, que es la representación.

Pasando al concepto de aprendizaje, desde la teoría de Piaget (1969), se entiende como un proceso continuo de equilibración (adaptación, asimilación y acomodación) que se produce entre el sujeto cognoscente y el objeto por conocer.

Antes de proseguir, es necesario definir los procesos mencionados anteriormente, empezando por la adaptación, que es entendida como un modo de funcionamiento biológico que caracteriza a todas las formas y niveles de vida. Todos los organismos mantienen interacciones con el medio, tendiendo a buscar un estado de equilibrio con el mismo. Entonces la adaptación cognitiva, entendida como equilibración entre asimilación y acomodación, implica que el conocimiento no está en realidad ni en el sujeto ni en el objeto, sino que es resultado de la interacción entre ambos (Piaget, 1973).

Por su parte, la asimilación es el proceso por medio del cual el sujeto actúa sobre el objeto y ejerce una modificación para lograr su incorporación en función de los esquemas cognitivos del sujeto que realiza esta acción.

Parafraseando a Piaget (1973): La asimilación implica la incorporación de los objetos en los esquemas de comportamiento; estos esquemas son la estructura de acciones que el hombre puede reproducir activamente en la realidad.

De otro lado, la acomodación es el proceso simultáneo y complementario a la asimilación, por el cual se produce un ajuste de la estructura del organismo a las nuevas y cambiantes condiciones del medio, es decir, los cambios que sufre un organismo para poder incorporar un objeto, y las modificaciones que a su vez resultan de dicha incorporación.

Teniendo en cuenta la propuesta de Piaget, podemos decir que para que un niño pueda generar aprendizajes de los objetos matemáticos, es necesario que interactúe con estos y a partir de esta experiencia logre modificar sus esquemas y estructuras para lograr un proceso de acomodación. Si en una situación de enseñanza-aprendizaje, el niño no tiene acceso a estos objetos matemáticos a través de experiencias significativas, será muy complejo que logre alcanzar su compresión e interiorización.

Igualmente, Savery y Duffy (1996), en concordancia con Piaget pero inclinándose hacia la concepción del constructivismo social de Vygotsky, definen tres principios para comprender la forma como se constituye el aprendizaje desde el constructivismo:

1. La comprensión se da en nuestra interacción con el ambiente.
2. Los conflictos cognitivos o el desconcierto, son los estímulos para el aprendizaje y determinan la organización y naturaleza de lo que es aprendido.
3. El conocimiento evoluciona a través de la negociación social y de la evaluación de la viabilidad de las comprensiones individuales.

Una vez abordados los conceptos de conocimiento y aprendizaje, es necesario acercarnos a la definición de noción, ya que en este texto uso el término *nocionalización* para referirme a la construcción de nociones. Para esto, tomamos como base la definición De Zubiría (2002), que habla de que una noción se puede representar como un triángulo que relaciona al objeto, su representación o imagen y la palabra que lo designa. Desde mi perspectiva, *nocionalizar* es construir nociones, y partiendo de este concepto, coincido con Rico (2010) en que hay un orden para construir dichas nociones: “lo percibido precede a la imagen que lo replica y que, en el origen, está la palabra” (p. 8), es decir, cuando el aprendiz percibe el objeto, establece por medio de la representación una imagen en su mente a la que asigna una palabra, ya sea intuitivamente o por la vía de la formalización (que el profesor le provee), en ese momento se configura una noción del objeto matemático. Es importante recalcar acá que no se forma 'la noción', sino que se forma 'una noción', puesto que esa formación de nociones tiene que ver con la creación de obstáculos epistemológicos, inherentes al proceso de comprensión.

Basándose en lo expuesto anteriormente, se puede concluir que en matemáticas, el aprendizaje pasa por la *nocionalización* de los objetos matemáticos, ya que para que un aprendiz pueda comprender y apropiarse de los objetos, debe acercarse a estos, de manera concreta, para luego mediante procesos de representación, generar una imagen y una palabra sobre el objeto, porque "toda acción cognitiva es una acción mediada por instrumentos materiales o simbólicos" (Moreno, 1999, p. 108).

Según lo mencionado hasta el momento, se podría pensar que el proceso de aprendizaje está representado como una línea recta, pero abordajes modernos de este proceso lo presentan de forma más parecida a una trayectoria espiral con un carácter recursivo. Tal como lo expresa Waldegg:

> el carácter recursivo del conocimiento de los fenómenos da cuenta de la interdependencia asumida entre el fenómeno percibido y su conocimiento construido: la representación de un fenómeno cognoscible, que construye una representación activa, que transforma recursivamente el conocimiento que tenemos de él, la cual, a su vez, ... (Waldegg, 1998, p. 19)

El biólogo Th. Dodzahansky (citado por Waldegg, 1998, p. 20) ha expresado esta hipótesis de recursividad en una bella fórmula: "Cambiando lo que conoce del mundo, el hombre cambia el mundo que conoce. Cambiando el mundo en el que vive, el hombre se cambia a sí mismo".

La recursividad implica que no se tiene una sola noción sobre un objeto de conocimiento, sino que se van refinando paulatinamente esos niveles de *nocionalización* en la medida en que se gira en la espiral, pero también implica que si se empieza el proceso de aprendizaje basándose en una noción deformada que no conduzca a la construcción de un edificio nocional sólido, dicho proceso no discurrirá convenientemente para el aprendiz. Esto relaciona a este principio con el principio 3, que habla de la gradualidad de la abstracción.

De lo anterior se deduce que en los primeros años de educación, debido al pensamiento concreto de los niños (Piaget, 1983), se debe apoyar la enseñanza de la matemática en materiales concretos que faciliten la construcción de operaciones y relaciones entre los elementos (Orozco-Hormaza, 2003). Esto que propone Orozco-Hormaza, es cierto para estos primeros años de educación, y sin embargo es cierto también, según lo que he podido experimentar durante mi trayectoria pedagógica, para todo tipo de aprendices, porque mientras más sólida sea la primera noción construida sobre el objeto de aprendizaje, más sólido será el edificio nocional que lo sostenga.

El principio en la enseñanza de las matemáticas en la educación inicial

El principio 2 está centrado en el concepto de *nocionalización* de los objetos matemáticos, entonces es necesario hacer claridad sobre lo que es un objeto matemático. Según Godino (2002), si se está en consonancia con el interaccionismo simbólico, se considera que un objeto o entidad matemática es todo aquello que puede ser indicado, todo lo que puede señalarse o a lo cual puede hacerse referencia, cuando hacemos, comunicamos o aprendemos matemáticas.

Gómez (1996) dice que la comprensión es el proceso que describe la evolución de diversos estados de comprensión, reconociendo que un estado de comprensión es una 'forma de ver las cosas' con respecto a aquello que atañe a ese concepto. Esta evolución en diversos estados de comprensión se interpreta dentro del marco de principios del método como una evolución en la calidad de las nociones que el aprendiz va obteniendo en el contacto con los objetos de aprendizaje, por lo tanto se puede ver que la *nocionalización* es clave en el proceso de adquirir conocimiento sobre un objeto, y por lo tanto de comprenderlo.

Y como la comprensión involucra la representación interna de las ideas, de manera que permita a la mente operar sobre ellas (Hiebert y Carpenter, 1992), la representación por la vía de la *nocionalización* es decisiva para garantizar que se comprende el objeto matemático y que se puede actuar con base en él.

En resumen y en concordancia con el espíritu procedimental de este principio, se puede ver que hay una lógica cíclica en el proceso de aprendizaje, ya que al ser un objeto matemático un objeto de referencia, es necesario acceder a este por la vía de la comprensión, entendida como el proceso de adquisición, modificación y perfeccionamiento de las nociones, que a su vez se logra al hacer mejores representaciones de dicho objeto.

Como consecuencia de esta lógica procedimental, se nota que el proceso de *nocionalización*, entendido como formación de las nociones, es posterior al proceso de representación, en la medida en que es por la representación que una persona incorpora la idea de un objeto concreto a su mente. Pero además de la representación, el proceso de *nocionalización* requiere también de la asociación de formas de lenguaje propias a los objetos representados, cada vez más refinadas en cada uno de los ciclos del proceso de aprendizaje que mencioné en el párrafo anterior. Esto es coincidente con la definición de noción como un triángulo conformado por el objeto, la imagen (u objeto representado) y la palabra (o forma de lenguaje propia del objeto) (De Zubiría, 2002)

El principio en el método para el aprendizaje natural de las matemáticas

Aunque es importante en todo tipo de conocimientos, en el conocimiento matemático la *nocionalización* es fundamental, y sin embargo, es usual, según mi experiencia acompañando clases, que los profesores obvien la construcción de una noción fuerte con respecto a los objetos matemáticos, y formulen proposiciones para aprender de memoria pero que no están basadas en la comprensión. Para atacar esto, en el método para el aprendizaje natural de las matemáticas cada uno de los objetos matemáticos en los que se basan los procesos de pensamiento está conscientemente soportado en nociones cercanas para los estudiantes, así por ejemplo, cuando un niño que es formado con base en este método piensa en una suma de ocho más cinco, no aparecen en su mente los típicos constructos relacionados con los números y la operación suma (es decir, $8 + 5$), sino que aparecen las nociones que él ha conseguido con base en el trabajo con material concreto, a saber: ocho objetos y cinco objetos, con los que usando el proceso de agrupación, logra llegar a la respuesta de la suma. Vale aclarar que en el método para el aprendizaje natural de las matemáticas, esto se hace para el pensamiento numérico, y también para los otros tres ejes de pensamiento.

La formación docente que se provee cuando se implementa el método implica que los profesores conozcan en buena medida los obstáculos epistemológicos de cada uno de los objetos matemáticos que enseñan para que puedan generar buenos procesos de *nocionalización* en los estudiantes.

Reformulación del principio 2

He mostrado, con base en mis concepciones iniciales y lo que múltiples autores han propuesto, que la *nocionalización,* definida como el proceso de crear nociones en la mente del aprendiz, está definida en la literatura de la educación y, en específico, de la educación matemática desde el proceso de representación, que lleva a generar ideas sobre los objetos matemáticos, y el proceso de asociación de formas de lenguaje propias a los objetos representados, esto permite aplicarlos y así generar buenos caminos de obstáculos epistemológicos.

Esto es esencial en el proceso de aprendizaje. Sin embargo, la formulación del principio 2 se realizó usando el constructo *nocionalización*, que estaría mejor descrito si se hiciera en términos de los procesos de representación y de asociación de formas de lenguaje propias a los objetos. De modo que este principio, conteniendo los elementos esenciales que contiene, podría reformularse mejor de la siguiente manera:

Una forma de aprendizaje de las matemáticas es la que está basada en la formación secuencial de nociones mediante la correcta representación de los objetos matemáticos y la asociación de formas de lenguaje propias a dichos objetos, lo cual permite hacer buenos caminos de comprensión y superación de los obstáculos epistemológicos.

CAPÍTULO 5: SOBRE EL PRINCIPIO 3

La abstracción de los objetos matemáticos se debe hacer de forma gradual.

Para entender lo que este principio implica es necesario tener claridad en los conceptos de abstracción y gradualidad.

El principio en la enseñanza de las matemáticas en la educación inicial

Como veíamos en el principio 2, Piaget (1969) sitúa el conocimiento en la relación entre la experiencia vivida con el contexto inmediato y las estructuras de pensamiento que se van constituyendo a partir de la misma, para adaptarse al mundo. Asimismo, asienta las bases para entender el desarrollo cognoscitivo como un proceso del cual depende el aprendizaje, en contraposición a la visión tradicional del aprendizaje como efecto inmediato de la transmisión proveniente de otros (Ordóñez, 2004).

El principio 3 se basa en el proceso de abstracción que nace de la representación, tal como lo expresé en el principio 2. Una forma de acercarse al concepto de abstracción es a través de un ejemplo: el cálculo numérico parece depender de la percepción de los objetos materiales pero, posteriormente, esta dependencia va haciéndose menor a medida que uno, con base en el sistema numérico, representa en símbolos más abstractos los objetos materiales, así el sistema numérico da la posibilidad de representar con independencia de la percepción (Moreno, 1999).

En todos los procesos de aprendizaje que impliquen la representación se produce la abstracción, pero es más necesario aún en el aprendizaje de objetos matemáticos, ya que por la naturaleza de esta disciplina se considera inaceptable que sus enunciados queden representados por referentes fijos, que queden dependientes de los accidentes del contexto (Moreno, 1999). De lo dicho por este autor se deduce que es fundamental que en matemáticas, siempre los aprendices tengan un referente simbólico para la noción u objeto que se les presente.

Por su parte, para Freudenthal (1991), matematizar (hacer matemática) es lo importante, más aun que aprenderla como producto finalizado. Por eso, es mejor hacer énfasis en el proceso de abstracción y no las abstracciones generadas por este. Para esto, él propone generar relaciones más formales y estructuras abstractas a partir de la reinvención guiada del aprendiz y la esquematización progresiva del profesor frente a las situaciones de la vida cotidiana que se puedan matematizar. En ese sentido, la matematización es la forma concreta del proceso de abstracción que Freudenthal propone.

Aunque Freudenthal se opone en algunos casos a las posiciones constructivistas del aprendizaje, desde el punto de vista del método hay una coincidencia con estas posiciones, tal como las expone Rico (1995) cuando dice que: “Todo conocimiento es construido. El conocimiento matemático es construido, al menos en parte, a través de un proceso de abstracción reflexiva” (p. 5). Sin embargo, en este punto de la abstracción no hay un consenso general, pues para el mismo Piaget existen dos diferentes abstracciones: la física y la reflexiva (Moreno, 1999), aunque no es tan fácil reconocer la diferencia entre una y otra.

De todas maneras, mucho del poder de las matemáticas deriva de la abstracción (Dreyfuss, 1991), y aunque la abstracción y la generalización están íntimamente ligados, la generalización usualmente implica una expansión de las estructuras de conocimiento individual, mientras que la abstracción implica una reconstrucción mental de los conceptos. La abstracción permite pasar de conceptos preliminares a conceptos más formales en cualquier campo y, en especial, en las matemáticas; para lograr esto la persona que abstrae debe gradualmente focalizar su atención en las estructuras que forman parte de lo abstracto del concepto, dejando de lado los detalles que son irrelevantes, para ir reduciendo la complejidad del objeto matemático.

En el proceso relatado anteriormente, la visualización o representación es fundamental (Dreyfuss, 1991), ya que a partir de buenas representaciones, la eliminación de los detalles toma un correcto camino en la abstracción y construcción del concepto. Por eso, representar y abstraer son procesos complementarios y están en direcciones opuestas: de una parte, un concepto es muchas veces abstraído de varias de sus representaciones y, por otra parte, las representaciones son siempre representaciones de algunos conceptos abstractos.

Entonces, cuando leemos los párrafos anteriores, somos conscientes de que las matemáticas son abstractas y el proceso de aprendizaje debe nacer desde lo concreto, desde lo contextual, porque es el punto de partida de la abstracción, pero para ser exitoso, es necesario que partiendo de ejemplos concretos no se llegue a los objetos abstractos demasiado rápido (Damerow, 1996b). Ante la naturaleza contextual y situada del conocimiento, el problema del profesor consiste en ayudar a que el conocimiento contextualizado del alumno logre un nivel de articulación que le permita vincularlo, como instrumento de conocimiento, a otros contextos para generar nuevos conocimientos.

Y así es absolutamente necesario que el profesor de niños de preescolar (pero también en otros niveles más adelante) logre entregar herramientas a sus niños, para que estos, vinculen su saber previo a la representación y abstracción gradual de los objetos matemáticos que deben comprender y aprender en estos primeros años, para asegurar un desarrollo del pensamiento matemático y no una memorización y automatización de procesos matemáticos que no sean significativos para ellos.

Ya Puig (1960), en el principio IV de su *Decálogo de la didáctica matemática media*, decía que era importante graduar cuidadosamente los planos de abstracción para garantizar el aprendizaje, y en su estudio de la historia de los signos (como instrumentos de mediación), Vygotsky introdujo el principio de descontextualización de los instrumentos de mediación a través del lenguaje. Es decir, el principio que describe el proceso mediante el cual el significado de los signos se va haciendo independientes del contexto (Moreno, 1999). Así, por ejemplo, en el desarrollo del pensamiento, la descontextualización se puede ver relacionada con la enseñanza de los sistemas numéricos en el que una cantidad puede ser representada en contextos perceptivos más abstractos. De hecho, la cantidad puede volverse en un objeto abstracto en sí mismo al ser representada como un número (no hablo acá del grafo, sino de la concepción abstracta mental de la cantidad).

Eso también lo formulan Simon y Schifter cuando dicen:

> El aprendizaje de las matemáticas fue caracterizado como un proceso de construcción de los estudiantes, la construcción de los conocimientos previos, pasando de experiencias concretas y reales a las abstracciones, desarrollando imágenes mentales, y resultando en una modificación de las creencias. (Simon y Schifter, 1991, p. 322).

El principio en el método para el aprendizaje natural de las matemáticas

Desde el método natural para el aprendizaje de las matemáticas se propone que, en las experiencias educativas, los niños tengan un acercamiento paulatino a las nociones y objetos matemáticos, es decir, es necesario que el niño explore su espacio inmediato desde los objetos más cercanos y con los que tenga más relación y de esta forma logre representarlos y abstraerlos, partiendo de lo concreto, para que posteriormente pueda extrapolarlo y aplicarlo en abstracto. Por ejemplo, cuando necesitamos presentarle al niño las nociones de largo y corto, es perentorio que inicialmente se trabaje con los lápices de colores, marcadores, loncheras, maletas, etc., objetos que son cercanos a ellos, de su cotidianidad, con los que constantemente se están relacionado, para que luego, más adelante, puedan llevar estas nociones aprendidas al papel u otros contextos.

Cuando uno observa en el aula de clases, en diversos colegios, la forma cómo se presentan los objetos matemáticos, se evidencia una necesidad por parte de los niños de comprender, desde sus concepciones implícitas, lo que el profesor les está mostrando, por lo tanto, cuando este se vale de lo que los niños reconocen y con lo que han logrado generar una relación, es más fácil obtener resultados claros frente a la construcción del aprendizaje deseado.

El método para el aprendizaje natural de las matemáticas está diseñado de tal manera, que cada uno de los procesos asociados a los ejes de pensamiento se divide en estadios, que aparte de ser evidencias del desempeño específico de los estudiantes, formulan una trayectoria delicada de abstracción que permite la construcción correcta de dichos procesos.

Reformulación del principio 3

Cuando se aborda la formulación original de este principio: "La abstracción de los objetos matemáticos se debe hacer de forma gradual", uno podría estar tentado a unir dicha formulación con la del principio 2, ya que tienen una relación muy estrecha: el proceso completo es representación-abstracción, sin embargo el principio 3 hace un énfasis especial en el asunto de la gradualidad. La superación de los obstáculos epistemológicos depende de dos factores: de una correcta representación y de un proceso gradual de abstracción que vaya superando dichos obstáculos de la forma y en los tiempos óptimos. Por esta razón, se podría pensar que el principio 3 tiene una formulación que le permite ser operativo y se podría dejar tal cual fue formulado originalmente:

La abstracción de los objetos matemáticos se debe hacer de forma gradual.

CAPÍTULO 6: SOBRE EL PRINCIPIO 4

Los pensamientos numérico y métrico están a la base del desarrollo del pensamiento matemático; estos soportan a los pensamientos variacional y geométrico, respectivamente.

Para entender lo que este principio implica es necesario tener claridad en los conceptos de ejes de pensamiento matemático, pensamiento numérico, pensamiento variacional, pensamiento métrico y pensamiento geométrico.

Ideas que fundamentan el principio

Bishop (1999) propone que existe una matemática "erudita", o "universal", pero que además hay unas actividades matemáticas universales que están presentes en todos los grupos humanos cuando buscan satisfacer sus necesidades básicas. En ese sentido, propone que hay seis actividades matemáticas que todos los grupos humanos realizan y a partir de las cuales han construido sus propios conocimientos. Estas actividades son: contar, localizar, medir, diseñar, jugar y explicar. Esas actividades coinciden con el desarrollo de cada uno de los cuatro ejes de pensamiento matemático: pensamiento numérico (contar), pensamiento geométrico (localizar), pensamiento métrico (medir) y pensamiento variacional (diseñar y explicar).

Se sabe que los primeros pobladores, entre ellos los cazadores y recolectores, contaban pequeñas cantidades, buscando responder la pregunta: ¿cuántos hay? (Cid, Godino & Batanero, 2003). A partir de esta necesidad, recurrieron a simbolizar las cantidades mediante hendiduras o muescas hechas en palos o huesos, conformadas en grupos de cinco, dando así los primeros pasos en el conteo y la agrupación de cantidades (Cid, Godino & Batanero, 2003). Estos signos numéricos antiguos eran simples rayas paralelas que representaban sus bienes.

Históricamente para el hombre, el conteo de cantidades ha sido necesario para representar lo que posee y lo que conoce. Como ya se vio en el desarrollo del principio 1, esta misma necesidad se manifiesta en los niños en sus primeros años, y a partir de este momento inicia naturalmente el desarrollo del pensamiento numérico (Díez, Pantano & Camargo, 2012), y va resolviéndose mediante el desarrollo del sistema de numeración. Se ha evidenciado que los niños luego de pocos meses de su nacimiento adquieren una estructura cognitiva referente a lo numérico (Spelke y Kinzler, 2007). Ante un problema complejo, los niños además de intuir formas rudimentarias para resolverlo, hacen uso de habilidades relativas al conteo, discriminación de pequeñas cantidades de objetos estableciendo su cardinal, la composición y descomposición de las mismas y recitación de la serie numérica. Habilidades matemáticas que han adquirido antes del ingreso a la escuela, fruto de la interacción con los adultos.

Una vez que como humanos fuimos resolviendo el problema de contar, y de contar no solamente objetos concretos, sino otros más abstractos, como los días, tuvimos la necesidad de predecir el comportamiento de algunos fenómenos como el movimiento de los astros, las estaciones y los embarazos, generando así métodos cíclicos de conteo evidenciados en los calendarios (Duque Escobar, 2007). También nos formulamos la necesidad de almacenar y ubicar la producción agrícola que incipientemente se daba, con lo que se empezamos a desarrollar los primeros objetos geométricos, basados en formas de medición que paulatinamente se iban estandarizando.

El principio en la enseñanza de las matemáticas en la educación inicial

Basándose en lo desarrollado en el principio 1 acerca de la secuencia calidad en el desarrollo de los diferentes tipos de pensamiento matemático, se puede cuestionar la organización de los contenidos en los currículos de matemáticas que presentan logros en los cuatro ejes de pensamiento matemático al tiempo (pensamiento numérico, pensamiento métrico, pensamiento geométrico, pensamiento variacional), sin embargo también hay posiciones que critican la fragmentación por disciplinas o por ejes de pensamiento (Orientaciones curriculares para el campo de pensamiento matemático, 2007).

Para comprender cabalmente la relación entre los pensamientos, vale la pena definir cada uno de estos. Inicialmente, como afirma McIntosh:

> El pensamiento numérico se refiere a la comprensión en general que tiene una persona sobre los números y las operaciones, junto con la habilidad y la inclinación a usar esta comprensión en formas flexibles para hacer juicios matemáticos y para desarrollar estrategias útiles al manejar números y operaciones. (McIntosh, 1992, tomado de Lineamientos curriculares de matemáticas, 1998, p. 26)

Por otro lado, en Los Lineamientos Curriculares de Matemáticas y en Los Estándares Básicos de Matemáticas, los términos pensamiento métrico y sistemas de medidas, se refieren a la construcción de los conceptos y procesos de conservación de las magnitudes; la selección de unidades de medida, patrones e instrumentos; la asignación numérica; la estimación y el papel del trasfondo social de la medición. Todo lo anterior hace que el concepto potente para el desarrollo del pensamiento métrico sea el de magnitud. (Posada, 2005)

Así mismo, los Lineamientos Curriculares de Matemáticas definen el pensamiento geométrico como "el conjunto de los procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y se manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones, y sus diversas traducciones a representaciones materiales" (p. 37); y también definen, de una manera tautológica, el pensamiento variacional como aquel en que es necesario "analizar, organizar y modelar matemáticamente situaciones y problemas tanto de la actividad práctica del hombre, como de las ciencias y las propiamente matemáticas donde la variación se encuentre como sustrato de ellas" (p. 49).

Ahora bien, los dos pensamientos que dieron origen a la concepción de las matemáticas en las culturas primitivas fueron el pensamiento numérico y el pensamiento métrico, que están íntimamente relacionados y que, por lo tanto, requieren que dicha relación sea evidenciada en el currículo, de manera que los procesos de pensamiento métrico requieran de procesos de pensamiento numérico, y que estos últimos encuentren en los primeros las necesidades que estimulen su desarrollo.

Asimismo, hay relaciones profundas entre los ejes de pensamiento numérico y métrico y los ejes de pensamiento geométrico y variacional, como cuando se realizan seriaciones con base en propiedades geométricas y numéricas de los objetos, cuando se describen formas geométricas a partir de sus propiedades métricas o cuando se usan propiedades numéricas para describir características geométricas en el plano o el espacio, lo que implica que el currículo no pueda presentarse de manera distinta y separada por cada uno de los ejes de pensamiento, pero sí que algunos procesos de un eje de pensamiento dependan de otros procesos en el mismo eje o en otro eje de pensamiento. Por eso, las aprendizajes que una persona logra en un eje de pensamiento se constituyen en apoyos para las construcciones en otros ejes. En otras palabras, las construcciones en un eje alimentan las posibilidades de complejización en los otros. (Orientaciones curriculares para el campo de pensamiento matemático, 2007).

Haciendo un análisis de los Estándares básicos de competencias, se puede ver que en los primeros grados de la escolaridad hay mayor cantidad de indicadores asociados a los pensamientos numérico y métrico, mientras que los grados superiores hay mayor cantidad de indicadores dedicados a los pensamientos geométrico y variacional, esto sugiere cierto orden aunque no necesariamente una dependencia estricta entre los ejes de pensamiento.

El principio en el método para el aprendizaje natural de las matemáticas

Desde el método natural para el aprendizaje de las matemáticas se plantea que el eje de pensamiento numérico es el fundamento para el desarrollo del pensamiento matemático. En esta medida, es coincidente con los Lineamientos del Ministerio de Educación Nacional de Colombia (1998) que dicen que:

> el pensamiento numérico está constituido por el uso significativo de los números y el sentido numérico que suponen una comprensión profunda del sistema de numeración decimal, no solo para tener una idea de cantidad, de orden, de magnitud, de aproximación, de estimación, de las relaciones entre ellos, sino además para desarrollar estrategias propias de la resolución de problemas. Así mismo, otro aspecto fundamental sería la comprensión de los distintos significados y aplicaciones de las operaciones en diversos universos numéricos, por la comprensión de su modelación, sus propiedades, sus relaciones, su efecto y la relación entre las diferentes operaciones. (p. 17).

Teniendo en cuenta lo propuesto, se puede deducir que el pensamiento numérico es esencial para la construcción de los objetos matemáticos de los otros ejes de pensamiento, ya que da bases sólidas y estructura los esquemas de pensamiento, permitiendo ir edificando instancias que otorgan a los niños formas sofisticadas de elaboración y apropiación de las nociones.

También los Lineamientos del Ministerio de Educación Nacional de Colombia (1998) proponen que para el desarrollo del pensamiento numérico se requiere del apoyo de sistemas matemáticos más allá de los numéricos, como el geométrico, el métrico, el de datos; es como si este tipo de pensamiento tomara una forma particular en cada sistema.

En los Lineamientos, en el desarrollo del pensamiento variacional, se asume por principio que las estructuras conceptuales se desarrollan en el tiempo, que su aprendizaje es un proceso que se madura progresivamente para hacerse más sofisticado, y que nuevas situaciones problemáticas exigirán reconsiderar lo aprendido para aproximarse a las conceptualizaciones propias de las matemáticas; de lo anterior, se deduce que el pensamiento variacional es un pensamiento complejo que requiere que los otros pensamientos tengan un cierto grado de desarrollo, sobre todo, el pensamiento numérico. De esta manera, es posible ver que hay una línea entre el pensamiento numérico y el pensamiento variacional.?

Por otra parte, el pensamiento métrico abarca los conceptos de magnitud y medida que son usados para construir los conceptos concernientes a figuras geométricas, sus operaciones y relaciones. Este eje se configura como una totalidad en lo lineal, lo superficial y lo volumétrico, para abarcar el estudio de los objetos geométricos en sí mismos y en sus relaciones métricas.

En cuanto a la medida se refiere, los énfasis están en comprender los atributos medibles (longitud, área, capacidad, peso, etc.) y su carácter de invarianza, dar significado al patrón y a la unidad de medida, y a los procesos mismos de medición, desarrollar el sentido de la medida (que involucra la estimación) y las destrezas para medir, involucrar significativamente aspectos geométricos como la semejanza en mediciones indirectas y los aspectos aritméticos fundamentalmente en lo relacionado con la ampliación del concepto de número.

Con respecto a los sistemas geométricos, los Lineamientos Curriculares de matemáticas dicen que estos se construyen a través de la exploración activa y modelación del espacio tanto para la situación de los objetos en reposo como para el movimiento. Esta construcción se entiende como un proceso cognitivo de interacciones, que avanza desde un espacio intuitivo o sensorio-motor (que se relaciona con la capacidad práctica de actuar en el espacio, manipulando objetos, localizando situaciones en el entorno y efectuando desplazamientos, medidas, cálculos espaciales, etc.), a un espacio conceptual o abstracto relacionado con la capacidad de representar internamente el espacio, reflexionando y razonando sobre propiedades geométricas abstractas, tomando sistemas de referencia y prediciendo los resultados de manipulaciones mentales.

Por eso nos referimos separadamente a los sistemas geométricos, que se inician con modelos cualitativos del espacio, y a los sistemas métricos, que pretenden llegar a cuantificar numéricamente las dimensiones o magnitudes que surgen en la construcción de los modelos geométricos y en las reacciones de los objetos externos a nuestras acciones. Sin embargo, esta referencia por separado es más una referencia hacia que existe una línea entre estos dos ejes de pensamiento.

Una vez establecidas estas dos líneas, podemos ver también que es imposible separar el pensamiento variacional del pensamiento geométrico, en tanto la variación es pensable también en sistemas métricos y geométricos.

De la relaciones presentadas entre los ejes de pensamiento, se puede observar que las secuencias curriculares rígidas y distribuidas de forma precisa en el tiempo tienen que dar paso a organizaciones más abiertas donde se trabajen simultáneamente diferentes sistemas conceptuales, de tal forma que las elaboraciones logradas en uno, reporten progresos en los otros.

Reformulación del principio 4

Todo lo expuesto anteriormente me lleva a hacer una reformulación mayor de este principio, que en su formulación original decía: “Los pensamientos numérico y métrico están a la base del desarrollo del pensamiento matemático; estos soportan a los pensamientos variacional y geométrico, respectivamente”, ya que, si bien, se notan líneas entre los pensamientos numérico y variacional y también entre los pensamientos métrico y geométrico, esto no implica, como sí se lee en la formulación original del principio, que haya que desarrollar primero un pensamiento para luego abordar el ‘siguiente’, sino más bien que hay relaciones fuertes entre los procesos de cada uno de los ejes de pensamiento, que estructuran un sistema complejo que debe nutrir el diseño curricular.

Para caracterizar estas relaciones que menciono, es necesario profundizar en cada uno de los ejes de pensamiento de modo que se puedan establecer los múltiples caminos para el desarrollo de los procesos de pensamiento matemático. Por esta razón, mi propuesta es suprimir este principio dentro de la formulación de los que soportan al método, puesto que es insuficiente y restringido.

CAPÍTULO 7: SOBRE EL PRINCIPIO 5

Los objetos matemáticos nucleares son los procesos asociados a cada eje de pensamiento matemático.

Para entender lo que este principio implica es necesario tener claridad en los conceptos de objeto matemático y proceso de pensamiento matemático.

Ideas que fundamentan el principio

De acuerdo con Godino (2002), el término objeto matemático designa a todo lo que es indicado, señalado o nombrado cuando se construye, comunica o aprende matemáticas. Una idea basada en Blumer, quien dice que un objeto es "cualquier entidad o cosa a la cual nos referimos, o de la cual hablamos, sea real, imaginaria o de cualquier otro tipo" (Blumer, 1982, p. 8).

D'Amore, por su parte, hace un contraste entre la concepción de objeto matemático desde el punto de vista de una teoría "realista" con su concepción desde el punto de vista de una teoría "pragmática". Producto de esta elaboración, que establece una convergencia entre estos puntos de vista, llega a la conclusión de que: "El 'objeto' es (…) algo ideal, abstracto, punto culminante de un proceso perennemente en acto, del que tenemos solo una idea limitada a su evolución histórica y su estado actual" (D'Amore, 2001, p. 19). Estoy de acuerdo con esta conclusión, en el sentido de que los objetos matemáticos tienen cierto carácter de provisionalidad que va evolucionando (reformándose y reconstruyéndose) a partir de la interacción del aprendiz con dicho objeto y con las situaciones que representa.

En este mismo sentido, este autor resalta el papel del carácter personal, sobre el carácter institucional, de los objetos matemáticos cuando dice que: "Los 'objetos' emergen de la actividad de las personas puestas frente a la solución de problemas, incluso independientemente de todo contexto institucional; es más, en un cierto sentido, privilegiando precisamente los significados personales con respecto a los institucionales" (D'Amore, 2001, p. 22), enfatizando así este carácter de provisionalidad, de reforma y reconstrucción de los objetos matemáticos con base en la interacción del aprendiz con su entorno.

Lo anterior es coincidente con la definición que Chevallard da al concepto de objeto matemático:

> un objeto matemático es un emergente de un sistema de praxis donde se manipulan objetos materiales que se descomponen en diferentes registros semióticos: registro oral, de las palabras o de las expresiones pronunciadas; registro gestual; dominio de las inscripciones, es decir aquello que se escribe o se dibuja (graficas, formulas, cálculos,...), se puede decir, registro de la escritura. (Chevallard, 1991, citado por D'Amore, 2001, p. 14).

Por último, para redondear esta caracterización del concepto objeto matemático, desde la posición de su construcción en el uso, retomo las ideas de Freudenthal, para quien los objetos matemáticos se construyen en la práctica matemática como medios de organización de objetos del mundo, sus propiedades, las acciones que hacemos sobre ellos o las propiedades de esas acciones (Puig, 2001). Freudenthal (1986) menciona el concepto de matematización, que da origen, por medio del enfrentamiento del aprendiz con situaciones problema, a los objetos matemáticos.

En resumen, tomando las ideas de estos autores se pueden obtener las siguientes conclusiones:

- Los objetos matemáticos nacen, necesariamente, de la interacción matemática.
- Los objetos matemáticos tienen carácter personal e institucional (Godino, 2002), es decir nacen de la interacción del aprendiz al resolver situaciones problema *matematizables* de su entorno y de la formación institucional de las matemáticas a la que el aprendiz está expuesto.
- Los objetos matemáticos tienen cierto matiz de provisionalidad, en el sentido de que, debido a la interacción del aprendiz con su entorno, se reconstruyen y reforman constantemente en un proceso evolutivo.

Por otra parte, los procesos de pensamiento matemático son usuarios de estos objetos; es decir, no hay forma de realizar un proceso de pensamiento matemático sin tener como pretexto un objeto matemático que sea usado, modificado, relacionado, etc., entonces los procesos matemáticos son las herramientas que nos proporcionan las matemáticas para trabajar los diferentes contenidos.

Otra forma de pensar sobre este mismo asunto es la que Sfard (1991) sostiene: hay una dualidad intrínseca de los objetos matemáticos, que consiste en que primero surgen como procesos y luego se tornan en objetos, es decir los procesos de pensamiento hacen que los objetos matemáticos se cimenten como tales en la mente de los aprendices, ya que son necesarios para que estos últimos se den.

Hay diversos abordajes para la clasificación de los procesos matemáticos. Según el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas de los Estados Unidos, hay cinco procesos matemáticos: la resolución de problemas; el razonamiento y la demostración; la comunicación; la representación; y las conexiones (NCTM, 2000). En el contexto nacional, y de manera muy coincidente con los anteriores, los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998) proponen los siguientes procesos matemáticos: el razonamiento; la resolución y planteamiento de problemas; la comunicación; la modelación; y la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos.

Los Lineamientos de Matemáticas del Ministerio de Educación Nacional de Colombia (1998), también dictaminan que es necesario:

> una educación matemática que propicie aprendizajes de mayor alcance y más duraderos que los tradicionales, que no solo hagan énfasis en el aprendizaje de conceptos y procedimientos, sino en procesos de pensamiento ampliamente aplicables y útiles para aprender cómo aprender. (Lineamientos de Matemáticas del Ministerio de Educación Nacional de Colombia, 1998, p. 18).

Esto coincide con lo que recientemente organismos internacionales, como la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico de la Unión Europea (OCDE, 2000) o el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas de Estados Unidos (NCTM, 2000), han destacado sobre los inconvenientes que se generan al enseñar y aprender matemáticas basándose fundamentalmente en la adquisición de contenidos matemáticos. Estos organismos señalan que una enseñanza de las matemáticas centrada solo en los contenidos, aunque puede ser útil para tener un buen rendimiento matemático escolar, no implica que se generen en los estudiantes las habilidades para leer y desenvolverse en su vida con pensamiento matemático.

En resumen y coincidiendo con la OCDE (2000):

> En definitiva, pues, se trata de ayudar, a través de los procesos de pensamiento matemático, a gestionar el conocimiento, las habilidades y las emociones para conseguir un objetivo a menudo más cercano a situaciones funcionales y en contextos de vida cotidiana que a su uso académico. Entramos de pleno, pues, en la noción de alfabetización matemática, que se define como la capacidad del individuo para identificar y comprender el rol que juega la matemática en el mundo, para emitir juicios bien fundamentados y para comprometerse con la matemática, de manera que cubran las necesidades de la vida actual y futura de dicho individuo como un ciudadano constructivo, interesado y reflexivo. (Citado por Alsina, 2011a, p. 6)

La necesidad de centrar la enseñanza de la matemática en procesos de pensamiento matemático más que en los objetos matemáticos se evidencia también en la rápida transformación del mundo actual, frente a la que es mejor que los estudiantes se formen en procesos de pensamiento, que no se vuelven obsoletos con tanta rapidez, y no en objetos matemáticos, que como se expresó anteriormente tienen un mayor carácter de provisionalidad (Guzmán, 2001).

El principio en la enseñanza de las matemáticas en la educación inicial

En mi experiencia en observación de clases pude diferenciar dos tipos según la orientación del aprendizaje: aquellas que estaban orientadas al aprendizaje de los objetos matemáticos y aquellas que se orientaban al desarrollo de procesos de pensamiento matemático. El primer tipo de clases, las que estaban orientadas al aprendizaje de objetos matemáticos se pueden reconocer porque en ellas, a los estudiantes les preocupa más si la respuesta es correcta que si la forma de pensar por la que llegaron a la respuesta es válida. También en esas clases orientadas a los objetos, los procedimientos se ven como una serie de pasos mecánicos para conseguir una respuesta. En cambio, cuando las clases se orientan al desarrollo de procesos de pensamiento, los procedimientos atienden a la metacognición, es decir al reconocimiento de las formas de pensar por las que se llega a resolver el problema o a realizar el ejercicio.

Algo similar a lo que noté en mi experiencia en observación de clases lo manifiesta también Skemp (1971) cuando en sus investigaciones encuentra que, en ese tiempo, las aproximaciones a la enseñanza de matemáticas tendían a dar a los estudiantes el producto del pensamiento matemático en vez de llevarles a hacer procesos de pensamiento matemático. Refiriéndose a ese problema, Tall (1991) expresa que esto puede ser causado porque una presentación lógica de los contenidos puede no ser apropiada para el desarrollo cognitivo del aprendiz.

Adicionalmente, en la enseñanza de las matemáticas en la educación inicial, un proceso de enseñanza-aprendizaje centrado en los objetos matemáticos se combina regularmente con un proceso basado en la memoria y no en la comprensión, esto produce personas que no tienen capacidad de aprender o evolucionar en sus objetos matemáticos, sino que los conciben como meras traducciones institucionales.

Otro punto a favor de abordar el proceso de aprendizaje de las matemáticas desde la formación de procesos de pensamiento es que permite a los aprendices la posibilidad de transitar entre diversos contextos, puesto que lo que se mantienen invariante entre dichos contextos son los procesos, pero no necesariamente la forma de comprender los objetos.

Reforzando esto podemos citar a Alsina al referirse que para Guzmán:

> la matemática es, sobre todo, saber hacer, es una ciencia en la que el método predomina claramente sobre el contenido. Por este motivo considera que los procesos son el centro de la educación matemática. Los contenidos y los procesos, como veremos, se interrelacionan, se retroalimentan, y todos juntos forman el conjunto de conocimientos matemáticos que se tienen que aprender para ser un ciudadano alfabetizado en la sociedad del S. XXI. (Alsina, 2011a, p. 2).

El principio en el método para el aprendizaje natural de las matemáticas

El método para el aprendizaje natural de las matemáticas tiene una organización basada en los procesos de pensamiento matemático, tomando como pretexto los objetos matemáticos. En este método se hace énfasis en que los estudiantes desarrollen sus procesos de pensamiento matemático, mientras que construyen sus primeras ideas sobre los objetos matemáticos seleccionados para su edad, por eso está estructurado en forma de procesos secuenciales que nacen de las necesidades de pensamiento que, como se vio en el principio 1, son coincidentes con la necesidades históricas de la humanidad en su evolución del aprendizaje de las matemáticas.

Por ejemplo, el eje de pensamiento numérico, desde sus inicios y hasta finalizar el desarrollo de la estructura aditiva, se configura en la siguiente secuencia de procesos de pensamiento matemático: asignación, agrupación no posicional, agrupación posicional, agregación-suma, diferencia-resta. En esta secuencia de procesos se van construyendo, a partir de los procesos, objetos matemáticos como: la unidad, el grupo de primer nivel (que termina convergiendo a la decena), el grupo de segundo nivel (que termina convergiendo a la centena), el grupo de nivel *n*, los números dígitos, etc. Cada uno de estos objetos es importante dentro del aprendizaje del edificio de objetos matemáticos, pero no son constructos definitivos y estáticos, sino que se van modificando con el uso y la exposición de estudiante a diferentes contextos de aplicación.

Es así como, por ejemplo, el concepto de grupo de primer nivel empieza por formarse de manera discreta en la mente del estudiante, ya que para formarlo debe poder ver las unidades que lo conforman, pero luego tiende a ganar un carácter de continuidad, en el sentido de que el grupo entero puede ser representado por un símbolo, que incluso puede llegar a ser el mismo símbolo que tenía reservado para las unidades (agrupación posicional). Más aun, estos procesos tienen un carácter más universal que el de los objetos, ya que, por ejemplo, la agrupación, vista de forma general, puede extrapolarse incluso a contextos no directamente matemáticos.

Reformulación del principio 5

Con base en todas las ideas expuestas en este capítulo, se puede ver que al formular originalmente este principio en los siguientes términos: "Los objetos matemáticos nucleares son los procesos asociados a cada eje de pensamiento matemático", se presenta una confusión entre el concepto de objeto matemático y el concepto de proceso de pensamiento matemático.

En efecto, no es posible decir que los objetos matemáticos son los procesos de pensamiento matemático, puesto que como ya he podido aclarar con el desarrollo de la fundamentación teórica de este principio, los procesos de pensamiento matemático dan origen a los objetos matemáticos por medio de la relación del aprendiz con su entorno en la solución de situaciones problema. No obstante esta confusión en los conceptos, el espíritu que se lee detrás de este principio es que los procesos de pensamiento matemático tienen la mayor relevancia en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, por eso una formulación que recoja el espíritu de este principio de manera coherente con lo que se ha definido en su desarrollo sería:

El elemento central en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas son los procesos de pensamiento asociados al desarrollo de los objetos de cada eje de pensamiento matemático.

CAPÍTULO 8: SOBRE EL PRINCIPIO 6

El lenguaje media el proceso de enseñanza-aprendizaje, por eso las palabras relacionadas con los objetos matemáticos deben ser pensadas y dichas con exactitud.

Para entender lo que este principio implica es necesario tener claridad en los conceptos de representación, lenguaje como mediador del proceso de enseñanza-aprendizaje y relación entre lenguaje y pensamiento.

Ideas que fundamentan el principio

Diversos autores consideran el lenguaje como el principal vehículo para construir aprendizaje, ya que a través de este nos comunicamos, construimos teorías, las comunicamos para validarlas y de esta forma adquirirlas, sin embargo, las formas en que cada uno expresa la relación entre lenguaje y aprendizaje varían notablemente.

En sus trabajos, Piaget demuestra que el lenguaje no conforma la fuente de la lógica, sino que por el contrario, el lenguaje es estructurado por esta última (Piaget & Inhelder, 1969). Su posición está en contra de toda concepción en la que el lenguaje se vea como el origen del pensamiento y contra toda concepción que asimile los sistemas lógicos a los sistemas lingüísticos. Piaget dice que el pensamiento no tiene origen en el lenguaje (Tornatore, 1974).

Según D'Amore, Piaget establece las siguientes proposiciones en su trabajo:

- la imagen es un significante cuyo objetivo es el de designar objetos figurativamente;
- el concepto es un significado que tiene como función la de especificar caracteres constitutivos del objeto con respecto a otros términos de la misma clase (y no de nombrarlo);

- la palabra, signo verbal que designa al concepto, no agrega nada, en lo que respecta al conocimiento, al concepto mismo. (D'Amore, 2001, p. 8)

Esa posición de Piaget contrasta con la de Vygotsky (1995), quien considera que el lenguaje es mediador entre individuo y cultura, afirmando que la formación de los conceptos se produce por la guía que las palabras proporcionan a las operaciones intelectuales, sirviendo para concentrar activamente la atención, para abstraer ciertos conceptos, sintetizarlos y simbolizarlos por medio de un signo.

De esto se deriva que el lenguaje ayuda a la organización cognitiva del estudiante, llevándola a una dimensión social. Sin embargo, este autor postula que antes de que exista la relación lingüística con el adulto, el niño tiene formas primitivas de categorización; de esta manera establece la comparación entre conceptos espontáneos y conceptos científicos. Esta idea de Vygotsky da mucha fuerza al papel de la escolaridad en el desarrollo del pensamiento formal (Vygotsky, 1995).

Vygotsky postula la idea de que el pensamiento no se expresa simplemente en palabras, sino que existe a través de ellas y esto lo lleva a considerar la existencia de dos planos en el lenguaje: su aspecto interno, significativo y semántico; y el externo, fonético.

Especialmente coincidente con las líneas generales del método para el aprendizaje natural de las matemáticas es el planteamiento de Vygotsky sobre que "el desarrollo del pensamiento está determinado por el lenguaje, es decir, por las herramientas lingüísticas del pensamiento y la experiencia socio-cultural del niño" (Vygotsky, 1995, p. 43); es decir, que los aprendices encuentran en el lenguaje, y en la experiencia social que les permite, un soporte básico para el correcto desarrollo de su pensamiento, de modo que el lenguaje no se constituye en la clase sólo como un medio para el estudio de los objetos matemáticos, sino como un fin en sí mismo para garantizar buenas vías de desarrollo cognitivo.

La posición de Vygotsky la aterriza Calderón (2009), abordándola desde una perspectiva didáctica, cuando presenta que la reflexión sobre la relación entre lenguaje y conocimiento matemático será la que indaga por el problema del desarrollo de competencias comunicativas y cognitivas de los estudiantes en matemáticas, y que por lo tanto desde la docencia y la investigación en educación matemática, se debe considerar ahondar en el lenguaje propio de las matemáticas para desarrollar procesos cognitivos correctos, basados en la naturaleza de los objetos matemáticos. Es decir, el estudio de cada objeto matemático o, por lo menos, de cada cierto tipo de objetos matemáticos, en virtud de su naturaleza específica, implica también el estudio de las formas comunicativas adecuadas que permitan pensar sobre dicho (tipo de) objeto.

El principio en la enseñanza de las matemáticas en la educación inicial

Si de manera general, Piaget y Vygotsky entraron en una dialéctica sobre la relación entre lenguaje y pensamiento, en particular, en el campo de la didáctica de la matemática, Raymond Duval, Luis Radford y Juan Godino hacen aportaciones que es importante tener en cuenta (Rojas, 2014).

Desde el enfoque estructural-funcional, Duval (1999) propone que la iniciación en las matemáticas implica la apropiación individual de sistemas semióticos de representación específicos. Para él, el problema central del aprendizaje en matemáticas consiste en la transformación de conversión, ya que postula que existen representaciones diferentes de un mismo objeto; eso implica que la coordinación de registros de representación es esencial para la actividad matemática. Debido a que en matemáticas se accede a los objetos a través de la representación y no desde la percepción, para lo cual es necesario usar sistemas semióticos de representación, es necesario que estos sean los más apropiados para que los aprendices puedan generar correctamente su conocimiento.

Para Duval (1999), toda representación está constituida por tres elementos:

- el objeto representado;
- el contenido de la representación, es decir, lo que una representación presenta del objeto;
- la forma de la representación, es decir, su modalidad o su registro.

Según Rojas (2014), para Duval lo importante no es tanto la representación como el sistema semiótico que posibilita su producción. No puede haber comprensión en matemáticas si no se distingue un objeto de su representación.

Por su parte, desde una aproximación semiótico-cultural, Radford (2004) propone que el conocimiento matemático se encuentra muy relacionado con su contexto cultural, es decir que la forma de producción del conocimiento matemático está estrechamente definida por la cultura en la cual este se desarrolla, y también por las actividades que realizan los individuos en un determinado contexto, de esto se deriva la importancia del correcto lenguaje que se debe usar por parte de los profesores en las clases de matemáticas y las actividades a las cuales el profesor expone al estudiante, con el fin de que los aprendices sean guiados en sus formas de percibir la realidad y sus fenómenos.

Según Rojas (2014), en el enfoque semiótico-cultural se asumen los siguientes dos principios:

- “Los signos permiten a los individuos reflexionar sobre el mundo y
- El mundo es reflejado y refractado en los signos y en la forma en que estos son usados”. (p. 46)

Por otra parte, tomando los postulados del enfoque ontosemiótico de Godino, en la realización de toda práctica matemática se usan sistemas de representaciones externas, que comprenden los sistemas simbólicos convencionales de las matemáticas y también los entornos de aprendizaje; y sistemas de representaciones internas, que son los constructos de simbolización personal de los aprendices, es decir, las asignaciones de significado a las notaciones matemáticas (Rojas, 2014).

Aunque diferentes, estos tres enfoques, en mi parecer, son complementarios y demuestran que las matemáticas no solo contribuyen al desarrollo de habilidades específicas de la disciplina, sino a formas de producción de pensamiento por medio de los procesos de representación, esto implica que las situaciones matemáticas exigen el desarrollo de cierto tipo de destrezas en procesos cognitivos y lingüístico-discursivos específicas de la disciplina (Calderón, 2009).

Entonces, siguiendo el orden de las ideas de los párrafos anteriores vemos como el discurso escolarizado (en matemáticas) representa una forma de comunicación cualitativamente diferente, ya que las palabras no actúan solo como medio de comunicación, como en el discurso cotidiano, sino como objeto de estudio (Baquero, 1996), poniendo en evidencia la necesidad de que el docente asegure en su clase el uso adecuado del lenguaje, haciendo conscientes a sus estudiantes del lenguaje que están empleando.

El principio en el método para el aprendizaje natural de las matemáticas

Durante la implementación del método para el aprendizaje natural de las matemáticas en los colegios, se hace énfasis en que los profesores usen un correcto lenguaje durante las explicaciones y actividades y que les exijan a los estudiantes ser conscientes de la forma como están usando su lenguaje durante el proceso de aprendizaje. Esta exigencia se basa en la necesidad de que haya un aprendizaje específico para hacer transiciones coordinadas entre las representaciones que provienen de sistemas semióticos diferentes (Duval, 1999), y la necesidad de hacer coordinar las representaciones internas con las representaciones externas.

Como el lenguaje hace parte esencial en la construcción del aprendizaje, ya que este nos provee de estructuras sobre las cuales se construyen los objetos y procesos de pensamiento, un aspecto muy importante es el de acompañar siempre los aprendizajes con una expresión oral cuidada y precisa, en la medida de lo posible, puesto que de esta forma podemos garantizar una mejor comprensión de los objetos que estemos trabajando (Canals, 2001). Esto es parte esencial del método. En la formación de los docentes, se les hace tomar conciencia de las palabras con que se deben referir a los procesos de pensamiento y objetos matemáticos, y se les posibilita analizar las expresiones con las que sus estudiantes hacen sus propias representaciones.

Un ejemplo que ayuda a clarificar esto es el énfasis que se da durante el aprendizaje de la agregación, en el eje de pensamiento numérico, al buen uso de los términos que representan los pasos de este proceso. Antes de que los profesores hayan participado en la implementación del método, es usual que en las sumas, ellos usen el término "llevar" cuando se presenta una agrupación de cantidades en un nivel de conteo que implica subir al siguiente nivel de conteo. Es decir, por ejemplo, cuando durante una agregación las unidades superan el número de diez, los profesores hablan de que "se lleva una", lo cual no es una forma correcta porque la mente no permite asociar ese "llevar" con el real proceso mental que se realiza, que es el de agrupar. Por eso, los profesores que implementan el método, ante esta misma situación, usan el término "agrupar", de modo que cuando hay una cantidad igual o superior de unidades, ellos (y los estudiantes) hablan de "agrupar las unidades en una decena".

Reformulación del principio 6

Después de este recorrido por las diferentes concepciones sobre el papel del lenguaje en el proceso de aprendizaje de las matemáticas, veo que la formulación del principio 6, en los siguientes términos: "El lenguaje media el proceso de enseñanza-aprendizaje, por eso las palabras relacionadas con los objetos matemáticos deben ser pensadas y dichas con exactitud", es una buena intuición, pero está incompleta puesto que faltan los elementos relacionados con la representación y el papel de la cultura como elementos relacionados con el lenguaje que permean el aprendizaje. Una formulación de este principio que incluye esos elementos podría ser:

Para garantizar efectividad en el aprendizaje de las matemáticas, tanto docentes como estudiantes deben usar correctamente el lenguaje como instrumento de mediación que permita adecuados procesos de transición entre representaciones.

CAPÍTULO 9: SOBRE EL PRINCIPIO 7

La curva de aprendizaje en matemáticas tiene una forma fractal, comenzando lentamente y acelerándose con base en la comprensión cabal de los objetos matemáticos.

Para entender lo que este principio implica es necesario tener claridad en los conceptos de aprendizaje en espiral y procesos de pensamiento.

Ideas que fundamentan el principio

En el rastreo de ideas que fundamentan este principio, procedí inicialmente hacia la categoría de organización de contenidos, en la que Bruner (1960), en oposición a los currículos existentes que presentaban una forma secuencial, muestra la necesidad de la creación de un currículo en espiral, es decir, un currículo que permita a los estudiantes ir de una tema a otro, de manera no lineal, y que les facilite retomar conceptos en diferentes momentos, sin necesidad de fijar y consolidar aprendizajes inmediatamente que se propone el tema.

Para Bruner, era de vital importancia tener la posibilidad de ir acrecentando el conocimiento, moverse por niveles e ir ampliando la apropiación de los temas, en diferentes grados de profundidad, más que dejar temas cerrados y aparentemente sólidos.

En palabras de Good y Brophy (1995), hablando sobre el currículo en espiral que propone Bruner: “Cada vez que la ‘espiral’ regresa al tema, los estudiantes ampliarán y profundizarán su conocimiento acerca de este y por consiguiente serán capaces y estarán motivados para explorarlo en un nivel más profundo” (p. 430); esto es coherente con la concepción de aprendizaje que Bruner sostiene, en la que aprender es un proceso activo en el cual los principiantes construyen las nuevas ideas o conceptos basados sobre sus conocimientos previos.

Sin embargo, las dos ideas anteriores: la de la organización de contenidos en forma de espiral y la de tener diferentes grados de profundidad en la presentación de los temas, no corresponden con el espíritu de este principio. Pero, hay otra idea que Bruner presenta y que está más orientada hacia lo que quiero dar a entender con el principio 7 y es que, para él, cuando se retoman los niveles de presentación de los temas, se potencia el conocimiento adquirido y se complejiza la capacidad del estudiante frente a la comprensión de lo que se esté trabajando, es decir que cuando una persona comprende algo, su capacidad para comprender otro asunto que esté relacionado con esto último mejora, haciendo que este segundo proceso sea más rápido y logrando que se demore menos comprendiendo algo similar.

De otro lado, basándose en el principio del paralelismo, explicado en el principio 1, el acceso a los primeros objetos matemáticos que el ser humano logró comprender se extendió por un tiempo mucho mayor que el que tomó el acceso a objetos matemáticos más recientes, debido a que en estos últimos el ser humano contaba con más conocimientos y un mayor desarrollo de sus procesos de pensamiento; esto sugiere que mientras más avanza el proceso educativo, más rápidamente se aprenden los nuevos objetos matemáticos.

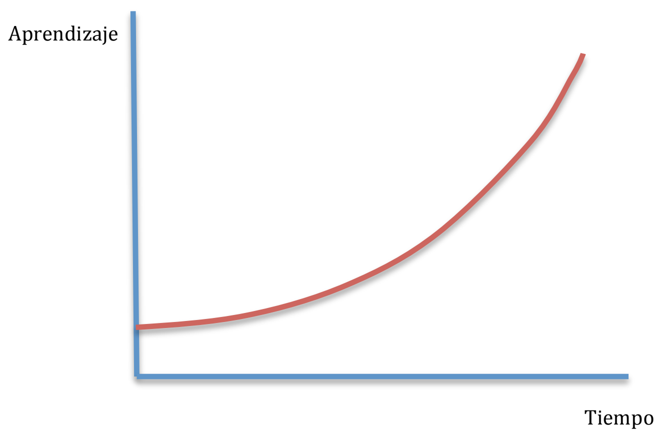
El principio en la enseñanza de las matemáticas en la educación inicial

Según Waldegg (1998), la mayoría de los currículos, sobre todo de matemáticas, considera presentaciones sucesivas de un mismo contenido a lo largo de toda la vida escolar del estudiante. Esto obedece a una concepción de un aprendizaje basado en repeticiones, revisiones y memorizaciones. Cuando el aprendizaje es significativo, no es necesario retomarlo en el mismo nivel de complejidad en cada grado escolar. Es decir, que si se logran crear currículos que privilegien la comprensión e interiorización, antes que la memorización y automatización de contenidos, se pueden generar espacios de aprendizaje con sentido que faciliten al estudiante la representación y abstracción de objetos matemáticos a través de procesos estructurados y comprensibles.

El principio en el método para el aprendizaje natural de las matemáticas

Este principio tiene dos ideas fundamentales.

La primera idea tiene que ver con la 'concavidad' de la curva de aprendizaje. Para tener una noción más clara sobre esto, conviene analizar la siguiente gráfica que, interpretando las ideas de Bruner (1960), representa un proceso de aprendizaje basado en la comprensión.

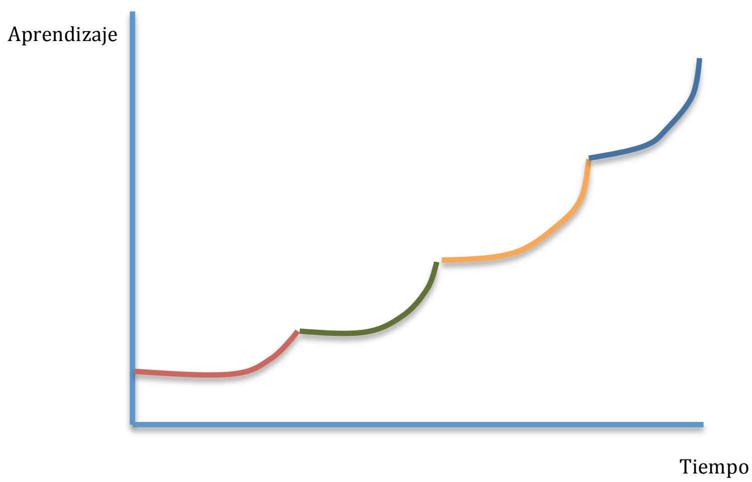


Gráfica 1. Representación de la velocidad del proceso aprendizaje de un objeto matemático.

Se puede ver que la gráfica tiene una 'concavidad hacia arriba', lo que denota que el aprendizaje se va 'acelerando'. Esto se debe a que, al iniciar el abordaje de un objeto matemático, existe cierta dificultad para alcanzar la comprensión de las ideas que se requieren, sin embargo, si el proceso es bien llevado, la comprensión cabal de estas ideas al inicio, permite que se pueda avanzar más rápidamente conforme pasa el tiempo. Esta idea subyace a lo que Bruner (1960) propone cuando dice que si se retoman los niveles de presentación de los temas (en la comprensión), se potencia el conocimiento adquirido, y aumenta la capacidad del estudiante frente a la comprensión de las nuevas ideas.

La premisa didáctica de esta primera idea que compone el principio 7 está basada en la propuesta de que, al inicio de la enseñanza de un objeto matemático, los docentes inviertan un tiempo largo en la enseñanza de los procesos matemáticos y brinden el espacio para que los niños los comprendan, y no solo los memoricen.

La segunda idea que compone al principio 7 tiene que ver con la noción de 'fractal'. Un fractal es una figura cuyos elementos constitutivos son semejantes a la totalidad de la figura, es decir, es una figura que tiene la propiedad de autosimilaridad. La idea de fractal no se cumple totalmente en este principio, sin embargo lo que se quiere expresar se puede ver en la siguiente gráfica.



Gráfica 2. Representación de la velocidad del proceso aprendizaje de un conjunto de objetos matemáticos.

Para esta idea específica no se halló un sustento específico en la literatura consultada, y si bien, si se tiene un conjunto de objetos matemáticos relacionados, la comprensión de los objetos precedentes ayudará a la comprensión de los objetos consecuentes, haciendo que el tiempo invertido para estos últimos sea menor que para los primeros, la autosimilaridad es un concepto más fuerte que no se puede probar en este caso.

Con base en estas dos ideas, desde el método para el aprendizaje natural de las matemáticas, la propuesta es iniciar lentamente para desarrollar y fortalecer estos procesos de pensamiento y luego, ya con estos estructurados, permitir que el desarrollo natural acelere los ritmos de aprendizaje.

Reformulación del principio 7

A partir de lo comprendido en el transcurso de la sustentación de los principios que fundamentan al método para el aprendizaje natural de las matemáticas, se nota que este principio tiene coherencia con las ideas propuestas por los otros principios, sobre todo lo que de él toca en términos de procesos de pensamiento matemático, caracterización de los objetos matemáticos y naturaleza psicogenética del aprendizaje. Por lo tanto, tiene sentido que este principio hable de la evolución, en términos de la diferencia de velocidad, en el aprendizaje de un objeto matemático.

De lo anterior, puedo deducir que la formulación del principio 7: "La curva de aprendizaje en matemáticas tiene una forma fractal, comenzando lentamente y acelerándose con base en la comprensión cabal de los objetos matemáticos" es correcta en intención, pero dicha formulación usa términos e ideas como 'fractal' y autosimilaridad' que no se soportan en la teoría y, por lo tanto, deben ser excluidos del principio.

De esta manera, propongo una nueva formulación de este principio en los siguientes términos:

Una adecuada comprensión de cada objeto matemático posibilita que se pueda incrementar la velocidad de comprensión de los otros objetos matemáticos relacionados.

CONCLUSIONES

En primer lugar, es importante presentar la formulación original de cada uno de los principios pedagógicos que soportan al método para el aprendizaje natural de las matemáticas en forma comparada con la formulación obtenida después del análisis de los referentes teóricos asociados:

PRINCIPIO	FORMULACIÓN ORIGINAL	FORMULACIÓN FINAL
1	Los objetos matemáticos se aprenden en el mismo orden en que la evolución histórica los ha dispuesto.	El desarrollo del pensamiento matemático individual coincide con el desarrollo del pensamiento matemático de la humanidad, en el orden y las concepciones epistemológicas de los objetos matemáticos. Y los tiempos de desarrollo de estos objetos en el individuo son proporcionales a los tiempos históricos requeridos por el género humano.
2	El aprendizaje de las matemáticas se basa en la nocionalización de los objetos matemáticos.	Una forma de aprendizaje de las matemáticas es la que está basada en la formación secuencial de nociones mediante la correcta representación de los objetos matemáticos y la asociación de formas de lenguaje propias a dichos objetos, lo cual permite hacer buenos caminos de comprensión y superación de los obstáculos epistemológicos.
3	La abstracción de los objetos matemáticos se debe hacer de forma gradual.	La abstracción de los objetos matemáticos se debe hacer de forma gradual.
4	Los pensamientos numérico y métrico están a la base del desarrollo del pensamiento matemático; estos soportan a los pensamientos variacional y geométrico, respectivamente.	
5	Los objetos matemáticos nucleares son los procesos asociados a cada eje de pensamiento matemático.	El elemento central en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas son los procesos de pensamiento asociados al desarrollo de los objetos de cada eje de pensamiento matemático.
6	El lenguaje media el proceso de enseñanza-aprendizaje, por eso las palabras relacionadas con los objetos matemáticos deben ser pensadas y dichas con exactitud	Para garantizar efectividad en el aprendizaje de las matemáticas, tanto docentes como estudiantes deben usar correctamente el lenguaje como instrumento de mediación que permita adecuados procesos de transición entre representaciones.

7	La curva de aprendizaje en matemáticas tiene una forma fractal, comenzando lentamente y acelerándose con base en la comprensión cabal de los objetos matemáticos.	Una adecuada comprensión de cada objeto matemático posibilita que se pueda incrementar la velocidad de comprensión de los otros objetos matemáticos relacionados.

Tabla 2. Comparación entre las formulaciones de los principios.

La reformulación que se hizo de algunos de los principios (incluso la eliminación del principio 4) permite mantener aún su organización en dos clases: principios de tipo didáctico y principios de tipo curricular.

Se pueden clasificar como de tipo didáctico los principios 2, 3 y 6, puesto que están más orientados a guiar las prácticas dentro del aula. Haciendo una síntesis de esos tres principios se resalta la importancia de hacer buenas representaciones de los objetos matemáticos, logrando que el proceso de abstracción de dichos objetos sea suficientemente delicado para garantizar la comprensión, y en esa medida el (buen uso del) lenguaje se convierte en una herramienta indispensable.

Los principios 1, 5 y 7 son de tipo curricular, puesto que apuntan al diseño de las enseñanzas y su ordenación dentro del currículo. Estos tres principios apuntan coherentemente, guiados por el principio biogenético, a que existen mejores organizaciones para el desarrollo de los objetos matemáticos, nacidos desde la ejercitación de los procesos de pensamiento matemático con base en las situaciones problema que van surgiéndole a los aprendices, y postulan que estas organizaciones se potencian a sí mismas haciendo más eficientes los procesos de aprendizaje.

De otra forma, los principios tienen otro tipo de relaciones entre ellos, a saber:

- El principio 2 está relacionado de manera obvia con el principio 3, ya que la abstracción es una consecuencia lógica de la representación.

- El principio 1 postula un orden de aprendizaje de los objetos matemáticos, y el principio 7 entra en una espiral con este para hablar de que este orden es eficiente.
- El principio 6 sirve de contexto operativo general para la dupla de los principios 2 y 3, ya que el proceso de representación-abstracción implica el uso del lenguaje como catalizador y como producto del proceso de aprendizaje.
- El principio 5 se constituye como una idea central dentro de la fundamentación del método para el aprendizaje natural de las matemáticas, en la medida en que indica una metodología por la que se puede alcanzar el aprendizaje de los conceptos relativos a los objetos matemáticos a partir del uso de los procesos de pensamiento matemático.
- Los principios 1 y 6, ambos de corte constructivista, muestran que el método para el aprendizaje natural de las matemáticas recoge elementos entre la forma de constructivismo propuesta por Piaget y la propuesta por Vygotsky.

Todas estas relaciones muestran que los principios crean entre sí un conjunto coherente, es decir no hay contradicciones, sino más bien se complementan entre ellos. Sin embargo, esta sustentación teórica no permite concluir que el conjunto de seis principios que quedaron al final forma una teoría completa, puesto que puede haber elementos de la educación matemática que no sean tratados con los conceptos de dicho conjunto.

El principio biogenético o de paralelismo está inserto en el corazón del método para el aprendizaje natural de las matemáticas, no solo por su influencia pedagógica en este, sino porque la forma epistemológica en la que se construyó el método, coincide totalmente con este principio. En ese sentido, el proceso de creación del método coincide con la forma de generación de conocimiento que propone el principio de paralelismo, que puedo describir volviendo a citar a Piaget & García (1989): "…the fact of fundamental importance for epistemology is that the subject, beginning with very low level prelogical structures, comes to develop rational norms that are isomorphic with those of the early days of science" (p. 5). En mi caso, a partir de unas ideas primarias e intuitivas sobre la necesidad de fundamentar la enseñanza de las matemáticas en la edad inicial, he ido fluyendo hacia una sustentación más racional y científica de dichas ideas.

Como conclusión final de este trabajo, es importante pensar en cuáles serían las características de un programa pedagógico que tuviera por fundamentos a los principios tal y como quedaron recogidos en el cuerpo de este texto. Indudablemente, el principio 1 ("El desarrollo del pensamiento matemático individual coincide con el desarrollo del pensamiento matemático de la humanidad, en el orden y las concepciones epistemológicas de los objetos matemáticos. Y los tiempos de desarrollo de estos objetos en el individuo son proporcionales a los tiempos históricos requeridos por el género humano") daría marco a todo el programa, puesto que todos los otros principios, de una u otra forma, se relacionan con este. Este hecho haría que el diseño curricular del programa pedagógico estuviera guiado por la evolución histórica de los objetos matemáticos y dispuesto en el mejor orden para la superación de los obstáculos epistemológicos.

Los principios:
5: "El elemento central en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas son los procesos de pensamiento asociados al desarrollo de los objetos de cada eje de pensamiento matemático"; y
7: "La curva de aprendizaje en matemáticas tiene una forma fractal, comenzando lentamente y acelerándose con base en la comprensión cabal de los objetos matemáticos"
se relacionan con la forma de organización de las enseñanzas, y bajo su guía el programa se caracterizaría por tener una organización coherente en los procesos de pensamiento matemático que se busca que los estudiantes desarrollen, y una estructura de los mejores objetos matemáticos que permitan desarrollar dichos procesos. Además, estos objetos estarían ordenados en cadenas coherentes, de modo que se pudiera aprovechar su estructura para potenciar la comprensión y el avance en los aprendizajes.

Los principios:

2: “Una forma de aprendizaje de las matemáticas es la que está basada en la representación de los objetos matemáticos, lo cual produce nociones que permiten hacer buenos caminos de comprensión y superación de los obstáculos epistemológicos”; y

3: “La abstracción de los objetos matemáticos se debe hacer de forma gradual”,

al tener un carácter más didáctico, ayudarían a moldear un programa en que los procesos de representación y abstracción serían piedras angulares para garantizar el mejor acercamiento a los objetos matemáticos. Los profesores que implementaran el programa sabrían reconocer las nociones y los obstáculos epistemológicos que estas generaran en cada iteración del proceso representación-abstracción, y se basarían en este conocimiento para atender las necesidades de comprensión específicas de los estudiantes.

Por último, el principio 6 (“Para garantizar efectividad en el aprendizaje de las matemáticas, tanto docentes como estudiantes deben usar correctamente el lenguaje como instrumento de mediación que permita adecuados procesos de transición entre representaciones”), serviría de directriz transversal y sería un distintivo de todas las personas que forman y se forman en el programa, pues, por medio del lenguaje, elaborarían procesos de pensamiento sistemáticos y conscientes.

Un *adendum* a las conclusiones surge cuando, como consecuencia lógica de las ideas abordadas en este trabajo, quedan abiertas diversas líneas de investigación orientadas a la comprobación experimental de estos principios; algunas de ellas ya están propuestas en la literatura y otras nacen de la misma formulación de este grupo de ideas. Algunos hechos que son susceptibles de comprobación experimental son:

- Aplicación del principio de paralelismo para objetos matemáticos específicos.

- Determinación de tiempos óptimos para el desarrollo de los objetos matemáticos, según la etapa de maduración cognitiva de los aprendices y las características de los objetos matemáticos.
- Determinación de las secuencias representación-abstracción más adecuadas para objetos matemáticos específicos.
- Establecimiento de nuevos conjuntos de objetos matemáticos no tradicionales que permitan desarrollar los mismos o nuevos procesos de pensamiento matemático.
- Profundización en los obstáculos epistemológicos asociados a la relación entre procesos de pensamiento matemático y objetos matemáticos.

REFERENCIAS

Alsina, A. (2011a). *Educación matemática en contexto: de 3 a 6 años*. Barcelona: ICE Universitat de Barcelona & Horsori.

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., & Gómez, P. (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Baquero, R. (1996). *Vygotsky y el aprendizaje escolar* (Vol. 4). Buenos Aires: Aique.

Barrantes, H. (2006). Los obstáculos epistemológicos. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*. Año 1.

Bishop, A. J. (1999). *Enculturación matemática: la educación matemática desde una perspectiva cultural* (Vol. 49). Editorial Paidós.

Blumer, H. (1982). *El interaccionismo simbólico: Perspectiva y método*. Barcelona: Hora.

Branford, B., & Bidder, G. P. (1908). *A study of mathematical education: Including the teaching of arithmetic*. Gloucestershire: Clarendon Press.

Brousseau, G. (2000). Educación y Didáctica de las matemáticas 12. *Educación Matemática*, 2(1), 5-38.

Bruner, J. (1977). *The process of education*. 1960. Cambridge, MA: Harvard UP.

Bruner, J. (1984). El desarrollo de los procesos de representación. En Linaza. J. (1984). *Acción, pensamiento y lenguaje*. Madrid: Editorial Alianza psicológica.

Bruner, J. (1984). Juego, pensamiento y lenguaje. En Linaza. J. (1984). *Acción, pensamiento y lenguaje*. Madrid: Editorial Alianza psicológica.

Calderón, D. (2009). El lenguaje en las matemáticas escolares. *Perspectivas en la didáctica de las matemáticas. Publicación del Énfasis en Educación Matemática. Doctorado Interinstitucional en Educación.* Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Canals, M. A. (2001). *Vivir las matemáticas*. Barcelona: Octaedro.

Carretero, M. (2001). *Constructivismo y educación.* Buenos Aires: Grupo editorial Aique.

Cid, E., Godino, J. D., & Batanero, C. (2003). *Sistemas numéricos y su didáctica para maestros*. Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

Clements, D. & Sarama, J. (2009). *Learning and teaching early mathematics.* New York: Routledge.

Cortés, G. & García, S. (2003). *Investigación documental. Guía de autoaprendizaje, apuntes y ejercicios*. México: Secretaría de educación pública.

D'Amore, B. (2001). *Una contribución al debate sobre conceptos y objetos matemáticos*. Barcelona: Uno.

D'Amore, B., & Godino, J. D. (2007). El enfoque ontosemiótico como un desarrollo de la teoría antropológica en didáctica de la matemática. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 10(2), 191-218.

D'Amore, B. D., & Sandri, P. (1999). Imagina que eres... Indagación sobre el uso de la lengua común en contexto matemático en la escuela media. *Revista EMA*, *4*(3), 207-231.

Damerow, P. (1996b). Philosophical and Pedagogical Remarks on the Concept "Abstract". Abstraction and Representation (Vol. 175, pp. 71-86): Springer Netherlands.

De Guzmán, M. (1992). *Tendencias innovadoras en educación matemática*. Olimpiada Matemática Argentina.

De Guzmán, M. (2001). *Tendencias actuales de la educación matemática*. Barcelona: Sigma.

De Zubiría, M., Brito, J. G., Coral, L., Molina, R., Otálora, M., Sarmiento, B. G., & Días, N. (2002). *Fundamentos filosóficos y epistemológicos de la pedagogía conceptual*. Bogotá: Fundación Internacional de Pedagogía Conceptual.

Dickson, L., Brown, M., & Gibson, O. (1991). *El aprendizaje de las matemáticas*. Buenos Aires: Ministerio de Educación y Ciencia.

Díez, C., Pantano, L., & Camargo, S. (2012). *El desarrollo del pensamiento matemático en la primera infancia*. Bogotá: Fundación para el desarrollo educativo y pedagógico.

Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. Springer.

Duque Escobar, G. (2007). *Cultura y Astronomía*. Universidad Nacional de Colombia, sede Manizales.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos de aprendizajes intelectuales*. Cali: Universidad del Valle.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. En *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 61: 103–131.

Furinghetti F., Radford L. (2002). Historical conceptual developments and the teaching of mathematics: from philogenesis and ontogenesis theory to classroom practice. English L. (Ed.). *Handbook of International Research in Mathematics Education*, 631-654. Hillsdale: Erlbaum.

Freudenthal, H. (1986). *Didactical phenomenology of mathematical structures* (Vol. 1). Springer.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education*. Dordrecht: Kluwer AC.

García, R., & Piaget, J. (1989). Lógica y Epistemología Genética. Piaget, J.; García, R. *Hacia una lógica de significaciones*. México: Gedisa.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en didactique des Mathématiques*, 22(2/3), 237-284.

Godino, J. D. (2003). *Marcos teóricos de referencia sobre la cognición matemática*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Godino, J. D., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en didactique des Mathématiques*, 14(3), 325-355.

Gómez, L. (2011). Un espacio para la investigación documental. *Revista Vanguardia Psicológica Clínica Teórica y Práctica*, 1(2), 226-233.

Gómez, P. (1996). Una comprensión de la comprensión en matemáticas. *Revista EMA*, 1(3), 233-243.

Good, T. L., & Brophy, J. E. (1995). *Contemporary educational psychology*. Longman/Addison Wesley Longman.

Gutiérrez, A. (1991). *Área de Conocimiento: Didáctica de la Matemática*. (pp. 105-148) Madrid: Síntesis.

de Guzmán Ozámiz, M. (2001). Tendencias actuales de la educación matemática. *Sigma: revista de matemáticas=matematika aldizkaria*, (19), 5-25.

Hiebert, J., & Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. In D. A. Grouws (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 65-98). New York: Macmillan.

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (1998b). *Lineamientos curriculares en matemáticas*. Bogotá.

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2006). *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas*. Bogotá.

Morales, O. A. (2003). Fundamentos de la Investigación Documental y la Monografía. En N. Espinoza, & Ó. Rincón, *Manual para la elaboración y presentación de la monografía*. Mérida, Venezuela.

Moreno, L. (1999). Acerca del conocimiento y sus mediaciones en la educación matemática. *Revista EMA*, 4(2), 103-116.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM. (Trad. Castellana, Principios y estándares para la educación matemática. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales, 2003).

Ordóñez, C. L. (2004) Pensar pedagógicamente desde el constructivismo. *Estudios Sociales-Revista* (19). México: CIAD.

Orozco-Hormaza, M.. (2003). Formación de docentes de primaria en la comprensión del sistema de notación en base diez. *Revista EMA*, 8(1), 3-29.

Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (2000). *Measuring student knowledge and skills. A new framework for assessment*. París: OCDE.

Piaget, J., & Inhelder, B. (1969). *The psychology of the child*. New York: Basic Books.

Piaget, J. (1973). El lenguaje y las operaciones intelectuales. Piaget J. et al. *Estudios de psicología genética.* Buenos Aires: Emecé.

Piaget, J. (1983). *Génesis de las estructuras lógicas elementales: clasificaciones y seriaciones*. Buenos Aires: Guadalupe.

Perkins, D. (1999). ¿Qué es la comprensión? La enseñanza para la comprensión. En Stone Wiske, M. (1999). *La enseñanza para la comprensión*. Buenos Aires: Paidos.

Posada, M. E. (2005). *Interpretación e implementación de los estándares básicos de matemáticas*. Gobernación de Antioquia. Secretaría de Educación para la Cultura.

Puig, P. (1960). *Decálogo de la didáctica matemática media*. Madrid: Publicaciones de la revista "Enseñanza Media".

Radford, L. (2004). Sensible things, essences, mathematical objects, and other ambiguities. *La Matematica e la sua didattica*, Nº 1, 4-23.

Radford, L. & Empey H. (2007). Culture, knowledge and the self: mathematics and the formation of new social sensibilities in the Renaissance and Medieval Islam. *Revista Brasileira de História da Matemática.* Especial Nº 1 (pp. 231-257).

Rico, L. (1995b). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. En Kilpatrick, J., Rico, L., Gómez, P. (Eds.), *Educación Matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historia* (pp. 69-108). Bogotá: una empresa docente.

Rico, L. (2010). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. *PNA*, 4(1).

Rivero García, M. M. (2012). *Teoría genética de Piaget: constructivismo cognitivo*.

Rojas, P. (2014). *Articulación de saberes matemáticos: representaciones semióticas y sentidos*. Fondo de publicaciones U. Distrital Francisco José de Caldas. Bogotá.

Savery, J. R. & Duffy, T. M. (1996). Problem based learning: an instructional model and its constructivism framework. En B. G. Wilson (Ed.).

Constructivist learning environments: case studies in instructional design. New Jersey: Educational technology publications.

Schubring, G. (2011). Conceptions for relating the evolution of mathematical concepts to mathematics learning—epistemology, history, and semiotics interacting. *Educational Studies in Mathematics*, 77(1), 79-104. doi: 10.1007/s10649-011-9301-x

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational studies in mathematics*, 22(1), 1-36.

Sfard, A. (1995). The development of algebra: Confronting historical and psychological perspectives. *The Journal of Mathematical Behavior*, 14(1), 15-39.

Sfard, A., Yackel, E., Gravemeijer, K., & Cobb, P. (2011). *A Journey in Mathematics Education Research*. Springer.

Skemp, R. R. (1987). *The psychology of learning mathematics*. Psychology Press.

Sierpinska, A. (1994). *Understanding in mathematics*. Basingstoke, UK: Falmer.

Simon, M. A., & Schifter, D. (1991). Towards a constructivist perspective: An intervention study of mathematics teacher development. *Educational Studies in Mathematics*, 22(4), 309-331.

Spelke, E. S., & Kinzler, K. D. (2007). Core knowledge. *Developmental science*, 10(1), 89-96.

Steffe, L. (1991). Cómo construye el niño la significación de los términos aritméticos: Un problema curricular. *Cuadernos de Psicología*, 11 (1), 105-162.

Tall, D. (1991). *Advanced mathematical thinking* (Vol. 11): Springer.

Tornatore L. (1974), *Educazione e conoscenza*. Torino, Loescher.

Vygotsky, L. (1978). *Mind in society*. Cambridge, MA.: Harvard University Press.

Vygotsky, L. S., Kozulin, A., & Abadía, J. P. T. (1995). *Pensamiento y lenguaje*. Barcelona: Paidós.

Waldegg, G. (1998). Principios constructivistas para la educación matemática. *Revista EMA*, 4(1), 15-31.

Wertsch, J. V. (1993). *Voces de la mente: un enfoque sociocultural para el estudio de la acción mediada*. Visor.