# INTRODUCCIÓN A LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA UNIVERSITARIA:

*Una guía para la enseñanza del cálculo diferencial*

Por:

Juan Pablo Mejía Ramos

Tesis propuesta para obtener el grado de:

Matemático

Universidad de Los Andes

Bogotá, Julio de 2003

## TABLA DE CONTENIDOS


Pág.

**0. INTRODUCCIÓN** .......... 1

**1. LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA** .......... 9

**1.1 Historia de la educación matemática** .......... 10

**1.2 La reforma en la enseñanza del cálculo** .......... 16

**1.3 Conclusiones** .......... 21

**2. EDUCACIÓN MATEMÁTICA UNIVERSITARIA** .......... 22

**2.1 Antes de clase: un marco teórico** .......... 24

**2.1.1 El objetivo** .......... 26

**a. Transferencia** .......... 27

**b. Meta-cognición** .......... 29

**c. Percepción del área de estudio** .......... 31

**2.1.2 Una teoría de aprendizaje** .......... 33

**a. El papel del conocimiento previo** .......... 36

**b. Obstáculos** .......... 39

**2.2 A la hora de dictar clase: un estudio de algunas estrategias** .......... 42

**2.2.1 La actitud del profesor** .......... 42

**a. Entusiasmo** .......... 44

**b. Buen humor** .......... 44

**c. Honestidad y responsabilidad** .......... 45

**d. Altas expectativas** .......... 45

e. Compromiso........................................................................................ 46

2.2.2 Las estrategias tradicionales............................................................................. 47

a. El formalismo matemático.............................................................................. 47

b. La clase magistral.......................................................................................... 53

2.2.3 Algunas estrategias alternativas....................................................................... 59

a. Resolución de problemas................................................................................ 59

b. El uso de tecnologías en clase......................................................................... 71

2.3 A la hora de evaluar................................................................................................ 83

2.3.1 Características de una evaluación efectiva y formativa................................ 84

a. Los objetivos como punto de referencia....................................................... 84

b. Retroalimentación continua........................................................................... 86

c. Motivación....................................................................................................... 89

2.3.2 Herramientas de evaluación............................................................................. 91

a. Discusión en clase........................................................................................... 91

b. Conversaciones por fuera del salón de clase............................................. 92

c. Trabajo en clase y laboratorios computacionales..................................... 93

d. Tareas............................................................................................................... 95

e. *Quizzes* y *Gateway tests*.................................................................................. 96

f. Exámenes.......................................................................................................... 98

g. Proyectos......................................................................................................... 100

h. Encuestas......................................................................................................... 102

2.3.3 Resultados de la evaluación............................................................................ 102

a. La calificación................................................................................................ 103

**b. El cuaderno de bitácora** ........ 104

**2.4 Conclusiones** ........ 105

**3. EDUCACIÓN MATEMÁTICA EN LA ENSEÑANZA DEL CÁLCULO DIFERENCIAL** ........ 108

**3.1 Funciones** ........ 109

**3.1.1 *f* (*x*) = obstáculo** ........ 110

**3.1.2 La *máquina función:* una raíz cognitiva** ........ 113

**3.1.3 Tecnología y funciones** ........ 117

**3.1.4 El diccionario de funciones** ........ 120

**3.2 Límites y Derivadas** ........ 123

**3.2.1 El lenguaje común como obstáculo** ........ 124

**3.2.2 La rectitud local: una raíz cognitiva** ........ 128

**3.2.3 Solución de problemas** ........ 130

**3.3 Conclusiones** ........ 134

**Bibliografía** ........ 135

# 0. INTRODUCCIÓN

A lo largo de mis estudios universitarios he conocido muchos investigadores quienes, con un conocimiento superficial del quehacer pedagógico, ejercen la docencia como parte de su profesión. Basta examinar su preparación académica para caer en la cuenta de que, en general, el profesor de nuestras universidades está mucho más cerca a la investigación de la materia que enseña, que a la investigación en pedagogía. Como estudiante de matemáticas he advertido que el área de las matemáticas no es ajena a esta situación. ¿Es la formación en pedagogía un accesorio para el estudiante que desea dictar clases de matemáticas en una universidad?

> *Todo matemático es profesor de matemáticas, así no le guste mucho, pero no todo profesor de matemáticas es un matemático.* (Carlos Ruiz. Citado en Sánchez, 1994)

Esta afirmación del matemático y profesor de matemáticas Carlos Ruiz S., quien obtuvo el Premio Nacional de Matemáticas en 1993, presenta una popular creencia universitaria: para dictar una clase de matemáticas a nivel universitario es suficiente tener un amplio conocimiento de las matemáticas. Es innegable que esta condición es y debe continuar siendo necesaria: el trabajo de enseñar matemáticas a nivel universitario no puede quedar en manos de personas que carezcan de un entendimiento claro de esta rama del conocimiento. En este sentido, las instituciones dedicadas a la formación de nuevos profesores universitarios de matemáticas deben incluir en sus programas de estudio una extensa lista de diversos cursos de matemáticas. Sin embargo, ¿es realmente *suficiente* poseer un conocimiento profundo (digamos incluso extraordinario) de las matemáticas para poder enseñarlas en una universidad? El recuerdo de un contraejemplo (un buen matemático, pero inefectivo profesor de matemáticas) me lleva a estudiar en detalle la justificación dada por Ruiz. Para Carlos Ruiz, un *matemático* no es quien tiene un cierto conocimiento en el área de las matemáticas, sino aquel que ha creado matemáticas, quien investiga, "el que aporta algo nuevo"; mientras que "el *profesor de matemáticas* es el que enseña matemáticas sin necesidad de haber aportado algo creativo a la matemática" (Sánchez, 1994. Itálicas no hacen parte de la cita original). Bajo estas definiciones, la cita se presenta incuestionable: de una u otra manera, los investigadores enseñan su conocimiento, mientras que no todo el que enseña se dedica a la investigación.

De esta manera, es fácil ver que la inconsistencia entre la cita de Ruiz y el contraejemplo presentado desaparece al considerar la indudable diferencia existente entre una persona que puede exponer un tema de matemáticas y un profesor de matemáticas efectivo. Así, aunque es cierto que todo matemático puede llegar a enseñar matemáticas, no todo matemático es necesariamente un buen profesor de matemáticas. El problema es que bajo la definición de Ruiz, el conjunto de *profesores de matemáticas* contiene muchas personas dispuestas a explicar algún tema relacionado con matemáticas, sin importar qué tan bien lo hacen. Sin lugar a dudas, no son estos los *profesores de matemáticas* que queremos en nuestras instituciones de educación superior y me preocupa la posibilidad de que una definición pobre de *profesor de matemáticas* esté respaldando una formación pobre de nuestros futuros profesores de matemáticas. Dado que la enseñanza de las matemáticas a nivel universitario recae en manos de matemáticos, ¿no deberían entonces los futuros matemáticos preocuparse por el estudio de la enseñanza de las matemáticas?

En el prefacio de su introducción a la enseñanza de las matemáticas, Steven Krantz señala que los matemáticos (él incluido) han justificado una respuesta negativa a esta última pregunta haciendo uso de los siguientes argumentos:

i) *Saber enseñar no es importante.*

ii) *Los componentes de una buena enseñanza son obvios.*

iii) *El profesor novato ha pasado toda una vida sentado frente a profesores y observando distintos estilos de enseñanza, tanto buenos como malos; con seguridad, por tanto, esta persona ha inferido lo que define un profesor efectivo.* (Krantz, 1993. Original en inglés)

Para muchos investigadores, saber enseñar no tiene gran importancia y su efectividad como profesores los tiene sin cuidado. Están convencidos de que a nivel universitario, a diferencia de niveles de educación inferiores como lo son la primaria y el bachillerato, no es indispensable un amplio conocimiento en pedagogía para poder dictar una buena clase de matemáticas. En esta visión de la educación superior, la universidad es una institución educativa en la cual el estudiante no recibe tanta atención por parte del profesor. Este último simplemente aclara dudas y sirve de guía en un proceso de aprendizaje que se presenta como responsabilidad casi exclusiva del estudiante. En otras palabras, si bien es cierto que los matemáticos no poseen una preparación académica en la enseñanza de las matemáticas, también es cierto que dicha preparación no es necesaria para ejercer la docencia universitaria. Sin embargo, esta visión de la educación superior está lejos de la realidad. El estudiante universitario marcha hacia la comprensión de un conocimiento matemático avanzado que, en la gran mayoría de los casos, suele ser difícil de alcanzar sin un buen guía. Incluso en esta visión idealista de la educación superior, el profesor universitario tiene la necesidad de enfrentarse a problemas propios de la enseñanza de las matemáticas. Por ejemplo, por pasiva que sea su intervención en el proceso enseñanza-aprendizaje, el docente no deja de tener la necesidad de evaluar el rendimiento de sus estudiantes. Aprender a utilizar la evaluación eficazmente, como herramienta fundamental del proceso educativo de sus estudiantes, no suele suceder inadvertidamente.

La segunda opinión señalada por Krantz sugiere que este conocimiento sobre la enseñanza de las matemáticas puede deducirse fácilmente y de una manera intuitiva. Por tanto, aunque se acepta la importancia de adquirir cierto conocimiento y destreza en la enseñanza de las matemáticas, no se considera necesario hacerlo a través de un estudio formal de la educación matemática. En pocas palabras, se sugiere que una manera de aprender a enseñar, es enseñando. Es innegable que la experiencia profesional es una de las fuentes de conocimiento más significativas en el aprendizaje de la enseñanza. Sin embargo, no podemos permitir que sea la única. Reducir nuestro conocimiento en educación matemática a las experiencias personales de cada profesor, nos priva de un acercamiento científico al problema de mejorar la educación matemática en nuestras universidades.

Finalmente, la creencia de que se aprende a enseñar matemáticas al estudiarlas constituye una tercera razón por la cual se aleja al futuro matemático del estudio formal de la enseñanza de las matemáticas. Por un lado, esta creencia sugiere que los cuestionamientos que pudieran llegar a surgir durante la enseñanza de las matemáticas, encuentran respuesta en el buen entendimiento de las mismas. Así, los matemáticos no tendrían necesidad de estudiar acerca de la enseñanza de las matemáticas, pues ellos las conocen mejor que nadie. Sin embargo, no es difícil caer en la cuenta de que esto no es siempre cierto: saber algo no significa saber enseñarlo. El estudio de las matemáticas no nos enseña, por ejemplo, didácticas que nos ayuden a esclarecer los abstractos planteamientos matemáticos, o métodos para tratar con las dificultades que puedan tener algunos estudiantes con el entendimiento de conceptos particulares. Por otra parte, esta creencia indica que las múltiples clases de matemáticas atendidas por el matemático desarrollan en él un buen criterio para distinguir entre una buena y una mala clase de matemáticas. Se infiere entonces que el matemático conoce los elementos que conforman una clase efectiva de matemáticas. De nuevo, una cosa es presenciar una excelente clase y otra muy distinta es saber darla.

Así, me parece cada vez más claro que el dominio de las matemáticas no es condición suficiente para poder enseñarlas en una institución de educación superior, y que la educación matemática no es un accesorio para quien desea dictar clases de matemáticas en una universidad. En un país como Colombia, en el cual se evidencia una urgente necesidad por mejorar la calidad de la educación superior ofrecida, aquellas instituciones que se abanderan de hacerse partícipes de este proceso de educar a futuros profesores universitarios de matemáticas, tienen la responsabilidad de entregarles las herramientas necesarias para hacer de ellos excelentes profesores de matemáticas. Esto parece ser especialmente urgente en el caso particular de las matemáticas, en el que aún hoy un gran porcentaje de sus graduandos terminan vinculados a la academia. Dado el importantísimo papel que desempeña la educación superior en el desarrollo de nuestra sociedad, considero preocupante que nuestra academia esté organizada de tal manera, que un profesor pueda llegar a dictar su primera clase sin haber tenido la oportunidad de hacerse un cuestionamiento formal acerca del proceso educativo en general.

Este estudio surge a partir de dicha preocupación y tiene como objetivo principal presentar la educación matemática, disciplina que estudia la enseñanza y el aprendizaje de esta importante rama del conocimiento, a estudiantes de matemáticas (y otros principiantes del quehacer pedagógico) que se encuentren próximos a participar en la enseñanza de un curso universitario de matemáticas. He decidido contextualizar esta introducción a la educación matemática en un curso de cálculo diferencial. Debido a su temprana aparición en los programas de estudio de un gran número de estudiantes universitarios, la enseñanza del cálculo diferencial representa un importante reto para la academia actual. Es con este curso que cientos de estudiantes universitarios son introducidos a las matemáticas como un lenguaje para interpretar y modelar problemas de un sinnúmero de campos de estudio. Así, este primer curso de cálculo diferencial suele ser la puerta de entrada al mundo de las matemáticas universitarias, y como tal, demanda una particular atención por parte de aquellas personas que tienen como labor enseñar sus temas, su importancia y utilidad.

Por su parte, para el estudiante de matemáticas es de suma utilidad tener algún conocimiento acerca de la enseñanza del cálculo diferencial. Así como para el estudiante promedio este curso constituye la puerta de entrada a las matemáticas universitarias, para una gran cantidad de estudiantes de matemáticas es la puerta de entrada a la enseñanza de las matemáticas en una institución de educación superior. Este curso es uno de los primeros en el programa de estudios de la carrera de matemáticas, y por tanto uno de los primeros cursos que un estudiante de matemáticas domina con la destreza suficiente para incursionar en el quehacer pedagógico, ya sea como monitor, asistente, o profesor de la materia.

Para culminar esta introducción, presentaré un esquema del proyecto, un temario de lo que el lector puede esperar encontrar en las siguientes páginas.

En la primera parte haré una presentación de la educación matemática y la historia de esta disciplina. El lector interesado en la historia de la investigación en educación matemática encontrará en el primer numeral de esta primera parte una introducción al tema. Para este lector, recomiendo una lectura detallada de los dos excelentes artículos en los que está basada: Kilpatrick (1992) y Artigue (1995). El siguiente numeral, titulado *La reforma en la enseñanza del cálculo*, narra un evento reciente de la historia de la investigación en educación matemática:

el surgimiento de un movimiento que estudia formas novedosas de enseñar el cálculo; formas que se alejan un poco del curso tradicional de matemáticas e integran nuevas tecnologías al salón de clase.

**2.1 MARCO TEÓRICO**

- **2.1.1 Objetivos**
- **2.1.2 Teoría de aprendizaje**

**2.3 EVALUACIÓN DE LA INSTRUCCIÓN**

- **2.3.1 Aspectos de una evaluación eficaz y formativa**
- **2.3.2 Herramientas de evaluación**
- **2.3.3 Resultados de la evaluación**

**2.2 INSTRUCCIÓN**

- **2.2.1 Actitud del profesor**
- **2.2.2 Estrategias tradicionales**
- **2.2.3 Estrategias alternativas**

La segunda parte de este proyecto presenta una estructura simple que ayudará al futuro docente a desarrollar su propia técnica de enseñanza. Primero se conforma un marco teórico que estudia los objetivos de la enseñanza del cálculo, así como algunas de las más importantes teorías de aprendizaje. Segundo, se utiliza este marco teórico para evaluar las estrategias tradicionales de enseñanza y diseñar nuevas estrategias que, con base en la teoría de aprendizaje adoptada, permitan alcanzar los objetivos propuestos. Por último, se presentan buenas técnicas de evaluación que permitan determinar la efectividad de las estrategias de enseñanza utilizadas y provean un criterio para modificarlas de una manera acorde con las particularidades del curso en cuestión. A su vez, una evaluación eficaz permitirá la sustentación y perfeccionamiento del marco teórico, con lo cual se retorna a la primera etapa de la estructura y se cierra un ciclo que patrocina una evolución eficiente (y controlada) del curso.

Finalmente, con el objetivo de que el lector tenga la oportunidad de ver cómo se aplican las ideas desarrolladas en la segunda parte, concluiré este proyecto con la presentación de aplicaciones de esta teoría en la enseñanza y el aprendizaje de algunos de los más importantes conceptos del cálculo diferencial.

# 1. LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

¿Qué es la educación matemática? Esta es una pregunta que toda introducción a esta disciplina debe responder. Ya que hacerlo no suscita discusión alguna, empezaré por presentar la definición y dedicaré esta primera parte a tratar temas más específicos e interesantes. Entenderemos por educación matemática aquella disciplina que se encarga de responder interrogantes acerca de los contenidos matemáticos que enseñamos en nuestras instituciones educativas, la forma como estos contenidos son enseñados y el proceso de aprendizaje que sigue a dicha enseñanza. Así, la investigación en educación matemática adelanta estudios metódicos que guían la estructuración de los programas que rigen diversos cursos de matemáticas, y a su vez proponen didácticas que facilitan el aprendizaje a los estudiantes de dichos cursos. La educación matemática es pues una disciplina que se ocupa de la enseñanza y del aprendizaje de las matemáticas. Aunque simple y general, esta definición es suficiente para el propósito de este proyecto.

¿Cuándo comienza a ejercerse?, ¿quiénes fueron los pioneros en esta área del conocimiento? y ¿cómo se ha desarrollado desde sus orígenes? son algunas de las preguntas que responderé en el primer numeral de esta primera parte. En el segundo numeral me concentraré en el desarrollo de la educación matemática en el campo de la enseñanza del cálculo diferencial. Presentaré algunos de los cambios más importantes en la enseñanza de esta materia ocurridos en las últimas dos décadas del siglo pasado, concentrándome en la reciente *reforma del cálculo*. Finalmente, terminaré esta primera parte con algunas conclusiones.

## 1.1 Historia de la educación matemática

"***Menón:*** *Sí, Sócrates; pero ¿qué quieres decir con eso de que no aprendemos sino que lo que llamamos aprendizaje es reminiscencia? ¿Podrías enseñarme que eso es así?*

***Sócrates:*** *Ya antes te dije, Menón, que eres astuto, y ahora me preguntas que si puedo enseñarte yo, que afirmo que no hay enseñanza sino recuerdo, para que inmediatamente me ponga yo en manifiesta contradicción conmigo mismo.*

***Menón:*** *No, por Zeus, Sócrates, no lo he dicho con esa intención, sino por hábito; ahora bien, si de algún modo puedes demostrarme que es como dices, muéstramelo.*

***Sócrates:*** *Pues no es fácil y, sin embargo, estoy dispuesto a esforzarme por ti. Pero llámame de entre esos muchos criados tuyos a uno, al que quieras, para hacértelo comprender en él.*

***Menón:*** *Muy bien. Ven aquí.**

***Sócrates:*** *¿Es griego y habla griego?*

***Menón:*** *Por supuesto que sí y nacido en mi casa.*

***Sócrates:*** *Pues fíjate bien en cuál de las dos cosas te parece, si recuerda o aprende de mí.*

***Menón:*** *Así lo haré.*

***Sócrates:*** *Dime entonces, chico, ¿tú sabes que un cuadrado es una figura así? ***

***Esclavo:*** *Sí.*

* Llama a un esclavo

** Sócrates le hace ver una figura que ha trazado en el suelo" (Platón, 1958)

Tratando de remontarme a la más antigua aparición de un cuestionamiento metódico acerca de la forma como aprendemos matemáticas, encontré este diálogo de Platón, escrito en el siglo V antes de esta era. En *El Menón*, Platón utiliza la identidad de Sócrates para explicar una de sus ideas más importantes: el ser humano no aprende cosas nuevas, simplemente recuerda aquello que ha olvidado a lo largo de su existencia. Para ilustrarla, Platón puso a Sócrates a 'sacarle las verdades' a uno de los esclavos de Menón. Al leer el diálogo por completo, el lector queda con la impresión de que Sócrates está constantemente guiando al esclavo hacia las respuestas correctas y que de los descubrimientos matemáticos de una persona no se puede concluir el innatismo del conocimiento[1]. Sin embargo, lo que me interesa de este diálogo es que Sócrates (Platón) elige las matemáticas para ejemplificar su idea. El conocimiento que se intenta obtener del esclavo es un conocimiento geométrico: para obtener un cuadrado con dos veces el área de un cuadrado dado, simplemente utilizamos la diagonal del cuadrado dado como lado del nuevo cuadrado. Así, Platón responde una pregunta acerca de la forma como se enseña y se aprende la geometría, y al hacerlo se convierte en uno de los primeros en reflexionar sobre educación matemática.

Aunque podemos rastrear sus orígenes por lo menos hasta la época de Platón, no fue sino a finales del siglo XIX que la educación matemática se estableció formalmente en los centros de educación superior y se empezaron a especializar los primeros profesionales de esta disciplina. Así, aunque la primera cátedra en educación se estableció en la Universidad de Halle (Alemania) en 1779; aún en 1910 el número de personas en las universidades alemanas con responsabilidad docente en educación era sólo de trece (Kilpatrick, 1992)[2]. De tal manera, podríamos decir que la educación matemática como tal, surge a partir de un movimiento académico más general (la enseñanza en educación), se independiza a finales del siglo XIX y se establece como un campo de estudio a lo largo del siglo XX. A pesar de que el desarrollo de la educación matemática fue distinto en diferentes países, esta afirmación describe con bastante precisión el desarrollo de dicha disciplina en algunas de las academias más influyentes de la época.

[1] Jaime Ramos, profesor de filosofía de la Universidad Nacional de Colombia y de la Universidad de Los Andes, publicó en la revista *Ideas y Valores* un artículo titulado “Reflexiones sobre el innatismo”. Para el lector interesado en este tema, esta es una lectura recomendada.

[2] Un estudio completo acerca del nacimiento y desarrollo de la educación matemática puede encontrarse en *History of research on mathematics education* del profesor Jeremy Kilpatrick. Kilpatrick, matemático de la Universidad de Stanford, está actualmente vinculado a la Universidad de Georgia y es una de las máximas autoridades norteamericanas en educación matemática y su historia.

En Estados Unidos, por ejemplo, algunas universidades comenzaron a ofrecer cursos en educación a mediados del siglo XIX y la primera dotación de profesorado permanente en el área de educación se estableció en 1873, en la Universidad de Iowa. Asimismo, la fundación del Centro de Formación de Profesores de New York (*Teacher's College*), y su posterior integración a la Universidad de Columbia en el año de 1890, estableció un precedente importante en la vinculación de institutos de formación de profesorado a universidades del momento. *Teacher's College* se convirtió en uno de los primeros centros educativos del continente en diferenciar la educación matemática como un campo de estudio independiente de la enseñanza en educación.

Al mismo tiempo, en Alemania, los estudiantes universitarios que se preparaban para enseñar matemáticas en los *Gymnasiums*, comenzaban a recibir entrenamiento práctico en la enseñanza de las matemáticas. Uno de los pioneros en iniciar cursos universitarios de metodología pedagógica fue Felix Klein[3], el cual no sólo introdujo cursos en varias universidades sino que también dirigió la primera investigación doctoral en educación matemática, que fue defendida en Gotinga en 1911 por Rudolpf Schimmack (Kilpatrick, 1992).

Además de participar en la formación de nuevos profesores de matemáticas en Alemania, Klein estuvo involucrado en las reformas educativas de este país. Para él, las matemáticas debían ser enseñadas dentro del contexto de los distintos campos en los cuales encuentran aplicación. Así lo hizo saber en las propuestas que presentó como catedrático de la universidad de Gotinga, a la cual se incorporó en el año de 1885. También trabajó por nivelar los cursos de

[3] Además de sus significativos aportes a la educación matemática, Felix Klein fue un importante matemático alemán, conocido principalmente por sus trabajos de aplicación de la teoría de grupos a la geometría. En 1872, a la temprana edad de 23 años, Klein publicó su famoso *Programa de Erlangen*, obra en la cual expone una nueva forma de estudiar la geometría. Su idea consiste en considerar toda geometría como el estudio de las propiedades invariantes bajo ciertas transformaciones. Así por ejemplo, la geometría métrica sería el estudio de las propiedades invariantes de las figuras bajo las transformaciones que no cambian las distancias entre puntos. De esta manera consigue unificar toda la geometría a partir de la teoría de grupos.

matemáticas que se dictaban en los diferentes institutos de educación superior de la Alemania de entonces, así como por mejorar la enseñanza de las matemáticas a nivel de la secundaria.

Klein no fue el único académico que trabajó en este campo. Junto a los matemáticos, estudiosos de la nueva disciplina de la sicología harían importantes aportes a la naciente educación matemática

Mientras que el interés de los matemáticos por los procesos de enseñanza y aprendizaje de esta materia consistía en una preocupación por conservar la enseñanza de las matemáticas en la primaria y la secundaria[4]; para los sicólogos, la educación matemática representaba un campo que prometía respuestas a algunas de sus propias preguntas. Por ejemplo, la preocupación de la sicología del siglo XIX por lograr *medir* científicamente el conocimiento de las personas, fue uno de los vínculos que llevó a algunos sicólogos a incursionar en el campo de la educación matemática. De esta manera, la ineficacia de estudios en *frenología* y *craniometría*[5] de académicos como Paul Möbius (nieto del matemático August Möbius), desembocó en un movimiento a favor de los *tests*, o pruebas escritas, que estuvieron estrechamente relacionadas con la evaluación del aprendizaje de contenidos matemáticos.

En el año de 1908, durante el IV Congreso de Matemáticas de Roma, se propuso la conformación de una organización que tuviera como objetivo primordial el estudio de la enseñanza de las matemáticas. Así, la *Comisión Internacional para la Enseñanza de las Matemáticas* (que sería presidida por el mismo Klein hasta el año de 1925) impulsó dramáticamente el trabajo académico en la educación matemática de principios de siglo. Matemáticos como Henri Poincaré, y psicólogos de la talla de Alfred Binet participaron

[4] A finales del siglo XIX, opiniones que resaltaban un papel poco utilitario de las matemáticas avanzadas lograron desestabilizar el lugar que ocupaban estas materias en los currículos de la educación secundaria.

[5] Disciplinas que básicamente intentaban encontrar una relación directa entre la habilidad mental de una persona, con el tamaño y la forma de su cráneo.

activamente en la publicación oficial de dicha comisión, *L'Einseignement Mathematique,* con artículos y estudios en temas relacionados a la educación matemática del momento.

Desde entonces, y principalmente a partir de la década de los sesentas (considerada la edad de oro de esta disciplina), la conformación de este tipo de organizaciones se hizo cada vez más frecuente, se empezaron a publicar cada vez más estudios en educación matemática y se crearon numerosos institutos dedicados a la investigación en esta disciplina (Ver Figura 1.1)[6]

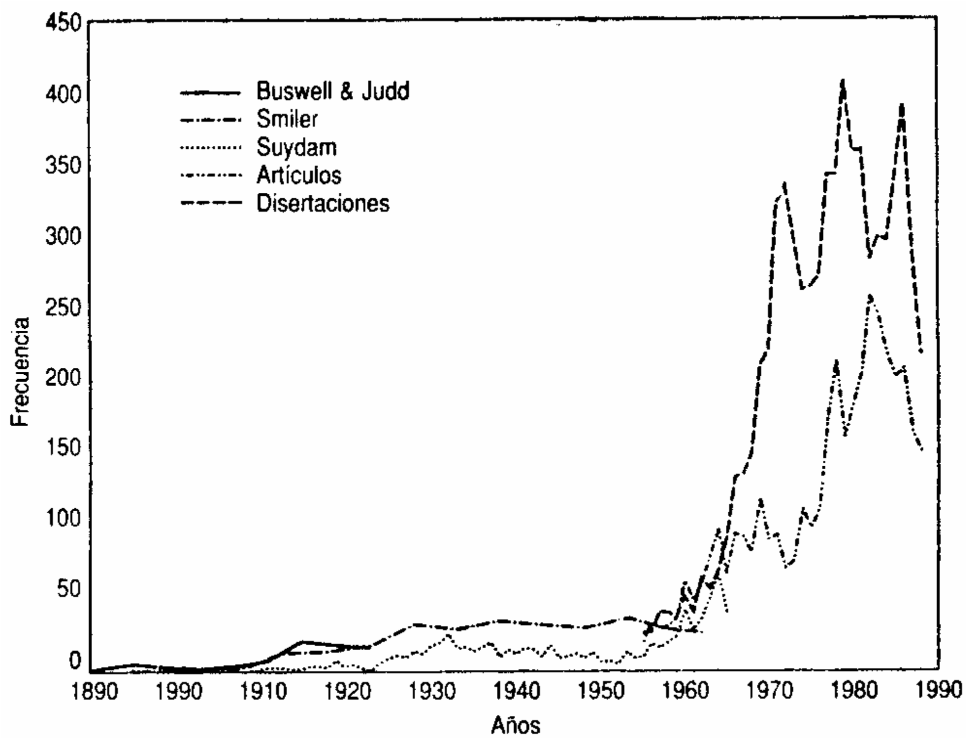


FIGURA 1.1. Estudios de investigación en educación matemática de 1890 a 1991.

---

[6] Esta gráfica fue tomada de la traducción del artículo de Kilpatrick (1992) realizada por el doctor Luis Rico. Los datos de Buswell & Judd son sobre investigación en aritmética desde 1892 hasta 1924. Los datos de Smiler corresponden a 1456 estudios sobre educación matemática realizados en lo Estados Unidos desde 1893 hasta 1963. Las tres gráficas restantes son datos compilados por Suydam. La primera gráfica representa el número de artículos sobre educación matemática elemental publicados desde 1909 hasta 1965. La segunda representa la cantidad de artículos sobre educación matemática escolar (kinder-12) publicados desde 1955 hasta 1988. Por separado, la tercera gráfica representa el número de tesis sobre educación matemática desde 1955 hasta 1988. Obviamente, de haberse combinado los datos de estas últimas dos gráficas, su pendiente habría sido mucho mayor.

Aunque la anterior gráfica no describe el tipo de investigación que se realizó a lo largo de esos años, demuestra un indiscutible interés por trabajar en esta disciplina por parte de las instituciones de educación superior y los gobiernos de diversas naciones.

Durante la segunda mitad del siglo XX la especialización de aquellos académicos que se habían dedicado a la educación matemática se hizo indiscutiblemente más notoria. Si bien profesionales del área de las matemáticas y la sicología siguieron construyendo herramientas que más tarde serían de suma utilidad en estudios de educación matemática, los educadores matemáticos comenzaron a conformar su propia comunidad académica.

Hoy día la educación matemática es un campo de estudio ampliamente aceptado en la escena académica mundial. Su separación de otras disciplinas se ha manifestado en la creación de departamentos de educación matemática en muchas universidades alrededor del mundo, lo cual a su vez ha sustentado el continuo crecimiento de la investigación en este campo.

## 1.2 La *reforma* en la enseñanza del cálculo

En el siglo XX, varios movimientos de reforma de la enseñanza de las matemáticas cambiaron considerablemente la manera de enseñar el cálculo diferencial tanto en el colegio como en la universidad. Algunos de los más importantes cambios en la enseñanza de los principios del cálculo en los liceos franceses fueron estudiados por Artigue (1995)[7]. En el caso de la enseñanza del cálculo diferencial en las universidades de los Estados Unidos, una de las más significativas reformas del siglo pasado se originó como respuesta a varios reportes publicados entre 1985 y 1987.

Uno de estos reportes fue publicado por la Consejo Nacional para la Ciencia de los Estados Unidos (*National Science Board*, o NSB) en el año de 1986. Este reporte propuso crear un programa por medio del cual la Fundación Nacional para la Ciencia de ese país (*National Science Foundation*, o NSF) patrocinara proyectos novedosos con el objetivo de mejorar la educación matemática y científica ofrecida por instituciones de educación superior estadounidenses (National Science Board, 1986).

Un segundo reporte fue publicado como memorias de una famosa conferencia llevada a cabo en la Universidad de Tulane (New Orleans, EE.UU.) del 2 al 6 de Enero de 1986. Bajo el título *Toward a Lean and Lively Calculus* (Hacia un cálculo delgado y animado[8]), los artículos

[7] Michèle Artigue es profesora e investigadora de la Universidad Paris 7 (Denis Diderot). Allí dirige una rama del IREM, prestigioso instituto francés de investigación en educación matemática. Actualmente, Artigue también es vicepresidenta de la *Comisión Internacional para la Enseñanza de las Matemáticas* (ICEI por sus siglas en inglés), sin duda alguna, uno de los organismos más importantes en este campo a nivel mundial.

[8] Una de las propuestas del reporte cosiste en reducir la cantidad de temas estudiados en el curso tradicional. De acuerdo a los escritores del reporte, los libros de cálculo del momento estaban saturados de tópicos con el objetivo de atraer más compradores. Así, incluyendo la mayor cantidad de temas posible, se reducía la probabilidad de que un profesor extrañara algún tema de su agrado y desaprobara el uso de ese libro en una serie de cursos de cálculo. Esto terminó influyendo los currículos de muchos cursos que, al seguir estos libros, sufrían el peso de una enorme

de este reporte tuvieron como objetivo el desarrollo tanto de un plan de estudios como de métodos de enseñanza para los cursos universitarios de cálculo del momento. La conferencia se organizó como una respuesta a la pérdida de popularidad de estos cursos tanto entre estudiantes como profesores universitarios. Por una parte, muchos departamentos estaban insatisfechos con los cursos de cálculo disponibles, a los cuales atribuían parte de la culpa de la evidente escasez de jóvenes estudiando matemáticas, ciencia e ingeniería. Por otra, la creciente importancia de los computadores en las matemáticas llevó a muchos a pensar en dar prioridad a la enseñanza de cursos de matemáticas finitas (Douglas, 1986). De esta manera, la conferencia de Tulane se encargó de recordar la importancia del cálculo y su vigencia en las matemáticas, y propuso una reforma de su enseñanza como respuesta a la ineficacia de los cursos de cálculo que se dictaban en el momento.

Como producto de estos y otros reportes, en 1987 la NSF estableció un programa de financiación para proyectos de desarrollo curricular de cursos de cálculo a nivel universitario. El primer proyecto a largo plazo en ser financiado fue *Cálculo en Contexto*, un proyecto de las cinco instituciones de educación superior del pueblo de Amherst, Massachusetts (Amherst College, Mount Holyoke College, Smith College, Hampshire College y la Universidad de Massachusetts). *Cálculo en Contexto* introduce el empleo de computadores en la enseñanza del cálculo diferencial como herramienta para construir el curso alrededor del concepto de ecuación diferencial. Este curso fue diseñado pensando en estudiantes de diversos campos de estudio que necesitaban un conocimiento de ecuaciones diferenciales para poder comprender muchos de los artículos que leían. Sin embargo, los cursos de cálculo del momento llegaban muy tarde (en ocasiones tres semestres más tarde) a este tipo de conocimiento, perdiendo en el camino a

cantidad de tópicos. Así, la propuesta del reporte consistió en cambiar el curso gordo de cálculo por uno menos amplio, pero más profundo.

muchos estudiantes no matemáticos.  Así, el curso de *Cálculo en Contexto*, como lo señala su nombre, presenta el tema a medida que se hace necesario para modelar un problema específico de un área ya sea de las ciencias biológicas, sociales o económicas.

Entre los más importantes proyectos de reforma curricular del cálculo financiados por la NSF encontramos:

- *Calculus in Context* (The Five Colleges, 1988),
- *The Calculus Consortium* (Harvard University, 1989),
- *Calculus as a Laboratory Course: Project CALC* (Duke University, 1989),
- *Calculus & Mathematica* (University of Illinois, 1990),
- *The Oregon State Calculus Connections Project* (Oregon State University, 1989),
- *Calculus from Graphical, Numerical, and Algebraic Points of View* (St. Olaf College, 1990),
- *Calculus, Concepts, Computers and Cooperative Learning* (Purdue University, 1990).

La mayoría de estos proyectos se caracterizaron por la introducción del uso de computadores en el salón de clase y del descubrimiento del conocimiento por medio de la experimentación en un laboratorio (informático o físico).  Igualmente, estos proyectos le dieron una gran importancia a las aplicaciones del cálculo y a la solución de problemas.  Más importante que el conocimiento de fórmulas o la memorización de definiciones, la comprensión conceptual de las ideas del cálculo por parte de los estudiantes se convirtió en uno de los principales objetivos de estos cursos.  Sus técnicas pedagógicas más comunes incluyen: solución de problemas, múltiples representaciones de un concepto, proyectos a largo y mediano plazo, discusión abierta y aprendizaje cooperativo (Ganter, 1999).

Este ánimo de reforma no fue exclusivo de la academia estadounidense. En su historia de la enseñanza del cálculo en la secundaria francesa, Artigue señala el advenimiento de la contra-reforma de los años ochentas como un momento en el cual se pretende 'organizar la enseñanza del cálculo alrededor de algunos problemas importantes', 'teorizar únicamente lo necesario' y 'promover un enfoque constructivista del aprendizaje' (Artigue 1995).

No todos los cursos de cálculo que se dictaron antes de esta reforma eran un fracaso, así como tampoco fueron un éxito todos aquellos diseñados durante la reforma. Sin embargo, el desarrollo de las matemáticas y la ciencia, la introducción de nuevas tecnologías en la enseñanza de las matemáticas y el papel del cálculo en los programas de estudio de una población de estudiantes cambiante, hicieron necesario examinar el curso de cálculo que se dictaba en las universidades del momento.

> *Es claro que no existe un camino de reyes que pueda hacer de esta introducción al campo del cálculo, un camino regular, continuo y sin trampas.* (Artigue, 1995)

Como fue expresado por Douglas (1986), la reforma no buscaba un 'camino de reyes', o una lista de reglas mágicas en la enseñanza del cálculo. Buscaba caminos afines con las demandas laborales y académicas del momento, caminos afines con las herramientas computacionales disponibles, caminos que motivaran al estudiante de cálculo a seguir explorando el mundo de las matemáticas. Esta reforma buscaba caminos exitosos para estudiantes de diversas ciencias que necesitaban utilizar las herramientas del cálculo en la solución de problemas, así como comprender sus conceptos para poder estudiar nuevas y más complejas herramientas.

Aunque la NSF finalizó este programa de financiaciones a mediados de la década de los noventas (habiendo otorgado más de veinte millones de dólares), los centros de investigación en educación matemática y, en general, las universidades alrededor del mundo siguen estudiando formas novedosas de enseñar el cálculo a estudiantes universitarios [9]

[9] En la introducción de un estudio sobre la reforma del cálculo conducido por la Asociación Americana de Matemáticas (Leitzel y Tucker, 1995), se indica que más del 95% de las instituciones que habían utilizado textos de esta reforma durante un año, continuaron haciéndolo durante el siguiente año.

## 1.3 Conclusiones

La educación matemática (como disciplina que estudia la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas) nace a partir de cuestionamientos por parte de profesionales de diferentes disciplinas (las matemáticas, la sicología y la docencia) y se forma con la participación activa de tal variedad de conocimientos. A lo largo del siglo pasado fue independizándose de dichas disciplinas, en una búsqueda por una identidad propia en la academia actual. Esta identidad define objetivos y métodos de investigación que difieren considerablemente de aquellos utilizados en las matemáticas. Desafortunadamente, estas diferencias han distanciado a las matemáticas de la educación matemática, al punto de que matemáticos que se dedican a la enseñanza de las matemáticas ignoran estudios de educadores matemáticos, y viceversa. En general, matemáticos y educadores matemáticos han ido perdiendo aquella inclinación de otros tiempos hacia el trabajo conjunto.

En lo que a la tarea de enseñar matemáticas se refiere, cada una de estas dos disciplinas tiene mucho que aprender de la otra. Así como la educación matemática pierde toda autoridad al desconocer el mundo de las matemáticas; el estudio de cuanto sucede alrededor de un salón de clases es de suma importancia para el matemático que enseña.

Es absolutamente incuestionable la necesidad de conocer a fondo el tema que se pretende enseñar, pero para formar buenos profesores de matemáticas en nuestras instituciones educativas, no es suficiente instruir al estudiante en el camino de la investigación matemática, adicionalmente es necesario iniciarlo en la ciencia que se ocupa de aquellas cuestiones específicas del quehacer del docente.

# 2. EDUCACIÓN MATEMÁTICA UNIVERSITARIA

El objetivo de este proyecto precisa la presentación de herramientas que sean útiles para el matemático (o estudiante de matemáticas) que se encuentra próximo a dictar su primera clase de matemáticas en una institución universitaria. Estas herramientas, algunas bastante intuitivas y generales, otras más específicas a la enseñanza del cálculo diferencial, son producto del continuo cuestionamiento de educadores matemáticos que se empeñan en estudiar y mejorar la calidad de nuestras clases de matemáticas. No se trata de reglas mágicas que solucionan cuanto problema surge dentro o fuera del salón de clases. Lejos de pretender ser un manual de instrucciones, el objetivo central de esta segunda parte consiste en despertar en el futuro docente el interés y la preocupación que lo impulsarán al diseño de estrategias nuevas y creativas para el manejo de situaciones particulares. La educación matemática no dicta leyes incuestionables ni métodos infalibles. Lo que aquí se expone es un esquema, un punto a partir del cual debe continuar el trabajo de cada profesor en su búsqueda por desempeñar un mejor papel en el proceso enseñanza-aprendizaje.

En esta segunda parte del proyecto se estudiarán algunos temas fundamentales de la enseñanza de las matemáticas, como lo son la evaluación y el uso de nuevas tecnologías en el salón de clase. Estos temas serán presentados en una estructura de tres etapas (marco teórico, instrucción y evaluación) que ayudará al futuro docente a desarrollar sus propias técnicas efectivas de enseñanza. Primero se conforma un marco teórico que estudia los objetivos de la enseñanza del cálculo, así como algunas de las más importantes teorías de aprendizaje. Segundo, se utiliza este marco teórico para evaluar las estrategias tradicionales de enseñanza y diseñar nuevas estrategias que, con base en la teoría de aprendizaje adoptada, permitan alcanzar los objetivos propuestos. Por último, se presentan técnicas de evaluación que permitan determinar la efectividad de las estrategias de enseñanza utilizadas y provean un criterio para modificarlas de una manera acorde con las particularidades del curso en cuestión. A su vez, una evaluación eficaz permitirá la sustentación y perfeccionamiento del marco teórico, con lo cual se retorna a la primera etapa de la estructura y se cierra un ciclo que propicia una evolución eficiente (y controlada) del curso.

**2.1 MARCO TEÓRICO**

- **2.1.1 Objetivos**
- **2.1.2 Teoría de aprendizaje**

**2.3 EVALUACIÓN DE LA INSTRUCCIÓN**

- **2.3.1 Aspectos de una evaluación eficaz y formativa**
- **2.3.2 Herramientas de evaluación**
- **2.3.3 Resultados de la evaluación**

**2.2 INSTRUCCIÓN**

- **2.2.1 Actitud del profesor**
- **2.2.2 Estrategias tradicionales**
- **2.2.3 Estrategias alternativas**

## 2.1 Antes de clase: un marco teórico.

Muchos profesores quisiéramos tener una estrategia infalible, por medio de la cual nuestro conocimiento se trasmitiera de la mejor forma y en el menor tiempo posible. Como profesores de cálculo diferencial quisiéramos que existiera una forma de explicar, una serie de ejercicios, o una forma de presentar el concepto de continuidad, de tal manera que al finalizar la presentación todos los estudiantes comprendieran. Quisiéramos entonces que dichas estrategias (talvez distintas para diferentes conceptos del curso) fueran consignadas en un texto que nos pudiera servir de guía en la enseñanza del cálculo diferencial. Sin embargo, ese recetario no existe. Cada año se publican decenas de nuevas ediciones de libros sobre el cálculo diferencial y, también cada año, miles de estudiantes terminan un curso en dicha materia sin comprender conceptos tan importantes como los de función y continuidad. Sí, es cierto: los libros traen miles de ejercicios, cientos de ejemplos y otras tantas presentaciones de cada uno de los temas del curso. Sin embargo, hacer estos ejercicios o leer el libro no garantizan una comprensión de los temas. Continuamente encontramos estudiantes quienes, después de resolver varios ejercicios, no pueden solucionar uno ligeramente distinto[10], o son incapaces de aplicar la teoría estudiada en la solución de un sencillo 'problema de palabras'.

De igual manera, el método tradicional de enseñanza matemática, en el cual el profesor presenta el tema en un monólogo que los estudiantes trascriben en sus cuadernos e intentan comprender más tarde, no parece ser la mejor estrategia a la hora de enseñar. Hamilton Holt,

[10] En *The disciplined mind* (Pág. 120), Howard Gardner describe un experimento realizado con estudiantes de universidades tan prestigiosas como el Instituto de Tecnología de Massachusetts (MIT): después de desempeñarse exitosamente en la solución de ejercicios propuestos en sus exámenes, una vez salen de sus salones de clase, cerca

entonces presidente de una universidad de los Estados Unidos de América, dijo en 1931 que las clases magistrales a las cuales había asistido en las prestigiosas universidades de Columbia y Yale, consistían en un

> *misterioso proceso mediante el cual el contenido del cuaderno del profesor es trasferido por medio de la pluma estilográfica a las páginas del cuaderno del estudiante, sin pasar por la mente de ninguno de los dos.* (Citado en Honan, 2002. Original en inglés)

Así, concluía que dichas instituciones no le habían enseñado prácticamente nada. Si bien este no es siempre el caso, tanto estudiantes como profesores saben que la clase magistral no es la mejor estrategia para mantener la atención e interés del estudiante, muchas veces no trasmite absolutamente nada y en otros casos confunde.

Por sí solas, estas dos estrategias (el texto guía y la clase magistral) suponen que la comprensión de un tema puede ser *trasmitida*: el estudiante comprenderá el concepto de continuidad cuando el profesor, o el autor del texto, le informen lo que ellos entienden por continuidad. En otras palabras, para confiar únicamente en estas estrategias es necesario creer que el estudiante semeja un recipiente en el cual vaciamos nuestro conocimiento. Pero, ¿es esta una descripción fiel del proceso de aprendizaje de un estudiante?, ¿es esta teoría apropiada para constituir bs fundamentos sobre los cuales construimos, y con base en los cuales evaluamos, nuestras estrategias de enseñanza? Estamos de acuerdo en que después de que el profesor recita varias veces la solución de un ejercicio, el estudiante puede replicar dicha solución sin ayuda. De la misma manera, es muy probable que después de memorizar la definición de un concepto (o

de la mitad de estos estudiantes son incapaces de explicar oralmente fenómenos tan sencillos como la trayectoria de un proyectil que ha sido impulsado a través de un tubo curvo.

la demostración de un teorema), el estudiante pueda reproducirla en un examen. Sin embargo, ¿es esto lo único que esperamos lograr con nuestra enseñanza?.

Notamos entonces que a la hora de enseñar debemos responder dos importantes preguntas: *¿qué tipo de aprendizaje buscamos?,* y *¿cómo alcanza un estudiante tal tipo de aprendizaje?.* La primera pregunta busca definir el objetivo de nuestra enseñanza, mientras que la segunda persigue una teoría de aprendizaje. Comenzaré esta sección respondiendo estas preguntas para así poder iniciar el diseño de estrategias que, de acuerdo con nuestra teoría de aprendizaje, nos ayuden a alcanzar el objetivo propuesto.

### 2.1.1 Los objetivos

Si la educación consiste en la transformación de una persona, los educadores debemos tener claro qué tipo de transformaciones queremos lograr, qué tipo de facultades queremos desarrollar en nuestros estudiantes. Los objetivos de la educación dependen de factores socio-económicos e institucionales como lo son las aspiraciones laborales del estudiantado, la oferta laboral y las políticas internas de una sociedad, la ideología de la institución educativa, etc. Óptimamente, cada institución educativa determina el tipo de educación que desea ofrecer y diseña su manera de operar de acuerdo a los objetivos definidos. En este proyecto consideraremos tres objetivos primordiales de la enseñanza universitaria: que el estudiante aprenda un contenido, que aprenda a aprender nuevos contenidos, y que dicho aprendizaje enriquezca su percepción de la disciplina que estudia (en nuestro caso las matemáticas). Se nos presenta entonces una pregunta fundamental: ¿qué es aprender? En el caso específico de las matemáticas, muchos piensan que poder recitar una definición o utilizar un teorema para poder solucionar cierta gama de ejercicios, son muestra suficiente de aprendizaje. Sin embargo, tal capacidad no representa más que un aprendizaje superficial y, aunque dichas tareas son importantes en la educación matemática de un estudiante, el aprendizaje no debe verse reducido a la memorización de definiciones y a la rutinaria aplicación de algoritmos. Como lo señalaba anteriormente, nuestro objetivo al enseñar demanda algo adicional.

**a. Transferencia**

Profesores universitarios de todo el mundo continúan enseñando el cálculo diferencial, principalmente, por su poderosa capacidad de modelar una gran cantidad de situaciones que surgen en diversos campos de estudio. Sin embargo, la gran mayoría de los estudiantes que toman la materia en el contexto matemático (definición-teorema-ejercicios), son incapaces de utilizar el conocimiento aprendido en otros contextos (académicos o no). De la misma manera, se insiste en la enseñanza del cálculo diferencial por el importante lugar que ocupa en el aprendizaje de otras asignaturas, como lo son la física, la probabilidad y la estadística. Sin embargo, la gran mayoría de estudiantes fallan a la hora de usar exitosamente en nuevos cursos, el conocimiento que han aprendido previamente.

Estas metas de la enseñanza del cálculo diferencial demandan un aprendizaje que va más allá de la memorización de información o la incuestionable aplicación de instrucciones durante un proceso dado. Demandan un aprendizaje profundo que, tanto formal como informalmente, es conocido como *comprensión*.

Howard Gardner, profesor de la escuela de postgrados en educación de la universidad de Harvard, define comprender de la siguiente manera:

*Comprender un concepto, un proceso, una teoría, o un área del conocimiento, es poder utilizarla apropiadamente en una situación novedosa.* (Gardner, 1999)[11].

Esta definición enaltece un aspecto muy importante de la comprensión: la capacidad de utilizar el conocimiento aprendido de una manera *flexible* y *eficaz*, en la solución de problemas nunca antes vistos. Flexible en el sentido de que el uso del conocimiento no se limita al contexto de un salón de clase donde los estudiantes solucionan ejercicios de rutina obviamente ligados al conocimiento. Es ampliamente conocido el hecho de que, en la solución de problemas, los estudiantes tienden a utilizar automáticamente el conocimiento recientemente aprendido, no porque lo consideren necesario después de analizar el problema, sino porque saben que tal tipo de conocimiento es el que será evaluado. En cambio, al *comprender* el concepto de derivada, por ejemplo, el estudiante tiene acceso a él en cualquier situación en la cual pueda llegar a ser útil (ya sea en la comprensión de un nuevo concepto matemático, en un problema que surge en un contexto no matemático, o en una discusión ajena al ámbito académico), y no únicamente en las evaluaciones del curso de cálculo diferencial. Este uso flexible, o extensión a nuevos contextos, de lo aprendido en un contexto dado, es lo que varios investigadores llaman *transferencia.*

Sin embargo, no toda transferencia resulta eficaz. La *transferencia negativa*, muestra de una comprensión superficial, ocurre cuando algún conocimiento es utilizado incorrectamente en

[11] Esta definición fue adoptada por un grupo de investigación de la escuela de postgrados en educación de Harvard. Este grupo de investigación, conocido como Proyecto Cero, fue co-dirigido por Gardner desde 1972 hasta Julio de 2000 y ha participado en el diseño de una interesante estructura de enseñanza que denominan *enseñanza para la comprensión*. A pesar de su concentración en la enseñanza primaria y secundaria, dicha estructura posee elementos que podrían llegar a ser útiles en la enseñaza de conocimiento matemático avanzado. Gardner, doctor en sicología de la Universidad de Harvard, es principalmente conocido por su teoría de las *inteligencias múltiples* (MI) según la cual existen ocho tipos distintos de inteligencia. Hoy en día, Gardner sigue vinculado al Proyecto Cero y a otros grupos de investigación de la escuela de educación de la Universidad de Harvard.

un nuevo contexto. Un ejemplo de transferencia negativa, común en el aprendizaje del álgebra, consiste en concluir que $(a+b)^2$ es equivalente a $a^2+b^2$, al recordar la fórmula $(ab)^2 = a^2b^2$; o similarmente en el caso del cálculo, concluir que $D_x(f(x)\cdot g(x)) = D_x(f(x))\cdot D_x(g(x))$ al recordar que $D_x(f(x)+g(x)) = D_x(f(x))+D_x(g(x))$.

De esta manera, la comprensión que demanda nuestro primer objetivo puede ser caracterizada por *la capacidad de transferir eficazmente el contenido del curso.*

Por ejemplo, al enfrentarse a la tarea de modelar el comportamiento poblacional de una especie dada, el estudiante debe tener acceso a su conocimiento acerca de la función exponencial y debe ser capaz de utilizarlo correctamente. De la misma manera, el conocimiento adquirido acerca de la derivada de una función debe estar disponible en su comprensión de nuevos conceptos matemáticos como el de la antiderivada y la integral de una función.

En general, como profesores del curso de cálculo diferencial esperamos que el estudiante transfiera su conocimiento eficazmente: de un problema a otro más complejo, de un curso universitario al siguiente, del contexto matemático a contextos no matemáticos, y del contexto académico al contexto laboral.

**b. Meta-cognición**

Un segundo objetivo de nuestra enseñanza consiste en desarrollar la capacidad de 'aprender a aprender' en el estudiante. No es suficiente que el estudiante desarrolle una comprensión profunda de los temas que enseñamos. Adicionalmente, deseamos que adquiera cierta destreza en la comprensión de nuevo conocimiento, destreza que a su vez le permita aprender en el futuro con mayor facilidad. En el numeral anterior se hace explícito el ideal de que el conocimiento que comprende el estudiante pueda transferirse, en particular, al aprendizaje de nuevo conocimiento. Sin embargo, 'aprender a aprender' se refiere a un objetivo mucho más general. Al 'aprender a aprender', el estudiante debe sentirse informado y en control de su propio proceso de aprendizaje. Esta capacidad de evaluar el nivel actual de comprensión, decidir cuándo es inadecuado y encontrar formas de mejorarlo, es lo que en sicología se conoce como *meta-cognición* (NRC, 2002).

Estudiando el proceso de aprendizaje de expertos (una forma de determinar lo que esperamos de nuestros estudiantes) caemos en la cuenta de que el experto examina su comprensión del tema que estudia y es capaz de señalar la necesidad de información adicional para mejorar dicha comprensión. De la misma manera, el experto puede decidir si la nueva información es consistente con su conocimiento previo y tiene la capacidad de crear analogías que le permitan alcanzar una mejor comprensión del tema (NRC, 2000). Todas estas habilidades meta-cognitivas facilitan el proceso de aprendizaje y por esto desarrollarlas constituye un objetivo primordial en nuestra enseñanza. En particular, queremos que el estudiante de cálculo diferencial aprenda estrategias meta-cognitivas propias del aprendizaje de las matemáticas, que le permitan mejorar su habilidad de solucionar problemas y faciliten la comprensión de nuevos conceptos matemáticos.

Por ejemplo, queremos que durante la solución de un problema el estudiante tenga la capacidad de reconocer inconsistencias entre el producto de su procedimiento y su conocimiento previo. También esperamos que el estudiante tenga la facultad de determinar con facilidad cuándo una estrategia lo está alejando de la solución, y que sea capaz de utilizar una nueva estrategia en lugar de abandonar el problema cuando su primera aproximación ha fallado. Por otro lado, queremos que el estudiante desarrolle hábitos de estudio exitosos: que al acostumbrarse a examinar su nivel actual de comprensión, pueda determinar cuáles actividades le permiten alcanzar el nivel deseado.

Es importante notar que el desarrollo de estrategias meta-cognitivas mejora la capacidad del estudiante de transferir su conocimiento eficazmente. Por ejemplo, durante la solución de problemas de matemáticas, estudiantes que controlan y auto-evalúan sus estrategias tienden a detectar con mayor facilidad aquella información previamente conocida que resulta ser útil en la solución de un problema determinado (Schoenfeld, 1985).

### c. Percepción del área de estudio

Nuestro último objetivo consiste en sanear la opinión que posee el estudiante acerca de las matemáticas y su estudio. A lo largo de su educación, nuestros estudiantes desarrollan una apreciación del conocimiento matemático que por lo general contiene juicios muy poco favorables para su aprendizaje. A continuación se estudiarán tres importantes categorías de este tipo de creencias. Primero, los juicios acerca de la clase de personas que participan en la creación y el desarrollo de las matemáticas. Segundo, las creencias relacionadas con la forma como se trabaja en matemáticas; y por último, los juicios acerca de la utilidad de las matemáticas.

Muchos estudiantes consideran que el conocimiento matemático esta constituido por una serie de leyes que siempre han existido y son transmitidas de generación en generación por medio de clases magistrales. Para otros estudiantes, estas leyes son descubiertas por unos pocos matemáticos (todos genios) y sólo ellos tienen el privilegio de participar en dicho descubrimiento. Estos últimos piensan que la habilidad de pensar matemáticamente es un don que de no poseerse, nunca se poseerá; un don imposible de desarrollar. Incluso entre quienes opinan que esta habilidad se puede alcanzar estudiando, encontramos estudiantes que consideran inapropiado hacerlo. Hoy en día, todavía muchas mujeres piensan que las matemáticas conforman un conocimiento cuyo estudio es reservado para los hombres, y que no es socialmente aceptable que una mujer se destaque por su habilidad en este campo. En todos estos casos, la opinión del estudiante acerca del tipo de personas que pueden llegar a ser *buenos en matemáticas*, entorpece su propia educación matemática. De esta manera, resulta muy difícil motivar a un estudiante a investigar creativamente en un desarrollo científico de las matemáticas, cuando dicho estudiante no cree pertenecer al grupo de elegidos que puede hacerlo.

Estrechamente relacionadas con las creencias acerca de las personas que se desempeñan exitosamente en el campo de las matemáticas, encontramos las creencias acerca de la manera como se trabaja en matemáticas. El estudiante tiende a concentrar toda su atención en la respuesta de un ejercicio, o la sinopsis de una exposición, restándole importancia a los procesos y métodos por medio de los cuales se alcanza una respuesta, o una teoría. Para estos estudiantes, el trabajo en matemáticas consiste en una búsqueda descontrolada por *la respuesta correcta*. No nos sorprende entonces que sean incapaces de justificar sus propios procedimientos. Muchos otros estudiantes piensan que, consecuente con la genialidad de quienes pueden hacerlo, la solución de un problema de matemáticas es alcanzada en los primeros 10-20 minutos (Schoenfeld, 1985) Así, quien dedica dicha cantidad de tiempo en una estéril búsqueda de la solución de un problema dado, se rinde pensando que nunca lo va a poder resolver. Indiscutiblemente, este tipo de creencias complican el desarrollo de habilidades meta-cognitivas apropiadas para la solución de problemas de cierta dificultad.

Por otro lado, la gran mayoría de los estudiantes no llegan a enterarse del poder del lenguaje matemático. Muchos de ellos piensan que lo aprendido en un curso de matemáticas es únicamente útil en un salón de clase. Así, a pesar de conocer herramientas matemáticas que podrían sacarlos de cierta situación problemática, muchos estudiantes no llegan a emplearlas. Estos estudiantes no piensan en matemáticas durante la solución de problemas que surgen en contextos no matemáticos, así como no piensan en las herramientas del automóvil cuando quieren cocinar. Particularmente, muy pocos estudiantes llegan a comprender la importancia del formalismo matemático. Para el estudiante promedio, la única utilidad de una demostración es la justificación de una preposición que de antemano se sabe verdadera. Así, los métodos involucrados en una demostración matemática no llegan a ser utilizados en la solución de problemas (Schoenfeld, 1985). Claramente, esta percepción de las matemáticas imposibilita la transferencia eficaz del conocimiento que el estudiante aprende en su clase de cálculo diferencial.

Concluimos que, en lo que concierne al autor (y en particular a este proyecto), los objetivos de nuestra enseñanza se reducen a los siguientes: primero, que el conocimiento adquirido por el estudiante pueda ser *transferido eficazmente* a diferentes contextos; segundo, que el estudiante desarrolle habilidades *meta-cognitivas* que mejoren su desempeño en el proceso de aprendizaje; y tercero, que el estudiante cultive una *sana percepción de las matemáticas*, percepción que lo motive a estudiar y a utilizar el conocimiento comprendido.

### 2.1.2 Una teoría de aprendizaje

Una vez fijados los objetivos de nuestra enseñanza, nos interesa averiguar maneras de alcanzarlos. ¿Cómo podemos lograr que el estudiante de cálculo diferencial alcance los objetivos anteriormente definidos? Para poder responder esta pregunta tenemos que tener alguna idea de cómo el estudiante adquiere nuevo conocimiento. En otras palabras, debemos estudiar algunas teorías de aprendizaje. Ingenuamente, los estudiantes llegamos a pensar que el proceso enseñanza-aprendizaje puede entenderse como un traspaso de conocimiento, en el cual una fuente de información provee el conocimiento que aprendemos. Lo sentimos de esta manera cuando aprendemos lo que el profesor nos informa y cuando aprendemos lo que leemos en un libro o aquello que vemos y escuchamos en un video. En este sentido, entre mejor sea la fuente mejor será el aprendizaje. Como lo señalábamos anteriormente, en este modelo (que no es más que una versión de la idea de la *tabla rasa* del pensador inglés John Locke) la mente del estudiante semeja un cuaderno en el cual se trascribe el conocimiento que dicta la fuente. Así, cuando el estudiante es incapaz de desempeñarse exitosamente en alguna tarea que demande el conocimiento enseñado, culpamos a la fuente o a la capacidad de trascripción del estudiante. Este modelo comienza a tambalear cuando una buena fuente (un profesor que conoce profundamente un tema, o un libro que lo presenta correctamente) produce un entendimiento pobre. Entonces decimos que el estudiante "no lo ha captado", o "no ha entendido lo que hemos dicho". Sin embargo, por más que se repita la presentación, en la mayoría de casos no se logra transmitir la comprensión que posee la fuente (especialmente cuando comprensión se refiere a aquella capacidad de transferir eficazmente).

Lo cierto es que el estudiante no entra al salón de clase con su mente en blanco. Por el contrario, al enfrentarse a un conocimiento nuevo el estudiante cuenta con una gran cantidad de conocimiento previo, el cual consiste de habilidades, creencias, conceptos (correctos y erróneos), relaciones entre dichos conceptos (correctas e incorrectas), etc. Por otro lado, el estudiante tampoco 'copia' el conocimiento de su fuente: lo interpreta. Es decir, le da sentido a la nueva información relacionándola con algún subconjunto de aquel gran bagaje de entidades mentales que posee. Así, contrario a lo que nos dicta la teoría de la *tabla rasa*, el conocimiento previo del estudiante juega un papel muy importante en su proceso de aprendizaje. Reconociendo este importante papel, el *constructivismo* es una teoría de aprendizaje en la cual el conocimiento que posee el estudiante es usado en la construcción de nuevo conocimiento. En realidad, el constructivismo es un conjunto de teorías en el que fácilmente podemos encontrar dos de ellas que, llamándose constructivistas, difieran considerablemente. Dichas diferencias pueden percibirse en las investigaciones de dos de los más importantes participantes en el desarrollo del constructivismo: Jean Piaget (1896-1980) y Lev Vygotsky (1896-1934). Aunque sus teorías suelen diferir en algunos aspectos (como en la relación existente entre el desarrollo cognitivo y el aprendizaje de un individuo), el trabajo de estos dos investigadores afirma que el aprendizaje consiste en una construcción por parte del individuo.

Hoy día, las teorías de Piaget y Vygotsky conforman el pilar de la sicología cognitiva, y el constructivismo continúa siendo la categoría dominante en lo que a teorías de aprendizaje se refiere. En el campo de la educación matemática, el constructivismo constituye "una aproximación a la sicología del pensamiento matemático avanzado que nos da una idea significativa acerca de los procesos de creación de investigadores matemáticos, así como de las dificultades experimentadas por estudiantes de matemáticas." (Tall, 1991) [12].

A continuación presentaré dos importantes aspectos del constructivismo que nos guiarán al momento de crear y evaluar nuestras estrategias de enseñanza.

---

[12] David Tall, doctor en matemáticas de la universidad de Oxford, ha investigado el aprendizaje de las matemáticas desde la década de los setentas. En 1992 editó una importante colección de artículos en un tema denominado 'conocimiento matemático avanzado'. *Advanced Mathematical Thinking* es una de las más importantes obras de investigación sobre la educación matemática universitaria. Hoy en día, Tall es profesor de pensamiento matemático en la Universidad de Warwick (Reino Unido)

### a. El papel del conocimiento previo

Como fue señalado anteriormente, el estudiante interpreta la información que recibe utilizando conocimiento que ya posee. Así, durante este proceso de interpretación se establecen relaciones entre alguna parte del antiguo conocimiento del estudiante (ciertos conceptos, recuerdos, creencias, etc.) y la nueva información. En el modelo de Piaget, dicha interpretación está gobernada por dos procesos principalmente: *asimilación* y *acomodación*. El primer proceso consiste en la inspección de la nueva información, la búsqueda de conocimiento previo relevante en tal interpretación y el establecimiento de relaciones entre dicha información y el conocimiento activado. De esta manera, la asimilación puede entenderse como la incorporación de la nueva información en el conocimiento utilizado, o en otras palabras, como una tendencia a encajar dicha información en la *estructura cognitiva* del estudiante[13]. Por otro lado, el segundo proceso esta relacionado con las diferentes modificaciones que debe sufrir dicha estructura cognitiva, a fin de incluir las particularidades de la nueva información. Así, durante este proceso el estudiante *acomoda* su conocimiento previo a las características específicas del nuevo conocimiento. Al separarlos, esta presentación no pretende insinuar que estos dos procesos son excluyentes. Por el contrario, la asimilación y la acomodación suceden simultáneamente y se complementan. De esta manera, el estudiante asimila la nueva información hasta donde sea posible, para acomodarla en una reestructuración de su antiguo conocimiento.

Idealmente, un estudiante de matemáticas con un conocimiento previo apropiado asimila y acomoda correctamente la nueva información. Sin embargo, vemos que este no es el caso para la gran mayoría de los estudiantes. En este modelo, muchas cosas pueden salir mal:

[13] *Estructura cognitiva* es un término de la sicología cognitiva que denomina aquella red de entidades mentales que utiliza una persona en la interpretación o resolución de una situación particular.

- Desprovista de una buena adaptación, la nueva información puede ser asimilada sin cuidado. Este es el caso de una transferencia negativa en la cual, desconociendo las particularidades de la nueva información, el estudiante establece relaciones incorrectas entre dicha información y el conocimiento utilizado en el proceso de interpretación.

- En una asimilación inapropiada, la nueva información puede ser relacionada a conocimiento previo incorrecto, modificando así la nueva información y probablemente confiriéndole propiedades que no posee. Por ejemplo, muchos estudiantes creen que si todos los términos de una secuencia cumplen una propiedad, entonces el límite (si existe) también la cumple. Así, piensan que el límite de toda sucesión convergente de funciones continuas tiene que ser a su vez continua, y consideran que 0.99999....< 1. En este último caso, muchos argumentan de la siguiente manera: dado que 0.9, 0.99, 0.999, 0.9999, etc. son todos estrictamente menores que 1, entonces 0.9999... debe ser también estrictamente menor que 1.

- Incapaz de establecer relaciones cruciales entre la nueva información y el conocimiento previo, el estudiante no puede asimilar significativamente dicha información y adapta su conocimiento previo de tal manera que la información queda aislada, desprovista de relaciones importantes y probablemente inútil. Este es el caso de la común memorización de la definición formal de límite: cuando el estudiante no posee las herramientas para comprender dicho concepto, se limita a memorizar su definición.

- Debido a la presencia de un conocimiento previo incorrecto, que contradice la nueva información, dicha información es asimilada como incorrecta en la estructura cognitiva del estudiante. Por ejemplo, la gran mayoría de los estudiantes de un curso de cálculo diferencial tienen una idea muy vaga del concepto de infinito. En una ocasión hablábamos de la cantidad de elementos de **N** y **R.** Cuando intenté señalarles que el segundo conjunto tenía una mayor cantidad de elementos, ninguno de los estudiantes me creyó ya que esto insinuaba la existencia de cantidades infinitas más grandes que otras, lo cual contradecía la idea que tenían del infinito.

El anterior listado no pretende ser exhaustivo y está lejos de serlo. Estos ejemplos presentan sólo algunas de las muchas situaciones en las cuales el estudiante interpreta incorrectamente la información recibida.

De igual manera, esta exposición presenta brevemente uno de los múltiples aspectos de la compleja teoría de Piaget. Aunque esta descripción es suficiente en este proyecto, invito al lector a estudiar otros interesantes aspectos que quedan por fuera de esta introducción. En particular, me parece importante señalar la estratificación piagetana de las distintas etapas presentes en el desarrollo cognitivo del estudiante (haciendo un énfasis en el estadio de operaciones formales); y el importante papel vygotskyano del contexto social en el aprendizaje de todo individuo (Piaget, 1970; Vygotsky, 1978).

### b. Obstáculos

Como ya fue señalado, es muy común que el proceso de aprendizaje del estudiante involucre inconsistencias entre la nueva información y su antiguo conocimiento. Estas inconsistencias son muy importantes ya que durante tales enfrentamientos, *asimilando* y *acomodando* apropiadamente la nueva información, el estudiante avanza a nuevos niveles de comprensión. Sin embargo, este no es siempre el caso. En el numeral anterior estudiamos algunos ejemplos de inconsistencias en los cuales el conocimiento previo, actuando como un obstáculo en el proceso de aprendizaje, se resiste a ser modificado causando una inapropiada asimilación-acomodación de la nueva información.

Uno de los pioneros en estudiar dicho tipo de obstáculos fue Gastón Bachelard, filósofo, matemático y físico francés de la primera mitad del siglo XX. La siguiente es una célebre cita de *"La formación del espíritu científico"*, en la cual Bachelard define el término *obstáculo epistemológico*:

> [...] *hay que plantear el problema del conocimiento científico en términos de obstáculos. No se trata de considerar los obstáculos externos, como la complejidad y la fugacidad de los fenómenos, ni de incriminar la debilidad de los sentidos o del espíritu humano: es en el acto mismo de conocer, íntimamente, donde aparecen, por una especie de necesidad funcional, los entorpecimientos y las confusiones. Es ahí donde mostraremos las causas del estancamiento y hasta del retroceso. Es ahí donde discerniremos causas de inercia, que llamaremos obstáculos epistemológicos.* [...] *En efecto, se conoce* en contra *de un conocimiento anterior, destruyendo conocimientos mal adquiridos* [...] (Bachelard, 1988)[14]

De esta manera, los obstáculos no son simples equivocaciones, producto de la dificultad del tema, de la ignorancia o la confusión de quien lo estudia. Son conocimientos que en algún

---

[14] Esta cita fue tomada de la decimoquinta edición del texto en el idioma español. Originalmente la obra fue publicada en francés en el año de 1938.

momento fueron utilizados con éxito, razón por la cual se asientan reciamente en la mente del estudiante. Así, cuando dichos conocimientos se tornan inadecuados, es difícil modificarlos.

En términos piagetianos, un obstáculo puede obligar asimilaciones incorrectas, como cuando el estudiante opta por modificar la nueva información y no el obstáculo. En otros casos, el estudiante acomoda la nueva información de tal manera que queda incomunicada del obstáculo, conservando los dos conocimientos... ¡así se contradigan! (por ejemplo, cuando el estudiante utiliza correctamente el conocimiento aprendido en el contexto académico, pero vuelve a su antiguo conocimiento una vez sale del salón de clase).

A continuación presentaré ejemplos concretos de obstáculos comunes en el aprendizaje de la historia, la física y las matemáticas.

En el caso de la historia, una gran cantidad de estudiantes se ha acostumbrado a interpretar todo enfrentamiento bélico como un duelo entre la bondad y el mal (una tendencia que sobrevive incluso en estudiantes universitarios). Así, a pesar de que muchas fuentes señalen la complejidad detrás de cada uno de estos conflictos, estos estudiantes tienden a buscar 'al bueno' y 'al malo' de cada guerra.

En el caso de la física, los estudiantes experimentan a lo largo de sus vidas que los objetos pesados *siempre* caen más rápido que los livianos. A pesar de que sus estudios en un primer curso de física contradicen dicho conocimiento, muchos estudiantes continúan utilizando este modelo en razonamientos tanto fuera como dentro del salón de clase.

En el caso de las matemáticas, los niños se familiarizan con una particular propiedad del conjunto de los números naturales desde muy temprano en su educación matemática: todo número tiene un único sucesor. El acto de contar, tan importante en el aprendizaje de las matemáticas elementales, consiste precisamente en ordenar los números naturales. Cuando luego se enfrentan a los números reales, muchos jóvenes *acomodan* este nuevo conjunto sin establecer importantes relaciones con el conjunto de los números naturales. Se hace énfasis en el hecho de que un conjunto contiene al otro, pero se dice poco acerca de sus propiedades (¿se hereda la propiedad del buen orden?). No nos debería sorprender entonces que, a pesar de explicar lo contrario en una clase de cálculo diferencial, muchos de nuestros estudiantes sigan pensando que 'inmediatamente después de 3.14 sigue 3.15'. Este es un obstáculo importante, ya que careciendo de una comprensión de la estructura del conjunto de los números reales, es poco probable que el estudiante pueda comprender los conceptos elementales del cálculo.

En cada uno de los anteriores ejemplos podemos apreciar una importante característica de este particular tipo de conocimiento: señalar el obstáculo al estudiante parece no mejorar las cosas. Debido a que el obstáculo le ha sido útil anteriormente, el estudiante tiende a utilizarlo, inercialmente, a pesar de que se le hayan indicado sus limitaciones. De esta maneta, existe una necesidad de reconstruir toda una estructura de conceptos relacionados a cada obstáculo, y no simplemente corregir el aparente error (NRC, 2002).

Dado que generalmente 'conocemos *en contra* de un conocimiento anterior', no se intenta diseñar una enseñanza libre de obstáculos. Una vez comprendemos la naturaleza de este tipo de conocimientos, la idea es: aprender a identificarlos, diseñar una serie de actividades que contribuyan a una reconstrucción cognitiva apropiada, y estar atento a la formación de nuevos obstáculos a lo largo del curso. Los obstáculos en el aprendizaje de las matemáticas han sido estudiados desde la publicación de Bachelard, y hoy en día es posible encontrar una amplia bibliografía acerca de obstáculos comunes en el aprendizaje del cálculo diferencial (e.g. Cornu, 1991; Sierpinska, 1985).

## 2.2 A la hora de dictar clase: un estudio de algunas estrategias

Haciendo uso del marco teórico desarrollado, analizaré ahora algunas de las estrategias comúnmente utilizadas en la enseñanza del cálculo diferencial. Primero, estudiaré el formalismo matemático como herramienta pedagógica en la presentación de los principales temas del curso. A continuación, examinaré algunas ventajas y desventajas de la clase magistral, siendo ésta una de las más comunes estrategias utilizadas por los profesores de matemáticas en el ámbito universitario. Finalmente, estudiando algunas alternativas a las formas tradicionales de enseñanza matemática, presentaré algunos aspectos importantes del uso de nuevas tecnologías en el salón de clase y de la introducción de un espacio dedicado exclusivamente a la solución de problemas. Sin embargo, antes de analizar las estrategias mencionadas es preciso estudiar un aspecto de la labor del profesor supremamente influyente en el éxito de dichas estrategias.

### 2.2.1 La actitud del profesor

"¿Será que los estudiantes me van a creer cuando les diga que yo soy el profesor?, ¿estudiarán para mi clase?, ¿se tomarán el curso en serio?, ¿comprenderán mis explicaciones?". Estas y muchas otras preguntas fueron objeto de reflexión cuando me disponía a dictar mi primer curso universitario como profesor practicante. En aquel tiempo yo tenía 21 años y algunos de mis futuros estudiantes parecían ser mucho mayores. Este tipo de preguntas, que inquietan a muchos principiantes del quehacer pedagógico, nos hace pensar en estrategias que nos permitan ganar el respeto de nuestros estudiantes, diseñar exposiciones que motiven al estudiante a investigar por su cuenta, controlar las distintas situaciones que surgen en un salón de clase, etc. La actitud del docente frente a sus estudiantes y con respecto al curso es inevitablemente modelada por dichas estrategias: algunos considerarán que ser estricto es necesario para poder mantener el orden en clase, otros pesarán que estableciendo estrechos vínculos de amistad con los estudiantes se asegura el éxito del curso. Así, distintas estrategias pueden llevar al profesor a enfurecerse en clase cuando sus estudiantes no trabajan, o a atrasarse en el programa repitiendo una lección hasta que cada uno de sus estudiantes la comprenda. Al final, cada profesor termina creando su propio estilo. De la misma manera, aquellas actitudes que llevamos a clase y por medio de las cuales interactuamos con los estudiantes también limitan o determinan el tipo de estrategias que podemos utilizar en el salón de clase: el profesor que desconfía de las capacidades intelectuales de sus estudiantes no intentará dictar temas que considera de mayor dificultad, así como el profesor que grita demasiado en clase no podrá esperar una respuesta relajada de su estudiante. Como lo señalábamos anteriormente, no existen reglas irrefutables en lo que al quehacer pedagógico se refiere, y personalmente creo que la diversidad de maneras de enseñar enriquece la educación y nos permite llegarle a una mayor variedad de estudiantes. Sin embargo, así como podemos reconocer actitudes que facilitan nuestra tarea como profesores, existen otras tantas que definitivamente ponen en peligro el éxito de tal labor.

Afirmo entonces que la actitud del profesor en el salón de clase y la estrategia que diseña pensando en el éxito de una exposición dada, están estrechamente relacionadas. La importancia del análisis de tales actitudes en este proyecto reside en dicha relación. A continuación presentaré cinco importantes recomendaciones que facilitarán la implementación de las estrategias que estudiaremos a continuación.

**a. Entusiasmo**

Es indudable que uno de los más comunes objetivos de un profesor es entusiasmar a sus estudiantes con la materia que enseña. A un estudiante entusiasta no le cuesta trabajo estudiar e investigar por su cuenta. ¿Cómo se obtiene este entusiasmo de un estudiante en un curso universitario de cálculo diferencial? Un importante primer paso es intentar trasmitirlo: es fácil contagiarse del entusiasmo de un profesor. Muestre en clase lo emocionante e interesante que le parece el tema que enseña. Las matemáticas tienen procedimientos y resultados hermosos, no desperdicie la oportunidad de compartir esa visión con sus estudiantes. Si bien aquello que entusiasma al profesor puede no producir el mismo efecto en el estudiante, nadie es inmune a la pasión con la que un profesor ama su materia. El afán por enseñar de un profesor inevitablemente termina motivando a sus estudiantes.

**b. Buen humor**

Esto no quiere decir 10 chistes por clase. Al recomendar buen humor por parte del profesor quiero hacer caer en la cuenta de que un profesor de buen genio motiva muchísimo más que un profesor malhumorado. Haga de sus clases algo divertido, un espacio donde el estudiante se sienta a gusto y al cual desee regresar a diario. Un estudiante que disfruta sus clases es un estudiante que se encuentra lejos del abandono de sus estudios, es un estudiante motivado a seguir estudiando. Por el contrario, un estudiante que entra con miedo a clase invierte una gran parte de su tiempo precavido y deseando no tener la necesidad de interactuar con el profesor. Este estudiante no esta aprovechando las explicaciones del docente, no está haciendo preguntas ni resolviendo sus dudas. No se deje engañar por las apariencias: en un salón en el que se mantiene una disciplina de estudio por medio de regaños y gritos, las mentes de los apaciguados estudiantes están más preocupadas por el próximo regaño que por realmente aprender lo que se intenta enseñar. Ante todo, nunca olvide que sus estudiantes merecen un trato respetuoso.

### c. Honestidad y Responsabilidad

Nuestras instituciones educativas tienen el compromiso social de participar en la formación de ciudadanos honestos y responsables. De esta manera, todo profesor universitario tiene la obligación de velar por un desarrollo íntegro del curso, e incentivar el cumplimiento de las obligaciones académicas y cívicas de sus estudiantes. Sin embargo, los estudiantes no adquirirán estas virtudes a menos de que el profesor sea honesto con ellos y cumpla sus obligaciones con responsabilidad. Si usted llega tarde al salón de clases continuamente, ¿qué impedirá que sus estudiantes se sientan con el derecho de hacer lo mismo? De igual manera, ¿qué tipo de ejemplo da un profesor que no prepara sus exposiciones, o falta a su obligación de corregir oportunamente las evaluaciones del curso? Tenga en cuenta que el estudiante juzgará constantemente sus actitudes como profesor, y que la más eficaz contribución que puede hacer en la formación de ciudadanos honestos y responsables, es dando ejemplo de tan importantes virtudes.

### d. Altas expectativas

Es sorprendente lo influyentes que pueden llegar a ser las expectativas de un profesor con respecto a sus estudiantes y a la clase que dicta. Consideremos como ejemplo el siguiente estudio realizado en decenas de colegios estadounidenses (citado en Schwebel, 2002): antes de comenzar un curso escolar fueron seleccionados un par de estudiantes que en el momento tenían un desempeño académico promedio con respecto al desempeño de sus otros compañeros. Estos estudiantes fueron recomendados a sus futuros profesores como estudiantes de un nivel académico ligeramente superior al nivel de los demás estudiantes del curso. Resultados: los estudiantes escogidos tuvieron un desempeño académico superior al promedio de sus compañeros. ¿Trabajan más los estudiantes de quienes mejores resultados esperamos?, ¿valoramos más su trabajo? Tal vez es una combinación de las dos, pero lo cierto es que las altas expectativas de un profesor se convierten en cursos de nivel académico superior. Como profesores debemos esperar que nuestros estudiantes aprendan y debemos requerir de ellos lo que dicho aprendizaje demande. Como estudiante siempre respeté y aprendí de aquellos profesores que esperando mucho de sus estudiantes, demandaban buenos resultados.

### e. Compromiso

De nada sirve comprender los conceptos que explicaré a continuación si el docente no se compromete con los objetivos del curso: que sus estudiantes comprendan los conceptos de la materia, que aprendan a aprender y que obtengan una visión positiva del área de las matemáticas. Estos objetivos son comunes a estudiantes y profesores, y por tanto, responsabilidad de todos. Es irresponsable culpar únicamente al estudiante (a su mala preparación para el curso, o a su deficiente capacidad de aprendizaje) cuando los objetivos del curso no son alcanzados. Como lo señala Krantz,

> *No nos contratan para formar al estudiante platónico ideal. Nos contratan para formar a los estudiantes particulares que asisten a nuestras universidades particulares. Es nuestra obligación aprender cómo hacerlo.* (Krantz, 1993. Original en inglés)

En mi experiencia como docente he encontrado que cuando el profesor se compromete con el progreso de sus estudiantes, éstos se sienten motivados a realizar un compromiso afín, trabajando con entusiasmo por alcanzar los objetivos propuestos.

### 2.2.2 Las estrategias tradicionales

#### a. El formalismo matemático en el salón de clase

Me parece apenas natural que ante la tarea de exponer un tema de la manera más clara posible, tendamos a realizar una presentación económica a través de la cual se manifieste nuestro entendimiento de este tema. Hablo de la expresión común: "¡Esto es muy fácil! Miren, hacemos esto, esto y esto. ¿Ven?, ¡fácil!" Como fue señalado anteriormente, muchas veces confiamos en un aprendizaje en el cual el conocimiento del docente es trasladado directamente a la mente del estudiante. De esta manera, nos preocupamos por presentar la teoría tal y como nosotros (los profesores) la entendemos: depurada, libre de muchas preguntas, completa. En el caso de la enseñanza de las matemáticas esto es particularmente cierto, y conlleva a la presentación de un conocimiento matemático bastante árido en la mente del estudiante promedio. El afán por exhibir dicho conocimiento en su más valiosa, económica y bella presentación, nos lleva al formalismo matemático de la definición de conceptos y la posterior deducción de propiedades de dichos conceptos. Es así como obtenemos el esquema de comenzar nuestras exposiciones con una definición, continuar con un par de teoremas y sus respectivas demostraciones, para finalizar con algunas aplicaciones o ejercicios. Esta presentación es familiar y útil para el experto, quien ya ha recorrido el camino de la incertidumbre, respondiendo muchísimas preguntas, y ha logrado organizar todo su aprendizaje en este económico resumen. Esta presentación es útil incluso para los estudiantes de matemáticas, o los más instruidos del curso, quienes ya han comprendido la necesidad y el valor del esquema lógico-deductivo en el cual organizamos el conocimiento matemático. Sin embargo, dicha presentación parece no ser la más apropiada para la gran mayoría de estudiantes, quienes son incapaces de construir una comprensión profunda a partir de tal formalismo matemático.

Para muchos estudiantes, dicho formalismo dificulta aún más el aprendizaje del ya complejo cálculo diferencial. No sólo introducimos conceptos tan complicados como lo son el límite y el infinito, además lo hacemos de una manera desconocida para la mayoría de los estudiantes, cuya intuición es incompatible con el rigor de tal presentación. En términos de Skemp, uno de los principios del aprendizaje de las matemáticas nos recuerda que:

> *Conceptos de un orden superior a aquellos que ya posee una persona no pueden ser comunicados a dicha persona por medio de una definición, sino únicamente arreglándole un encuentro con una colección adecuada de ejemplos* (Skemp, 1987. Original en inglés)

De esta manera, muchos estudiantes son incapaces de utilizar apropiadamente sus conocimientos previos al intentar comprender el edificio matemático presentado en su estructura lógico-deductiva. Este es el caso de la temprana introducción del concepto de límite en el curso de cálculo diferencial. La complejidad de dicho concepto entretuvo a la comunidad matemática por dos siglos: desde la aparición de los vagos métodos de diferenciación de Newton y Leibniz en la segunda mitad del siglo XVII, hasta la segunda mitad del siglo XIX, cuando la necesidad de formalizar tales métodos llevó a Weierstrass a perfeccionar la idea del límite. Sin embargo, una vez organizado en el edificio matemático, dicho concepto es estudiado prematuramente (¡incluso en su definición $\varepsilon-\delta$!) con el objetivo de poder presentar formalmente las nociones de continuidad y diferenciación. Así, mientras el profesor considera que esta es la forma más organizada de enseñar estos conceptos, el estudiante se enfrenta al misterioso concepto de límite, el cual aparece en el curso sin justificación alguna. Al no encontrar elementos familiares en la definición formal de dicho concepto, el estudiante es incapaz de utilizar su conocimiento previo de una manera adecuada y el rigor corre un alto riesgo de ser *acomodado* en una simple memorización. No nos sorprende entonces que, debido a la dificultad de su comprensión, tanto estudiantes como profesores eviten discusiones acerca del límite, utilizándolo únicamente en tareas algorítmicas (cuando su uso es absolutamente indispensable), sin llegar a desarrollar la capacidad de transferirlo eficazmente a otros contextos diferentes al formalismo matemático. En consecuencia, la gran mayoría de los estudiantes de un curso de cálculo diferencial no alcanzan una comprensión profunda de dicho concepto, y por tanto terminan adquiriendo vagas nociones de lo que son la continuidad y la diferenciación (por lo general limitadas a la operación de límites y derivadas).

Por otro lado, enseñando únicamente el producto final del descubrimiento matemático (lo cual inicialmente puede parecer apropiado), se alimenta la común creencia estudiantil de que las matemáticas constituyen un lenguaje reservado para los matemáticos. Así, el estudiante que no se considera 'bueno con los números', se resigna desde muy temprano a una vida privada del conocimiento matemático, actitud que obviamente perjudica su desarrollo de habilidades meta-cognitivas. De esta manera, al ocultar los procesos detrás del conocimiento, se priva al estudiante de conocer la forma como evolucionan las matemáticas y se promociona la carencia de creatividad e improvisación en su aprendizaje: 'las matemáticas están ahí, todo lo que podemos hacer es aprenderlas'.

Esto no quiere decir que el único camino hacia la comprensión del concepto de límite sea la fiel reconstrucción del proceso que originó el conocimiento. No es necesario que el estudiante reproduzca el conocimiento matemático en el orden en el cual trabajaron quienes participaron en su creación y refinamiento. Sin embargo, es importante caer en la cuenta de que la valiosa presentación formal del concepto de límite no es necesariamente la más pedagógica. De esta manera, comenzar con una pregunta interesante para el estudiante, o un tema más intuitivo que sirva a su vez de guía en la presentación de futuros temas, suele ser una buena alternativa a la inmediata definición del concepto. Por ejemplo, Tall ha notado que diseñar el curso alrededor de la noción de "rectitud local" de algunas curvas, es más apropiado que hacerlo iniciando con la definición formal del límite. Así, por medio de la intuición del estudiante quien utilizando un computador o una calculadora con capacidades gráficas puede advertir que algunas curvas pierden curvatura a medida que son ampliadas, es posible darle un sentido a la introducción del concepto de límite al mismo tiempo que se construye una estructura que facilita la presentación intuitiva de otros conceptos como el de ecuación diferencial y, más adelante, el de variedad diferencial (Tall, 1992).

Este tipo de nociones, llamados *tópicos generativos* por Perkins[15] (1998) y *raíces cognitivas* por Tall (1992), son de gran importancia en el diseño de un currículo más pedagógico[16]. Ante todo, tienen el crucial papel de acercar la nueva información al estudiante, permitiéndole transferir su conocimiento previo al aprendizaje del cálculo diferencial. Además de ser interesantes para el estudiante, estos temas tienen la característica de ser centrales en el campo de estudio. De esta manera, generan preguntas que encuentran respuesta en nuevos y más

[15] David Perkins, doctor en matemáticas de MIT, acompañó a Gardner en la dirección de Proyecto Zero por más de veinticinco años. Hoy en día, Perkins sigue vinculado a la escuela de educación de la Universidad de Harvard.
[16] La diferencia entre estas dos ideas es muy sutil. Las *raíces cognitivas* son nociones generales e informales, de fácil acceso para el estudiante, que adicionalmente facilitan la construcción de otros y más complejos conceptos

profundos interrogantes, lo cual facilita una sutil introducción de nuevo material e involucra al estudiante en un conocimiento matemático más dinámico e investigativo. Asimismo, el profesor puede hacer referencia a la raíz cognitiva en distintos niveles de la educación matemática del estudiante, lo cual facilita la abstracción de ideas generales y ofrece un mapa conectado del conocimiento matemático. En el tercer capítulo se estudiarán algunos ejemplos.

¿Olvidamos entonces el formalismo matemático? De ninguna manera. El formalismo libra a las matemáticas de la arbitrariedad del pensamiento común y es indispensable para alcanzar el tipo de comprensión que esperamos de nuestros estudiantes. A fin de adquirir la capacidad de transferir efectivamente los conceptos del cálculo diferencial, se deben conocer sus propiedades y sus limitaciones con precisión: bajo qué condiciones poseen dichas propiedades y por qué. En otras palabras, el estudiante debe estar familiarizado con las definiciones de tales conceptos, las proposiciones que cumplen y las argumentaciones que justifican dichas proposiciones. El cambio no es entonces evitar la aparición del formalismo matemático en el currículo del curso de cálculo diferencial. El gran cambio consiste en dejar de pensar en el formalismo como puerta de entrada al aprendizaje de las matemáticas, y empezar a considerarlo como un objetivo final.

En este sentido han avanzado muchos de los textos de cálculo actuales, cambiando el lenguaje matemático por uno más cercano al estudiante e introduciendo una gran cantidad de ejemplos y aplicaciones. Sin embargo, el curso lo hacen el profesor y los estudiantes, no el libro. Como profesores debemos contener nuestro deseo de presentar el conocimiento matemático en su más económica expresión; no sólo debemos darle una oportunidad al estudiante de participar en la construcción de este conocimiento, debemos incentivar tal participación.

---

matemáticos. Los *tópicos generativos* funcionan de igual manera en un contexto más general: son temas de fácil acceso para el estudiante, que adicionalmente facilitan la presentación de otros y más complejos temas del curso.

Así, en lugar de la tradicional presentación del cálculo diferencial en el esquema lógico-deductivo, se trabaja hacia dicho esquema, construyéndolo a medida que se va haciendo necesario. Esta es la idea de las raíces cognitivas, que al generar una profundización gradual en el estudio de un tema, fácilmente conducen hacia una presentación formal del material. De esta manera, en un proceso de refinamiento de los conceptos del cálculo diferencial, el estudiante construye las definiciones haciendo uso de sus más intuitivas nociones y de los contraejemplos a dichas nociones presentados por el profesor. Similarmente, los teoremas son conjeturas que se descubren verdaderas entre otras tantas hipótesis falsas estudiadas en clase, y sus demostraciones no son un simple listado de proposiciones lógicas, sino argumentos capaces de convencer tanto al estudiante como al matemático. Así, a medida que va desarrollando una intuición más avanzada, el estudiante comprende la importancia y el valor que tiene el formalismo matemático.

Al mismo tiempo, además de facilitar la comprensión de los complejos conceptos del cálculo diferencial, este tipo de enseñanza involucra al estudiante en su propia educación y presenta a las matemáticas como un conocimiento dinámico y no como un conjunto de leyes divinas. Al darle la oportunidad de estudiar sus propias hipótesis y hacerse partícipe del descubrimiento matemático, el estudiante es motivado a ocuparse de su aprendizaje de una manera más activa, lo cual constituye una importante habilidad meta-cognitiva. Claro, este papel activo del estudiante en el salón de clase desafía la clase magistral de cálculo diferencial, lo cual será estudiado con mayor detalle en el siguiente numeral.

En conclusión, dada su gran importancia, pero sus pobres cualidades pedagógicas, el formalismo matemático debe hacerse accesible al estudiante promedio, no forcejeándolo desde el comienzo de la instrucción, sino construyéndolo poco a poco a medida que se va haciendo necesario. Esta es una tarea difícil y probablemente demanda una reestructuración del actual currículo del curso de cálculo diferencial. Sin embargo, muchos de estos cambios propuestos pueden comenzar a implementarse, gradualmente, utilizando el currículo y los textos actuales. Por ejemplo, presentar el tema de estudio a través de un problema interesante puede lograrse en una buena introducción al principio de cada clase. Así, por medio de una serie de preguntas el profesor puede guiar la discusión hacia una presentación formal del tema. Por otro lado, al variar la hipótesis o la conclusión de un teorema estudiado en clase, e invitar al estudiante a discutir la veracidad de las nuevas proposiciones, el profesor promueve una revisión juiciosa de la demostración del teorema, obligando al estudiante a reflexionar acerca de la necesidad y la suficiencia de las condiciones en cuestión.

**b. La clase magistral**

Cuando comencé a dictar clase en la universidad deseaba hacer una exposición tan clara y completa como fuera posible: clara para que el estudiante 'entendiera' el contenido, y completa para que al final de la clase no quedaran dudas. Quería realizar aquella exposición después de la cual todo estudiante sonríe y dice: '*¡quedó tan claro, lo entiendo todo!*'. Entre los miedos comúnmente sufridos por profesores novatos encontramos: el miedo a confundirse durante la presentación del tema, el miedo a no poder organizar una exposición clara, y el miedo a no responder satisfactoriamente una pregunta de un estudiante. Por supuesto, estos miedos encuentran justificación en un supuesto que ya hemos cuestionado: una vez el profesor haya hecho una exposición clara, digna de su profundo conocimiento del tema que enseña, entonces el estudiante podrá comprenderlo. De esta manera, el profesor, en quien descansa la mayor parte del trabajo, enseña al estudiante, quien pasivamente aprende.

Sin embargo, sabemos que esta estrategia no es siempre la más adecuada. Si bien es cierto que para el estudiante sobresaliente la clase magistral es suficiente, para la gran mayoría de los estudiantes no suele serlo. El estudiante sobresaliente posee un buen bagaje matemático que le facilita la asimilación y adaptación adecuada del nuevo conocimiento. Adicionalmente, dicho estudiante ha desarrollado habilidades meta-cognitivas que le permiten seguir de cerca su nivel de aprendizaje, tener presente el nivel deseado y saber cómo alcanzarlo. De esta manera, para este estudiante la clase magistral es el primer escalón en un proceso de reflexión y trabajo individual adicional que finalmente lo llevarán a la comprensión de la exposición del docente. Por el contrario, el estudiante promedio entra al salón de clase con un dominio insuficiente del conocimiento matemático y con la idea de que su aprendizaje esta virtualmente determinado por la instrucción del profesor. De esta manera, sucede que el pasivo papel del estudiante se reduce a escuchar y reproducir la información dictada durante la clase magistral, y el objetivo de llegar a utilizar dicha información en la solución de novedosos problemas es ignorado.

El silencio que usualmente surge en la última parte de la clase magistral, cuando el profesor indaga si algún estudiante tiene preguntas o dudas acerca del tema expuesto, es consecuente con la incertidumbre del estudiante al intentar solucionar un ejercicio distinto a los ejemplos expuestos en dicha exposición. Ante tal silencio, algunos profesores sonríen y concluyen: 'hay dos posibilidades: todo quedo entendido, o absolutamente nada quedó entendido'. La incertidumbre del estudiante nos inclina, en este común caso, hacia la última de estas dos opciones.

Adicionalmente, dado que durante una clase magistral al profesor se le dificulta hacerse una idea del conocimiento previo que el estudiante utiliza en la interpretación de la nueva información, se corre el riesgo de que dicha información sea asimilada y acomodada impropiamente sin que ninguno de los dos se percate de la confusión. De esta manera, el aparente éxito de una clase magistral puede esconder múltiples incongruencias entre el conocimiento que se intenta enseñar y lo que el estudiante en efecto comprende. Esto es sumamente importante en la enseñanza del cálculo diferencial donde muchos conocimientos del estudiante se revelan como obstáculos en el aprendizaje de conceptos tan importantes como el infinito, el conjunto de los números reales y las nociones de función y de límite (Artigue, 1995; Cornu, 1991; Sierpinska, 1985; Tall, 1992).

Esto no quiere decir que la instrucción del profesor constituye un impedimento en el proceso de comprensión del estudiante. Hay quienes opinan que la construcción de nuevo conocimiento es un proceso que debe llevarse a cabo sin ayuda exterior alguna; es decir, que la construcción individual del conocimiento por parte del estudiante es la única manera de alcanzar una comprensión profunda. Pienso que esta opinión surge a partir de una confusión entre una teoría de aprendizaje y una didáctica de enseñanza. Es importante notar que el estudiante utiliza su conocimiento previo en la interpretación de nueva información, *independientemente* de la forma como se presenta dicha información (NRC, 2002). Por tanto, aunque el descubrimiento tiene un valor pedagógico importante, no constituye una condición necesaria en la comprensión de nuevo conocimiento. Así, como lo señalábamos anteriormente, a pesar de ser inadecuada en las más tempranas etapas del aprendizaje, la clase magistral puede llegar a ser útil en la enseñanza del estudiante que ya ha construido favorables habilidades meta-cognitivas al igual que una estructura cognitiva apropiada. De esta manera, en lugar de abolir la clase magistral y ver al profesor como una traba del proceso educativo, se buscan alternativas al papel que debe cumplir el docente en la instrucción de la gran cantidad de estudiantes que no arriban a un primer curso de cálculo diferencial en condiciones tan favorables.

En este sentido, y de acuerdo con lo propuesto en el numeral anterior, se propone delegar al estudiante una parte importante del trabajo en clase. En lugar de asistir pasivamente a una clase magistral e intentar trabajar sin guía alguna una vez culmina la explicación del docente, el estudiante debe ser incitado a realizar una serie de actividades guiadas en el salón de clase. De esta manera, todo estudiante tiene la oportunidad de participar activamente en la revisión y acondicionamiento de su conocimiento previo, así como en la construcción misma de los nuevos conceptos. Adicionalmente, esta participación activa por parte del estudiante genera una continua auto-evaluación que le permite vigilar su nivel de comprensión del nuevo material. Por su parte, el profesor tiene la oportunidad de estudiar el conocimiento previo de dicho estudiante y anticiparse al uso de concepciones erróneas asignando actividades y contraejemplos que contribuyan al diseño de una base cognitiva adecuada para la construcción del nuevo conocimiento. En resumen, en lugar de copiar teoría en el tablero, el profesor discute una pregunta o un problema con sus estudiantes, se percata del conocimiento que traen a clase y asigna actividades afines que los conduzca en una construcción gradual y apropiada de los nuevos conceptos. Sólo entonces, después de este tipo de preparación, muchos estudiantes podrán apreciar una aclaración particular, o una sinopsis del tema por parte del profesor.

Este tipo de alternativas al uso exclusivo de la clase magistral en cursos de matemáticas a nivel universitario, han sido estudiadas e implementadas exitosamente. Invito al lector a revisar, en particular, la investigación realizada por Ed Dubinsky, matemático dedicado a la investigación en educación matemática desde mediados de la década de los 80's. Como es señalado en el título del artículo, en Asiala *et al.* (1996) se presenta una estructura para la investigación y el diseño del currículo de cursos de matemáticas a nivel universitario. Dicha estructura reposa sobre una teoría constructivista del conocimiento basada en las teorías de

Piaget, desarrollada por Dubinsky y actualmente conocida como APOS (APOE en español: Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas). Como en el caso de la de Skemp, esta teoría afirma que un individuo no aprende los conceptos directamente. Según Dubinsky, cuando el estudiante posee las estructuras cognitivas apropiadas, el aprendizaje sucede de una manera casi automática, pero al carecer de dichas estructuras, tal aprendizaje resulta supremamente difícil. Por tanto, la meta de la enseñanza debe ser ayudar a los estudiantes a construir mejores estructuras, y conectar dichas estructuras a los nuevos conceptos matemáticos.

Esta teoría ha sido implementada con éxito en el diseño de cursos de matemáticas discretas, cálculo diferencial, álgebra lineal, lógica y álgebra abstracta. Una constante en el currículo de dichos cursos es el ciclo de enseñanza ACE (Actividades, Clase –discusión–, Ejercicios). Como su nombre lo señala, este tipo de instrucción comienza con una serie de actividades, diseñadas por el profesor y realizadas por los estudiantes, previa a cualquier tipo de intervención oral por parte del profesor. En el caso del ciclo ACE, estas actividades consisten en su totalidad de talleres en computador. Sin embargo, el diseño de dichas actividades no tiene porque estar restringido al laboratorio de computadores. Una alternativa más fácil de implementar, y que me ha dado muy buenos resultados, consiste en asignar una guía de un par problemas que los estudiantes intentan solucionar en grupos de tres personas. Idealmente, cada problema se extiende con una o dos preguntas adicionales que obligan a los estudiantes a profundizar su comprensión del conocimiento utilizado en su solución. Muchas veces, se le propone al grupo de estudiantes pensar en distintas soluciones para el mismo problema, o modificarlo de tal manera que el nuevo problema sea más ‘interesante’. Otras veces los problemas son conjeturas que deben estudiar y a partir de las cuales los estudiantes intentan establecer un teorema. Una vez los estudiantes han trabajado por unos 20 minutos en esta guía (o después de haberla estudiado individualmente en la casa), el profesor puede empezar una discusión abierta con el resto de la clase, en la que los distintos grupos exponen sus ideas y participan del desarrollo del curso. Claro, el éxito de este tipo de guías depende en gran parte de la selección de los problemas; éstos deben interesar al estudiante y deben poder extenderse, guiando la discusión hacia una presentación formal del material.

De esta manera, como fue señalado anteriormente, se propone un curso de cálculo diferencial en el cual la tradicional exposición del docente aparece en un lugar más apropiado: al final de la instrucción cuando puede ser aprovechada por la gran mayoría de los estudiantes, y no al comienzo cuando sólo algunos pocos la encontrarán útil. Adicionalmente, en dicho curso el estudiante trabaja activamente en el salón de clase y el profesor tiene el derecho (y la obligación) de delegar al estudiante la satisfactoria respuesta de sus propias preguntas, guiándolo por medio de una serie de actividades que lo conduzcan hacia una comprensión profunda del nuevo material.

Asimismo, el aprendizaje es mejorado cuando dichas actividades involucran la interacción social entre los estudiantes del curso. Al generar discusiones entre ellos, estas actividades sirven como plataformas que favorecen el desarrollo de habilidades meta-cognitivas importantes en el aprendizaje de las matemáticas. Exponiendo sus ideas públicamente el estudiante juzga continuamente su nivel actual de comprensión, y trabajando con sus compañeros de clase es introducido a un desarrollo científico de las matemáticas, en el que un trabajo constante y gradual conlleva a comprensiones cada vez más profundas del material.

### 2.2.3 Algunas estrategias alternativas

Un análisis de la presentación formal del conocimiento matemático por medio de la tradicional clase magistral, ha sugerido la creación de un espacio en el cual el estudiante tiene la oportunidad de participar activamente en el desarrollo de los temas del curso. Este espacio ha sido identificado con sesiones previas a la intervención del profesor, en las cuales el estudiante realiza tareas que encuentra interesantes y que lo guían hacia un desarrollo formal del cálculo. Asimismo, estas actividades giran alrededor de *raíces cognitivas*, o temas interesantes para el estudiante que facilitan la transferencia de su conocimiento previo hacia el aprendizaje de varios contenidos del curso. A continuación, presentaré dos campos de investigación en educación matemática que proporcionan ideas supremamente útiles en el diseño de este tipo de actividades.

#### a. Resolución de problemas

En el año de 1945, el matemático húngaro George Pólya publicó *How to solve it* (*Cómo solucionarlo*), un pequeño volumen que llegaría a convertirse en uno de los libros sobre educación matemática más vendidos del mundo[17]. En sus páginas, el autor desarrolla una guía práctica de los métodos por medio de los cuales se solucionan problemas en matemáticas, y organiza un diccionario de términos relacionados con la invención y el descubrimiento en esta área del conocimiento. Con esta publicación, Pólya se convirtió en uno de los más influyentes investigadores en lo que hoy se conoce como *mathematical problem-solving* (resolución de problemas en matemáticas), o *mathematical thinking* (pensamiento matemático), áreas de la educación matemática dedicadas al estudio del pensamiento matemático y su desarrollo en la

[17] *How to solve it* nunca se ha dejado de imprimir desde su publicación, ha vendido más de 1 millón de copias y ha sido traducido a 17 idiomas.

mente del estudiante. Hoy en día es difícil encontrar un estudio que investigue estas áreas sin hacer referencia a la obra de Pólya[18].

Antes de exponer algunas de las ideas desarrolladas por investigadores de esta área de la educación matemática, considero apropiado describir el tipo de problemas al cual se hace referencia cuando se habla de *resolución de problemas de matemáticas*. ¿Qué es un problema? Al realizar una búsqueda en la página Web de la Real Academia de la Lengua (*www.rae.es*) obtenemos:

> ***problema.*** *(Del lat. problema, y este del gr. p??ß??µa). m. Cuestión que se trata de aclarar. ||* ***2****. Proposición o dificultad de solución dudosa. ||* ***3****. Conjunto de hechos o circunstancias que dificultan la consecución de algún fin. ||* ***4****. Disgusto, preocupación. U. m. en pl. Mi hijo sólo da problemas. ||* ***5****. Planteamiento de una situación cuya respuesta desconocida debe obtenerse a través de métodos científicos.*

Si un matemático tuviera que definir *problema matemático* usando una de estas cinco definiciones, muy probablemente se inclinaría por la última. Para quien investiga en matemáticas, solucionar un problema requiere la creación y perfeccionamiento de un recurso a través de la formulación y análisis de distintas hipótesis, así como la posterior modificación o abandono de tales hipótesis. Así, podríamos decir que al solucionar un problema de matemáticas, el matemático realiza esencialmente los mismos procesos que se llevan cabo en el laboratorio de un científico. En palabras de Pólya: '*there is a grain of discovery in the solution of every problem*'[19] (Pólya, 1945). Es claro que esta característica no es exclusiva de los problemas que surgen en el contexto de las matemáticas. Así, por ejemplo, los problemas que atañen al área de la ingeniería y al desarrollo de tecnología demandan un proceso similar, en el

[18] Pólya publicó dos importantes trabajos adicionales sobre el tema: *Mathematics and Plausible Reasoning* (dos volúmenes) y *Mathematical discovery: On understanding, learning, and teaching problem solving* (dos volúmenes).

que, por medio de búsquedas sistemáticas, se alcanzan descubrimientos e invenciones de distintas clases. Incluso en nuestro lenguaje informal, un problema es una cuestión de cierta dificultad, cuya respuesta desconocida es alcanzada haciendo uso de nuestro ingenio. De esta manera, una situación cuya salida es conocida o fácilmente deducible, no es en realidad un problema.

Por otro lado, para muchos estudiantes un problema de matemáticas es una pregunta que se responde revisando una bibliografía determinada, la cual presenta ejemplos de preguntas similares y sus respectivas respuestas. Así, para aclarar las preguntas propuestas al final de un capítulo del libro de cálculo, el estudiante lee dicho capítulo y repasa los ejemplos disponibles. En este caso, solucionar un problema no es tanto una actividad creativa, sino una prueba de la adquisición de cierto tipo de información en la que el estudiante utiliza un método que de antemano se sabe útil en la búsqueda de la solución. Generalmente, este tipo de pruebas son llamadas *ejercicios*, y es así como las llamaremos de ahora en adelante.

De acuerdo con esta diferenciación, una pregunta puede ser calificada como *ejercicio* y más tarde como *problema*, dependiendo del sujeto que intenta solucionarla y del contexto en el cual es presentada. Así, una pregunta que logra sorprender al estudiante, para quien el contexto en el que se presenta la pregunta no determina inmediatamente un método para encontrar una respuesta, puede ser considerada un *problema*. Sin embargo, esa misma pregunta puede ser un *ejercicio* para quien ha respondido varias preguntas similares, o encuentra la respuesta siguiendo una receta anexada a la pregunta.

Notamos entonces que una variación en la presentación de una pregunta puede determinar su condición como *problema* o *ejercicio*. Veamos un ejemplo:

---

[19] 'Hay una gota de descubrimiento en la solución de todo problema'

a) Encuentre $D_x f(4)$, dado que $f(x) = 16 \cdot x^2$

b) Después de varios experimentos, un estudiante conjetura que después de $t$ segundos, un cuerpo que se suelta desde el reposo viaja en el vacío una distancia en pies de dieciséis veces el cuadrado de $t$. Así, por ejemplo, cuando lo deja caer por medio segundo, el objeto cae exactamente 4 pies y cuando lo deja caer por un segundo, el objeto cae 16 pies. ¿Es posible determinar la velocidad exacta del objeto después de 4 segundos de caída? De ser posible, encuentre dicha velocidad. De lo contrario, justifique por qué no es posible encontrarla.

Las dos preguntas son esencialmente iguales. Sin embargo, la solución de la primera (ejemplo de *ejercicio*) no demanda un análisis muy profundo (es suficiente recordar una fórmula de diferenciación), mientras que la segunda (ejemplo de *problema*) expone una situación un poco más compleja, que debe ser modelada por el estudiante para poder determinar las herramientas que le son útiles en su solución. Claro, quien ha determinado con anterioridad la velocidad del objeto después del primer segundo de caída, encontrará en b) un *ejercicio* sencillo.

De esta manera, aunque la naturaleza subjetiva de esta caracterización no permite establecer un límite claro entre *problemas* y *ejercicios*, los procesos mentales involucrados en la solución de estos dos tipos de cuestiones son muy distintos. En particular, los procesos mentales relacionados con la solución de un *ejercicio* son evidentemente más sencillos que aquellos relacionados con la solución de un *problema*, y son estos últimos los estudiados por quienes investigan en el área de *mathematical problem-solving* (resolución de problemas matemáticos).

Para nuestro marco teórico, es de suma importancia estudiar los métodos por medio de los cuales se soluciona un *problema*. Como ya lo habrá notado el lector, la solución de problemas demanda la capacidad de transferir eficazmente el conocimiento del estudiante; y como veremos más adelante, el entrenamiento en la solución de problemas puede llegar a constituir un elemento muy importante en el desarrollo de tal capacidad. Adicionalmente, solucionando problemas el estudiante se enfrenta a unas matemáticas más científicas y dinámicas, en las que las preguntas se resuelven por medio de actividades creativas y no mecánicas. Es este tipo de *problemas* al que se enfrentará el estudiante en su vida laboral, en la que muy probablemente no habrá un texto guía para cada situación problemática. Asimismo, por medio de sesiones dedicadas a la solución reflexiva de problemas, el estudiante aprende un método general para atacarlos y esto constituye una valiosa herramienta meta-cognitiva. En pocas palabras, la capacidad de solucionar problemas es una característica importante del tipo de comprensión que buscamos desarrollar en nuestros estudiantes.

¿Cómo podemos ayudar al estudiante a desarrollar una destreza en la solución de problemas? Lo primero que se debe hacer es invitar al estudiante a solucionar problemas. Como lo señala Pólya (1945), aprender a solucionar problemas es como aprender a nadar: es necesario enfrentarse a problemas para aprender a solucionarlos, así como es necesario lanzarse al agua para aprender a nadar. No podemos limitar nuestros cursos a clases magistrales, tareas que demandan la solución de ejercicios del texto guía cuya respuesta descansa en la página anterior, y exámenes que evalúan la capacidad del estudiante de solucionar dicho tipo de ejercicios. Debemos incluir un espacio para la solución de problemas. Muchos profesores piensan, con razón, que sus estudiantes no están preparados para solucionar este tipo de cuestiones, justificando así la carencia de pensamiento matemático en sus cursos. El estudiante, a su vez, no se siente preparado para enfrentar un problema de este tipo, y su visión de las matemáticas le hace pensar que hay una fórmula para cada pregunta que surge en esta área del conocimiento. "¿Cuál es la forma de solucionar este tipo de problemas?", suelen preguntar al profesor al comienzo de cada sección, como si lo único que necesitaran es memorizar un algoritmo.

De esta manera, el primer paso consiste en introducir un espacio en el cual los estudiantes tengan la oportunidad de enfrentarse a la solución de problemas. Este espacio no tiene que estar al margen del desarrollo curricular del curso; por el contrario, puede utilizarse para introducir sus diferentes temas y para hacer evidente la importancia de la formalización del conocimiento matemático. En general, resulta mucho más atractivo comenzar una nueva sección con la formulación de un problema del interés de los estudiantes (tal vez una aplicación de la teoría que se va a introducir), en lugar de hacerlo con la inmediata definición de un concepto. Entonces, a través de una serie de problemas se puede hacer caer en la cuenta al estudiante de las deficiencias de sus concepciones intuitivas, y dirigir la discusión hacia una formalización de tales ideas.

***Profesor:*** *Después de estos ejemplos, ¿quién se arriesga a explicarme qué quiere decir que una función sea continua en un punto?*

***Un estudiante:*** *¿Que su gráfica se pueda dibujar sin levantar el lápiz del papel?*

***Otro estudiante:*** *¿Qué su gráfica no tenga un hueco en ese punto?*

***Profesor:*** *Mmmm, estudien la siguiente función:*

$$g(x) = \begin{cases} x & \textit{si } x \textit{ es un número racional} \\ 2 & \textit{si } x \textit{ es un número irracional} \end{cases}$$

*¿Es esta función continua en algún punto?, ¿qué creen?*

En el anterior diálogo, la introducción de un problema prepara a los estudiantes para una definición formal de continuidad (además de hacer necesaria la revisión de $\mathbf{Q}$ y $\mathbf{R}$). Idealmente, los estudiantes discutirían este problema por unos minutos, luego el profesor daría alguna pista y dejaría la pregunta abierta para que la estudiaran fuera de clase. Claro, para encontrar el anterior ejemplo dispuse de todo el tiempo que quise. Encontrar un problema en clase, apropiado para un tema y audiencia determinados, es mucho más difícil. Esta es una de las razones por las cuales es supremamente importante preparar muy bien cada clase. Antes de llegar al salón, el profesor debe haber dedicado por lo menos una hora (este estimado es inversamente proporcional a la experiencia del docente) al diseño de la clase. En este esquema, preparar clase no se reduce a revisar las cuatro páginas de una sección del libro, con sus definiciones, teoremas, demostraciones, ejemplos y ejercicios. Aunque todo esto es necesario, el docente debe estar preparado para anticiparse a las dudas de sus estudiantes, así como para asignar tareas que ayuden a esclarecer dichas dudas.

Una vez los estudiantes tengan la oportunidad de enfrentarse a problemas de matemáticas con cierta frecuencia, el docente tiene la obligación de guiarlos en su entrenamiento. Schoenfeld (1985) encontró que (1) el conocimiento previo del estudiante, (2) sus técnicas de solución de problemas, (3) el control que tiene sobre dichas técnicas, y (4) su percepción del área de estudio, son los principales aspectos que influyen en la destreza de cualquier individuo para solucionar problemas. A continuación, se discutirán brevemente cada uno de estos cuatro aspectos:

- *El conocimiento previo del estudiante:*

  Es claro que por ingenioso que sea un estudiante, su capacidad de solucionar problemas siempre estará limitada por los recursos que tenga a su disposición. Es insensato esperar una pronta respuesta al problema del objeto que cae en el vacío, por parte de un estudiante que no ha sido introducido a los fundamentos del cálculo diferencial, o no sabe derivar. Solucionamos problemas haciendo uso de nuestro conocimiento, y por eso es tan importante que antes de asignar cualquier problema, el profesor conozca y tenga en cuenta el conocimiento previo de sus estudiantes. Una serie de ejercicios aburre y una serie de problemas a los que el estudiante no puede encontrar solución, desmotiva. El profesor debe proponer problemas que estén en el límite entre lo que el estudiante ya sabe y lo que puede aprender con facilidad[20].

Asimismo, al incitar la solución de problemas en el salón de clase se adquiere una muy buena oportunidad para estudiar el conocimiento previo del estudiante. Prestando atención a sus respuestas, el profesor puede detectar la presencia de obstáculos que puedan llegar a impedir la comprensión de nuevos conceptos. Esto es particularmente importante en un primer curso de cálculo diferencial, donde la formación matemática de los distintos estudiantes suele diferir muchísimo, y la calidad de esta formación es generalmente insuficiente para enfrentar un primer curso de matemáticas avanzadas[21]. Una vez tenga una idea del conocimiento previo de sus estudiantes, el profesor puede diseñar sesiones de solución de problemas (y guías de tareas) en las cuales el estudiante se enfrente a problemas cuyas soluciones cuestionen su inadecuado conocimiento. Recuerde que los obstáculos presentes en la mente del estudiante son conocimientos que en algún momento fueron útiles, y por tanto tienden a ser utilizados a pesar de su ineficacia en nuevas situaciones. De esta manera, como fue señalado anteriormente, indicar el error al estudiante no siempre arregla las cosas. Muchas veces es necesario organizarle un encuentro con un número considerable de situaciones en las que el obstáculo se muestre incorrecto, y por medio de las cuales el pasado éxito de dicho conocimiento se revele evidentemente parcial.

[20] Invito al lector a estudiar el concepto de Zona de Desarrollo Próximo (ZDP) desarrollado por Lev Vygotsky. La ZDP es el espacio entre el nivel de desarrollo actual (determinado por la capacidad de resolver un problema independientemente), y el nivel de desarrollo potencial (determinado por la capacidad de resolver un problema bajo la guía de un experto). De acuerdo con Vygotsky, es en la ZDP donde la instrucción del experto llega a ser efectiva.
[21] Muchas veces encontramos estudiantes en un curso de cálculo diferencial que todavía tienen serios problemas al enfrentarse a simples manipulaciones algebraicas. No tiene ningún sentido que este tipo de estudiantes pasen de un curso a otro, memorizando algoritmos, pero sin superar estas deficiencias.

- *Técnicas de solución de problemas:*

Por otro lado, existen ciertas técnicas para la solución de problemas de matemáticas que son utilizadas con frecuencia por expertos en este campo. El objetivo de quienes investigan esta área de la educación matemática consiste en identificar estas estrategias e intentar enseñárselas a los estudiantes. Una de estas heurísticas consiste en desarrollar el problema "al revés", estudiando primero la situación deseada, y buscando un camino de doble vía hacia las condiciones iniciales. Asimismo, muchos expertos suelen estudiar casos particulares de una proposición dada, esperando encontrar ideas o pistas que faciliten la demostración de la proposición general. También se suele comenzar solucionando un problema similar al problema original, lo cual ocasionalmente simplifica la solución de este último. En otras oportunidades se separa el problema dado en diferentes casos, los cuales son solucionados por aparte. Otros tantos problemas son solucionados haciendo uso de la poderosa inducción matemática.

Éstas y muchas otras estrategias son utilizadas a diario por aquellas personas con experiencia en el arte de solucionar problemas[22]. Sin embargo, el estudiante promedio nunca llega a conocer estas estrategias. Para una gran cantidad de ellos la técnica consiste en preguntarse "¿cuál es la respuesta?", y esperar a que por medio de un proceso inexplicable, dicha respuesta se presente. Muchos otros estudiantes buscan la forma de aplicar el último algoritmo visto en clase, sin antes intentar entender el problema en cuestión. Sin embargo, si el conocimiento de buenas estrategias fuera suficiente para desempeñarse exitosamente en la solución de problemas de matemáticas, se podría crear un listado de aquellas estrategias utilizadas por los expertos, para luego entregárselo a cada estudiante del curso. Es claro que este listado por sí solo no sería de gran ayuda:

ante un problema, el estudiante no sabría qué estrategia utilizar, y al aventurarse a aplicar una de ellas, probablemente no tendría la habilidad meta-cognitiva de advertir si tal estrategia lo está acercando a la solución o no.

- *Control:*

Esta es la razón por la cual es necesario desarrollar cierto control sobre el uso de dichas estrategias. Es muy importante que se hagan explícitas en el salón de clase y que sean señaladas cuando se presentan útiles en la solución de un problema. Sin embargo, también es importante que el estudiante desarrolle habilidades meta-cognitivas que le permitan utilizar dichas estrategias de una manera efectiva. En pocas palabras, el listado es útil, pero hay que saber utilizarlo. En *How to solve it*, Pólya presenta un esquema general para solucionar problemas, el cual consta a su vez de cuatro etapas: entender el problema, diseñar un plan, llevarlo a cabo y reflexionar acerca del problema una vez es solucionado. Llegar a dominar este esquema constituye una muy importante habilidad meta-cognitiva para el estudiante de cálculo diferencial. Como fue señalado anteriormente, muchos estudiantes se lanzan a implementar una estrategia sin antes haber estudiado el enunciado del problema. Así, al reconocer un elemento familiar en tal enunciado, el estudiante se emociona y comienza a implementar el algoritmo asociado a dicho elemento, encaminándose en una búsqueda desorganizada, donde no hay un plan, o un control del procedimiento. Cuando creen haber terminado, cierran el cuaderno o entregan el papel. En resumidas cuentas, se saltan a la tercera etapa del esquema y sólo *llevan a cabo*... algo.

---

[22] Para el lector interesado en este tema, recomiendo los estudios de Pólya (1945) y Schoenfeld (1985).

La idea no es obligar al estudiante a memorizar y recitar estas cuatro etapas, la idea es hacerle entender su importancia: del entendimiento del enunciado depende la elección de un buen plan; del tiempo que dedique diseñando el plan depende el tiempo que se demorará implementándolo; del cuidado con el que lleve a cabo el plan depende la obtención de una respuesta correcta; y de la discusión y reflexión acerca del problema depende el éxito de una futura transferencia de esa solución a la solución de otros problemas. Cada vez que soluciona un problema en el tablero, el profesor debe hacer énfasis en cada una de estas etapas, demostrando la importancia de una buena administración de recursos al enfrentarse a un problema. Muchos profesores se limitan a escribir una lista de pasos en el tablero... no nos sorprende entonces que el estudiante empiece a hacer lo mismo una vez ojea el enunciado. Así, es importante que al solucionar un problema en el tablero, el profesor implemente el esquema de Pólya con ayuda de los estudiantes: "primero entendamos el problema; ¿qué dice el problema?, dígalo en sus propias palabras, ¿qué se pide?, ¿qué se da?", "ahora que hemos entendido el problema, ¿quién tiene un plan?... ¿algún otro plan?, ¿cuál escogemos?: recuerden que no queremos perder tiempo en un mal plan". Si proponen una mala estrategia, llévela a cabo por unos minutos y entonces pregunte: "¿sí estamos yendo a algún lado con esto?". Entonces el estudiante aprenderá a hacerse esas mismas preguntas cuando se encuentre solucionando un problema sin ayuda alguna.

Asimismo, el trabajo en grupo ha resultado instaurar un ambiente propicio para el desarrollo de buenas habilidades meta-cognitivas. Cuando varios estudiantes se reúnen a discutir un problema, la mente de cada uno de ellos esta continuamente criticando y analizando los argumentos de sus otros compañeros. De esta manera, durante varias sesiones de solución de problemas en grupo, los estudiantes se terminan acostumbrando a controlar los planes y estrategias diseñados para alcanzar un resultado determinado. Estos mecanismos de control (que no son más que juicios críticos que se activan durante un proceso de aprendizaje), terminan siendo activados a nivel personal, cuando cada estudiante intenta solucionar un problema por sí mismo.

- *Percepción del área de estudio:*

  Finalmente, como fue señalado en la sección 2.1.1.b., el sistema de creencias del estudiante tiene una gran influencia en su capacidad de solucionar problemas. En particular, la percepción que tiene el estudiante acerca del conocimiento matemático, su desarrollo y su utilidad, puede llegar a determinar (y limitar) el tipo de recursos que utiliza en la solución de un problema y la forma como espera alcanzar dicha solución. Considero que no hay mejor forma de fomentar una percepción favorable (y genuina) del mundo de las matemáticas que guiando al estudiante en su enfrentamiento a la resolución de problemas. Al ver cómo se utilizan las herramientas aprendidas en el salón de clase en la solución de una gran variedad de problemas, el estudiante se percata del alcance del conocimiento matemático y es motivado a utilizarlo en contextos ajenos al académico. Lo mismo sucede al trabajar en un ambiente investigativo, en el cual se estudian diferentes hipótesis en la solución de un problema y el conocimiento matemático es construido con ayuda de sus compañeros de clase.

De esta manera, aunque el entrenamiento del estudiante en la solución de problemas de matemáticas no resulta ser una tarea fácil, su importancia en el desarrollo de (1) la capacidad de transferir su conocimiento de manera eficaz, (2) habilidades meta-cognitivas útiles en futuros cursos de matemáticas y (3) una percepción favorable del mundo de las matemáticas, justifica la implementación de sesiones dedicadas principalmente a la solución de problemas.

**b. El uso de nuevas tecnologías**

Hasta hace muy poco tiempo, el empleo de tecnologías en el salón de clase se reducía al uso de una calculadora que evitaba la implementación manual de algunos algoritmos ya dominados por el estudiante. En este sentido, una vez el estudiante desarrolla cierta destreza para multiplicar, se le permite utilizar la calculadora para evaluar $33948 \times 4893$. En el caso de cursos de matemáticas a nivel universitario, es común encontrar estudiantes utilizando sus calculadoras en el manejo de matrices (solución de sistemas de ecuaciones), para trazar gráficas de funciones, en el campo de la probabilidad y estadística (regresiones lineales y exponenciales), en la programación y aplicación de métodos numéricos (la regla de Simpson o la técnicas de Runge-Kutta), para almacenar y aplicar fórmulas, en la conversión de unidades; y claro, para sumar, restar, multiplicar y dividir.

Sin embargo, hoy día nuestras universidades cuentan con laboratorios de computadores destinados a servir al profesor como herramienta en la formación matemática de sus estudiantes y no únicamente como herramienta para el estudiante en la solución de problemas. Este aspecto educativo del uso de tecnologías en el salón de clase, por medio del cual se pretende facilitar el aprendizaje de conocimiento matemático avanzado, ha sido ampliamente estudiado en las últimas tres décadas y ha llegado a establecerse como una de las principales ramas de investigación en educación matemática. En la actualidad se celebran importantes coloquios anuales sobre este tema, como la Conferencia Internacional sobre Tecnología en Matemáticas

Universitarias (*International Conference on Technology in Collegiate Mathematics*, ICTCM), la Conferencia Asiática de Tecnología en Matemáticas (*Asian Technology Conference in Mathematics*, ATCM), y la Conferencia Internacional sobre el uso de Tecnologías en la Enseñanza de las Matemáticas (*International Conference on Technology in Mathematics Teaching*, ICTMT)[23]. Asimismo, se publican revistas como el *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, y el *International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education*. Siendo éstas algunas de las más destacadas conferencias y publicaciones sobre el tema a nivel mundial, no son las únicas. En varios países y departamentos de matemáticas alrededor del mundo encontramos muchos otros espacios dedicados a la difusión de investigaciones sobre el uso de tecnología en la clase de matemáticas.

Adicionalmente, en el caso particular de la enseñanza del cálculo, encontramos varios proyectos de reforma del curso tradicional que dependen fuertemente del uso de computadores y calculadoras. Entre tales proyectos encontramos: *SimCALC* (University of Massachusetts – Dartmouth), *Project CALC* (Duke University), *Calculus in Context* (Smith College, Hampshire College, Amherst College, Mount Holyoke College, University of Massachusetts –Amherst). *Calculus, Concepts, Computers and Cooperative Learning* (Purdue University), *Calculus Consortium Project* (Harvard University), y *Calculus and Mathematica* (University of Illinois).

En esta sección expongo algunas de las ideas presentadas por estos proyectos y difundidas a través de las revistas y conferencias anteriormente nombradas. Igualmente, estudio varios inconvenientes relacionados con el uso educativo de este tipo de herramientas tecnológicas.

---

[23] La ICTMT se celebra cada dos años.

¿Por qué utilizar nuevas tecnologías en el salón de clase?, ¿cómo hacerlo? y ¿en qué momento? son importantes preguntas relacionadas con la introducción de tecnologías en un curso de cálculo diferencial. Para algunos profesores, la disponibilidad de este tipo de tecnologías justifica por sí sola su utilización en la enseñanza de las matemáticas. Otros consideran que la aparición de procesadores cada vez más rápidos y buenos programas computacionales ha cambiado la forma como se hacen matemáticas en la actualidad, volviendo necesaria la introducción de este tipo de herramientas en su enseñanza. También encontramos quienes ven en estas nuevas tecnologías una oportunidad para investigar un nuevo acercamiento al aprendizaje de las matemáticas, alejando al estudiante de manipulaciones algebraicas rutinarias e involucrándolo en un cálculo lleno de gráficas y conceptos dinámicos. De esta manera, consideran que estas nuevas herramientas pueden llegar a hacer del cálculo una materia mucho más accesible a la gran mayoría de estudiantes, quienes no llegan a comprender algunos de los conceptos más importantes del cálculo diferencial en el salón de clase tradicional.

En esta sección se estudiarán estas visiones diferentes, pero no excluyentes, en tres categorías: (1) el uso de tecnología como una herramienta para lograr concentrar la instrucción en una comprensión conceptual del material y no únicamente en el dominio de ciertos algoritmos; (2) el uso de la programación computacional como soporte en la construcción de los diferentes conceptos del curso, y (3) la utilización de un ambiente gráfico e interactivo para complementar la aproximación analítica tradicional al curso de cálculo diferencial.

Con la aparición de sistemas de álgebra computacional como *Mathematica*, *Mathcad*, *Maple* y *Matlab*, capaces de llevar a cabo cálculos numéricos y simbólicos con gran precisión y rapidez, muchos profesores y estudiantes han empezado a cuestionar la importancia de la tradicional enseñanza de algoritmos, como lo son las reglas de diferenciación e integración y los métodos para solucionar ecuaciones diferenciales. En principio, se argumenta que en el curso tradicional se invierte mucho tiempo en la enseñanza de dichos algoritmos, quedando muy poco espacio para pensar acerca del significado y utilidad de los conceptos detrás de ellos. Así, por ejemplo, parece haber una gran preocupación por la enseñaza de las técnicas de diferenciación, pero poco se discute acerca del concepto de diferenciabilidad. Esto es aún más notorio en el caso del curso de cálculo integral, el cual es visto por el estudiante como un curso de recetas de integración. Adicionalmente, ante la accesibilidad a estos poderosos sistemas computacionales, algunas personas consideran inapropiado el gran empeño puesto en la enseñanza de dichos algoritmos, en lugar de utilizar tales herramientas. Como alternativa, un buen uso de este tipo de paquetes computacionales le permitiría al estudiante concentrarse en los conceptos mientras el computador lleva a cabo los algoritmos. Esto no quiere decir que ahora, una vez inventadas las calculadoras, podamos dejar de enseñarle a sumar al niño. Lo que se quiere hacer caer en la cuenta es que una vez el estudiante sabe en qué consisten estos algoritmos, puede ocasionalmente delegar su ejecución al computador, obteniendo así la oportunidad de utilizar el resultado en una reflexión conceptual o en una aplicación compleja. En el caso de la suma, el estudiante tiene la oportunidad de experimentar con una gran cantidad y variedad de números, y en el caso de la diferenciación, con una gran cantidad y variedad de funciones. Es claro que la mayor dificultad de esta aproximación consiste en lograr que el estudiante utilice el sistema de álgebra computacional como una herramienta para realizar una reflexión conceptual de los temas del curso, y no como una caja mágica que ofrece todas las respuestas. En este sentido, muchos profesores se oponen al uso de estos sistemas en el salón de clase argumentando que con ellos el aprendizaje del estudiante se reduce a saber cuáles botones presionar para obtener la respuesta correcta. Sin embargo, esta dificultad se vence asignando *problemas* que (1) no especifiquen cómo utilizar la herramienta computacional, y (2) cuya respuesta demande un análisis del objeto producido por la herramienta. Por ejemplo, no se le pide al estudiante que haga uso de un sistema de álgebra computacional para obtener la derivada de $f(x) = 3e^{10x} + p$, sino que estudie la familia de funciones $f_{a,b,c}(x) = a^{bx} + c$ y las pendientes de sus gráficas cuando $x = 0$, usando la herramienta para experimentar con una gran cantidad de funciones pertenecientes a esta familia. En general, este tipo de software puede llegar a favorecer el estudio y descubrimiento de patrones por parte del estudiante, lo cual constituye un importante elemento en un currículo inclinado hacia la introducción gradual del formalismo matemático, así como en un desarrollo investigativo de los diferentes temas del curso.

Por otro lado, algunos investigadores como Dubinsky y sus colegas del grupo RUMEC (*Research in Undergraduate Mathematics Education Community*)[24], han encontrado en la programación computacional una poderosa herramienta para la construcción mental de los conceptos más importantes del cálculo diferencial. De esta manera, grupos de tres o cuatro estudiantes son enfrentados al diseño de programas en ISETL (Interactive SET Language), un lenguaje computacional cuya sintaxis es muy similar a la utilizada en la notación matemática estándar[25]. En estas tareas los estudiantes deben utilizar el lenguaje mencionado para la construcción computacional de diferentes conceptos del curso.

Al diseñar un programa computacional, nuestro conocimiento de la idea que construimos es evaluado por un juez inflexible: el computador. De esta manera, durante la reproducción de un objeto matemático en un ambiente computacional, así como al procurar que un computador lleve a cabo un proceso matemático dado, nuestros procedimientos son interiorizados y

[24] El lector puede encontrar la página WEB del grupo RUMEC en la siguiente dirección electrónica: http://www.cs.gsu.edu/~rumec/

[25] En http://isetlw.muc.edu/isetlw/about.htm se narra una breve historia del desarrollo del lenguaje y se encuentra un vínculo desde el cual se puede descargar el compilador gratuitamente.

perfeccionados hasta que el computador acepte nuestra construcción y ésta se comporte de la manera esperada. En este sentido, programar un concepto matemático puede ser visto como una exigente materialización de nuestro entendimiento de dicho concepto. Por otro lado, una vez programado, el estudiante puede reflexionar acerca del objeto construido, inspeccionar sus propiedades, ponerlo a prueba y modificarlo. Este tipo de estudio puede entonces conducir a la elaboración conjunta (entre el profesor y los estudiantes) de la definición del concepto empleado en el programa. En este sentido, la introducción de la programación computacional en el salón de clase apoya un estudio investigativo del cálculo diferencial.

Veamos en un ejemplo los dos aspectos mencionados anteriormente:

```
h:= func(x);
      return x²;
      end;
i:= func(x);
      return x+1;
      end;
co := func(f,g);
      return func(x);
            return (f(g(x));
            end;
      end;
```

El anterior programa define la función **co**, la composición de dos funciones previamente definidas. Así, al ingresar el comando **co(h,i)(3);** obtenemos el valor 16. La introducción de la composición de funciones haciendo uso de la programación en ISETL es un caso ampliamente estudiado por Dubinsky. Como es señalado en Dubinsky *et al.* (1991), la mayoría de los estudiantes de un curso de cálculo diferencial encuentran muy difícil la construcción de la función **co**. Esto se debe, en gran parte, a la dificultad de concebir una función como un objeto que, por ejemplo, puede ser modificado (o asignado a otro objeto) por otra función. Es decir, muchos estudiantes llegan a entender una función como un proceso[26], pero pocos logran entenderla como un objeto. Sin embargo, la programación computacional de la función **`co`** demanda la construcción de una función que 'recibe' dos funciones (como objetos) y 'devuelve' otra. En general, la definición de funciones en ISETL hace un énfasis especial en el dominio y rango de la función. La segunda línea del código de la función **`co`**,

```
return func(x);
```

hace bastante explícito el tipo de objetos que encontramos en su rango. Así, esta construcción computacional requiere de una construcción mental que enriquece la noción de función que posee el estudiante. Por otra parte, una vez el estudiante ha logrado perfeccionar esta construcción, tiene la posibilidad de experimentar con ella y estudiar sus propiedades: la relación entre el dominio de las funciones originales y el dominio de la función composición y la relación entre los rangos de dichas funciones.

> *Cuando una idea abstracta se realiza o representa en un computador, entonces se concreta en la mente, por lo menos en el sentido de que existe (electro-magnéticamente, si no físicamente). No sólo puede utilizarse lo construido por el computador para realizar procesos representados por la idea abstracta, sino que puede ser manipulado, se le pueden hacer cosas. Esto tiende a hacerlo más concreto, especialmente para la persona que lo construyó. En efecto, es en general cierto que cuando una persona construye algo en un computador, una construcción correspondiente se realiza en la mente de la persona*. (Dubinsky *et al*., 1991. Original en inglés)

[26] Es importante notar que para muchos estudiantes este proceso se limita a reemplazar una variable de una fórmula algebraica por un valor numérico.

Así, cada construcción hecha en un computador es acompañada por una construcción paralela a nivel mental. De esta manera, la programación computacional de los conceptos del curso afecta la mente del estudiante, provocando una construcción mental relacionada con dichos conceptos. En este esquema, el profesor determina las construcciones mentales que considera necesarias para la comprensión de un contenido dado, y diseña talleres en los cuales los estudiantes deben realizar las construcciones en un computador. Como fue señalado en un numeral anterior, una vez se poseen las estructuras cognitivas apropiadas, el aprendizaje sucede de una manera casi automática.

Una de las desventajas más comunes al introducir talleres de programación computacional en el currículo del curso de cálculo diferencial, consiste en la incomodidad y falta de interés por parte de muchos estudiantes (¡y profesores!) a la hora de escribir código en ISETL. La otra desventaja consiste en la necesidad de un curso de programación en el cual los estudiantes se familiarizan con el lenguaje en cuestión. Sin embargo, no podemos ignorar los resultados obtenidos por el grupo RUMEC: una vez se toma la decisión de utilizar estos talleres como parte fundamental del curso y se dedica el tiempo necesario para familiarizar al estudiante con el lenguaje computacional, este tipo de construcciones pueden llegar a tener un efecto profundamente positivo en la conceptualización de los distintos temas del curso.

Por último, ante la necesidad actual de enseñar muchas más matemáticas a muchísimos más estudiantes que en cualquier otro momento de la historia de la humanidad, una creciente cantidad de investigadores ha encontrado en las interfases y los dispositivos electrónicos de los computadores actuales, un medio para introducir varios conceptos del cálculo diferencial que parece haber resultado bastante atractivo entre los estudiantes del curso. Dado que la gran mayoría de estudiantes que hoy toman cursos de cálculo diferencial no está inscrita en un programa de matemáticas 'puras'[27], muchos educadores matemáticos se han embarcado en la búsqueda de herramientas pedagógicas efectivas con estudiantes no matemáticos. De esta manera, investigadores como David Tall, David Smith (investigador principal de *Project CALC*) y Jim Kaput (investigador principal de *SimCALC*), han encontrado que cierto uso de este tipo de interfases y dispositivos computacionales en el salón de clase, como una alternativa a la presentación analítica tradicional del cálculo diferencial, ha resultado ser muy llamativo para aquellos estudiantes que no buscan convertirse en matemáticos, pero sí necesitan comprender las herramientas del cálculo para lograr un buen desempeño en su campo de estudio. En términos de los investigadores del proyecto *SimCALC*,

> *El objetivo* [del proyecto] *es democratizar el acceso a las* Matemáticas del Cambio *para el gran público de estudiantes, combinando el uso de tecnología avanzada de simulación con un currículo innovador que comienza en edades tempranas e incluye ideas poderosas que se extienden más allá del cálculo tradicional* (Tomado de la página de INTERNET del proyecto: www.simcalc.umassd.edu. Original en inglés).

En este caso, el uso de tecnología en el salón de clase consiste principalmente en la interacción con representaciones gráficas de funciones, el empleo de dispositivos que capturan y representan funcionalmente la información de un experimento físico realizado en clase (e.g. el movimiento de un estudiante), así como equipos que controlan el movimiento de un aparato mecánico (e.g. un carro de juguete) utilizando funciones definidas en un computador[28]. Haciendo uso de este tipo de tecnología se pretende adelantar un estudio de los conceptos del

[27] De acuerdo a un estudio realizado por J.G. Harvey (doctor en matemáticas de la universidad de Tulane), alrededor de 700000 estudiantes (tanto de colegio como universidad) cursaban un curso de cálculo en los Estados Unidos de Norteamérica en el año de 1993. Sin embargo, sólo 12820 estudiantes se graduaron de un programa de matemáticas en ese país en el año de 1997 (Estudio citado en Tall, 2002)

[28] Estos dispositivos, y su papel en la enseñanza del concepto de función, serán estudiados con mayor detalle en la sección 3.1.3

cálculo en el cual el estudiante tiene la oportunidad de hacer uso de sus sentidos para percibir e interactuar con representaciones físicas de dichos conceptos, antes de enfrentarse al simbolismo matemático utilizado para representarlos. Desafortunadamente, este tipo de estudio de las matemáticas desaparece muy temprano en el currículo académico de una gran cantidad de estudiantes. Así, aunque inicialmente se incentiva a utilizar los dedos para aprender a sumar y se promueve la manipulación de figuras geométricas antes de su definición formal, poco a poco nuestros cursos de matemáticas sumergen al estudiante en la profundidad del simbolismo matemático. Algunos investigadores (Tall, *en imprenta*; Smith *et al.*, 2002; Kaput, 2000) han encontrado que este tipo de interacción física suele ser primordial para el estudiante promedio a la hora de comprender un concepto matemático abstracto. Estas experiencias constituyen una base concreta del conocimiento matemático, que acerca los abstractos conceptos del análisis al conocimiento previo del estudiante (en general, de una naturaleza mucho más física que abstracta). Así, la aparición de tecnologías que permiten un estudio más sensorial del cálculo diferencial promete acercar esta materia al estudiante promedio, para quien el tradicional estudio simbólico de las matemáticas no llega a ser tan amable.

En la sección 2.2.2.a de este proyecto se señala un buen ejemplo del uso pedagógico de este tipo de tecnología. En dicho numeral se expone la idea de diseñar la presentación del concepto de diferenciabilidad alrededor de la noción de “rectitud local”. Con “rectitud local”, D. Tall (1992, *en imprenta*) hace referencia a la apreciación intuitiva de que una función es diferenciable en un punto si y solamente si su gráfica alrededor de dicho punto se endereza a medida que es ampliada. En este caso, la diferenciabilidad de una función no depende de la existencia de un límite simbólico, sino de una confirmación física obtenida al ampliar una gráfica haciendo uso de un recurso computacional. Esto no quiere decir que el concepto de límite deba ser eliminado del currículo; al contrario, esta presentación pretende preparar una vía cómoda para llegar a tal formalismo y construye una estructura que facilita la presentación intuitiva de otros conceptos como el de ecuación diferencial y, más adelante, el de variedad diferencial. Adicionalmente, este tipo de experiencias pueden ser guiadas para que el estudiante se percate de la utilidad del simbolismo matemático, así como de la necesidad e importancia del formalismo matemático.

Uno de los inconvenientes más comunes del uso de este tipo de tecnología consiste en el alto riesgo de abandonar la presentación de un concepto en un nivel superficial. Muchas veces, debido tal vez al tiempo requerido para diseñar, implementar y evaluar un taller computacional, perdemos la oportunidad de usar el producto de esta experiencia en una reflexión conceptual del tema estudiado. Así, la presentación se limita a una simple actividad lúdica, carente de significado matemático. Por otro lado, las representaciones visuales y numéricas generadas por una calculadora o un computador, no son más que un modelo discreto de las matemáticas del continuo. De esta manera, cuando este tipo de tecnologías pierde el estatus de herramienta y es utilizada como fuente de verdades matemáticas, su uso en el salón de clase puede llegar a favorecer el establecimiento de nuevos obstáculos en el aprendizaje de las matemáticas.

Es importante notar que, en general, el uso de tecnologías en el salón de clase ha demostrado ser virtualmente ineficaz cuando se hace al margen del desarrollo curricular del curso, sin un objetivo claro y un seguimiento organizado. Así, por ejemplo, varios estudios señalan que una implementación arbitraria y desorganizada del uso de sistemas de álgebra computacional no ha ofrecido un beneficio significativo en la enseñanza del cálculo diferencial (Smith *et al*., 2002; Dubinsky *et al.*, 1991). En pocas palabras, cuando la introducción de este tipo de tecnologías se hace gratuitamente, como una actividad más, se corre un alto riesgo de perder el tiempo. Al respecto, uno de mis profesores de matemáticas, quien a su vez era un muy buen matemático, decía que el uso de herramientas computacionales en el salón de clase a menudo semeja un intento de subir escaleras utilizando una motocicleta: “hay que utilizar la herramienta adecuada para cada tarea”. En este sentido, es importante tener objetivos claros (especificando los resultados que se quieren obtener) cuando utilizamos un tipo dado de tecnología en la enseñanza del cálculo diferencial. Igualmente, es fundamental que dicho uso sea integrado como complemento de otras actividades, logrando que el estudiante aprecie su valor pedagógico, así como el papel que cumple en el currículo del curso.

## 2.3 A la hora de evaluar

Una vez diseñadas las estrategias que nos ayudarán a alcanzar los objetivos del curso, lo más natural es evaluar su efectividad. Así, con la idea de identificar las virtudes y defectos de estas estrategias, los profesores nos vemos en la tarea de crear e implementar distintos tipos de herramientas de evaluación (siendo las más comunes los exámenes y las encuestas). Sin embargo, evaluar un curso no es nada sencillo: ¿qué evaluamos?, ¿cómo lo hacemos?, ¿cómo interpretamos los resultados de la evaluación?, ¿qué hacemos con ellos? No siempre se evalúa lo que se pretende evaluar y muchas veces se interpretan de una manera frívola los resultados de las evaluaciones. Adicionalmente, la evaluación no está por encima del proceso enseñanza-aprendizaje; por el contrario, las herramientas que utilizamos para evaluar nuestros cursos tienen una gran influencia en su desarrollo y efectividad. La siguiente cita de Lynn Arthur Steen[29] nos ofrece un buen ejemplo:

> *La evaluación no sólo le asigna un valor a las cosas, también identifica las cosas que valoramos*
> (Steen, 1999. Original en inglés)

Así, a pesar de lo que decimos a nuestros estudiantes acerca de los objetivos del curso y las matemáticas en general, ellos siempre consideran que lo más importante de lo aprendido es lo que se pregunta en los exámenes. En general, sin importar cuán apropiadas sean otras de las estrategias de enseñanza utilizadas, una mala evaluación puede poner en peligro el éxito del curso.

De esta manera, la evaluación de un curso es una tarea compleja, un aspecto del proceso educativo que demanda sus propias estrategias y herramientas. En esta sección del proyecto presentaré algunas características de una evaluación tanto efectiva como formativa; es decir, una evaluación que nos permita establecer la efectividad de los diferentes aspectos del curso, y que a su vez juegue un papel positivo en el desarrollo y evolución del mismo. A continuación, estudiaré algunas de las herramientas de evaluación usualmente implementadas en un curso universitario de matemáticas, e indicaré maneras de aprovechar al máximo algunos otros recursos que no suelen jugar un papel importante en nuestras evaluaciones.

### 2.3.1 Características de una evaluación eficaz y formativa

#### a. Los objetivos como punto de referencia

Estudiamos la efectividad de un curso averiguando hasta qué punto se han alcanzado sus objetivos. Sin embargo, en ocasiones nuestras evaluaciones no tienen nada que ver con los objetivos planteados. ¡Al dictar mi primer curso universitario ni siquiera los conocía! Si me hubieran preguntado, probablemente hubiera dicho que la idea era lograr el aprendizaje del cálculo por parte de los estudiantes, pero estoy seguro de que en aquel momento no tenía muy claro en qué consistía dicho aprendizaje. ¿Qué evaluamos cuando no tenemos en cuenta los objetivos del curso? ¿para qué lo hacemos? Muchas veces averiguamos si el estudiante es capaz de solucionar cierto tipo de ejercicios relacionados con el tema enseñado, pero como fue indicado al estudiar la capacidad de transferencia, el desempeño en este tipo de pruebas no

---

[29] Steen, doctor en matemáticas de MIT y ex presidente de *The Mathematical Association of America* (MAA), ha participado en la reforma de la enseñanza del cálculo con la publicación de varios artículos (e.g. Steen, 1988).

siempre es una buena medida del nivel de comprensión del tema. Al descuidar los objetivos del curso podemos estar formando, inadvertidamente, estudiantes que sólo tienen éxito en exámenes con ejercicios del libro, o estudiantes que además de aprender cálculo también aprenden a odiarlo.

Adicionalmente, tenemos que estar atentos a lo que nuestras evaluaciones dicen al estudiante: exámenes y tareas llenas de ejercicios de rutina borrarán todo lo que hayamos dicho acerca de la importancia de la solución de problemas y el carácter investigativo del quehacer matemático. Recordemos que para nuestros estudiantes, "las matemáticas *son* las matemáticas que evaluamos" (Steen, 1999). En ocasiones evaluamos la aplicación de algoritmos y la solución de ejercicios mecánicos debido a la facilidad con la cual calificamos este tipo de pruebas. Sin embargo, no podemos reducir nuestra evaluación a aquellos conocimientos y habilidades que podemos evaluar con facilidad; debemos evaluar lo que hemos considerado fundamental en el curso: sus objetivos.

Teniendo en cuenta lo anterior, considero apropiado recordar los objetivos presentados en la sección 2.1.1.: **primero**, que el conocimiento adquirido por el estudiante pueda ser *transferido eficazmente* a diferentes contextos; **segundo**, que el estudiante desarrolle habilidades *meta-cognitivas* que mejoren su desempeño en el proceso de aprendizaje; y **tercero**, que el estudiante cultive una *sana percepción de las matemáticas*, percepción que lo motive a estudiar y a utilizar el conocimiento comprendido. De esta manera, las evaluaciones de nuestros cursos deben aclarar en qué casos y hasta qué punto se han alcanzado estos tres objetivos. En cuanto al primero de ellos, es importante evaluar la capacidad del estudiante de usar eficazmente el conocimiento aprendido en diversos tipos de situaciones: una conversación, una exposición, un examen, un proyecto, en la solución de problemas, etc. Teniendo en cuenta el segundo objetivo, debemos preocuparnos por averiguar cómo estudian matemáticas los estudiantes, cómo responden ante el fracaso (o el éxito) en la aplicación del conocimiento matemático estudiado, cómo enfrentan una situación problemática, etc. Finalmente, el tercer objetivo nos lleva a examinar la opinión del estudiante con respecto a las clases de matemáticas, el quehacer matemático y el lenguaje matemático en general.

Estos objetivos deben ser divulgados a los estudiantes, así como la manera por medio de la cual serán evaluados a lo largo del curso. Al hacer público el objetivo de cada una de nuestras evaluaciones, el estudiante sabe qué es lo que se evaluará, por qué se evaluará y qué haremos con esa evaluación. Para nadie es secreto que la gran mayoría de nosotros concentramos casi toda nuestra atención en un único aspecto de las evaluaciones: la nota o calificación (que deberíamos llamar *cuantificación*). Considero que esto se debe parcialmente a que tanto estudiantes como profesores olvidamos los verdaderos objetivos del curso. Para muchos de nuestros estudiantes (particularmente los más jóvenes), el objetivo detrás de tanto estudio es obtener buenas calificaciones. Es obvio que si este fuera el objetivo del curso, entre todos nos sería terriblemente fácil alcanzarlo.

Para evaluar un curso con los objetivos señalados debemos diseñar diversos tipos de herramientas de evaluación: conversaciones, exámenes escritos, exámenes orales, encuestas, proyectos a largo plazo, etc. Estas y otras herramientas serán estudiadas en detalle más adelante.

### b. Retroalimentación continua

Un canal de comunicación permanentemente abierto entre el docente y sus estudiantes hace posible un tipo de evaluación que promueve la efectividad de las estrategias de enseñanza utilizadas. Como veremos a continuación esta retroalimentación beneficia tanto el trabajo del profesor, como el trabajo del estudiante.

Por una parte, una evaluación frecuente brinda al profesor un esquema puntual de las habilidades, dificultades y opiniones de los estudiantes en cualquier momento del curso. A su vez, este estudio del desempeño de los estudiantes favorece la sincronización de las estrategias de enseñanza de acuerdo a las particularidades de cada curso. Esto es muy importante dada la naturaleza de los obstáculos presentes en el conocimiento previo del estudiante, los cuales pasan desapercibidos ante la carencia de mecanismos que permitan su pronta identificación. Por medio de una evaluación frecuente, el profesor tiene la oportunidad de estudiar el conocimiento que sus estudiantes usan en clase y responder al uso de concepciones erróneas asignando actividades y contraejemplos que contribuyan al diseño de una base cognitiva adecuada para la construcción del nuevo conocimiento. Entre más información tenga sobre el conocimiento previo, desempeño y opiniones del estudiante, mejor preparado estará el profesor para abordar un tema nuevo.

Adicionalmente, una evaluación frecuente facilita la formulación de inferencias válidas para justificar los resultados de una prueba particular. Estos resultados reflejan la efectividad de muchos aspectos del curso: la instrucción, la preparación y participación de los estudiantes, la bibliografía utilizada, el programa del curso, etc. Nuestra capacidad de realizar diagnósticos acertados al analizar estos resultados depende de nuestro conocimiento del curso. Cuando las únicas interpretaciones que se hacen al obtener un resultado negativo son "los estudiantes evaluados son muy brutos", o "no trabajaron lo suficiente" (como si el estudiante fuera el único responsable de la efectividad del curso), el profesor debe cuestionar su conocimiento de los múltiples factores que influyen la efectividad curso.

Por otra parte, una evaluación frecuente le permite al estudiante identificar oportunamente deficiencias puntuales en su método de estudio y vigilar de cerca su nivel de comprensión de los diferentes temas del curso. En pocas palabras, este tipo de evaluación fomenta el desarrollo de habilidades meta-cognitivas por parte de los estudiantes, lo cual constituye una capacidad de nuestra evaluación que debemos aprender a explotar. ¿Qué dicen al estudiante los resultados de nuestras evaluaciones?, ¿le están ayudando a identificar sus deficiencias?, ¿le están ayudando a mejorar sus métodos de estudio?, ¿lo están motivando a seguir estudiando?

Como fue señalado anteriormente, un gran porcentaje de nuestros estudiantes examinan la calificación como único aspecto importante de nuestras evaluaciones. Comúnmente, una vez han usado la calificación para calcular dos nuevos números (el promedio actual y la calificación que desean obtener en el próximo examen), la evaluación es desechada u olvidada. Lo que me parece aún más grave es que esto es fomentado por los métodos de evaluación del profesor: no podemos esperar que el estudiante pueda hacer inferencias válidas acerca de su desempeño si todo lo que le entregamos es un número o una letra. Ante esta pobre evaluación, al estudiante sólo le quedan interpretaciones pobres de su desempeño: genialidad/brutalidad, esfuerzo/falta de estudio. De esta manera, el profesor debe ser más específico a la hora de evaluar el desempeño del estudiante. Debemos informarle si tiene deficiencias en álgebra, si desconoce alguna regla de derivación, si sus procedimientos son desorganizados, si tiene alguna idea equivocada, si tiene problemas para expresar su pensamiento de manera verbal o escrita, si necesita trabajar más por fuera de clase, etc.

Por último, es importante notar que la evaluación de un curso es enriquecida cuando el profesor comparte su labor como evaluador. Cuando los estudiantes evalúan las estrategias del curso, su desempeño y el de sus compañeros, el profesor gana una nueva perspectiva y ellos desarrollan la importante habilidad meta-cognitiva de observar y controlar su desempeño en el aprendizaje de las matemáticas. Por ejemplo, después de cada una de las pruebas del curso, el profesor puede pedir un reporte escrito donde el estudiante exprese su nivel de comprensión de los temas evaluados, respaldando su juicio con la calificación obtenida en cada uno de los puntos de la prueba. Adicionalmente, el profesor puede describir distintos niveles de comprensión de estos temas, de manera que el estudiante se ubica en uno de ellos durante su auto-evaluación. Por ejemplo, en la comprensión del concepto de función: el *novato* no ha superado el obstáculo de buscar una fórmula que describa cada función y no entiende los conceptos de dominio y rango; el *aprendiz* entiende la relación entre las representaciones comunes de una función (gráfica, fórmula y diagrama de conjuntos), pero todavía cree que toda función tiene un dominio y un rango fijo que no pueden modificarse; el *maestro* es capaz de representar cualquier función como un conjunto de parejas ordenadas y puede generar nuevas funciones modificando su dominio y rango[30].

### c. Motivación

Por último, si se desea que la evaluación juegue un papel positivo en el desarrollo y evolución del curso, es indispensable que ésta mantenga al estudiante animado y le proporcione motivos para continuar estudiando. Una evaluación en la que únicamente se señalan deficiencias termina desanimando a cualquiera, y un estudiantado desanimado termina perjudicando el desarrollo del curso.

[30] Este es sólo un ejemplo. Generalmente, este tipo de formatos (llamados rúbricas) incluyen un listado más específico de habilidades y conocimientos, el cual es organizado en una matriz con una columna para cada nivel.

Desafortunadamente, es fácil caer en evaluaciones que alejan al estudiante del estudio de las matemáticas. Muchas veces he presenciado evaluaciones que llevan al estudiante a sentirse incapaz de alcanzar el nivel de comprensión deseado. La más burda de ellas, producto de una inferencia apresurada, consiste en expresárselo abiertamente al estudiante: "ustedes son muy brutos para las matemáticas", "pero, ¿no aprendieron nada en el curso pasado?", "lo que acaba de hacer (o decir) es una estupidez". Después de enfrentarse a este tipo de comentarios por muchos años, el estudiante termina convencido de que las matemáticas no son lo suyo. Otra forma más disimulada de obtener este resultado consiste en diseñar pruebas que sólo consiguen pasar el profesor de la materia y un pequeño porcentaje de los estudiantes del curso. Este tipo de pruebas no constituyen una herramienta clara en la evaluación de los objetivos del curso, y por el contrario desaniman al estudiante llevándolo a pensar que su estudio y esfuerzo no lo llevaron a aprender nada valioso. Poco a poco, muchos estudiantes terminan por creer que las matemáticas no se aprenden, se nace con ellas.

Esto no quiere decir que las pruebas que utilizamos para evaluar la efectividad del curso deben ser fáciles, o que deben evitar señalar las deficiencias de los estudiantes. En este sentido es importante notar que tanto pruebas muy fáciles como pruebas muy difíciles desmotivan al estudiante, y que es imposible lograr que los estudiantes superen sus dificultades si ellos no las conocen.

Lo que se propone es una evaluación equilibrada que además de reconocer los logros y el progreso de cada individuo, proponga los retos de superar sus deficiencias y profundizar su conocimiento. En estos retos, y los antecedentes de logros pasados, es fácil que el estudiante encuentre un motivo para seguir estudiando y mejorar su desempeño. Asimismo, se propone el diseño de pruebas que mantengan un equilibrio entre su dificultad y los resultados esperados. De esta manera, la idea es lograr diseñar pruebas que demanden un gran esfuerzo por parte de los estudiantes y que, al mismo tiempo, dicho esfuerzo se vea reconocido en buenos resultados. Más adelante, en el literal **f.** de la siguiente sección, se estudiará esta idea con mayor detalle.

### 2.3.2 Herramientas de una evaluación eficaz y formativa

#### a. Discusión en clase

La discusión en clase constituye una importante fuente de información tanto para el profesor como para los estudiantes. Por un lado, las preguntas, respuestas y comentarios de los estudiantes brindan al profesor la oportunidad de identificar obstáculos, deficiencias y fortalezas en el pensamiento de su público. Una evaluación continua de esta información permite el diseño de exposiciones y actividades compatibles con el conocimiento previo de los estudiantes, lo cual, desde una perspectiva constructivista del aprendizaje, favorece una construcción apropiada del nuevo conocimiento. Por otro lado, las discusiones del salón de clase brindan al estudiante la oportunidad de revisar y acondicionar su conocimiento con frecuencia. Formulando y respondiendo preguntas en clase, el estudiante pone a prueba su conocimiento en un espacio donde la retroalimentación de su profesor y de otros estudiantes es prácticamente inmediata.

Por estas razones, el profesor debe hacer todo lo posible por generar y alimentar este tipo de discusiones en el salón de clase. Primero, es necesario que el estudiante esté convencido de que sus preguntas o respuestas serán escuchadas respetuosamente tanto por el profesor del curso como por los demás estudiantes. Obviamente, ninguna persona se siente motivada a participar en una discusión en la que sus dudas o comentarios se convierten en objeto de burla o desprecio.

Segundo, el profesor debe guiar a los estudiantes hacia las repuestas de sus propias preguntas. Muchas veces, las preguntas de los estudiantes no son entendidas por sus compañeros de curso (o por el profesor). Por esto, el profesor debe intentar parafrasear la pregunta en voz alta, de tal manera que todos los estudiantes la escuchen y entiendan. Inicialmente, ninguna pregunta del profesor debe ser dirigida hacia un estudiante particular ya que esto crea una discusión privada que excluye al resto del curso. Por el contrario, una vez los estudiantes han tenido tiempo para pensar una pregunta dirigida a todo el grupo, se puede pedir la opinión de un estudiante o preguntar si alguien conoce la repuesta. De no conocerse, se deben estudiar algunas hipótesis, preguntas más sencillas o ejemplos que lleven a los estudiantes a inferir una respuesta a la pregunta original. Tercero, por ningún motivo se debe mentir al estudiante. Si el profesor desconoce la respuesta a una pregunta o inadvertidamente se equivoca, es absolutamente necesario que informe a sus estudiantes de su error y lo corrija lo más pronto posible.

Una manera productiva de iniciar una discusión consiste en asignar uno o dos problemas al comienzo de la clase. Preferiblemente se asignan a grupos de unos tres estudiantes y los problemas son extensiones de algún problema de la tarea. Una vez trabajados, se discuten las soluciones (o carencia de soluciones) entre el profesor y los estudiantes. Esta es una muy buena manera de animar al estudiante para que exprese sus dudas e ideas, al mismo tiempo que se prepara el terreno para la presentación de un tema del curso.

**b. Conversaciones por fuera del salón de clase**

Por lo general, todo profesor universitario debe establecer un horario para atender a sus estudiantes por fuera de clase. Cuando es aprovechado, estas sesiones pueden llegar a constituir una herramienta de evaluación importante. El profesor no sólo debe estar disponible en este tiempo (es su responsabilidad), además debe animar a sus estudiantes para que aprovechen este recurso de la universidad. Estas sesiones se convertirán en el espacio adecuado para discutir aquellas preguntas que no fueron respondidas en clase. Cuando un estudiante se acerca al profesor durante este tiempo (y va a suceder en los días antes de un examen), el profesor debe aprovechar para averiguar su opinión sobre los diferentes aspectos del curso: ¿cómo le parece el libro?, ¿cuánto está estudiando por fuera de clase?, ¿qué tal le parece la clase?, ¿qué ha sido lo más fácil?, ¿y lo más difícil?, ¿tiene alguna sugerencia? Adicionalmente, esta es una buena oportunidad para evaluar con cuidado el trabajo individual de un estudiante. Intente persuadirlo de que trabaje en su cuaderno, estudie sus apuntes de clase, los problemas que ha solucionado, los exámenes y *quizzes* que lleven hasta el momento, etc. Como lo haría un buen médico al final de la consulta: dele consejos que le permitan mejorar su desempeño en clase, asígnele ejercicios o problemas (no muchos, de lo contrario no vuelve) cuya solución refuerce lo que estudiaron en esa sesión, e invítelo a que vuelva.

Cuando dicté mi primer curso universitario, decidí hacer de ese tiempo de atención a estudiantes una sesión adicional de solución de problemas. Así, citaba a todos aquellos que tuvieran alguna duda y nos reuníamos en uno de los salones de la universidad. Allí trabajaba de una manera más individual. En general, esas sesiones se convirtieron en una excelente herramienta de evaluación informal por medio de la cual profesor y estudiantes trabajábamos conjuntamente para enterarnos de nuestras deficiencias y encontrar maneras de superarlas.

### c. Trabajo en clase, laboratorios computacionales y talleres

Como fue señalado al estudiar algunas estrategias de enseñanza, la instrucción del profesor es constructiva cuando sucede en el contexto de la solución conjunta de problemas donde el estudiante participa de una manera activa en el desarrollo de la clase y el tema del curso. Al igual que la discusión en clase, el trabajo en el salón o laboratorio de computadores representa una excelente oportunidad para seguir de cerca el conocimiento previo del estudiante, así como su nivel de comprensión del tema. De esta manera, nuestra evaluación nos permite adecuar el ritmo de la clase a las particularidades del grupo de estudiantes con el cual trabajamos. Por ejemplo, si advertimos que en la solución de un problema varios estudiantes tienen dificultades con la interpretación gráfica de una función, diseñamos una nueva actividad (una serie de nuevos problemas que podemos asignar como tarea o taller de la siguiente sesión de clase) que le ofrezca al estudiante una oportunidad para revisar su comprensión de ese tema.

Asimismo, el profesor debe divulgar los resultados de sus evaluaciones oportunamente, de manera que los estudiantes puedan actuar conforme a estos juicios y recomendaciones. Es muy importante que después de cada sesión de solución de problemas, o laboratorio computacional, el profesor inicie una discusión acerca de los problemas planteados, las diferentes soluciones alcanzadas, las dificultades más comunes, etc. Además de las ventajas ya mencionadas, este tipo de discusiones conectan las sesiones de solución de problemas y los talleres computacionales al desarrollo del curso, evitando que se conviertan para el estudiante en actividades aisladas sin importancia.

Si se cuenta con la fortuna de tener un curso de menos de 30 estudiantes, el profesor puede escoger un representante de cada grupo para que brevemente auto-evalúe su trabajo y el de sus compañeros, decida en dónde encontraron dificultades y especifique en qué aspectos necesitan mejorar. Al acostumbrarse a esta última estrategia, los estudiantes logran implementarla en muy poco tiempo y consiguen evaluar su desempeño regularmente lo cual constituye una importante habilidad meta-cognitiva.

### d. Tareas

Las tareas ofrecen una buena oportunidad para practicar y extender lo discutido en clase. Sin embargo, es muy difícil lograr que los estudiantes realicen tareas desvinculadas del desarrollo y los objetivos del curso. Hablo de las tareas que nunca originan una discusión en clase, aquellas cuyo nivel es considerablemente distinto al de las explicaciones del profesor o los exámenes del curso, aquellas que nunca se revisan, etc. Incluso el estudiante acostumbrado a trabajar en casa regularmente encontrará difícil hallar un motivo para hacer este tipo de tareas. Por el contrario, asignando tareas relevantes para el curso, que estén al alcance del estudiante y que le ayuden a mejorar su desempeño, el profesor motiva el desarrollo de una disciplina de estudio por fuera del salón de clase.

En el esquema que he venido discutiendo, cada sesión de solución de problemas puede dar origen a una buena tarea. Una vez los estudiantes han trabajado en grupos, ya sea en un laboratorio de computadores o en el salón de clase, el profesor tiene la oportunidad de asignar una tarea relacionada con esta actividad: terminar los problemas o el taller computacional, responder algunas preguntas interesantes acerca de los problemas estudiados, resolver un par de problemas más complejos, etc. De esta manera, el estudiante no se enfrenta de manera individual a algo totalmente nuevo o desvinculado del desarrollo del curso. Adicionalmente, este tipo de tareas enriquece las discusiones de las siguientes sesiones, las cuales, al referirse tanto a lo realizado en clase como a la tarea asignada, brindan al estudiante la oportunidad de revisar su desempeño en ambos trabajos. Una vez se han llevado a cabo el taller en clase, la tarea, la discusión y las aclaraciones del profesor, se puede asignar una segunda colección de ejercicios y problemas con el objetivo de practicar y afianzar lo aprendido. De esta manera, el estudiante adquiere una eficaz herramienta para la auto-evaluación de su trabajo tanto dentro como fuera del salón de clase.

**e. Quizzes y Gateway Tests**

Por lo general, los *quizzes* son pruebas cortas (15-20 min.) por medio de las cuales se indaga una de las siguientes dos cosas: la realización de una tarea por parte del estudiante (e.g. *quiz* de lectura), o su nivel de comprensión de un tema particular del curso (e.g. *quiz* de diferenciación). La primera variedad (*quizzes* de tarea) permite evaluar el trabajo del estudiante por fuera del salón de clase y no necesariamente indican su nivel de comprensión del tema. La segunda variedad (*quizzes* de comprensión) se compone de problemas cuya solución demanda un uso flexible del material estudiado, lo cual permite evaluar el nivel de comprensión del estudiante de un tema particular del curso. Considero necesario que el estudiante entienda esta diferencia para que pueda hacer una buena evaluación de su desempeño en este tipo de pruebas. Por ejemplo, un estudiante que tiene un buen desempeño en los *quizzes* de tarea, pero uno pobre en los *quizzes* de comprensión, debe ser capaz de deducir que a pesar de tener una buena disciplina de estudio por fuera del salón de clase, su trabajo puede estar mecanizado en procesos que carecen de una reflexión profunda. Cuando esto sucede con frecuencia, también el profesor tiene que reevaluar el objetivo y la efectividad de las tareas que asigna.

Los *quizzes* de tarea pueden, y ocasionalmente deben, realizarse sin previo aviso. Aunque el profesor puede anunciar con anterioridad la realización de un *quiz* de tarea (cuando la considera particularmente importante), los estudiantes deben comprender y tener presente el indispensable carácter sorpresivo de este tipo de pruebas. Por el contrario, las fechas y los temas de los *quizzes* de comprensión deben ser anunciados preferiblemente desde el inicio del curso.

Dado que estas pruebas examinan la capacidad del estudiante para utilizar las herramientas estudiadas en la solución de problemas, los *quizzes* de comprensión son supremamente útiles en la preparación del estudiante para los exámenes del curso. En otras palabras, estos *quizzes* informan al estudiante el tipo de aprendizaje que consideramos importante y qué tan lejos se encuentra de alcanzarlo.

Por otro lado, los *gateway tests* son pruebas que examinan habilidades básicas, generalmente relacionadas con el empleo de una serie de algoritmos (e.g. *gateway test* de límites, *gateway test* de diferenciación, *gateway test* de integración, etc.) El siguiente ejemplo es un primer *gateway test* de diferenciación de un curso de cálculo diseñado por profesores de las universidades de Harvard y Arizona (Hughes-Hallet et al., 1994)[31]:

Derivar, asumiendo que *a* es una constante.

1. $f(x) = (1+2x+x^3)^{\frac{1}{2}}$ R_______________________

2. $y = \dfrac{2t}{1+t^2}$ R_______________________

3. $g(t) = at(a+t)^4$ R_______________________

4. $\sin(2q+5)$ R_______________________

5. $\left(y+\dfrac{1}{y}\right)^5$ R_______________________

6. $e^{z^2+z}$ R_______________________

7. $\ln(x\cos x)$ R_______________________

8. $\tan(5-t^2)$ R_______________________

9. $\dfrac{y-5}{5-y^2}$ R_______________________

10. Encuentre $y'$: $e^{x+y}+x-y^2=3$ R_______________________

Dada la relativa sencillez del tipo de habilidades evaluado en estas pruebas, el estudiante debe realizar correctamente el 80% de los ejercicios de cada *gateway test* y debe aprobar todos los *gateway tests* del curso. De esta manera, generalmente se ofrece más de una oportunidad para tomar cada una de estas pruebas: todos los estudiantes la presentan en clase y quienes la pierden se preparan para presentar una más difícil en la oficina del profesor. Los estudiantes tienden a apreciar esta oportunidad, entendiendo que no pueden terminar el curso sin aprender estos algoritmos básicos. Adicionalmente, se hace énfasis en un aspecto fundamental del objetivo del curso: dominar este tipo de algoritmos es indispensable, mas no suficiente.

Tanto *quizzes* como *gateway tests* son pruebas de diagnóstico. Para que el estudiante pueda identificar sus deficiencias oportunamente, el profesor debe devolverlos con prontitud y corregirlos en clase o distribuir una hoja con sus soluciones.

### f. Exámenes

El examen es una de las herramientas más utilizadas e influyentes en la evaluación de cursos universitarios de matemáticas. Para que sea además una herramienta de evaluación eficaz y formativa, se deben tomar algunas precauciones.

Primero, es sumamente importante que los objetivos evaluados en cada examen sean conocidos por el estudiante. Como fue señalado anteriormente, al saber qué tipo de habilidades y conocimientos se evaluarán, el estudiante puede diseñar un mejor plan de estudio y enriquecer la interpretación de su desempeño en el examen. Idealmente, estos objetivos son publicados con el programa del curso, leídos en la introducción del tema del examen y de nuevo unos días antes de la prueba.

[31] Este curso es producto de un proyecto financiado por la NSF.

Segundo, dado que los exámenes son utilizados principalmente para evaluar la comprensión de un tema del curso, éstos deben incluir problemas, no ejercicios. Es decir, los exámenes deben poder utilizarse para evaluar la capacidad de modelar situaciones desconocidas haciendo un uso flexible del conocimiento matemático estudiado. Esto implica diseñar exámenes que incluyan problemas como los discutidos en las sesiones de solución de problemas y los enfrentados en los *quizzes* de comprensión (claro, nunca iguales o demasiado parecidos) En este sentido, los exámenes no pretenden dar una idea de la intensidad y calidad del trabajo del estudiante (para eso están las tareas y los *quizzes* de tarea), sino del producto de ese trabajo.

Tercero, esos problemas deben estar al alcance de la mayoría de los estudiantes. En este caso, la palabra *problema* no está relacionada con *dificultad* sino con *reflexión*. De esta manera, no deben confundirse las preguntas que obligan al estudiante a reflexionar, con aquellas cuyas respuestas se encuentran fuera de su alcance. Como fue señalado anteriormente, en lo referente a la complejidad de los exámenes, ambos extremos (exámenes muy sencillos y exámenes muy complejos) desmotivan al estudiante. Por eso, considero apropiado que los problemas incluidos en este tipo de pruebas exijan una reflexión profunda por parte de la mayoría de los estudiantes, sin que por esta razón tengan que salir de su alcance. Al respecto, Ed Dubinsky tiene una propuesta interesante:

> *Pensamos que nuestros estudiantes comienzan el curso con cierto conocimiento y nuestro objetivo es incrementar ese conocimiento todo lo que podamos. Así, al diseñar un examen, por ejemplo, no nos concentramos en preguntas que cubran la mayor parte posible del material, sino en las preguntas más difíciles que podamos hacer acerca del material que creemos que los estudiantes han aprendido. Con la esperanza de que los estudiantes tengan un buen desempeño en estas pruebas, parte de nuestra evaluación del curso, en términos de lo que pretendíamos, consiste en evaluar qué tan difíciles fueron los exámenes y cuánto material cubrieron.* (Dubinsky, 1999. Original en inglés)

En este sentido, basándose en una evaluación de las discusiones, *quizzes*, *gateway tests*, tareas y los trabajos en clase, el profesor diseña sus exámenes a partir de los problemas más difíciles que puedan ser resueltos por la mayoría de los estudiantes del curso. Así, en lugar de concentrarse en las notas del examen, la evaluación se hace estudiando cuán difícil puede llegar a ser (y qué tanto material puede llegar a cubrir) una prueba diseñada con la esperanza de que la mayoría de los estudiantes tengan un buen desempeño en ella. En este esquema, la parte más importante de la evaluación se lleva a cabo al diseñar el cuestionario, no al calificarlo.

Por último, los estudiantes deben participar en la corrección del examen con el objetivo de que auto-evalúen su trabajo y logren hacer inferencias válidas acerca de su desempeño en la prueba. De esta manera, el profesor debe estimular este tipo de auto-evaluación señalando los errores más comunes, preguntando a los estudiantes acerca de su rendimiento en los distintos problemas del examen y exigiendo justificaciones válidas de dicho desempeño.

### g. Proyectos

A diferencia de los cursos de introducción en facultades como las de ingeniería y administración, los cursos universitarios de cálculo no suelen incluir la realización de un proyecto en el cual se llega a utilizar el conocimiento del curso en una aplicación interesante para el estudiante. Me da la impresión de que, en general, se piensa que estos primeros cursos de matemáticas universitarias deben concentrarse en la enseñanza de herramientas que <u>más adelante</u> serán de gran utilidad en el desarrollo de este tipo de proyectos. El inconveniente es que, en ocasiones, esta oportunidad de relacionar el cálculo con situaciones interesantes llega muy tarde, cuando el estudiante ha perdido todo interés en la materia. Como fue señalado anteriormente, uno de los aspectos presentes en varios de los cursos que surgieron a partir de lo que hoy se conoce como *la reforma del cálculo,* consiste en organizar la enseñanza del cálculo alrededor de algunos proyectos que el estudiante realiza a lo largo del curso.

Por un lado, estos proyectos pueden llegar a evaluar la capacidad de utilizar el conocimiento adquirido en contextos distintos al puramente matemático; contextos que suelen seducir particularmente a la gran mayoría de estudiantes que no están interesados en terminar una carrera de matemáticas. Adicionalmente, estos proyectos suelen evaluar habilidades tan diversas como la investigación bibliográfica y la exposición oral o escrita de una idea matemática. En general, estas tareas involucran al estudiante en un uso del conocimiento matemático aprendido muchísimo más parecido al que más tarde tendrá que enfrentar en el mundo laboral.

Por otro lado, estos proyectos acercan al estudiante a un desarrollo investigativo del conocimiento matemático, el cual surge como necesidad de modelar ciertos problemas interesantes, y no simplemente porque alguien consideró apropiado incluirlo en un texto guía.

Para aprovechar al máximo los aspectos señalados anteriormente, los proyectos deben ser concebidos por los estudiantes: ellos deben buscar y elegir el tema de investigación, conseguir las diferentes fuentes de información, etc. Los proyectos deben responder preguntas de cada grupo de estudiantes y no preguntas ajenas que no sean de su interés. En este sentido, el papel del profesor debe ser el de guía y consejero de la investigación, una persona que está disponible para responder preguntas, pero que no interviene en el desarrollo mismo de proyecto. Es recomendable que se haga una evaluación frecuente de cada proyecto (por ejemplo, por medio de entregas parciales), para que los estudiantes cuenten con la oportunidad de perfeccionarlo.

### h. Encuestas

Las encuestas constituyen una excelente herramienta para medir el ánimo de los estudiantes y conocer sus opiniones en diferentes momentos del curso. Es una herramienta adicional que le permite al profesor enterarse del concepto que tienen los estudiantes de los diferentes aspectos del curso. Debido a que no todos lo estudiantes se sienten igualmente cómodos para hacer un comentario personalmente al profesor del curso, es importante motivar la expresión anónima de este tipo de opiniones. Una buena idea consiste en que las encuestas sean realizadas en casa, donde el estudiante tiene la oportunidad de realizar una reflexión seria y es posible digitar su informe en un computador (nada más anónimo que una impresión de computador). Las encuestas deben concentrarse en la evaluación del curso en términos de los tres objetivos propuestos, e incluir un espacio para dar a conocer otro tipo de inquietudes o comentarios. Sólo conociendo este tipo de opiniones es posible realizar una buena evaluación del curso.

### 2.3.3 Resultados de la evaluación

Comúnmente se esperan dos resultados de las diferentes evaluaciones de un curso: primero, una calificación que avalúe el trabajo y el nivel de comprensión del estudiante, y segundo, una reflexión por parte del profesor que le permita actuar de acuerdo a los resultados obtenidos. En este numeral se discutirán estos dos resultados de la evaluación.

### a. La calificación

Por lo general, y especialmente en el caso de los primeros cursos universitarios de matemáticas, el profesor novato recibe un esquema de evaluación que determina los porcentajes de la nota final que deben ser asignados a cada prueba del curso[32]. A pesar de este intento por homogeneizar las diferentes formas de calificar, el profesor suele tener la última palabra a la hora de avaluar el desempeño y el nivel de comprensión de sus estudiantes. Al hacerlo, se deben tener en cuenta aspectos importantes de la calificación.

Primero que todo, debemos ponernos de acuerdo en lo que estamos midiendo. En ocasiones, el número que entregamos al estudiante representa la medición de su desempeño en comparación al de los demás estudiantes. En otras ocasiones, este número representa una cantidad de ejercicios o problemas resueltos en un tiempo determinado. ¿Qué debe medir la calificación? Considero que la calificación debería medir el desempeño del estudiante con respecto a los objetivos del curso. Sin embargo, aun cuando se tenga un acuerdo en esto, la calificación varía dependiendo de la institución educativa y del profesor que califica. De esta manera, dos profesores pueden dar calificaciones considerablemente diferentes al desempeño de un mismo estudiante. Por esta razón, al igual que al medir la longitud de un objeto, las unidades son indispensables. Quisiéramos tener unidades estándares de manera que el promedio de un estudiante de una universidad colombiana pudiera ser interpretado correctamente por la directora de la oficina de admisiones de una universidad en Tailandia. A pesar de no contar con estos estándares, considero que por lo menos el profesor y los estudiantes del curso deben ponerse de acuerdo en lo que miden las calificaciones que manejan, en su significado. Asimismo, los profesores de cada institución educativa deberían diseñar y respetar unos estándares de

[32] En algunos casos, como en la Universidad de Michigan, todas las secciones del curso de cálculo diferencial presentan exactamente los mismos exámenes.

calificación básicos. Sin un significado consensual, estas calificaciones son absolutamente inútiles.

Una vez hemos acordado lo que representa la calificación de una prueba, debemos velar por su confiabilidad. Varios investigadores (e.g. Breidenbach *et al.*, 1992; Gardner, 1999; Tall, 1992) se han percatado de la gran cantidad de estudiantes que a pesar de responder correctamente las preguntas formuladas en un examen, no pueden justificarlas o lo hacen de manera incorrecta. De esta manera, el método tradicional de calificar proporcionalmente a la cantidad de respuestas correctas puede ser inadecuado cuando se pretende medir el nivel de comprensión de un concepto determinado. En este caso, la calificación se debe hacer teniendo en cuenta diferentes tipos de evaluaciones que permitan al profesor realizar inferencias válidas acerca del desempeño del estudiante.

### b. El cuaderno de bitácora[33]

Como fue señalado en la introducción de este segundo capítulo, uno de los principales objetivos de las evaluaciones del curso consiste en permitir el perfeccionamiento de sus estrategias de enseñanza. Hasta este momento nos hemos preocupado por diseñar herramientas de evaluación que nos permitan determinar hasta qué punto se cumplen los objetivos del curso y cómo afectan en este resultado las estrategias de enseñanza utilizadas. El propósito es que el profesor analice la información recogida en cada evaluación y reflexione sobre formas de mejorar su sistema de enseñanza. Óptimamente, el profesor anota por escrito sus observaciones, hipótesis, experimentos, aciertos, desaciertos y recomendaciones para el futuro. De esta manera, desarrolla un espíritu científico que favorece el perfeccionamiento del curso que dicta.

[33] Un cuaderno de bitácora es el "libro en que se apunta el rumbo, velocidad, maniobras y demás accidentes de la navegación" (*www.rae.es*).

## 2.4 Conclusiones

Antes de iniciar la enseñanza de un curso universitario de matemáticas, el profesor debe establecer sus objetivos. Éstos dependen de diversos factores socio-económicos y, en particular, deben estar de acuerdo con los objetivos generales de la institución educativa que ofrece el curso. Los tres objetivos que guían la teoría expuesta en este capítulo son:

- El conocimiento adquirido por el estudiante puede ser *transferido eficazmente* a diferentes contextos.
- El estudiante desarrolla habilidades *meta-cognitivas* que mejoran su desempeño en el proceso de aprendizaje
- El estudiante cultiva una *percepción apropiada de las matemáticas*, percepción que lo motiva a estudiar y a utilizar el conocimiento comprendido.

Una vez definidos los objetivos de la enseñanza, y buscando maneras de alcanzarlos, se presenta la necesidad de estudiar una teoría de aprendizaje que explique la manera como se aprenden las matemáticas. La teoría adoptada, comúnmente conocida como *constructivismo*, reconoce el papel fundamental del conocimiento previo del estudiante en su proceso de aprendizaje. De acuerdo al *constructivismo*, cada estudiante aprehende la información de un modo distinto, por cuanto cada uno la filtra utilizando su propio bagaje de conocimientos pasados. De esta manera, se manifiesta la necesidad de conocer y tener en cuenta las creencias y concepciones que el estudiante lleva al salón de clase. Una noción importante en esta teoría tiene que ver con los conocimientos pasados del estudiante que dificultan su aprendizaje de un nuevo concepto. Conocidos como *obstáculos*, estos conocimientos no son simples equivocaciones, producto de la dificultad del tema, de la ignorancia o de la confusión de quien lo estudia. Son conocimientos que en algún momento fueron utilizados con éxito, razón por la cual se asientan reciamente en la mente del estudiante. Así, al tornarse inadecuados, es difícil modificarlos. Su aparición en el aprendizaje suele ser considerada incluso inevitable, de manera que la labor del profesor consiste en:

- Diseñar actividades por medio de las cuales el estudiante se enfrente a las limitaciones de sus obstáculos y pueda así comenzar a superarlos.
- Determinar hasta qué punto se pueden llegar a formar nuevos obstáculos en el aprendizaje del tema estudiado, y diseñar actividades que faciliten una (posiblemente futura) reconstrucción cognitiva.

Una vez desarrollado el anterior marco teórico, se cuenta con una base que soporta el diseño de las diferentes estrategias de enseñanza del curso. La estrategia tradicional de presentar el conocimiento matemático en su versión formal y por medio de una clase magistral, suele ser inadecuada debido a que en el aprendizaje de las matemáticas, ver y escuchar resultados no es tan efectivo como construirlos. Por eso, se propone la implementación de sesiones de solución de problemas en las que la exploración activa por parte del estudiante genere las discusiones que se llevan a cabo en el salón de clase y la construcción personal de los diferentes conceptos del curso. En general, estas sesiones favorecen el aprendizaje de las matemáticas por parte del estudiante que no posee un conocimiento previo apropiado, o que no ha desarrollado habilidades meta-cognitivas importantes en el aprendizaje de esta materia. Así, las sesiones de solución de problemas hacen parte de un curso diseñado para la mayoría de estudiantes universitarios que no se desempeñan satisfactoriamente en el área de las matemáticas, y que por tanto no están preparados para el formalismo matemático, ni para la clase magistral. Adicionalmente, cuando el estudiante deja de ver el computador como una caja mágica que ofrece todas las respuestas y lo empieza a utilizar en la investigación conceptual de las diferentes nociones del curso, el uso de nuevas tecnologías en el salón de clase puede llegar a ser supremamente útil en la construcción personal de los conceptos del cálculo diferencial.

Las herramientas de evaluación del curso deben poseer tres características importantes:

- Estar diseñadas para ofrecer información acerca del estado del curso con respecto a sus objetivos
- Permitir una retroalimentación continua que mantenga informados al profesor y a los estudiantes de los logros alcanzados y de las deficiencias aún presentes.
- Motivar al estudiante a seguir estudiando

Por último, el profesor debe utilizar las evaluaciones realizadas a lo largo del curso para mejorar sus estrategias de enseñanza. Para este fin, se recomienda llevar por escrito los resultados de las diferentes estrategias utilizadas en el salón de clase para poder proponer futuras alternativas que puedan mejorar el curso.

# 3. EDUCACIÓN MATEMÁTICA EN LA ENSEÑANZA DEL CÁLCULO DIFERENCIAL

El propósito de este último capítulo es ejemplificar las ideas discutidas en la segunda parte del proyecto con un análisis acerca de la enseñanza y el aprendizaje de algunos de los conceptos más importantes del cálculo diferencial; me refiero a los conceptos de función, límite y derivada. Aunque muchos cursos de cálculo diferencial dedican tiempo a la enseñanza de otros temas (desde sistemas numéricos, hasta los principios del cálculo integral), considero que esos tres conceptos conforman el eje central de su currículo. Adicionalmente, y debido precisamente a su importancia en el curso, estas nociones constituyen el objeto de estudio de una gran cantidad de investigaciones acerca del aprendizaje y la enseñanza del cálculo diferencial. En las siguientes páginas, el lector encontrará referencias a algunas de estas investigaciones.

Sin embargo, lo que presentaré a continuación no pretende ser una serie de instrucciones para la enseñanza de los conceptos en cuestión. Dada la gran diversidad de estudiantes que hoy en día estudian cálculo en nuestras universidades, cualquier manual de este tipo corre un altísimo riesgo de caer en generalizaciones inciertas e improductivas. Asimismo, no pretendo exponer una vasta colección de didácticas para la presentación de estos conceptos. La idea es facilitar al lector algunas aplicaciones y ejemplos concretos de la teoría desarrollada en el segundo capítulo, sin limitar la teoría a una serie de rutinas para la enseñanza del cálculo diferencial.

## 3.1 Funciones

El concepto de función es fundamental en las 'matemáticas del cambio'[34]; es una poderosa herramienta para representar numérica, gráfica, o simbólicamente, cómo cambian las cosas en el mundo. Juega un papel importante en la comprensión de situaciones y objetos cotidianos (como una gráfica de un artículo en un periódico, el cambio del salario de un empleado, el movimiento de un automóvil, etc.), así como en la solución de problemas que surgen en diversos campos laborales. Por otra parte, en el estudio de las matemáticas es supremamente importante poder utilizar una función ya no como un proceso, sino como un objeto que, por ejemplo, puede ser manipulado por otra función.

De esta manera, la comprensión del concepto de función se caracteriza por su uso flexible gracias al cual se puedan representar aspectos de situaciones cotidianas, y entender procesos como la composición de funciones y la regla de la cadena. En otras palabras, el objetivo de la enseñanza en este caso particular consiste en que el estudiante transfiera eficazmente su conocimiento del concepto de función a diferentes contextos entre los cuales se encuentran (1) el mundo cotidiano y (2) el aprendizaje de nuevos y más complejos temas matemáticos. Es teniendo esto en cuenta que debemos responder a la pregunta: ¿cómo puede el profesor ayudar al estudiante a desarrollar una comprensión aceptable de este concepto matemático? A continuación se analizan las características de uno de los más comunes obstáculos en su aprendizaje, y se propone una alternativa a la enseñanza tradicional de este concepto.

[34] El término 'matemáticas del cambio' es utilizado por Jim Kaput, investigador principal de SimCalc, para denotar todo conocimiento (que incluye el cálculo, pero no se restringe al él) involucrado en la solución de problemas relacionados con razones de cambio, variaciones, acumulación, aproximaciones, límites, etc; cuyo dominio es considerado esencial para el ciudadano informado de una sociedad que evoluciona rápidamente. Como fue señalado

### 3.1.1 *f*(*x*) = obstáculo

Durante los últimos años de colegio, las gráficas de ecuaciones de dos variables (ya conocidas por la mayoría de los estudiantes) comienzan a recibir el nombre de *funciones*. De esta manera, las primeras funciones exhibidas al estudiante se obtienen a través de un proceso que consiste en reemplazar una $y$ por una $f(x)$ en una expresión matemática. Queriendo exponer una noción más general, y considerando inapropiado introducir la definición formal de función a tan temprana edad, algunos textos y profesores de colegio hacen un esfuerzo por presentar el concepto de función de varias maneras. Entre sus prototipos más comunes, encontramos:

- El uso del lenguaje común para describir una función como una asignación de elementos de dos conjuntos (en el caso de la expresión algebraica, a cada valor de $x$ se le asigna un valor de $y$)
- Un diagrama en el cual una función es conformada por dos conjuntos y una serie de flechas entre ellos,
- Una tabla de dos columnas,
- Una máquina con una entrada y una salida,
- Una fórmula y su gráfica

---

en la discusión acerca del uso de nuevas tecnologías en el salón de clase, Kaput considera que este tipo de conocimiento puede (y debe) ser desarrollado desde muy temprana edad.

Sin embargo, esta diversidad de prototipos del concepto de función suele agotarse rápidamente y el estudiante termina trabajando únicamente con funciones presentadas por medio de una fórmula o una gráfica. De esta manera, la noción general de función pierde importancia en el curso y muy pronto el estudiante termina asociando el término *función* a una fórmula del tipo $f(x) = x^2$, o a lo sumo a una razón de polinomios. Adicionalmente, en muy pocos casos el estudiante de colegio logra establecer una relación entre una función y las situaciones cotidianas que esa función puede llegar a representar. Así, al comenzar un curso universitario de cálculo diferencial, la mayoría de los estudiantes ven reducido su entendimiento del concepto de función a la manipulación simbólica de expresiones matemáticas con una variable. Este conocimiento previo deficiente constituye un común obstáculo en la comprensión del concepto de función, como lo pudieron corroborar Bakar *et al.* (1992) entrevistando un grupo de estudiantes en su primer año universitario. En las entrevistas se les preguntó si la expresión algebraica $y = 4$ y, por separado, si la gráfica de una recta horizontal en un eje de coordenadas, podían llegar a ser representaciones de una función. La gran mayoría de los estudiantes, quienes únicamente habían estudiado el concepto de función en el colegio, respondieron negativamente a alguna de las dos preguntas argumentando que *y* no cambia con respecto a *x*, o que hacía falta una *x* o un *f(x)* en la expresión[35].

Es de esperar que este obstáculo persista en la gran cantidad de cursos universitarios de cálculo diferencial que siguen un camino similar al escolar: presentar inicialmente una serie de prototipos del concepto de función (intentando ofrecer una idea general del concepto), para rápidamente concentrarse en el estudio simbólico de funciones que pueden expresarse ya sea por

[35] De los 109 estudiantes, el 28% respondieron correctamente afirmando que tanto la expresión algebraica como la gráfica podían representar una función. El 29% pensaba que la gráfica sí era una función, pero que la expresión algebraica no. El 3% respondió al contrario (‘no’ con respecto a la gráfica y ‘sí’ con respecto a la expresión algebraica) y el 41% opinó que ninguna de las dos podía llegar a ser representación de una función.

medio de una fórmula en términos de $x$, o por medio de una gráfica (e.g. funciones lineales, cuadráticas, trigonométricas, etc.). A pesar de que a nivel universitario se suele hacer un esfuerzo adicional por formalizar la presentación del concepto de función (empleando con frecuencia los términos *dominio* y *rango*, aplicando la prueba de la recta vertical[36], y enunciando una mayor cantidad de problemas en los cuales se describen aspectos de una situación cotidiana por medio de una función), el esquema tiende a ser el mismo. De esta manera, la reflexión sobre el concepto general suele ser bastante breve e insignificante para el estudiante que continuamente encuentra una fórmula cada vez que se habla de funciones.

Dado que uno de los objetivos es lograr que el estudiante adquiera una noción general del concepto de función, y que la presentación de prototipos muy específicos sólo tiende a alejar al estudiante de tal noción, se suele caer en la tentación de introducir el concepto por medio de una definición más formal.

> *Una **función** de un conjunto D a un conjunto R es una regla que asigna un único elemento en R a cada elemento en D*

A pesar de encerrar todas las propiedades del concepto, la definición también esconde del estudiante muchos de sus aspectos y aplicaciones. Así, es común que al no poder establecer vínculos significativos con su conocimiento previo, el estudiante termine acomodando esta definición en una inútil memorización[37].

---

[36] Una gráfica en el plano cartesiano representa una función si y sólo si toda recta vertical se interseca con la gráfica en a lo sumo un punto.

[37] De los 109 estudiantes interrogados por Bakar *et al.* (1992), 38 demostraron tener cierto conocimiento de las características que definen una función (afirmando, por ejemplo, que "por cada valor $x$ debía haber sólo un valor de $y$", o que una función podía ser "muchos-a-uno"). Sin embargo, en el momento de determinar si la expresión algebraica $y=4$ podría llegar a representar una función, sólo el 47% de estos estudiantes respondió afirmativamente.

De esta manera, el currículo del curso de cálculo diferencial y en particular la enseñanza del concepto de función, debe enfrentarse a la siguiente dificultad: para poder construir el concepto abstracto de función, es necesario que el estudiante experimente ejemplos del concepto (e.g. funciones lineales, exponenciales, trigonométricas, etc.), pero al hacerlo es inevitable que desarrolle una idea prototípica de función que contiene elementos que no hacen parte del concepto abstracto (e.g. una fórmula en términos de una variable) (Bakar *et al.*, 1992).

### 3.1.2 La *máquina función:* una raíz cognitiva

Una posible solución a este dilema consiste en vincular el concepto de función a un ejemplo prototípico que no se aleje mucho de su definición formal (en particular, que no contribuya al fortalecimiento del obstáculo discutido anteriormente), y que al mismo tiempo sea familiar y fácil de comprender para el estudiante. En otras palabras, buscamos una *raíz cognitiva* para la enseñanza de este importante concepto, una noción de función que sea fácilmente extensible a la definición formal del concepto, y que sea de cómodo acceso para el estudiante de un curso universitario de cálculo diferencial.

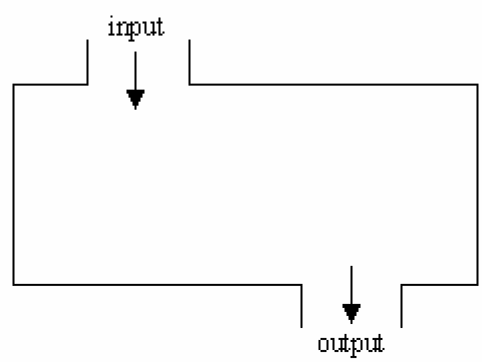


Fig. 3.1. La *máquina función* de Tall *et al.* (2000)

En búsqueda de una *raíz cognitiva* para la presentación del concepto de función, Tall *et al.* (2000) han encontrado en la *máquina función* una candidata apropiada. La *máquina función* es una popular forma de presentar el concepto de función como una caja con una entrada y una salida (ver Fig. 3.1), la cual transforma objetos de un conjunto en objetos de un segundo conjunto de acuerdo a un programa preestablecido. En un estudio realizado con estudiantes de un curso universitario de precálculo, McGowen *et al.* (2000) exponen evidencia de algunas de las siguientes características pedagógicas de este prototipo de función:

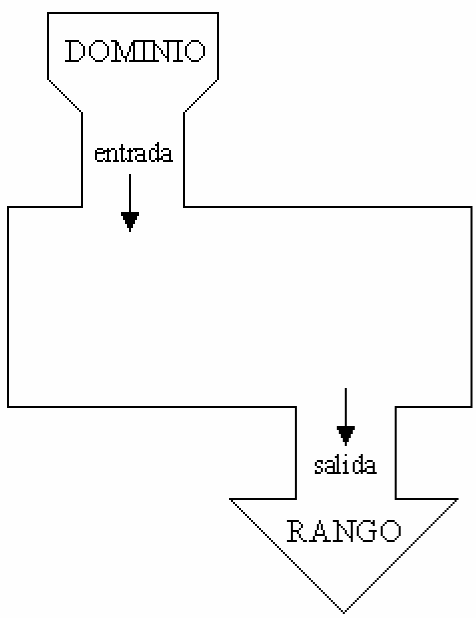


Fig. 3.2. Una variación del modelo de Tall *et al.* (2000)

- Es una noción fácil de entender, que puede relacionarse a procesos y objetos conocidos.
- Incluye dos importantes aspectos del concepto: la función como un objeto y la función como un proceso.
- Las presentaciones usuales de función pueden ser descritas fácilmente en términos de este prototipo: (1) en una tabla de dos columnas, la primera columna es una lista de entradas (el dominio) y la segunda es la lista de salidas correspondientes (el rango); (2) en una fórmula como $p = 4q^2 + \sin(q)$, los valores que toma $q$ son las entradas y los que toma $p$ son las salidas correspondientes; (3) en

una gráfica en un sistema de coordenadas, cada elemento del eje horizontal (o eje de entradas) tiene una salida correspondiente en el eje vertical (o eje de salidas).

- En un prototipo como el de la Fig. 3.2. (una variación del modelo propuesto en Tall *et al.* (2000) y en McGowen *et al.* (2000)), el dominio y el rango pueden ser definidos naturalmente y, aún más importante, *hacen parte* de la función. De esta manera, $f(x)=4$ es una función distinta a $f(x)=4, \ (x \neq 0)$, pues el elemento 0 no está en el conjunto de entradas de la segunda máquina. En cierto sentido, la segunda máquina no sabría qué hacer con el 0, pues no esta programada para transformarlo.
- En este prototipo es natural llegar al consenso de que la máquina tiene que poder procesar todos los elementos que estén en el conjunto de entrada (dominio) y que una entrada puede producir una sola salida. De igual manera, la función $y=4$ puede ser fácilmente interpretada como una sencilla máquina programada para transformar cualquier entrada del dominio en el elemento 4.

De esta manera, el estudio de McGowen *et al.* (2000) concluye que la *máquina función* puede llegar a constituir una *raíz cognitiva* útil en el aprendizaje de este fundamental concepto matemático. Considero importante notar que al introducir este prototipo de función como *raíz cognitiva*, la enseñanza del concepto obtiene un esquema nuevo y más apropiado de presentación. La idea consiste en fomentar el uso frecuente de esta metáfora a lo largo del curso de cálculo diferencial. Como fue señalado anteriormente, la imagen (Fig. 3.2) y el lenguaje (‘entrada’ y ‘salida’ de la ‘máquina’ o dominio y rango) ofrecido por esta *raíz cognitiva*, son lo suficientemente generales como para poder describir cada una de las presentaciones usuales del concepto de función (lista, gráfica, fórmula y diagrama de conjuntos). Al familiarizarse tanto con la imagen como con el lenguaje de esta *raíz cognitiva*, y al usarlos cada vez que reflexiona sobre una función particular, el estudiante mantiene presentes las propiedades generales de dicho concepto. Esto es particularmente importante en la última parte del curso, donde virtualmente todas las funciones estudiadas son presentadas por medio de una gráfica o una fórmula[38].

Adicionalmente, esta noción es fácilmente extensible a la definición formal del concepto de función. Dada la mínima pérdida de generalidad[39], posteriormente este ejemplo prototípico puede ser extendido, no sólo a una versión aceptable de su definición en términos de conjuntos, sino a la construcción de otras nociones importantes del curso, como lo son los conceptos de la función inversa y la composición de funciones (ver Fig. 3.3). Así, ofreciendo una imagen y un lenguaje cercanos tanto al estudiante como a la definición formal del concepto, esta *raíz cognitiva* constituye un fundamento apropiado para una construcción significativa de la definición y la presentación de nuevos y más complejos conceptos matemáticos.

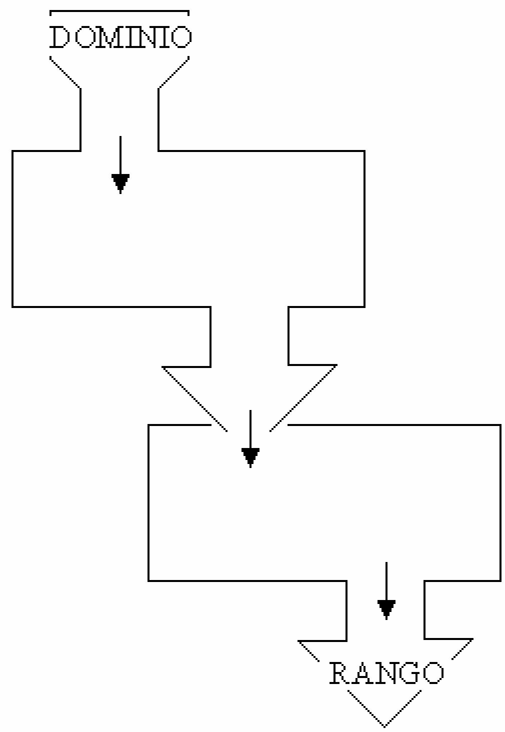


Fig. 3.3. La composición de dos funciones

[38] En la medida de lo posible, el estudiante debe trabajar con una gran variedad de funciones: listas con dominios y rangos no-numéricos, gráficas irregulares, gráficas y expresiones algebraicas de funciones constantes, funciones definidas ‘a trozos’, funciones cuyo dominio o rango sean subconjuntos propios del usual conjunto de los números reales, funciones con dominio o rango finito, etc. Una rica colección de funciones hace más sencilla la tarea de abstraer las propiedades generales del concepto.

[39] Una de las pocas limitaciones internas que no aplican al concepto abstracto consiste en que, en principio, todas las *máquinas funciones* son sobreyectivas.

### 3.1.3 Tecnología y funciones

En esta sección mencionaré dos formas de utilizar nuevas tecnologías en el aprendizaje del concepto de función. Ambas estrategias fueron discutidas en la sección 2.2.3.b., razón por la cual serán brevemente mencionadas en este tercer capítulo.

La primera de ellas consiste en la programación computacional como herramienta el la construcción del concepto de función. Como fue señalado al discutir el uso de nuevas tecnologías en el salón de clase, Dubinsky y otros investigadores del grupo RUMEC[40] utilizan la programación computacional en un lenguaje llamado ISETL[41] para promover una construcción apropiada de una gran diversidad de conceptos matemáticos.

En el caso específico del concepto de función, un excelente estudio realizado por Breidenbach *et al.* (1992) investigó la eficacia de esta herramienta en el proceso de aprendizaje de 62 estudiantes universitarios que estudiaban para desempeñarse como profesores de matemáticas[42]. A través de actividades grupales dedicadas a la discusión de problemas complejos y a la programación en ISETL (e.g. la construcción de la función composición, discutida en la sección 2.2.3.b.), la gran mayoría de estos estudiantes pasaron de una concepción pobre del concepto de función a una concepción general que enfatizaba las propiedades procesales del concepto. De esta manera superaron el común obstáculo de definir una función en términos de una igualdad de expresiones algebraicas, y lograron identificar el concepto de función como un conjunto de parejas ordenadas con las propiedades conocidas. En particular, Breidenbach *et al.* (1992) encontraron que, de una manera muy similar a la *raíz cognitiva*

---

[40] Research in Undergraduate Mathematics Education Community: http://www.cs.gsu.edu/~rumec/

[41] Interactive SET Language: http://isetlw.muc.edu/isetlw/about.htm

presentada en el numeral anterior, el lenguaje computacional termina ofreciendo una metáfora apropiada para pensar y discutir el concepto de función[43].

La segunda estrategia está relacionada con el trabajo de Kaput y el grupo de investigadores de *SimCalc*. Como fue mencionado anteriormente, su objetivo de ‘democratizar el acceso a las *Matemáticas del Cambio*’ ha llevado a *SimCalc* al desarrollo de aplicaciones computacionales que permiten la visualización, transformación y simulación de objetos matemáticos. Estas herramientas facilitan la realización de llamativas e intuitivas presentaciones, haciendo posible que, desde muy temprana edad, una mayor cantidad de estudiantes tengan acceso a diversos conceptos del cálculo.

Las tres principales herramientas computacionales desarrolladas por *SimCalc* están relacionadas con el aprendizaje del concepto de función:

- Simulaciones: *MathWorlds*[44] y *MathCars* ofrecen simulaciones de situaciones que involucran el movimiento de objetos como un carro, o un ascensor. Cada una de estas simulaciones viene acompañada de representaciones gráficas de las funciones que describen la posición, la velocidad o la aceleración del objeto. Haciendo uso del *mouse*, el estudiante tiene la posibilidad de manipular alguna de estas gráficas y ver el resultado de estos cambios tanto en la simulación como en las gráficas de las otras funciones. En algunos casos, el estudiante debe diseñar la gráfica de alguna de estas funciones, de manera que la simulación resultante describa una situación determinada. En otros casos, el estudiante recibe la gráfica de alguna de estas

---

[42] Todos los estudiantes habían cursado una secuencia de cursos de cálculo antes de iniciada la investigación.
[43] Algunos estudiantes reflexionaban y justificaban sus respuestas haciendo referencia a la forma como se manejan las funciones en el lenguaje computacional.
[44] *MathWorlds* puede descargarse gratuitamente en http://www.simcalc.umassd.edu/simcalcframe.html

funciones y debe conducir la simulación de manera que su gráfica coincida con la gráfica recibida.

- *MBL* (*Microcomputer-Based Laboratory*): Estas herramientas capturan el movimiento de un objeto físico y lo reproducen visualmente en el movimiento de un objeto en la pantalla del computador. Una vez el movimiento ha sido simulado por el computador, el estudiante puede investigar sus propiedades funcionales en *MathWorlds*.
- *LBM* (*Line Becomes Motion*): Tal vez la más compleja de las aplicaciones computacionales de *SimCalc*, este tipo de tecnología es capaz de reproducir físicamente la información consignada en la gráfica de una función. De esta manera, una gráfica de velocidad contra tiempo determina el movimiento de un carro de juguete en un riel. Al modificar la gráfica haciendo uso del *mouse*, el movimiento cambia acordemente. Así, el estudiante tiene la posibilidad de estudiar físicamente las propiedades de una función previamente definida en el computador. Igualmente, cuando algún estudiante desliza el carro a lo largo del riel, el dispositivo puede recoger información del movimiento y describir sus propiedades gráficamente en un eje de coordenadas. Los problemas propuestos al estudiante son esencialmente los mismos que surgen en el uso de las simulaciones, con la diferencia de que en este caso se trabaja con objetos reales.

Por medio de las anteriores herramientas computacionales, el estudiante tiene la oportunidad de investigar la representación funcional de la posición, la velocidad o la aceleración de objetos involucrados en una simulación virtual o un experimento físico. Además de favorecer la comprensión de los conceptos de velocidad y aceleración (tan comúnmente usados en la introducción y ejemplificación de los diferentes temas del cálculo), estas experiencias acercan el concepto de función a la representación matemática de un fenómeno cotidiano, y facilitan la familiarización del estudiante con la representación gráfica de una función.

### 3.1.4 El diccionario de funciones

Una vez se ha dedicado un buen tiempo a la discusión y a la reflexión del concepto de función, se pueden estudiar en detalle distintos tipos de funciones. Como es señalado en el reporte editado por Douglas (1987), la idea es hacer una presentación explícita del "reparto estelar" de funciones. Así, se presentan y estudian las funciones que con frecuencia aparecen a lo largo del curso (los personajes principales del cálculo diferencial), como un subconjunto especial de funciones que tienen propiedades muy particulares (e.g. son funciones reales, la gran mayoría de ellas se expresan por medio de una fórmula y sus gráficas son bastante regulares). Se recomienda entonces la construcción de un diccionario de las funciones comúnmente estudiadas en el cálculo diferencial:

- Constantes: $C(x) = a$
- Potencias: $P(x) = x^r$, ($r$ cualquier número racional)
- Trigonométricas: $S(x) = \sin(x)$, $C(x) = \cos(x)$, $T(x) = \tan(x)$
- Exponenciales: $E(x) = b^x$, $(b > 1)$
- Logarítmicas: $L(x) = \log_b x$, $(b > 1)$

- Aquellas que son generadas a partir de otras funciones (suma, resta, multiplicación, división, composición e inversión)
- Funciones expresadas de forma numérica por medio de una tabla
- Funciones expresadas gráficamente, sin una fórmula algebraica (como las que surgen en la bolsa de valores)

Este diccionario es particularmente útil cuando es diseñado por los estudiantes, quienes trabajando en grupos estudian las propiedades de estas diferentes familias de funciones. Como fue señalado en la sección 2.2.3.b, este estudio puede enriquecerse haciendo uso de sistemas de álgebra computacional y otras aplicaciones gráficas. La idea es ofrecer al estudiante la oportunidad de investigar diferentes representaciones, propiedades y aplicaciones de estas funciones. En particular, esta es una excelente manera de estudiar la suma de cualquier función con una función constante (corrimiento en $y$), la composición de una función con una de la forma $x+a$ (corrimiento en $x$), la multiplicación de cualquier función y una función constante (estiramiento en $y$), la composición de una función y una de la forma $ax$ (estiramiento en $x$), funciones definidas 'a trozos', la paridad de una función, etc. Asimismo, se puede estudiar la propiedad de 'crecimiento' (las funciones lineales crecen a una 'velocidad' constante, mientras que las cuadráticas comienzan creciendo lentamente y luego comienzan a crecer muy rápido), preparando al estudiante para el estudio de la tangente de una curva.

Además de generar discusiones en el salón de clase a medida que van surgiendo los descubrimientos, el diseño de este diccionario puede constituir un proyecto que los diferentes grupos deben entregar al finalizar la presentación del concepto de función. Adicionalmente este proyecto puede pedir una definición del concepto mismo y se puede ir perfeccionando a lo largo del curso, a medida que los estudiantes van conociendo más propiedades de las funciones estudiadas.

### 3.2 Límites y Derivadas

Los conceptos de límite y derivada suelen conformar el eje central del curso de cálculo diferencial. Tradicionalmente, después de repasar algunos conceptos preliminares (funciones lineales, cuadráticas, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas) se introduce el concepto de límite por medio de un problema de razones de cambio (generalmente en términos de la velocidad y la aceleración de un objeto). El objetivo de la introducción del concepto de límite al comienzo del curso consiste en poder definir los importantes conceptos de continuidad, de la derivada, y más tarde de la integral, en términos de límites. De esta manera, siendo central en la materia de estudio, al concepto de límite se le otorga un papel central en el aprendizaje del cálculo. Una vez resuelve algunos problemas de razones de cambio y se enfrenta a alguna versión de la definición de límite (con frecuencia los libros incluyen una sección con la definición formal), el estudiante rápidamente se concentra en la evaluación del 'límite de la suma', el 'límite del producto', etc; operaciones que son más tarde utilizadas para justificar las operaciones equivalentes en términos de derivadas. En algún lugar entre la evaluación de límites y la evaluación de derivadas, se estudia la noción de continuidad[45].

De esta manera, y al igual que en el aprendizaje del concepto de función, al estudiar los conceptos de límite y derivada se suele invertir muy poco tiempo en el estudio de los conceptos mismos, y se pasa rápidamente a sus aspectos operacionales. Es cierto: es muy importante que el estudiante de cálculo diferencial entienda en qué consiste la evaluación de un límite o de una derivada determinada. Sin embargo, su comprensión de estos conceptos fundamentales no puede

[45] Como fue señalado anteriormente, mientras el matemático considera que esta es la forma más organizada de presentar estos conceptos, en términos pedagógicos no siempre lo es.

verse reducida a este tipo de operaciones. Por un lado, el éxito en este tipo de estudio algorítmico puede venir acompañado de ideas equivocadas que únicamente salen a la superficie en discusiones sobre el concepto mismo, enfrentando preguntas que no se responden aplicando el algoritmo aprendido. Por otro lado, al privar al estudiante de discusiones y construcciones conceptuales, se alimenta la creencia común de que las matemáticas se reducen a la aplicación de fórmulas de origen desconocido.

Adicionalmente, y al igual que en el aprendizaje del concepto de función, las breves apariciones de las definiciones formales del límite y de la derivada no suelen ofrecer mucho al estudiante de cálculo diferencial. Como fue señalado anteriormente, en la mente del estudiante pueden convivir la definición de un concepto matemático y, al mismo tiempo, nociones erradas de ese concepto. Dado que pocos estudiantes llegan a comprender la definición formal, y que los obstáculos demuestran ser efectivos en ciertas ocasiones, es común que las nociones incorrectas sean mucho más utilizadas.

A continuación, se presentan: un obstáculo común en el aprendizaje del concepto de límite, una raíz cognitiva para la enseñanza del concepto de derivada y la solución de problemas en el aprendizaje de algunas de sus aplicaciones.

### 3.2.1 El lenguaje común como obstáculo

Como es señalado por Sierpinska (1985) y Cornu (1991)[46], el aprendizaje del concepto de límite encuentra su primer obstáculo en el término mismo: *límite*. Éstos y otros investigadores

[46] Bernard Cornu realizó su tesis de doctorado sobre el aprendizaje del concepto de límite. Sus estudios sobre las diversas concepciones y obstáculos de dicho aprendizaje son ampliamente citados en investigaciones sobre la

han notado que el significado previo de la palabra 'límite' suele jugar un papel muy importante en el aprendizaje del concepto. En particular, se ha encontrado que al comenzar un curso de cálculo diferencial, muchos estudiantes asocian la idea de un límite con algo que no se puede (y en ocasiones no se debe) alcanzar. De esta manera, este significado del término es transferido al aprendizaje del concepto, condicionando la noción de límite que el estudiante forma en su mente. Una de las consecuencias más comunes de esta transferencia consiste en que muchos estudiantes creen que el límite nunca se alcanza, o que es una barrera imposible de sobrepasar (Sierpinska, 1985; Cornu, 1991). Así por ejemplo, estos estudiantes llegan a pensar que los valores de una sucesión convergente se acercan muchísimo al límite, pero nunca logran alcanzarlo o sobrepasarlo[47]; y que una curva se acerca a su asíntota, pero nunca la puede cruzar. Adicionalmente, este obstáculo, que se presenta al inicio del estudio del concepto, es alimentado por el lenguaje que utilizamos los profesores del curso, y por el tipo de ejemplos que son presentados al estudiante.

Al usar expresiones como "tiende a", "se acerca a" y "se aproxima a", el profesor inadvertidamente promueve la permanencia del modelo del 'límite inalcanzable' en la mente del estudiante. Algunos profesores, conscientes de este problema, utilizan frases como "arbitrariamente cerca" sin obtener mejores resultados. De esta manera, el lenguaje que

---

enseñanza de conocimiento matemático avanzado. Actualmente, Cornu es rector del Instituto Universitario para la Formación de Maestros de Grenoble, Francia (IUFM-Grenoble). Anna Sierpinska es una de las más importantes investigadoras en educación matemática del Canadá. Actualmente es profesora de la Universidad de Concordia y editora de la revista *Educational Studies in Mathematics*.

[47] Entre la gran variedad de nociones que se forman inadvertidamente en la mente del estudiante, se encuentran la concepción del límite como un proceso interminable ("se van acercando a"), la concepción del límite como un estado estático ("están cerca de"), y la concepción del límite monótono, al cual se aproxima únicamente de una manera creciente o decreciente. De manera similar, el significado común de términos como "continua" y "continuidad" tiende a obstaculizar el aprendizaje del concepto de continuidad. Algunos estudiantes argumentan que la función $x^2 + y^2 = 1$ para $y \geq 0$ no es continua porque su gráfica es truncada en los puntos $(-1,0)$ y $(1,0)$. Es decir, no continúa (Tall, 1992).

utilizamos en el estudio del ya complejo concepto de límite suele dificultar aún más su aprendizaje.

Por otro lado, los ejemplos que inicialmente suelen ser presentados al estudiante cumplen la propiedad del 'límite inalcanzable'. Este es el caso de los ejemplos comunes con funciones racionales, en los cuales se pide hallar el límite de la función cuando la variable independiente tiende al valor que anula el denominador (e.g. $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$). Estos límites dominan tanto el estudio de razones de cambio (con el cual se introduce el concepto de límite), como la introducción y definición del concepto de derivada. De esta manera, y al igual que en el aprendizaje del concepto de función, el estudiante suele aplicar el *principio de extensión genérica* definido por Tall (1991):

> *Si un individuo trabaja en un contexto restringido en el cual todos los ejemplos considerados tienen una propiedad particular, entonces, ante la ausencia de contraejemplos, la mente asume que las propiedades conocidas están implícitas en otros contextos.* (Tall, 1991. Original en inglés)

Ante esta complicación se podría pensar en introducir una mayor variedad de ejemplos (y de hecho es recomendable hacerlo). Sin embargo, la introducción de contraejemplos suele enfrentarse a otros obstáculos que tienden a salir en defensa del modelo que el estudiante posee. Durante el estudio de sucesiones convergentes, y buscando la introducción de un contraejemplo del modelo de 'límite inalcanzable', Tall (1992) se dio cuenta de que algunos estudiantes se negaban a ver la sucesión $1,0,\frac{1}{2},0,\frac{1}{3},0,\frac{1}{4},0,\ldots$ (en la que el límite es 'alcanzado' por una infinidad de términos), como *una sola sucesión*. Estos estudiantes insistían en que este objeto matemático era una deformación de la sucesión armónica $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\ldots$ (la cual sabían que tendía a cero), en cuyas posiciones pares se habían introducido ceros. En este caso, los estudiantes parecían utilizar un nuevo obstáculo según el cual las sucesiones deben poder ser representadas por medio de una fórmula del tipo $a_n = \frac{1}{n}$ (y en efecto, las primeras sucesiones estudiadas cumplen esta condición).

El concepto de límite es extremadamente difícil de comprender, y el obstáculo cognitivo descrito anteriormente dificulta aún más su aprendizaje. Sin embargo, esto no quiere decir que su estudio en un curso de cálculo diferencial tenga que verse reducido a una simple manipulación algebraica. Cornu (1991) encontró que una manera efectiva de afrontar este obstáculo consiste en asignar actividades en las cuales el estudiante descubre la multiplicidad de interpretaciones de los términos asociados con la presentación del concepto. De esta manera, el estudiante llega al estudio de límite consciente de la diferencia entre el concepto matemático y el término del lenguaje común.

En general, la breve presentación de los conceptos del límite y de la derivada debe ser ampliada para dar espacio a experiencias por medio de las cuales se logre una reconstrucción cognitiva del conocimiento previo del estudiante. Conozco varios profesores que, argumentando que 'eso se ve más tarde', no sólo apuran sino que evitan la presentación del concepto de límite a través del estudio de un problema de razones de cambio. Es precisamente a través de este estudio que el curso tradicional intenta justificar la introducción del concepto de límite y generar discusiones a partir de las cuales surjan las inconsistencias entre el conocimiento previo del estudiante y el concepto matemático. Una vez identificados los obstáculos presentes, el profesor debe diseñar actividades que inviten al estudiante a reflexionar sobre la validez de su conocimiento en el aprendizaje de estos nuevos conceptos. En otras palabras, se propone posponer el estudio operacional de los conceptos de límite y derivada, con el objetivo de poder dedicar más tiempo al estudio de los conceptos mismos. Heid (1988) demostró la posibilidad de dedicar una gran parte del curso a este tipo de estudio conceptual, sin sacrificar un buen rendimiento de los estudiantes en la implementación de los algoritmos relacionados con la evaluación de límites y derivadas. Así, *después de* una serie de actividades y discusiones centradas en el estudio de estos conceptos (por ejemplo, haciendo uso de sistemas de álgebra computacional que realizan las operaciones de una gran cantidad de ejemplos mientras los estudiantes se concentran en los conceptos), el estudiante tiende a aprender con facilidad estos algoritmos.

### 3.2.2 La rectitud local: una raíz cognitiva

Como fue señalado anteriormente, Tall (1992, *en imprenta*) ha encontrado en la noción de 'rectitud local' (discutida en las secciones 2.2.2.a y 2.2.3.b) una *raíz cognitiva* para la enseñanza del concepto de derivada. Esta noción, al igual que la *máquina función,* tiene las cualidades de ser cercana a la intuición del estudiante, de ser central en el estudio del cálculo y de no perder vigencia a medida que se van presentando temas más complejos. Al igual que Heid (1988), Tall considera apropiado realizar un estudio conceptual de las nociones de límite y derivada, antes de sumergir al estudiante en el aspecto operativo de estos conceptos. Para esto, utiliza un ambiente computacional gráfico e interactivo a través del cual el estudiante tiene la oportunidad de realizar actividades en las que se estudian implícitamente los conceptos del límite y de la derivada. De esta manera, antes de recibir una definición de límite y una fórmula para hallar la derivada de una función, el estudiante experimenta un proceso por medio del cual se distinguen pedazos de gráficas que tienden a enderezarse a medida que se van ampliando (ver Fig. 3.4)[48].

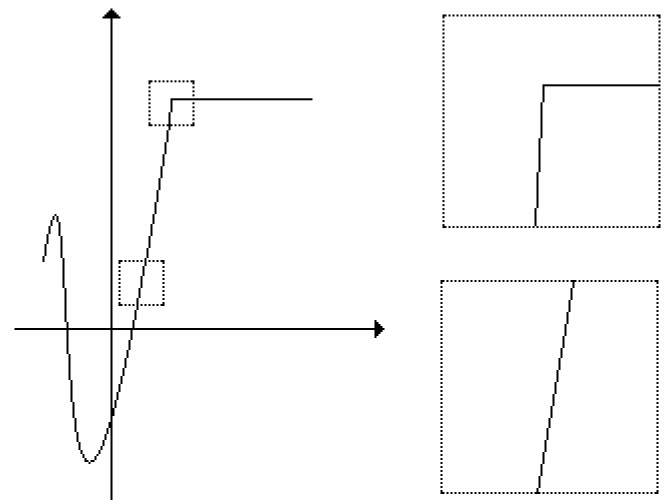

Fig. 3.4. Rectitud local

Las gráficas no tienen que estar dadas por un fórmula explícita y pueden ser tan irregulares como el profesor quiera, de manera que el estudiante adquiere imágenes mentales de todo un espectro de ejemplos de diferenciabilidad y no-diferenciabilidad. Una vez el estudiante ha experimentado con una gran variedad de funciones (desde funciones lineales hasta funciones fractales que no son diferenciables en ningún punto a pesar de ser continuas), se pueden empezar a estudiar los conceptos de límite y derivada de una manera más explícita. Por ejemplo, se pueden diseñar actividades en las que el estudiante consigna en una tabla la pendiente de la "seudo-recta" para diferentes magnificaciones. Haciendo uso de estas listas, puede pedírsele encontrar relaciones entre la fórmula de la función y su pendiente en un punto dado. Muy fácilmente, estudiando una gran cantidad de ejemplos, el estudiante puede llegar a inducir las reglas más básicas de la diferenciación. De esta manera, después de varias sesiones de solución de problemas en las que el estudiante ha tenido la oportunidad de reflexionar sobre estos conceptos, se pueden empezar a organizar los descubrimientos y las conclusiones alcanzadas en un esquema argumentativo que empiece a necesitar del formalismo

[48] Esta figura no es más que una representación de la forma visual como son presentados los objetos en *Graphic Calculus* (la aplicación computacional utilizada por Tall). En particular, esta representación no tiene una buena resolución, no está a escala y hacen falta las graduaciones tanto de los ejes de coordenadas como de las ampliaciones.

matemático. De cierta manera, se diseña el curso totalmente al revés, pasando del estudio de ejemplos a la manipulación algebraica para terminar en el formalismo matemático; y comenzando con el estudio del concepto de la derivada, para luego investigar el concepto de continuidad y finalmente introducir el concepto de límite.

### 3.3.3 Solución de problemas

El estudio de problemas de razones afines y optimización, que suele hacer parte del curso de cálculo diferencial[49], ofrece una excelente oportunidad para entrenar al estudiante en la solución de problemas, y en particular, para motivar una buena administración de las heurísticas descritas en la sección 2.2.3.a.

Generalmente, los problemas de razones afines (algunas veces denominadas razones relacionadas) son estudiados una vez se han presentado las reglas básicas de diferenciación (incluida la regla de la cadena) y la derivación implícita. Es decir, se estudian cuando el estudiante ya sabe derivar. Técnicamente, la solución de este tipo de problemas consiste en encontrar una ecuación que relaciona ciertas cantidades, derivarla implícitamente y despejar la variable deseada. Aunque algunos estudiantes no tienen el conocimiento que les permite establecer esta relación o derivar implícitamente de manera correcta, muchos de los estudiantes que no logran solucionar este tipo de problemas simplemente no consiguen administrar adecuadamente los recursos que poseen. Es decir, conocen las relaciones (generalmente

[49] Los problemas de razones afines han desaparecido de algunos libros nuevos de cálculo diferencial (e.g. Douglas, 1987; Hughes-Hallett *et al*., 1994)

geométricas o del campo de la física), saben derivar, pero no saben qué hacer con ese conocimiento para solucionar el tipo de problemas en cuestión.

Lo mismo sucede con los 'problemas de palabras de máximos y mínimos' que el estudiante enfrenta después de estudiar las relaciones entre la gráfica de una función y las gráficas de su primera y segunda derivada. Estos problemas suelen solucionarse derivando una función y encontrando los valores para los cuales la derivada es igual a cero. Sin embargo, a pesar de saber derivar la función objetivo, muchos estudiantes no pueden solucionar este tipo de problemas.

En términos de lo presentado en la sección 2.2.3.a, la dificultad de los estudiantes al enfrentarse a estos problemas se debe a una deficiencia en alguno, o varios, de los siguientes aspectos:

- Recursos o conocimiento previo
- Heurísticas o técnicas de solución de problemas
- Control o habilidades meta-cognitivas que permitan una buena administración de las heurísticas
- Sistema de creencias o percepción del área de estudio.

En referencia al conocimiento previo del estudiante, el profesor debe asegurarse de que los estudiantes desarrollen un conocimiento apropiado de los conceptos de función y derivada, así como de los procesos de derivación y derivación implícita. En el caso de los problemas de razones afines, muchos estudiantes no tienen claro el concepto de 'derivar con respecto a una variable'. Conocen las reglas de diferenciación, pero las utilizan incorrectamente al manejar como constantes algunas cantidades que cambian con la variable con respecto a la cual se deriva implícitamente. Asimismo, algunos estudiantes no llegan a comprender los teoremas relacionados con los puntos críticos y los valores extremos de un función dada. Las proposiciones son frecuentemente invertidas, obteniendo afirmaciones como: ‘si una función tiene un punto crítico, entonces la función alcanza un mínimo o un máximo local en ese punto’. Es de esperar que un conocimiento previo inapropiado dificulte la solución del tipo de problemas mencionados.

Sin embargo, como fue señalado anteriormente, en algunos casos el estudiante posee todos los recursos necesarios para solucionar el problema y no encuentra una manera de administrarlos para alcanzar una respuesta correcta. En estos casos se evidencia una deficiencia en las heurísticas, el control y el sistema de creencias del estudiante. Como respuesta a estas deficiencias, muchos textos especifican una estrategia para solucionar problemas de razones afines y otra para solucionar problemas de optimización. Por ejemplo,

***Estrategia para problemas de razones afines***

*Paso 1*. Haga un dibujo y nombre las variables y las constantes. *Use* t *para el tiempo. Asuma que todas las variables son funciones de* t *y diferenciables.*

*Paso 2*. Escriba la información numérica *(en términos de los símbolos que ha escogido)*

*Paso 3*. Escriba lo que le preguntan *(usualmente una tasa, expresada como una derivada)*

*Paso 4*. Escriba una ecuación que relacione las variables. *Puede tener que combinar dos o más ecuaciones para obtener una sola ecuación que relaciona la variable cuya tasa desea a las variables cuyas tasas conoce.*

*Paso 5*. Derive con respecto a t. *Después exprese la tasa que desea en términos de las tasas y variables cuyos valores conoce.*

*Paso 6*. Evalúe. *Use los valores conocidos para encontrar la tasa desconocida.*

(Finney, 2001. Original en inglés)

Así, estos textos presentan al estudiante una serie de heurísticas y una manera de controlar su uso para cada tipo de problemas. Sin embargo, estas listas de instrucciones pueden llegar a conformar una nueva rutina que el estudiante realiza sin pensar. El profesor debe asegurarse que estas estrategias surgen en una reflexión sobre el problema y no como una lista mágica de pasos que asegura su solución. En particular, se debe evitar la alimentación de la popular creencia estudiantil según la cual el pensamiento matemático no es más que la aplicación de una gran cantidad de trucos. Resulta mejor que, cada vez que se soluciona un problema en clase, el profesor utilice un esquema general como el propuesto por Pólya (discutido en la sección 2.2.3.a.) y exigir que el estudiante también lo haga. Así, se debe comenzar expresando explícitamente una necesidad por comprender el problema: lo que pide y lo que da. Al diseñar un plan, debe hacerse analizando el problema y no siguiendo al pie de la letra una estrategia recomendada en el texto del curso. Cuando el plan es propuesto por un estudiante, se debe esperar que exista un motivo de peso para implementarlo y que no sea justificado con "eso dice el libro".

Finalmente, el tipo de problemas propuestos deben interesar al estudiante: un granjero no utiliza cálculo para optimizar el tamaño de sus potreros y existen otros escenarios que pueden interesar más al estudiante (por ejemplo el diseño de un recipiente, el costo y la ganancia en la producción de un producto, la justificación de la ley de Snell, etc.) Si queremos que el estudiante utilice su conocimiento matemático en contextos distintos al puramente matemático, tenemos que empezar por mostrarle que ese conocimiento es útil en el tipo de problemas que le interesa solucionar.

## 3.3 Conclusiones

En este tercer capítulo se estudiaron dos de los obstáculos más comunes en el aprendizaje de los principales conceptos del cálculo diferencial. El primer obstáculo consiste en identificar el concepto de función con una fórmula de una variable. El segundo, consiste en transferir el significado común de la palabra *límite* al significado matemático de este concepto.

Ambos obstáculos son alimentados en algunos cursos universitarios de cálculo diferencial, debido principalmente a que pasan desapercibidos. Estos cursos se concentran rápidamente en un estudio operacional y algebraico de los conceptos de función y de límite, en el que estos obstáculos no impiden un buen desempeño por parte de los estudiantes.

Por esta razón, se recomienda aplazar el estudio operacional de las principales nociones del curso, haciendo posible un estudio conceptual que permita identificar los obstáculos presentes en el conocimiento previo del estudiante y diseñar actividades que le ayuden a superarlos. Estas actividades son especialmente productivas cuando están ligadas a la presentación de una *raíz cognitiva* que acerque al estudiante a una definición apropiada del concepto. La *máquina función* y la noción de *rectitud local* han demostrado ser *raíces cognitivas* efectivas en la enseñanza de los conceptos de función y de límite, respectivamente. Asimismo, el uso de nuevas tecnologías en el salón de clase y el establecimiento de sesiones dedicadas a la solución de problemas pueden llegar a jugar un papel muy importante en la enseñanza de los principales conceptos del cálculo diferencial.

Finalmente, se recomienda al futuro profesor realizar sus propias observaciones y experimentos pedagógicos, para así promover el diseño de mejores estrategias de enseñanza.

**Bibliografía**


Artigue M. (1995) La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En *Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. P. Gómez (Ed.). Bogotá: Grupo Editorial Iberoamericano.

Asiala M., Brown A., DeVries D., Dubinsky E., Mathews D. & Thomas K. (1996) A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. En *Research in Collegiate Mathematics Education II, CBMS Issues in Mathematics Education.*

Bachelard, G. (1988) *La formación del espíritu científico.* Decimoquinta edición en español. (Obra original publicada en francés en 1938). México: Siglo XXI.

Bakar, M. N. & Tall, D. O. (1992) Student's Mental Prototypes for Functions and Graphs. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology,* 23 (1), 39-50

Breidenbach, D., Dubinsky, E., Hawks, J. & Nichols, D. (1992) Development of the Process Conception of Function. *Educational Studies in Mathematics*, 23 (3), 247-285

Callahan, J., Cox, D., Hoffman, D., O'Shea, D., Pollatsek, H., Senechal, L., (1995) *Calculus in Context: the five colleges calculus course* y *Handbook for Instructors*. New York: W. H. Freeman & Co.

Cornu, B. (1991) Limits. En *Advanced mathematical thinking.* D.O. Tall (Ed.). The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Douglas, R. (Ed.) (1987) *Toward a Lean and Lively Calculus.* MAA Notes Number 6. Washington D.C.: The Mathematical Association of America.

Dubinsky, E. & Tall, D. O. (1991) Advanced Mathematical Thinking and the Computer. En *Advanced mathematical thinking.* D.O. Tall (Ed.). The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Dubinsky, E. (1999) Assessment in one learning theory based approach to teaching: a discussion. En *Assessment Practices in Undergraduate Mathematics*. MAA notes number 49. Washington D.C.: The Mathematical Association of America.

Finney, R. L. (2001) *Thomas' CALCULUS: early transcendentals.* Décima edición. Basado en la obra original de G. B. Thomas, Jr., revisado por R. L. Finney, M. D. Weir y F. R. Giordano. Boston: Addison Wesley Longman

Ganter, S. (1999) An evaluation of calculus reform: a preliminary report on a national study. En *Assessment Practices in Undergraduate Mathematics.* MAA Notes Number 49. Washington D.C.: The Mathematical Association of America.

Gardner, H. (1999) *The disciplined mind*. New York: Simon & Schuster.

Heid, M. K. (1988) Resequencing skills and concepts in applied calculus using the computer as a tool. *Journal for Research in Mathematics Education*, 19 (1), 3-25

Honan, W. (2002) *The College Lecture*, *New York Times*, Agosto 14 de 2002. Pág. A17

Hughes-Hallett, D., Gleason, A., McCallum, W. (1994) Instructor's Manual with Test Bank. *CALCULUS, Single and Multivariable.* Second Edition, 1998. New York: John Wiley & Sons.

Kaput, J. (2000) Technology as a transformative force in math education: Transforming notations, curriculum structures, content and technologies. En *Technology and the NCTM standards 2000*. E. Galinde (Ed.). Reston, VA: NCTM

Kilpatrick, J. (1992) A history of research in mathematics education. En *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* National Council of Teachers of Mathematics. D.A. Grouws (Ed.). New York, NY: MacMillan Publishing Company.

Krantz, S. (1993) *How to Teach Mathematics*. Providence, RI: American Mathematical Society.

Leitzel, J. & Tucker, A. (Eds.) (1995) *Assessing Calculus Reform Efforts: A report to the community*. Washington, DC: Mathematical Association of America

McGowen, M., DeMarois, P. & Tall, D. O. (2000) Using the Function Machine as a Cognitive Root for Building a Rich Concept Image of the Function Concept, *Proceedings of PME-NA*, 1, 255-261

National Research Council. (2000) *How people learn: Brain, mind, experience, and school* (Expanded Ed.). Committee on Developments in the Science of Learning. J.D. Bransford, A.L Brown, & R.R. Cocking, (Eds.) Commission on Behavioral and Social Sciences and Education. Washington, DC: National Academy Press.

National Research Council. (2002) *Learning and Understanding: Improving advanced study of mathematics and science in U.S. high Schools.*. Committee on Programs of Advanced Study of Mathematics and Science in American High Schools. J.P. Gollub, M.W. Bertenthal, J.B. Labov, & P.C. Curtis, (Eds.) Center for Education, Division of Behavioral and Social Sciences and Education. Washington, DC: National Academy Press.

National Science Board. (1986) *Undergraduate Science, Mathematics and Engineering Education: Role for the National Science Foundation and Recommendations for Action by Other Sectors to Strengthen Collegiate Education and Pursue Excellence in the Next Generation of U.S. Leadership in Science and Technology,* Report of the Task Committee on Undergraduate Science and Engineering Education. Washington D.C.: National Science Board.

Perkins, D. (1998) What is Understanding. *Teaching for Understanding.* M. Wilke (Ed.). San Francisco: Jossey-Bass.

Piaget, J. (1970) *La epistemología genética*. Barcelona: Redondo

Platón (1958) *Menón*. Edición bilingüe por A. Ruiz De Elvira. Madrid: Instituto de Estudios Políticos.

Pólya, G. (1945) *How to solve it.* Princeton, N.J.: Princeton University Press.

Pólya, G. (1962) *Mathematical discovery: On understanding, learning, and teaching problem solving.* Vol. 1. New York: John Wiley & Sons.

Pólya, G. (1965) *Mathematical discovery: On understanding, learning, and teaching problem solving.* Vol. 2. New York: John Wiley & Sons.

Sánchez, C. H. (1994) Un encuentro con Carlos Ruiz S., Premio Nacional de Matemáticas 1993. *MATEMÁTICAS: Enseñanza Universitaria, 3* (2), 5-12.

Schoenfeld A. (1985) *Mathematical problem solving.* New York: Academic Press.

Schoenfeld A. (2000) Purposes and Methods of Research in Mathematics Education. *Notices of the American Mathematical Society, 47* (6), 2-10.

Schwebel, S. (2002) *The Student Teacher's Handbook.* Mahwah: N.J.: Erlbaum Associates.

Sierpinska, A. (1985) Obstacles epistemologiques relatifs a la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 6* (1), 5-68.

Skemp, R. R. (1987) *The Psychology of Learning Mathematics*. Expanded American Edition. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Smith, D., Tall, D.O. & Piez, C. (2002) Technology and Calculus. En *Research on Technology in the Teaching and Learning of Mathematics : Syntheses and Perspectives*. M.K. Heid & G.W. Blume (Eds.) Greenwich, CT: Information Age Publishing.

Steen, L. A. (Ed.) (1988) *Calculus for a New Century: A Pump, Not a Filter*. Washington D.C.: The Mathematical Association of America.

Steen, L. A. (1999) Assessing assessment. En *Assessment Practices in Undergraduate Mathematics*. MAA notes number 49. Washington D.C.: The Mathematical Association of America.

Tall, D. O. (1991) The Psychology of Advanced Mathematical Thinking. En *Advanced mathematical thinking.* D.O. Tall (Ed.). The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Tall, D. O. (1992) The Transition to Advanced Mathematical Thinking: Functions, Limits, Infinity, and Proof. En *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. D.A. Grouws (Ed.) New York: MacMillan Publishing Company.

Tall, D. O., McGowen, M. & DeMarois P. (2000) The Function Machine as a Cognitive Root for building a rich concept image of the Function Concept, *Proceedings of PME-NA*, 1, 247-254.

Tall, D. O. (*en imprenta*) Using Technology to Support an Embodied Approach to Learning Concepts in Mathematics. Conferencia en el *Primer Coloquio do Historia e Tecnologia no Ensino de Matemática.* Universidade do Estado do Rio De Janeiro. Febrero 21, 2002. Borrador en formato PDF en http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2002z-rio-plenary.pdf

Vygotsky, L. S. (1978) *Mind in Society: the development of higher psychological processes.* Cambridge, MA: Harvard University Press.