

**MODELAJE, IDENTIFICACIÓN Y SIMULACIÓN DEL  
SISTEMA DE VUELO DE UN DIRIGIBLE**

Mauricio Arévalo Escobar

Universidad de los Andes  
Facultad de Ingeniería  
Departamento de Eléctrica y Electrónica  
Bogotá  
2003

**MODELAJE, IDENTIFICACIÓN Y SIMULACIÓN DEL  
SISTEMA DE VUELO DE UN DIRIGIBLE**

Mauricio Arévalo Escobar

Ingeniería Eléctrica

Asesor

Alain Gauthier Sellier, PhD

Profesor Titular

Universidad de los Andes

Facultad de Ingeniería

Departamento de Eléctrica y Electrónica

Bogotá

2003

*A mi Familia  
por su gran apoyo*

## Tabla de Contenido

Agradecimientos

Introducción

### Parte I MODELAJE

---

<b>Capítulo 1</b>	<b>Sistemas coordinados para la navegación del dirigible</b>	2
1.1	Sistemas de Referencia	2
1.2	Posición y Velocidad del Dirigible	3
1.2.1	Posición	3
1.2.2	Velocidad	4
<b>Capítulo 2</b>	<b>Ecuación dinámica del dirigible</b>	6
2.1	Matriz de masas e inercias $M$ del Sistema	6
2.1.1	Inercia Total $I_{TOTAL}$	7
2.1.1.1	Inercia de la membrana del Dirigible $I_c$	8
2.1.1.1.1	Inercia de Elipsoide de Revolución $I_o(e)$	9
2.1.1.1.2	Inercia $I_c(g_i)$ respecto al centro de volumen	9
2.1.1.1.3	Inercia $I_o(g_i)$ respecto al centro O del sistema de referencia $R$	10
2.1.1.2	Inercia de la Góndola $I_n$	11
2.1.1.3	Inercia de masa adicional $I_a$	12
2.1.2	Matriz de masas totales $M_{TOTAL}$	12
2.1.2.1	Masa adicional $M_a$	13
2.2	Vector de Fuerzas centrífugas y Efectos de Coriolis $C(v)v$	13
2.3	Vector de fuerzas y momentos aerodinámicos $D(v)v$	14
2.4	Vector de Fuerzas y Momentos Aerostáticos $T_s(h)$	15
2.5	Vector de Fuerzas y Momentos por Actuadores $T_p$	17
2.6	Modelo dinámico representado en Bloques	19
<b>Capítulo 3</b>	<b>Modelaje del sistema de propulsión</b>	21
3.1	Modelaje de Motores DC	21
3.2	Modelaje de las hélices	22
3.2.1	Torque de carga $T_L$	23
3.2.2	Fuerza de Propulsión $T_P$	23
3.3	Montaje de Modelo Motores DC – Hélices	24
3.4	Modelo Completo Dirigible - Sistema de Propulsión	24

<b>Parte II IDENTIFICACIÓN</b>		
<b>Capítulo 4</b>	<b>Identificación de Masas e Inercias del Sistema</b>	27
4.1	Masas	27
4.1.1	Masa de Membrana del Dirigible, Góndola y Empenaje	27
4.1.2	Masa Añadida de Aire	28
4.2	Inercias	29
4.2.1	Inercia de la Membrana $I_c$	29
4.2.2	Inercia de la Góndola $I_n$	33
4.2.3	Inercia Añadida de Aire $I_a$	33
<b>Capítulo 5</b>	<b>Constantes aerodinámicas</b>	36
5.1	Fuerzas de Arrastre	36
5.2	Momentos Inducidos por Fuerzas de Arrastre	38
<b>Capítulo 6</b>	<b>Constantes aerostáticas</b>	39
6.1	Masa de Helio Contenida	39
<b>Capítulo 7</b>	<b>Sistema de propulsión</b>	41
7.1	Parámetros de Motores Eléctricos	41
7.1.1	Parámetros Mecánicos	41
7.1.2	Parámetros Eléctricos	42
7.2	Identificación de Parámetros de Hélices	43
7.2.1	Parámetro $K_Q(J)$ de Torque de Carga	43
7.2.2	Parámetro $K_T(J)$ de Fuerza de Propulsión	46
<b>Parte III SIMULACIÓN</b>		
<b>Capítulo 8</b>	<b>Validación del modelo</b>	50
8.1	Motores y Hélices	50
8.2	Modelo Completo	51
<b>Capítulo 9</b>	<b>Planteamiento inicial de control de vuelo</b>	55
9.1	Control de Altura	55
9.2	Consideraciones Adicionales de Control	58
	<b>CONCLUSIONES</b>	60
	<b>BIBLIOGRAFÍA</b>	62
	<b>Apéndices</b>	
1	<i>Pre-producto vectorial</i>	64
2	<i>Propiedades y parámetros del dirigible AS500 y Sistema de Propulsión</i>	65

## **AGRADECIMIENTOS**

El autor está particularmente agradecido con Alain Gauthier PhD., profesor titular del Departamento de Ingeniería Eléctrica y Electrónica de la Universidad de los Andes y asesor de la presente tesis de pregrado.

Así mismo, agradecimientos a Philippe Souères, investigador de primer grado del *Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des Systèmes LAAS/CNRS* en Toulouse, Francia y a Emmanuel Hygounenc, doctorante de la misma institución por su tutoría en lo referente al modelaje de un dirigible y la valiosa información aportada para la construcción del modelo de dirigible *AS500*.

Finalmente, agradecimientos a Alvaro Pinilla PhD, M.Sc, profesor titular del departamento de Ingeniería Mecánica de la Universidad de los Andes por su asesoría durante las diferentes etapas del desarrollo del presente proyecto.

## INTRODUCCIÓN

El uso de dirigibles para realizar diferentes tareas ha venido ganando mayor aceptación en el mundo, al punto que actualmente se desarrollan diferentes proyectos que buscan la autonomía de vuelo de estos globos para aplicaciones de exploración o mediciones atmosféricas.

En Colombia, se trata de un tema que empieza a explorarse evaluando el desempeño que podrían tener estos globos en las condiciones nacionales para transporte de carga o como medios publicitarios, como ya se ha hecho en otros países. En ese orden de ideas, el objetivo de este proyecto de grado es el de obtener un modelo que describa la dinámica y cinemática de un dirigible en vuelo, de manera que puedan establecerse alternativas de control con las cuales el prototipo de dirigible real pueda ser equipado implementando así un sistema inteligente de navegación autónoma.

El sistema a considerar consiste en un dirigible tipo blimp propulsado por motores eléctricos que serán los únicos actuadores a tomar en cuenta en esta instancia del proyecto. Dada la complejidad de la cinemática de un dirigible, conviene plantear modelos ricos en información que permitan diseñar lazos de control más robustos. Una vez el modelaje está completo, se establece la identificación adecuada de las diferentes constantes que describen un prototipo de dirigible en particular a partir de la teoría que sustenta los diferentes fenómenos dinámicos considerados en el modelaje.

Finalmente, los resultados presentados son obtenidos usando MATLAB/Simulink, en donde se evidencia la estabilidad del modelo construido que responde a los resultados esperados al considerar la estabilidad del proceso de vuelo de un dirigible.

---

PARTE

I

---

MODELAJE

El modelaje de un dirigible está representado por efectos que están asociados a dos fenómenos principales: *flotación* y *desplazamiento* de un cuerpo inmerso en un fluido. Así, el análisis que se expondrá en esta primera parte, permitirá exponer la dinámica y cinemática tanto de la geometría de un dirigible como de los actuadores al manipular efectos aerostáticos y aerodinámicos que constituirán vectores de fuerzas y momentos alterando el desplazamiento del conjunto.

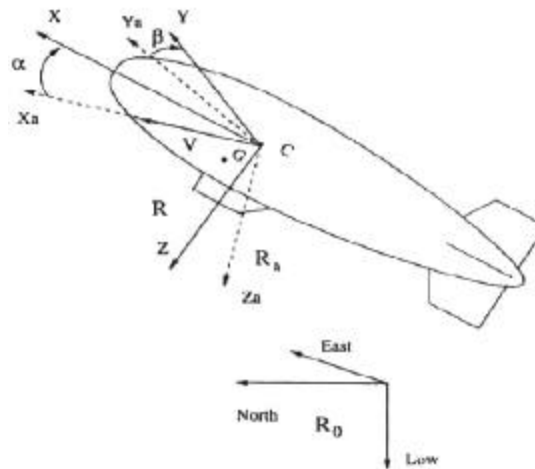


## 1. SISTEMAS COORDENADOS PARA LA NAVEGACIÓN DEL DIRIGIBLE

Este capítulo presentará los sistemas coordenados básicos a partir de los cuales el desplazamiento del dirigible será descrito, así como las variables principales a tener en cuenta en lo referente a su navegación como son velocidad y posición.

### 1.1 Sistemas de Referencia

El movimiento de un cuerpo en un espacio de tres dimensiones es descrito por tres sistemas coordenados de referencia como se cita en [1] y se ilustra en la figura 1.1:



**Figura 1.1:** Sistemas de Referencia para la navegación del Dirigible. Puede verse el origen  $C$  (Centro de Volumen) de los sistemas de Referencia  $R$  y de Sistema de Referencia Aeronáutica  $R_a$ . Además se nota que el centro de volumen permanecerá fijo a pesar que el centro de gravedad  $G$  pueda ser desplazado según como sean dispuestos los elementos de control dentro de la góndola.

El sistema coordenado  $R_0$  es el *sistema terrestre* que representará un sistema fijo cuyo origen será el punto de partida (punto de despegue) del dirigible. Entre tanto, el sistema  $R$ , denominado “*de referencia*”, se encuentra fijo a la geometría del globo y tendrá como origen el centro de volumen  $CV$  del mismo. Finalmente, el sistema coordenado  $R_a$ , llamado “*de referencia aeronáutica*”, tendrá el mismo origen que  $R$  (es decir, el centro de volumen  $CV$ ), sin embargo sus ejes estarán orientados en el sentido del vector de velocidades  $\mathbf{n}$  del globo.

## 1.2 Posición y Velocidad del Dirigible

Para referirse a estas dos variables que describen la dinámica y cinemática del globo, se emplea la notación que se describe a continuación.

### 1.2.1 Posición

La posición del centro de volumen  $CV$  del globo respecto al sistema terrestre  $R_o$  se notará por el vector  $\mathbf{h}_1$ ; en donde se definen las coordenadas de localización de su centro de volumen  $CV$  como puede verse en la ecuación (1.1).

$$\mathbf{h}_1 = \begin{bmatrix} CV_x \\ CV_y \\ CV_z \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

A su vez, la orientación angular del globo respecto a cada uno de sus ejes se expresará en términos de los ángulos *de balanceo*  $f$ , *de cabeceo*  $q$  y *de zig-zag*  $y^1$  como lo ilustra la figura 1.1. Puede verse que cada uno de estos ángulos es medido respecto a cada uno de los ejes del sistema coordenado de referencia  $R$  y da lugar al vector  $\mathbf{h}_2$  de la forma que lo presenta la ecuación (1.2).

$$\mathbf{h}_2 = \begin{bmatrix} f \\ q \\ y \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

De esta manera se construye el vector  $\mathbf{h}$  expresado en la ecuación (1.3) que reúne los vectores  $\mathbf{h}_1$  y  $\mathbf{h}_2$ .

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1 \\ \mathbf{h}_2 \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

---

<sup>1</sup> Para efectos prácticos, esta notación angular es traducida a inglés como *ROLL*  $f$ , *PITCH*  $q$  y *YAW*  $y$ .

De esta manera la posición espacial del dirigible queda descrita en el sistema terrestre  $R_o$  y su posición angular en el sistema de referencia  $R$ .

### 1.2.2 Velocidad

Considerando la naturaleza del fenómeno que permite el desplazamiento de un dirigible, esto es, un cuerpo que se desplaza inmerso en un fluido, las componentes de velocidad que definen los ejes del sistema de referencia aeronáutica  $R_a$  (ver figura 1.1), se agrupan en dos vectores:

- Vector de velocidades lineales  $v_1$
- Vector de velocidades angulares  $v_2$

De esta manera, el vector de velocidades se expresará como la unión de dos sub-vectores como se presenta en la expresión (1.4). Dado que el vector de velocidad esta expresado en el sistema de referencia  $R$  fijo al dirigible, expresarlo en el sistema terrestre  $R_o$  implica el uso de una matriz de transformación  $J(\mathbf{h})$  que permite relacionar los cambios de posición respecto al sistema terrestre  $R_o$ .

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_1 \\ \mathbf{n}_2 \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

$$v_1 = \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_x \\ \mathbf{w}_y \\ \mathbf{w}_z \end{bmatrix}$$

De esta forma, los cambios de posición asociados a  $\mathbf{h}_1$  y los cambios de orientación angular del globo asociados a  $\mathbf{h}_2$  en la ecuación (1.5), se plantean como el vector de velocidades  $\mathbf{n}$  expresado en  $R$  y proyectado en el sistema  $R_o$  por medio de la matriz de transformación  $J(\mathbf{h})$  ya referida.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{h}}_1 &= J_1(\mathbf{h}_2)v_1 \\ \dot{\mathbf{h}}_2 &= J_2(\mathbf{h}_2)v_2 \end{aligned} \quad (1.5)$$

Matricialmente la ecuación (1.5) puede expresarse como se ilustra en (1.6), una presentación que será útil cuando el modelo sea construido en un editor de código como Matlab.

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{h}}_1 \\ \dot{\mathbf{h}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_1(\mathbf{h}_2) & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & J_2(\mathbf{h}_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

Según [2], las matrices de transformación  $J_i(\mathbf{h}_j)$  serán arreglos de  $3 \times 3$  posiciones como se presentan en las expresiones (1.7) y (1.8) y son calculadas según las coordenadas de orientación angular  $\mathbf{h}_2$  definidas en (1.2)

$$J_1 = \begin{pmatrix} \cos \mathbf{y} \cos \mathbf{q} & -\sin \mathbf{y} \cos \mathbf{f} + \sin \mathbf{f} \cos \mathbf{y} \sin \mathbf{q} & \sin \mathbf{f} \sin \mathbf{y} + \sin \mathbf{q} \cos \mathbf{y} \cos \mathbf{f} \\ \cos \mathbf{q} \sin \mathbf{y} & \cos \mathbf{y} \cos \mathbf{f} + \sin \mathbf{q} \sin \mathbf{y} \sin \mathbf{f} & -\cos \mathbf{y} \sin \mathbf{f} + \cos \mathbf{f} \sin \mathbf{q} \sin \mathbf{y} \\ -\sin \mathbf{q} & \cos \mathbf{q} \sin \mathbf{f} & \cos \mathbf{q} \cos \mathbf{f} \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

$$J_2(\mathbf{h}_2) = \begin{pmatrix} 1 & \sin \mathbf{f} \tan \mathbf{q} & \cos \mathbf{f} \tan \mathbf{q} \\ 0 & \cos \mathbf{f} & -\sin \mathbf{f} \\ 0 & \sin \mathbf{f} / \cos \mathbf{q} & \cos \mathbf{f} / \cos \mathbf{q} \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

A partir de las relaciones básicas planteadas en el presente capítulo, el modelo dinámico expuesto en el capítulo 2 que describirá el fenómeno de vuelo de un dirigible será abordado. Serán por lo tanto los vectores de velocidad  $\mathbf{n}$  y posición  $\mathbf{h}$  las variables a manipular según las diferentes consideraciones aerostáticas y aerodinámicas realizadas.

## 2. ECUACIÓN DINÁMICA DEL DIRIGIBLE

Este capítulo presenta el modelo dinámico empleado para describir los efectos físicos a los que se ve sometido el globo en vuelo. Teniendo en cuenta fenómenos dinámicos, aerostáticos y aerodinámicos, la ecuación que gobierna el comportamiento de un dirigible puede representarse por la expresión tomada de [2] de la forma:

$$M \dot{v} + C(v)v + D(v)v + T_s(\mathbf{h}) = T_p \quad (2.1)$$

$M$	Matriz de masas e inercias del sistema
$v$	Vector de velocidades lineales y angulares del sistema
$C(v)v$	Vector de fuerzas y momentos por fuerzas centrífugas y efectos de Coriolis
$D(v)v$	Vector de fuerzas y momentos aerodinámicos
$T_s(\mathbf{h})$	Vector de fuerzas y momentos aerostáticos
$T_p$	Vector de fuerzas y momentos inducidos por los actuadores del sistema

**Tabla 2.1** Convenciones aplicadas a la ecuación (2.1)

La expresión (2.1) describe el desplazamiento de vehículos inmersos en un fluido cuya dinámica y cinemática están sujetas a fenómenos de flotación, por esta razón ha sido utilizada para el modelaje de submarinos y dirigibles. Cada término será estudiado y expuesto con detalle a continuación.

### 2.1 Matriz de masas e inercias $M$ del Sistema

Claramente, todas las fuerzas y momentos que intervienen en el sistema, actúan para conseguir un efecto global de aceleración sobre la masa total del conjunto. Es así como por un parte, se toman en cuenta los efectos inerciales y por otra, la distribución de masa. El análisis de energías realizado en [2] conduce a expresar la matriz  $M$  de la forma que muestra la ecuación (2.2)

$$M = \begin{bmatrix} M_{TOTAL} & -mS(d) \\ mS(d) & I_{TOTAL} \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

en donde se tiene que,

$M_{TOTAL}$	Sumatoria de masa total $m$ del dirigible y masa adicional $M_a$
$d$	Vector de posición del centro de gravedad $G$ respecto al centro de volumen del dirigible en el sistema coordenado $R$ de referencia
$I_{TOTAL}$	Sumatoria de Inercia de la membrana del dirigible $I_c$ , Inercia de la góndola $I_n$ e Inercia de masa adicional $I_a$ ; cada una respecto al centro de volumen $CV$
$S(d)$	Operador de pre-producto vectorial (ver anexo 1)

**Tabla 2.2** Convenciones aplicadas a la ecuación (2.2)

Es importante recordar que los cálculos de inercia se realizan respecto al sistema  $R$  de referencia cuyo origen es el punto  $CV$ . Por otro lado, los fenómenos de **masa e inercia adicionales** (expresados con  $I_a$  y  $M_a$ ) serán tratados en la sección correspondiente.

### 2.1.1 Inercia Total $I_{TOTAL}$

Por definición, la inercia  $I$  de un cuerpo es referida a un punto según su distribución de masa  $m$  y la distancia  $d$  que lo separa del punto, en general se tiene que:

$$I = md^2 \quad (2.3)$$

Para el caso particular del dirigible, su inercia  $I$  se expresa como lo muestra la ecuación (2.4)

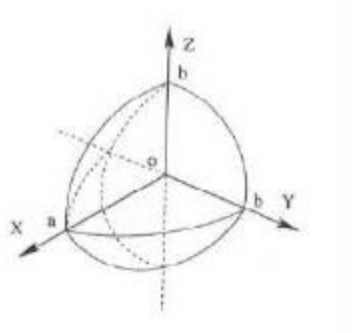
$$I = I_c + I_n + I_a \quad (2.4)$$

$I_c$	Inercia de la membrana del dirigible
$I_n$	Inercia de la góndola
$I_a$	Inercia de masa de aire añadida (o masa adicional)

**Tabla 2.3** Convenciones aplicadas a la ecuación (2.4)

**2.1.1.1 Inercia de la membrana del Dirigible  $I_c$**

Este valor corresponde a las características geométricas del cuerpo del dirigible. El análisis que se plantea para determinar  $I_c$  consiste en considerar la membrana del dirigible como un par de semi-elipsoides unidos como lo ilustra la figura 2.1



**Figura 2.1:** La geometría del dirigible es considerada como la adición de dos semi-elipsoides cuyas inercias individuales representan la inercia total del dirigible.

Así, en general se tendrá la expresión (2.5) que conducirá al cálculo de la inercia  $I_c$  del globo. Según [9], la inercia de un semi-elipsoide esta dada por tres factores presentados en la ecuación (2.6)

$$I_c = I_{semi\_elipsoide1} + I_{semi\_elipsoide2} \tag{2.5}$$

$$I_{semi\_elipsoide} = I_o(e) + I_c(g_1) - I_o(g_1) \tag{2.6}$$

$I_o(e)$	Inercia del elipsoide de revolución cuyas dimensiones corresponden a los semi-ejes del semi-elipsoide en cuestión.
$I_c(g_1)$	Inercia generada por la distribución de masa de la membrana del dirigible respecto al centro de volumen $CV$
$I_o(g_1)$	Inercia generada por la distribución de masa de la membrana del dirigible respecto al origen $O$ del sistema coordenado de referencia $R$

**Tabla 2.4** Convenciones aplicadas a la ecuación (2.6)

Cada término es calculado teniendo en cuenta las consideraciones geométricas ilustradas en la figura 1.1

### 2.1.1.1.1 Inercia de Elipsoide de Revolución $I_o(e)$

Esta parte de la (2.6), supone que el cálculo de inercia del semi-elipsoide se realiza respecto a un elipsoide completo.

En general, para un **elipsoide sólido**, su inercia  $I_o(e)$  respecto a cada uno de los tres ejes en un sistema coordenado tridimensional se expresa como:

$$I_x = \frac{M_{total}}{5}(b^2 + c^2) \quad I_y = \frac{M_{total}}{5}(a^2 + c^2) \quad I_z = \frac{M_{total}}{5}(a^2 + b^2) \quad (2.7)$$

en donde  $a$ ,  $b$ ,  $c$  son las magnitudes de los semi-ejes del elipsoide a lo largo de los ejes  $x$ ,  $y$ ,  $z$  respectivamente. Las constantes “ $b$ ” y “ $c$ ” corresponderán al máximo radio del globo mientras que “ $a$ ” dependerá de la longitud total  $L$  del globo así:

$$a = \frac{L}{1 + \sqrt{2}} \quad (2.8)$$

De forma matricial  $I_o(e)$  será expresado por la ecuación (2.9).

$$I_o(e) = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

### 2.1.1.1.2 Inercia $I_c(g_i)$ respecto al centro de volumen

Acorde con la definición presentada en la ecuación (2.3), la inercia de la distribución de masa de globo respecto al centro de volumen  $CV$  se expresa matricialmente como lo presenta la ecuación (2.10)

$$I_c(g) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_i(x_{gi}^2 + d_{ix}^2) & 0 \\ 0 & 0 & m_i(x_{gi}^2 + d_{ix}^2) \end{bmatrix} \quad (2.10)$$



En (2.1),  $m_i$  será la masa total de la membrana del semi-elipsoide  $i$ ,  $x_{gi}$  la coordenada  $x$  del centro de gravedad del elipsoide completo respecto a CV y el valor  $d_{ix}$  será la componente  $x$  de la distancia del centro de gravedad respecto al origen  $O$  del sistema de referencia  $R$  (ver figura 2.1). Para un elipsoide de revolución, se cumple que  $x_g=d_x$

### 2.1.1.1.3 Inercia $I_o(g_i)$ respecto al centro $O$ del sistema de referencia $R$

De la misma manera que para  $I_c(g_i)$ , la magnitud de la inercia  $I_o(g_i)$  se expresa según la definición enunciada en la ecuación (2.3) tal que

$$I_o(g_i) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_i x_{gi}^2 & 0 \\ 0 & 0 & m_i x_{gi}^2 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

en donde una vez más  $x_{gi}$  representa la coordenada  $x$  del centro de gravedad del elipsoide completo y  $m_i$  la masa total de la membrana del semi-elipsoide  $i$  solamente.

En definitiva, retomando la expresión (2.5), el cálculo total de la inercia de la membrana del dirigible  $I_c$  será la suma de las inercias de cada semi-elipsoide. La expresión general se muestra en la ecuación (2.12)

$$\sum_{i=1}^2 I_c = \sum_{i=1}^2 \left( \begin{bmatrix} I_{xi} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yi} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_i(x_{gi}^2 + d_{ix}^2) & 0 \\ 0 & 0 & m_i(x_{g1}^2 + d_{ix}^2) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_i x_{gi}^2 & 0 \\ 0 & 0 & m_i x_{gi}^2 \end{bmatrix} \right) \quad (2.12)$$

La ecuación (2.12) se puede expresar equivalentemente con (2.13).

$$I_c = \left( \begin{bmatrix} I_{x1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1(x_{g1}^2 + d_1^2) & 0 \\ 0 & 0 & m_1(x_{g1}^2 + d_1^2) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 x_{g1}^2 & 0 \\ 0 & 0 & m_1 x_{g1}^2 \end{bmatrix} \right) + \left( \begin{bmatrix} I_{x2} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2(x_{g2}^2 + d_2^2) & 0 \\ 0 & 0 & m_2(x_{g2}^2 + d_2^2) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 x_{g2}^2 & 0 \\ 0 & 0 & m_2 x_{g2}^2 \end{bmatrix} \right) \quad (2.13)$$

Finalmente, nótese que el análisis realizado en este apartado se ha caracterizado por asumir que el conjunto de la membrana del dirigible y el helio contenido, conforman un cuerpo de masa y densidad uniformes.

### 2.1.1.2 Inercia de la Góndola $I_n$

Para considerar el cálculo de este valor de inercia, se ha asumido que la masa de la góndola  $M_g$  se ha concentrado en un punto y por lo tanto, el valor de  $I_n$  vendrá dado por la expresión general (2.14),

$$I_n = M_g d^2 \quad (2.14)$$

Sin embargo, la naturaleza tridimensional del sistema implicara que  $I_n$  deba ser expresado matricialmente como se presenta en la ecuación (2.15)

$$I_n = \begin{bmatrix} m_g \cdot z_n^2 & 0 & -m_g \cdot x_n \cdot z_n \\ 0 & m_g \cdot (x_n^2 + z_n^2) & 0 \\ -m_g \cdot x_n \cdot z_n & 0 & m_g \cdot x_n^2 \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

en (2.15,  $m_g$  representa la masa total de la góndola y los valores  $x_n$  y  $z_n$  las coordenadas del centroide de la góndola con relación al centro de volumen CV.

La masa  $m_g$  eventualmente puede ser variable según el tipo de motores empleados para el sistema de propulsión, dichos motores pueden ser de combustión interna (masa variable en el tiempo por consumo de combustible) o eléctricos en cuyo caso la masa será constante (como es el caso del presente proyecto) Típicamente, un sistema de control puede ser diseñado más fácilmente cuando se manipulan señales eléctricas en el sistema por lo cual resultará recomendable emplear motores eléctricos como parte del sistema de propulsión. Sin embargo los motores de combustión interna suelen ofrecer ventajas sobre los motores eléctricos en cuanto a la potencia que pueden suministrar los primeros. De esta forma se establece un dilema que debe ser evaluado según las condiciones de operación deseadas

### 2.1.1.3 Inercia de masa adicional $I_a$

El efecto de masa e inercia adicionales expresados con  $M_a$  e  $I_a$ , representa un efecto que denota un aparente incremento en dichas propiedades de un cuerpo cuando este se mueve en un medio fluido, desplazándolo a su paso.

Este efecto resulta despreciable para sistemas aéreos cuya sustentación depende directamente de su velocidad respecto al fluido en el que se encuentran inmersos. Sin embargo; para el caso de un dirigible este fenómeno es de una relevancia significativa ya que la densidad del conjunto es cercana a la del fluido en el que se desplaza (aire) dada la naturaleza del fenómeno de flotación. Para mayor documentación el respecto, consúltense las referencias [4] y [5].

Es así como para el caso particular del globo empleado en este proyecto, los valores de  $M_a$  e  $I_a$  se han determinado según pruebas experimentales de M. Munk [4], en donde para un elipsoide de revolución se tiene que:

$$I_a = k' I \quad (2.16)$$

en donde  $k'$  es un parámetro experimental asociado a la esbeltez  $I$  del dirigible (relación Longitud/Diámetro), mientras que  $I$  es el momento de inercia del fluido desplazado, cuyo volumen se asume idéntico al de la forma del dirigible, es decir, otro elipsoide de revolución con densidad igual a la del aire. Este momento  $I$  es inducido respecto al máximo diámetro del dirigible, por lo cual el efecto se hará notar respecto al eje  $Y$ , que matricialmente será:

$$I_a = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k' \cdot I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

La determinación de estos parámetros será expuesta con detalle en el capítulo correspondiente.

### 2.1.2 Matriz de masas totales $M_{TOTAL}$

La matriz de masas del sistema  $M_{TOTAL}$  esta conformada por la suma de la masa total del dirigible  $m$  y la masa adicional  $M_a$ . El valor de  $m$  comprende todo el conjunto, es decir,

membrana, helio y góndola incluyendo todos los elementos de control y se expresa matricialmente con la ecuación (2.18)

$$\text{Matriz } m = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

### 2.1.2.1 Masa adicional $M_a$

El calculo de  $M_a$  esta basado en los resultados experimentales expuestos en [4] por M. Munk. Según el autor, la magnitud de  $M_a$  depende de la geometría en cuestión y de la dirección de desplazamiento de la misma; geometría que para nuestro caso particular, será un elipsoide de revolución.

Así, el movimiento paralelo al eje de revolución  $X$  implicará un valor  $M_{ax}$  diferente al de otros movimientos realizados en los ejes  $Y$  y  $Z$ . Es así como la matriz  $M_a$  se expresara como sigue:

$$M_a = rV \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_2 \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

En la ecuación (2.19)  $r$  será la densidad del fluido,  $V$  el volumen del cuerpo desplazándose y los valores  $k_1$  y  $k_2$  constantes halladas experimentalmente por Munk que dependen de la relación de esbeltez  $\lambda$  del cuerpo.

## 2.2 Vector de Fuerzas centrífugas y Efectos de Coriolis $C(v)v$

Este vector representa efectos dinámicos consecuencia de las componentes de velocidad lineal y angular que experimenta el dirigible. Así, se generan fuerzas centrífugas y efectos de Coriolis que son expresados en un vector de fuerzas y momentos dinámicos  $T_d(v)$  expresado en [2] como:

$$T_d = \begin{bmatrix} (v_2 \times M_{TOTAL} v_1) + v_2 \times (m v_2 \times d) \\ (v_2 \times I_{TOTAL} v_2) + m d \times (v_2 \times v_1) + (v_1 \times M_{TOTAL} v_1) \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

Obsérvese que  $T_d$  es una matriz de 6x6. En [2] esta expresión es simplificada empleando el operador de pre-producto vectorial así:

$$C(v)v = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} & -S(M_{TOTAL}v_1) - m_{TOTAL}S(v_2 \times d) \\ -S(M_{TOTAL}v_1) - m_{TOTAL}S(v_2 \times d) & -S(I_{TOTAL}v_2) + m_{TOTAL}S(v_1 \times d) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

Así, se tendrá la equivalencia entre las ecuaciones (2.20) y (2.21) tal que:

$$T_d(v) = C(v)v \quad (2.22)$$

### 2.3 Vector de fuerzas y momentos aerodinámicos $D(v)v$

Este componente alberga los efectos aerodinámicos a los que un dirigible se ve sometido por la interacción del fluido con la membrana y el empenaje del globo. Es así como de manera general se expresa que:

$$D(v)v = T_m(v) + T_e(v) \quad (2.23)$$

$T_m(v)$  y  $T_e(v)$  representan los vectores de fuerzas y momentos que actúan sobre la membrana y el empenaje, respectivamente. La forma general para cada término se expresa con la ecuación (2.24.):

$$T(v) = \begin{bmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \\ L_A \\ M_A \\ N_A \end{bmatrix} = \frac{\mathbf{r}|v_i|^2V}{2} \begin{bmatrix} C_x V^{-1/3} \\ C_y V^{-1/3} \\ C_z V^{-1/3} \\ C_l \\ C_m \\ C_n \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

En la expresión (2.24),  $\mathbf{r}$  representa la densidad del fluido dentro del cual se desplaza el cuerpo,  $|v_i|$  la magnitud de la velocidad del aire en la dirección respectiva y  $V$  el volumen del dirigible. Los coeficientes  $C_i$  representan constantes de arrastre que son diferentes según se trate de la membrana o del empenaje. A partir de estos valores, se obtiene las fuerzas y momentos de arrastre en cada dirección listadas en la tabla 2.5

$R_x = \text{Fuerza de Arrastre}$	$La = \text{Momento de Balanceo}(x)$
$R_y = \text{Fuerza de}$	$Ma = \text{Momento de Cabeceo}(y)$
$R_z = \text{Fuerza de}$	$Na = \text{Momento de Zig-zag}(z)$

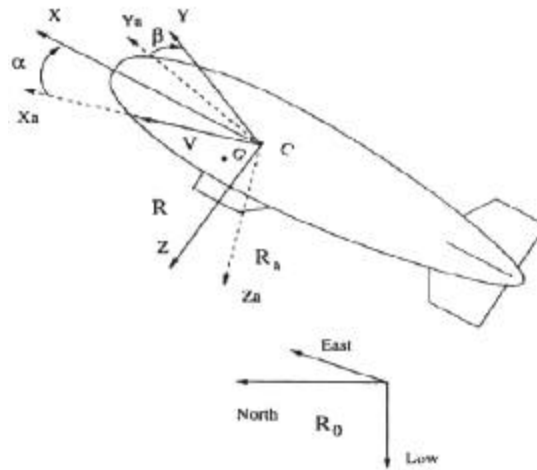
**Tabla 2.5** Notación de Fuerzas y Momentos de Arrastre inducidos según las direcciones X, Y, o Z.

El problema de identificación que se abordará implicará conocer los coeficientes  $C_i$  según dimensiones muy específicas de la membrana del dirigible y su empenaje. Sin embargo, nótese que para cada caso particular al que se aplique el modelaje que se viene presentando en este documento, estos coeficientes deberán ser identificados por medio de diferentes métodos experimentales; por ejemplo, la construcción de modelos a escala cuyo desempeño es evaluado en túneles de viento. Para el caso específico de este proyecto, mas adelante se expondrá una alternativa que permita establecer valores para estos coeficientes con algunos criterios que harán válidas las aproximaciones realizadas.

#### 2.4 Vector de Fuerzas y Momentos Aerostáticos $T_s(h)$

Este vector en función de  $h$  (el vector de posición del globo en el sistema terrestre  $R_o$ ), agrupa aquellas fuerzas y momentos inducidos debido al fenómeno de flotación que experimenta el cuerpo. Se considera por lo tanto, la fuerza de flotación  $F_b$  (aplicada en el centro de flotación cuya ubicación se asumirá igual a la del centro de volumen CV) y la fuerza ejercida por el peso del conjunto  $F_g$  aplicada en el centro de gravedad G del conjunto, de manera que la fuerza resultante vendrá dada por la diferencia vectorial entre estas dos ultimas (ver figura 2.2).

Es importante anotar que para una membrana de dirigible sin góndola, los centros de volumen CV y de gravedad G se encuentran ubicados en el mismo punto del espacio tridimensional; de allí la importancia de ubicar adecuadamente la góndola cuya localización desplazara el centro de gravedad de todo el conjunto. Una vez ubicada la góndola, es ideal conseguir que dicho centro de gravedad G, se desplace únicamente a lo largo del eje z, esto evitará que se induzcan momentos que afecten de manera no adecuada el ángulo de ataque  $\alpha$  descrito entre la trayectoria longitudinal del dirigible y su orientación ( $\alpha$  es el ángulo descrito por los planos XY de los sistemas  $R$  y  $R_a$ ).



**Figura 2.2** Sistemas de Referencia para la navegación del Dirigible. Los momentos inducidos son referidos al centro de volumen CV (C en la figura) y las fuerzas de arrastre actúan a lo largo de las direcciones respectivas.

Con la góndola ubicada, las coordenadas del centro de gravedad  $G$  respecto al centro de volumen  $CV$  serán de la forma presentada en (2.25), y sus valores  $d_x$  y  $d_y$  se espera sean nulos.

$$d = \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

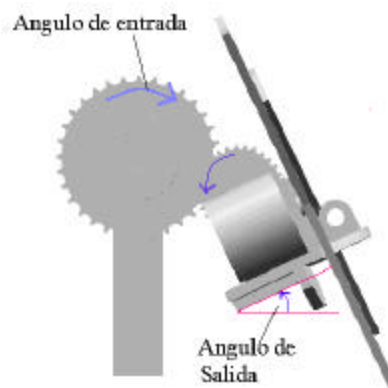
Así,  $T_s(\mathbf{h})$  está asociado directamente al peso del dirigible  $F_g$ , a la posición del centro de gravedad  $G$  respecto al origen de los sistemas  $R$  y  $R_a$  (el centro de volumen  $CV$ ) y a la fuerza de empuje  $F_b$ . Adicionalmente, nótese que  $T_s(\mathbf{h})$  es un vector en función de  $\mathbf{h}$ , vector que representa las coordenadas del dirigible en el sistema terrestre  $R_0$ . Por esto, las coordenadas del centro de gravedad  $G$  deben ser expresadas también en  $R_0$  por medio de la matriz de rotación  $J_1(\mathbf{h})$  que nos llevara de  $R$  a  $R_0$ .

Se tendrá así un vector de fuerzas y momentos  $T_s(\mathbf{h})$  de la forma (2.26). Los términos  $I_{ij}$ , pertenecen a la matriz de transformación  $J_1(\mathbf{h})$  presentada anteriormente en la ecuación (1.7) y los valores  $d$  serán las coordenadas de  $G$  respecto a  $CV$  dadas en la ecuación (2.25)

$$T_s(\mathbf{h}) = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{31} \cdot (F_G - F_b) \\ \mathbf{I}_{32} \cdot (F_G - F_b) \\ \mathbf{I}_{33} \cdot (F_G - F_b) \\ -\mathbf{I}_{32} \cdot d_z \cdot F_G \\ (\mathbf{I}_{31} \cdot d_z \cdot F_G) - (\mathbf{I}_{33} \cdot d_x \cdot F_G) \\ \mathbf{I}_{32} \cdot d_x \cdot F_G \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

## 2.5 Vector de Fuerzas y Momentos por Actuadores $T_p$

Por actuadores se entiende, todos aquellos elementos cuya función modifica activamente la dinámica y cinemática del cuerpo. Los elementos a considerar son típicamente los motores de propulsión y las superficies móviles localizadas en el empenaje como se ilustra en la figura 2.6. Sin embargo, el modelaje presentado en este proyecto contempla únicamente los motores como actuadores.

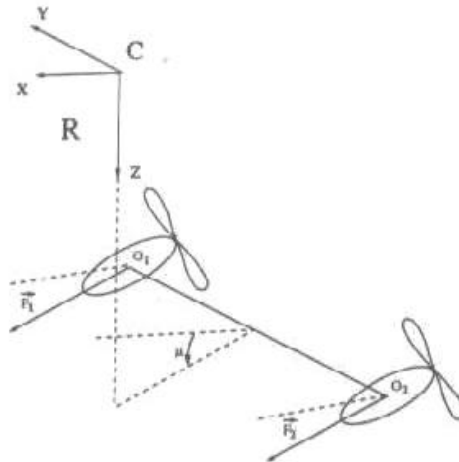


**Figura 2.3** A considerar como actuadores se tendrán los motores propulsores y la posibilidad de dirigir la fuerza de propulsión  $T$  conseguida a través de un montaje de vectorización.

La disposición final de dichos actuadores tendrá por resultado componentes de fuerza en los tres planos, componentes con las cuales se busca operar el sistema para alterar las variables de posición y velocidad del globo.

Sin embargo, veremos que el efecto aportado por las superficies móviles de la cola será relevante considerando que aporta estabilidad al vuelo a pesar que no serán tratadas como elementos que actúen el sistema ya que para nuestro caso, no hay forma de operarlas.





**Figura 2.4** A considerar como actuadores se tendrán los motores propulsores y la posibilidad de dirigir la fuerza de propulsión  $T$  conseguida a través de un montaje de vectorización.

Así, para un montaje de propulsión vectorizada como el presentado en las figuras 2.3 y 2.4, la descomposición vectorial que da lugar a  $T_p$  será de la forma presentada en la ecuación (2.27)

$$T_p = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (F_1 + F_2)\cos m \\ 0 \\ (F_1 + F_2)\sin m \\ O_y(F_1 - F_2)\text{Sen}m \\ (F_1 + F_2)[O_x\text{Cos}m + O_z\text{Sen}m] \\ (F_1 - F_2)(O_y\text{Cos}m) \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

Acorde con la ecuación (2.27), se tiene la convención presentada en la tabla (2.6):

$F_1, F_2$	Fuerzas de Propulsión generadas por los dos motores
Ángulo $m$	Ángulo de vectorización de los motores propulsores
Vector $O$	Coordenadas de motores propulsores respecto al centro de volumen CV

**Tabla 2.6** Convención de términos de la ecuación 2.27

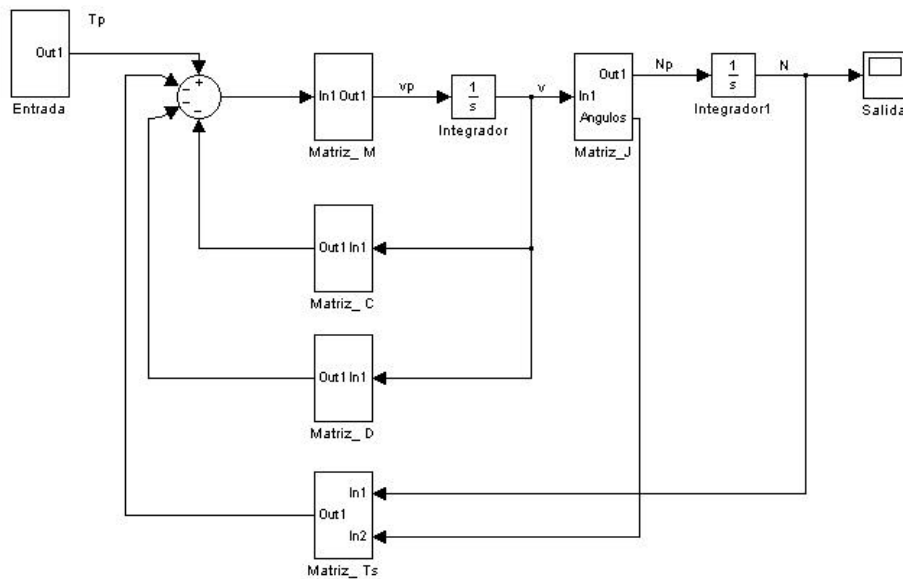
Es interesante resaltar que el trato que se da por separado a la fuerza de propulsión aportada por cada motor,  $F_1$  y  $F_2$ , permite pensar en una variable de control para implementar giros. Esto se evidencia en los elementos  $T_{p4-1}$  y  $T_{p6-1}$  en donde la diferencia entre  $F_1$  y  $F_2$  inducirá momentos respecto a los ejes  $X$  y  $Z$ ; así como se verificó en el desarrollo del proyecto expuesto en [10].

### 2.6 Modelo dinámico representado en Bloques

Manipulando algebraicamente la expresión (2.1) se puede llegar a (2.28):

$$\begin{aligned}
 M\dot{\mathbf{n}} + C(\mathbf{n})\mathbf{n} + D(\mathbf{n})\mathbf{n} + T_s(\mathbf{h}) &= T_p \\
 M\dot{\mathbf{n}} &= T_p - (C(\mathbf{n})\mathbf{n} + D(\mathbf{n})\mathbf{n} + T_s(\mathbf{h})) \\
 \dot{\mathbf{n}} &= [T_p - (C(\mathbf{n})\mathbf{n} + D(\mathbf{n})\mathbf{n} + T_s(\mathbf{h}))] \times M^{-1}
 \end{aligned}
 \tag{2.28}$$

Así, de manera general, la figura (2.5) representa el montaje gráfico del que será el sistema a ser implementado en MATLAB/Simulink.



**Figura 2.5** Versión gráfica de la ecuación (2.28). Este mismo esquema será implementado en MATLAB/Simulink en la sección de simulación del proyecto, el cual responderá con salidas de posición y velocidad a una entrada de propulsión  $T_p$  dada.

IEL-I-2003-01

Este esquema será el modelo montado en MATLAB/*Simulink* para representar el dirigible y desarrollar así simulaciones del sistema que en proyectos futuros permitan evaluar diferentes alternativas de control.

### 3. MODELAJE DEL SISTEMA DE PROPULSIÓN

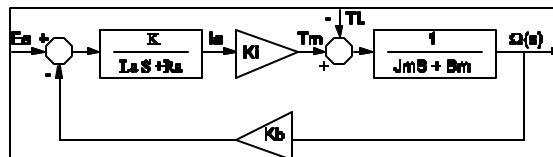
Este capítulo presenta las ecuaciones que modelan la fuerza de propulsión y el torque de carga generados por la rotación de las hélices instaladas en los motores propulsores.

Previamente se ha comentado que los actuadores del sistema están representados por las superficies móviles ubicadas en la cola del globo y por los motores eléctricos de propulsión. De tener algún tipo de control sobre estas superficies, puede alterarse la orientación del dirigible participando así en la implementación de giros, ascensos y descensos. Entre tanto, la fuerza de propulsión es suministrada netamente por los motores y las hélices instalados en la góndola.

Ya que las superficies de la cola serán tratadas como elementos de estabilidad en vuelo únicamente, el conjunto motor-hélice será el único actuador en el sistema y por lo tanto, el modelaje asociado recibe una atención rigurosa en el presente capítulo, buscando con esto recrear con un modelo suficientemente descriptivo el fenómeno de propulsión que opera el vuelo del dirigible.

#### 3.1 Modelaje de Motores DC

Típicamente un motor DC recibe un modelaje que involucra información de tipo eléctrico y mecánico. El modelo empleado para este caso ha sido tomado de [6], y se presenta como lo ilustra la figura 3.1



**Figura 3.1** Modelo de motor eléctrico empleado. El sistema es descrito por consideraciones de tipo eléctrico y mecánico asociando una velocidad angular del eje del motor para una entrada determinada de voltaje.

LA función de transferencia del sistema en la figura 3.1 viene dada por la expresión (3.1) para la cual se cumple la convención presentada en la tabla (3.1)

$$\frac{\Omega(s)}{E_a(s)} = \frac{K_i}{L_a J_m s^2 + (R_a J_m + B_m L_a) s + (K_b K_i + R_a B_m)} \quad (3.1)$$

$W(s)$	Velocidad Angular del rotor [rad/s]
$E_a$	Voltaje de Alimentación del Motor [V]
$K_i$	Constante de Torque [N-m/A]
$K_b$	Constante de Voltaje Inducido [V-s/rad]
$R_a$	Resistencia de Armadura [Ohm]
$L_a$	Inductancia de Armadura [H]
$J_m$	Inercia Rotacional del Rotor y la Hélice [Kg-m <sup>2</sup> ]
$B_m$	Coefficiente de Fricción Viscosa [N-m-s]

**Tabla 3.1** Convención adoptada para los términos de la ecuación 3.1

El modelo de bloques permite seguir el comportamiento de los dos sub-sistemas que conforman la dinámica del motor.

Por un lado, un sub-sistema eléctrico en el que intervienen señales de tensión en los bornes del motor  $E_a$ , corriente de armadura  $I_a$  y características propias del motor como resistencia e inductancia de armadura  $R_a$  y  $L_a$  respectivamente.

De otra parte, un sub-sistema mecánico que involucra variables como el torque generado  $T_m$  el torque de carga  $T_L$  impuesto por las hélices y características como inercia rotacional  $J_m$  y coeficiente de fricción viscosa  $B_m$  según el tipo de hélice empleado.

### 3.2 Modelaje de las hélices

Existen dos características de gran interés asociadas al desempeño de las hélices que impulsan el dirigible: la resistencia que estas ofrecen a la rotación libre del motor expresada por  $T_L$  y la fuerza de propulsión  $T_P$  desarrollada para generar el desplazamiento del globo.

Estos dos elementos son de gran relevancia ya que el torque  $T_L$  generado por la instalación de las hélices en el rotor condiciona la operación en vuelo del globo al reducir la velocidad angular en el motor y disminuyendo así la fuerza de tracción  $T_P$  que controla al dirigible en sus variables de posición y velocidad.

### 3.2.1. Torque de carga $T_L$

Una vez instalada la hélice en el rotor, el motor debe suministrar un torque mínimo  $T_L^2$  para acelerarla. Según [7], este torque puede expresarse como se presenta en (3.2):

$$T_L = Q = rD^5 K_Q(J)n^2 \quad (3.2)$$

Es así como  $T_L$  es expresado en términos de la densidad  $r$  del fluido en el que se desplazan las hélices, su velocidad angular  $n$  y el diámetro  $D$  del círculo que estas describen al girar. Además, el parámetro  $K_Q(J)^3$  es una característica propia de cada hélice y por lo tanto será a partir de su adecuada identificación que el modelo presentado en la ecuación (3.2) podrá ser válido. De [7], se tiene que:

$$K_Q(J) = a_{1Q} + a_{2Q} \left( \frac{V_o}{nD} \right) \quad (3.3)$$

En la expresión (3.3), las constantes  $a_{1Q}$  y  $a_{2Q}$  condicionan el comportamiento del parámetro  $K_Q(J)$  para valores de  $n$ ,  $D$  y la velocidad  $V_o$  considerada como la velocidad del dirigible respecto a un punto muy lejano. Como veremos en la sección de identificación, para nuestro caso particular se obtendrán valores para  $a_{1Q}$  y  $a_{2Q}$ , así como la velocidad  $V_o$  será tomada como la velocidad de desplazamiento del dirigible a lo largo del eje  $X$  del sistema de referencia  $R$  asumiendo condiciones ideales de ausencia de viento,

### 3.2.2. Fuerza de Propulsión $T_P$

El desempeño del conjunto motor-hélice proporciona la fuerza de propulsión  $T_P$  necesaria para obtener el desplazamiento del dirigible. Según [7], esta fuerza puede expresarse por la ecuación (3.4) como:

$$T = rD^4 K_T(J)n^2 \quad (3.4)$$

En esta caso aparecen de nuevo las variables de densidad  $r$  del fluido en el que se desplazan las hélices, su velocidad angular  $n$  y el diámetro  $D$  del círculo que dichas

---

<sup>2</sup> En la bibliografía, el torque de carga  $T_L$  tiene por notación  $Q$ .

hélices describen al girar. Adicionalmente, el parámetro  $K_T(J)$  será una característica de cada hélice en particular y se expresa según la ecuación (3.5):

$$K_T(J) = a_{1T} + a_{2T} \left( \frac{V_o}{nD} \right) \quad (3.5)$$

Igual que para la ecuación (3.3), los parámetros  $a_{1T}$  y  $a_{2T}$  deben identificarse para caracterizar la hélice particular que se emplee. Este aspecto será tratado en la sección de identificación correspondiente.

### 3.3 Montaje de Modelo Motores DC – Hélices

El modelo montado en MATLAB/Simulink que se realizó para simular el comportamiento mecánico y eléctrico de los motores DC de propulsión y las hélices instaladas en ellos, corresponde al diagrama de bloques ilustrado en la figura (3.1) al cual se ha agregado el torque de carga  $T_L$  al que se somete el motor a causa de la instalación de las hélices así como la fuerza de propulsión generada  $T$  empleada para romper el equilibrio aerostático del globo logrando así su desplazamiento.

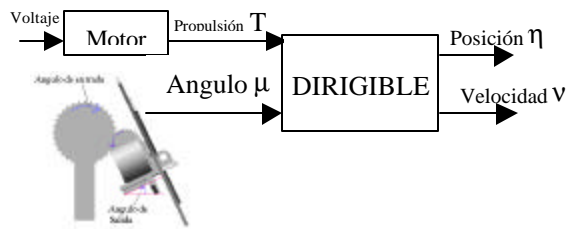
Nótese que el voltaje de alimentación de cada motor regulará su velocidad angular y con ello la fuerza de propulsión obtenida. Como veremos más adelante, esta condición permitirá plantear globalmente el problema de control de desplazamiento del globo en términos del voltaje de alimentación, una variable análoga que puede manipularse fácilmente y que permitirá establecer una relación fundamental entre un voltaje de entrada y una posición y/o velocidad deseadas del globo.

### 3.4 Modelo Completo Dirigible - Sistema de Propulsión

El modelo final que será implementado para simular la dinámica y cinemática del globo, se ilustra en la figura (3.2). Este esquema presenta el modelo de la planta que se encuentra descrito con más detalle en la figura (2.5) de la sección 2.6, al cual se añade el modelaje de los actuadores (hélices y motores) presentado en las secciones 3.1 y 3.2

---

<sup>3</sup>  $K_T(J)$  es una función del parámetro de avance  $J$ , expresado como  $J = (V_o/nD)$



**Figura 3.2** Montaje total que será simulado en Simulink, incluyendo el sistema de propulsión y el dirigible.

Así, puede verse cómo el voltaje de alimentación de cada motor y el ángulo de vectorización  $m$  serán las variables con las que en principio podrá plantearse un esquema de control para la navegación del dirigible.



---

PARTE

**II**

---

IDENTIFICACIÓN

El proceso de identificación seguido responde a la necesidad de establecer los valores que describen el proceso de vuelo de un dirigible para poder realizar simulaciones del desempeño del globo en vuelo según condiciones determinadas del medio a su vez que permita abordar el problema de control para conseguir autonomía de vuelo por parte del globo.

#### 4. Identificación de Masas e Inercias del Sistema

En este capítulo se presenta el esquema de identificación que permite determinar los coeficientes y constantes necesarios para construir la matriz de masas e inercias del sistema expuesta en la sección 2.1

Se presentará un compendio de las constantes que constituirán la matriz de masas e inercias  $M$  tomando como base el dirigible *AS500* empleado en el proyecto KARMA del *Laboratorio de Análisis y Arquitectura de Sistemas - LAAS/CNRS* en Toulouse (Francia) y que serán empleadas para realizar las simulaciones del modelo construido.

Este modelo de dirigible se ha usado como base ya que el estudio inicial del modelaje fue realizado en el *LAAS/CNRS* y se dispone de cierta información experimental con la que es posible validar los modelos planteados en el presente proyecto.

##### 4.1 Masas

Como ya fue expuesto antes, la matriz de masas del sistema  $M_{TOTAL}$  se establece a partir de la masa del conjunto y de la masa de aire adicional. Por otro lado, es claro que determinar la masa física de un sistema es sencillo ya que se trata de establecer el peso del conjunto; sin embargo, esta sección expone también el concepto de masa de aire adicional aplicado al caso particular del dirigible *AS500*.

##### 4.1.1 Masa de Membrana del Dirigible, Góndola y Empenaje

EL peso de los elementos se presenta en la tabla 4.1, estos valores permiten definir la **matriz  $m$**  de elementos del sistema presentada en la sección 2.1.2 y redefinida en la ecuación (4.1)

Masa de Membrana del Dirigible (Kg)	11.555
Masa de la Góndola y elementos de Control (Kg)	5.5
Masa del Empenaje (Kg.) (x 4 alerones)	0.330 (x 4= 1.32)
Total (Kg)	<b>18.375</b>

**Tabla 4.1** Masa de los elementos del dirigible AS500 empleado en el proyecto KARMA en el Laboratorio de Investigación LAAS/CNRS

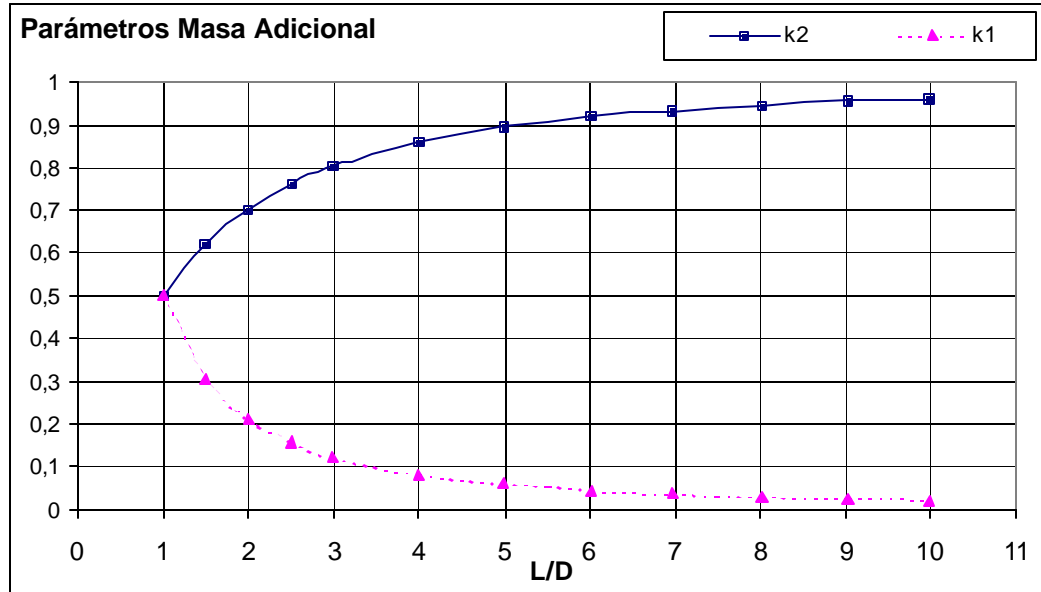
$$\text{Matriz } m = \begin{pmatrix} 18.375 & 0 & 0 \\ 0 & 18.375 & 0 \\ 0 & 0 & 18.375 \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

#### 4.1.2 Masa Añadida de Aire

Según pruebas experimentales reportadas en [4], los factores  $k_1$  y  $k_2$  asociados a la geometría del dirigible dependen de su longitud y diámetro máximo. Así, se tendrá una relación de aspecto  $\lambda$  tal que:

$$\begin{aligned} \lambda &= L/D \\ \lambda &= 8.0/1.9 \\ \lambda &= 4.21 \end{aligned} \quad (4.2)$$

Según los datos reportados por Munk en [4], se puede construir la gráfica presentada en la figura 4.1 Esta figura ilustra el comportamiento de las constantes  $k_1$  y  $k_2$  para diferentes valores de la relación de aspecto Longitud/Diámetro  $\lambda$ .



**Figura 4.1** Curva para determinar los parámetros de masa de aire añadida establecidos experimentalmente por M.Munk (Ver ref [4])

Puede verse que a partir de esta información experimental, los valores de dichas constantes pueden ser estimados para cualquier geometría de dirigible. De esta manera, la matriz de masa adicional  $M_a$  se construye retomando la ecuación (2.19).

$K_1$	0.077
$K_2$	0.868

**Tabla 4.2** Parámetros de Masa Adicional para el dirigible AS500

La matriz  $M_a$  calculada se presenta en la ecuación (4.3)

$$M_a = 19.5 \begin{pmatrix} 0.077 & 0 & 0 \\ 0 & 0.868 & 0 \\ 0 & 0 & 0.868 \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

Definidas las matrices  $m$  y  $M_a$ , según la sección 2.1.2 la matriz de masas  $M_{TOTAL}$  será la suma de las expresiones (4.1) y (4.3), obteniendo así la expresión (4.4)

$$M_{TOTAL} = \begin{pmatrix} 19.8765 & 0 & 0 \\ 0 & 35.301 & 0 \\ 0 & 0 & 35.301 \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

## 4.2 Inercias

Como se expuso en la sección 2.1.1, la matriz total de inercias  $I_{TOTAL}$  representa la sumatoria de las inercias individuales de la membrana del dirigible, la góndola que alberga los elementos de control de vuelo y de la masa de aire adicional.

### 4.2.1 Inercia de la Membrana $I_c$

Para el caso del dirigible AS500, la geometría del dirigible es seccionada en dos semi-elipsoides como lo ilustra la 2.1 Retomando la ecuación 2.6, deben ser definidos tres valores inerciales que describen la magnitud de la inercia de la membrana del dirigible  $I_c$  en términos de la inercia del elipsoide de revolución  $I_c(e)$ , la inercia respecto al centro de volumen  $I_c(g)$  y la inercia respecto al centro  $O$  del sistema de referencia  $R$ .

- Inercia del elipsoide de revolución  $I_o(e)$

Según [9], analíticamente puede verse que la inercia de cada uno de los semi-elipsoides de revolución que constituyen el globo se expresa como:

Semi-elipsoide 1	Semi-elipsoide 2
$I_x = \frac{Mtotal}{5} (b^2 + c^2)$	$I_x = \frac{Mtotal}{5} 2b^2$
$I_y = \frac{Mtotal}{5} (a^2 + b^2)$	$I_y = \frac{Mtotal}{5} (2a^2 + b^2)$
$I_z = \frac{Mtotal}{5} (a^2 + b^2)$	$I_y = \frac{Mtotal}{5} (2a^2 + b^2)$

**Tabla 4.3** Inercia de los semi-elipsoides que construyen el dirigible respecto a los tres ejes del sistema de referencia  $R$

Según la expresión (2.8) y recordando de la sección 2.1.1.1 que los semi-ejes  $b$  y  $c$  corresponde al radio máximo del globo, la magnitud respectivas de cada semi-eje son listadas en la tabla 4.4

$a$	3.3137
$b$	0.95
$c$	0.95

**Tabla 4.4** Magnitudes de semi-ejes de los elipsoides de revolución que conforman el dirigible AS500 (Dimensiones en metros)

Así, los valores de inercias  $I_o(e)$  respecto a cada eje coordenado son resumidas en la tabla 4.5

Semi-elipsoide 1	Semi-elipsoide 2
$I_{x1} = 4.171$	$I_{x2} = 4.171$
$I_{y1} = 27.462$	$I_{y2} = 52.838$
$I_{z1} = 27.462$	$I_{z2} = 52.838$

**Tabla 4.5** Inercias calculadas de los semi-elipsoides que construyen el dirigible AS500

Así, según la ecuación (2.9) se tendrá la expresión calculada (4.5) que resume el valor total de  $I_o(e_1)$  y  $I_o(e_2)$

$$I_o(e_1) = \begin{pmatrix} 4.171 & 0 & 0 \\ 0 & 27.462 & 0 \\ 0 & 0 & 27.462 \end{pmatrix} \quad I_o(e_2) = \begin{pmatrix} 4.171 & 0 & 0 \\ 0 & 52.838 & 0 \\ 0 & 0 & 52.838 \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

- Inercia respecto al centro de volumen  $I_c(g)$

Retomando la ecuación (2.10), se tienen en cuenta dos vectores para realizar el cálculo de  $I_c(g)$ : Por un lado, el vector de coordenadas CG del centro de gravedad del elipsoide completo respecto al centro de volumen CV y por otro lado, el vector  $d$  de distancias del centro de gravedad respecto al origen O del sistema. Como se estableció en la sección 2.1.1.1.2, el vector  $d$  será el mismo vector de coordenadas del centro de gravedad ya que para un elipsoide de revolución el centro de volumen CV y el origen O son el mismo punto.

Para cada semi-elipsoide se tiene la información presentada en las tablas 4.6 y 4.7

Semi-elipsoide 1	
Masa 1	4.82 Kg
$X_{g1} (\equiv CG_{x1})$	1.2426 m

**Tabla 4.6** Magnitudes de masa y de coordenada X del centro de gravedad del semi-elipsoide 1

Semi-elipsoide 2	
Masa 2	6.82 Kg
$X_{g2} (\equiv CG_{x1})$	-1.7574 <sup>1</sup> m

**Tabla 4.7** Magnitudes de masa y de coordenada X del centro de gravedad del semi-elipsoide 2

Reemplazando en la ecuación (2.10), se obtienen las expresiones de  $I_c(g)$  para cada semi-elipsoide presentadas en (4.6)

$$I_c(g_1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 14.885 & 0 \\ 0 & 0 & 14.885 \end{bmatrix} \quad I_c(g_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 42.127 & 0 \\ 0 & 0 & 42.127 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

<sup>1</sup> Se usa signo negativo dado que se respeta la convención ilustrada en la figura

- Inercia  $I_o(g)$  respecto al centro  $O$  del sistema de referencia  $R$

Retomando la ecuación (2.11) para cada semi-elipsoide se tiene que:

$$I_o(g) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & mx_g^2 & 0 \\ 0 & 0 & mx_g^2 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

Empleando la misma información suministrada en las tablas 4.6 y 4.7, se obtiene el valor  $I_o(g)$  de cada semi-elipsoide en la expresión:

$$I_o(g_1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7.442 & 0 \\ 0 & 0 & 7.442 \end{bmatrix} \quad I_o(g_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 21.063 & 0 \\ 0 & 0 & 21.063 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Así, según la ecuación (4.9) obtenemos el valor total de inercia de la membrana del dirigible  $I_c$  a partir de la ecuación (2.13).

$$\sum_{i=1}^2 I_c = \sum_{i=1}^2 \left( \begin{bmatrix} I_{xi} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yi} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_i(x_{gi}^2 + d_{ix}^2) & 0 \\ 0 & 0 & m_i(x_{g1}^2 + d_{ix}^2) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_i x_{gi}^2 & 0 \\ 0 & 0 & m_i x_{gi}^2 \end{bmatrix} \right)$$

$$I_c = \begin{bmatrix} 8.342 & 0 & 0 \\ 0 & 108.807 & 0 \\ 0 & 0 & 108.807 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

La inercia asociada a la membrana del dirigible AS500 queda establecida como el valor de inercia que será empleado para realizar las simulaciones cuyos resultados serán presentados más adelante.

#### 4.2.2 Inercia de la Góndola $I_n$

Retomando la ecuación (2.15), se deben considerar dos características asociadas directamente a la góndola: Su masa y sus coordenadas de localización respecto al origen del sistema de referencia  $R$  (el mismo centro de volumen  $CV$ ). Para el caso particular del dirigible  $AS500$ , estas características se presentan en la 4.8

Masa de góndola $m_g$	5.5 Kg	
Coordenadas del centroide de la góndola respecto al centro de volumen $CV$ (en metros)	X	0.8284
	Y	0.0
	Z	1.1
<b>Tabla 4.8</b> Magnitudes de masa y de coordenada X del centro de gravedad del semi-elipsoide 2		

Se tendrá que la inercia de la góndola expuesta en la ecuación (2.15) será igual al valor presentado por la ecuación (4.10) luego de reemplazar los valores presentados en la tabla 4.8.

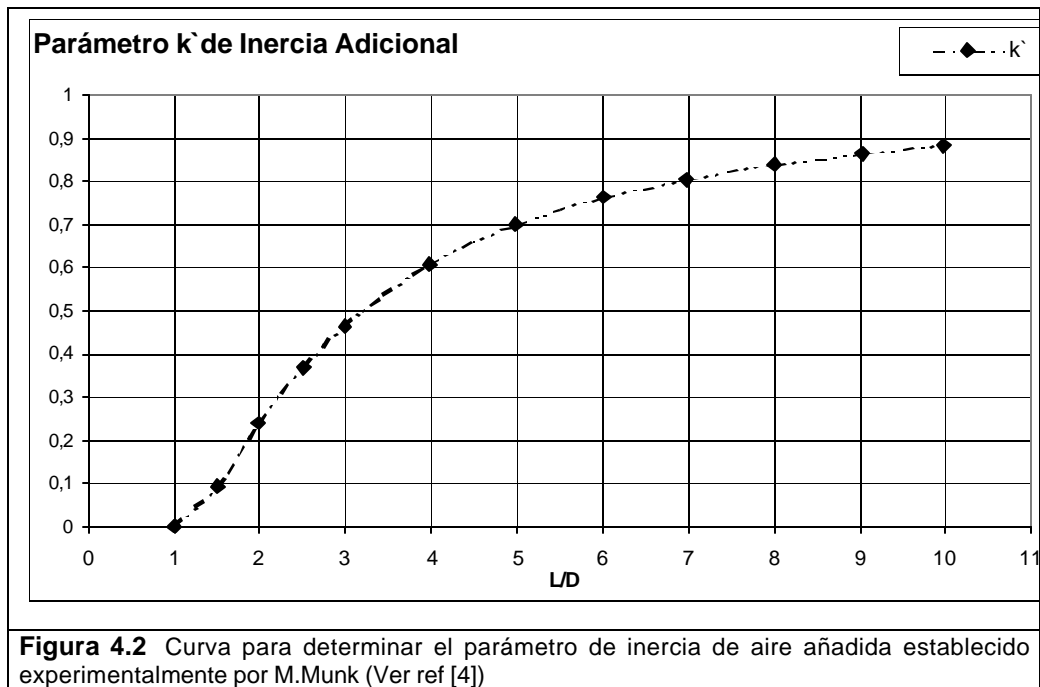
$$I_n = \begin{bmatrix} 6.655 & 0 & -5.012 \\ 0 & 10.429 & 0 \\ -5.012 & 0 & 3.774 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

Es importante notar que el valor presentado en (4.10) se establece considerando que el sistema de propulsión emplea motores eléctricos. Esto significa que no existe variación de la masa incluida en la góndola en función del tiempo, es decir que el consumo de combustible no se considera como una pérdida de masa.

#### 4.2.3 Inercia Añadida de Aire $I_a$

Como ya se comentó en la sección correspondiente, el efecto de inercia añadida de aire (o inercia virtual) ha sido establecido experimentalmente por M. Munk y puede ser consultado en [4].





Es a partir de dicha información que es trazada la curva presentada en la 4.2 que según la relación de aspecto de longitud y diámetro  $\lambda = L/D$  (establecida para nuestro caso igual a 4.21) asigna un valor a la constante  $k'$  tal que para el dirigible AS500 se tiene que

$$k' = 0.63 \tag{4.11}$$

Así, según la expresión (2.17), la matriz de inercia añadida de aire  $I_a$  será calculada en función del parámetro  $k'$  y de la componente  $Y$  de inercia de la membrana calculada en (4.9). y es presentada en (4.12)

$$I_a = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k'I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 68.548 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.12}$$

Finalmente queda constituida la matriz de inercias del sistema  $I_{TOTAL}$  suficiente para modelar el comportamiento de la distribución de masas del conjunto calculada como la suma de las inercias parciales del sistema, es decir, la inercia de la membrana del

dirigible  $I_C$ , la inercia aportada por la masa de la góndola  $I_n$  y la inercia añadida de aire  $I_a$ . Así la matriz  $I_{TOTAL}$  se presenta en la expresión (4.13).

$$I_{TOTAL} = I_C + I_n + I_a = \begin{pmatrix} 14.997 & 0 & -5.012 \\ 0 & 187.784 & 0 \\ -5.012 & 0 & 112.581 \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

## 5. CONSTANTES AERODINÁMICAS

En este capítulo se presenta el acercamiento teórico realizado para obtener valores estimados de las constantes aerodinámicas asociadas al fenómeno de desplazamiento del dirigible en el medio fluido. Retomando la ecuación (2.24) en la ecuación (5.1) escrita aquí de nuevo), los dos sub-vectores que conforman el vector  $D(\mathbf{n})\mathbf{n}$  representan las fuerzas y momentos de arrastre respecto a cada eje X, Y, Z del sistema de navegación del dirigible.

$$D(v)v = \frac{\mathbf{r}|v|^2 V}{2} \begin{bmatrix} C_x V^{-1/3} \\ C_y V^{-1/3} \\ C_z V^{-1/3} \\ C_l \\ C_m \\ C_n \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

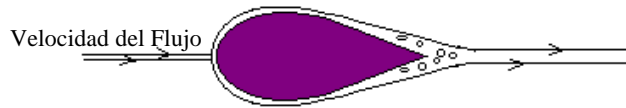
A continuación, se hará por separado la consideración de fuerzas y momentos aerodinámicos para mayor claridad.

### 5.1. Fuerzas de Arrastre

Típicamente existen dos tipos de arrastre al que pueden verse sometidas las aeronaves:

- Arrastre por Diferencias de Presión
- Arrastre por Fricción de Piel

Por una parte, el arrastre por diferencias de presión es relevante para aeronaves cuya área de sustentación es mucho menor que el área total, además de presentar altas velocidades con números de Mach del orden de 0.1 o superiores. Este el caso de aviones en donde el área de sustentación representada por las alas es significativamente menor al área total del avión y las velocidades alcanzadas pueden ser del orden de los 700km/h.



**Figura 5.1** Comportamiento de las líneas de flujo alrededor del dirigible en movimiento

Por otra parte, el arrastre por fricción de piel se hace más relevante que aquel por diferencias de presión cuando se consideran aeronaves cuya área involucrada en el fenómeno de sustentación es muy cercana (o igual) al área total de la aeronave, además de desplazarse a velocidades asociadas a bajos números de Mach. Tal es el caso de un dirigible, cuya área de sustentación está representada por la membrana que contiene el helio, involucrada en el fenómeno de flotación y por lo tanto equivalente al área total del mismo. Además, las bajas velocidades implican números de Mach en un rango de 0.03 a 0.003 considerando que el dirigible se desplace a velocidades entre 1m/s y 10m/s, aunque velocidades mayores sigan siendo permisibles para mantener la relevancia del arrastre por fricción de piel respecto al del arrastre por diferencias de presiones.

Las tres primeras componentes del vector  $D(\mathbf{n})\mathbf{n}$  enunciado en la ecuación (5.1) corresponden a las fuerzas de arrastre por fricción de piel ofrecidas por el aire que rodea el globo.

Para determinar los coeficientes  $C_x$ ,  $C_y$  y  $C_z$  de las respectivas fuerzas de arrastre, se planteó la expresión (5.2) tomada de [11] en términos del número de Reynolds  $Re$  y un valor determinado empíricamente.

$$C_i = \frac{1.328}{\sqrt{Re}} \quad (5.2)$$

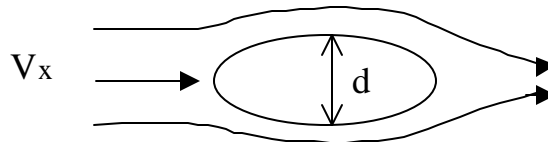
La expresión (5.2) es aplicable a flujo incompresible y bajos números de Mach, por lo cual es válida para nuestro caso considerando las bajas velocidades de desplazamiento del globo a las cuales el aire puede considerarse como un flujo incompresible. Para mayor información la expresión (5.2) puede ser consultada en [11].

Recordando la expresión que define el número adimensional  $Re$  en la ecuación (ecuación  $Re$ ), se tiene que  $\rho$  será la densidad del fluido,  $d$  el área expuesta frontalmente en la

dirección del flujo,  $\mu$  la viscosidad cinemática del fluido y  $n$  la velocidad del flujo en la dirección respectiva, bien sea X, Y o Z.

$$\text{Re} = \frac{rdn}{\mu} \quad (5.3)$$

Para el caso de la geometría de un dirigible, el área  $d$  ilustrada en la figura 5.2 es tomada como  $(\text{volumen total})^{2/3}$  en lo referente al cálculo de fuerzas de arrastre y es tomada como volumen total para el cálculo de los momentos. Particularmente, para dirigibles cuya relación de aspecto  $I$  se encuentre en un rango  $4 < I < 8$ , el coeficiente  $C_x$  en la dirección de desplazamiento X, puede ser aproximado a 0.25.



**Figura 5.2** El área frontal  $d$  relevante para el cálculo de los coeficientes  $C_i$  varía según las diferentes geometrías y según la dirección de interés.

Sin embargo, nótese que los coeficientes de arrastre  $C_y$  y  $C_z$  dependerán de la velocidad actual del dirigible en las direcciones respectivas, por lo cual esta variable será actualizada constantemente durante el proceso de vuelo para calcular constantemente dichos coeficientes.

## 5.2. Momentos Inducidos por Fuerzas de Arrastre

Los momentos inducidos por fuerzas aerodinámicas respecto a los ejes X y Z son típicamente nulos, por lo cual los valores  $C_l$  y  $C_n$  pueden tomarse iguales a cero. Sin embargo, respecto al eje Y, o eje de navegación transversal, el ángulo de cabeceo  $q$  puede presentar variaciones durante el vuelo por efectos de fuerzas aerodinámicas generadas sobre la membrana del dirigible y sobre las superficies de la cola.

Así, se consideró únicamente el coeficiente  $C_m$  y fue calculado de la misma forma que se realizó el cálculo de los coeficientes  $C_y$  y  $C_z$  a partir de la ecuación (5.2), salvo que para este caso, el área de referencia no será  $(\text{volumen total})^{2/3}$  como lo fue en el caso del cálculo de fuerzas sino el volumen total del globo.

## 6. CONSTANTES AEROSTÁTICAS

Este capítulo contempla las observaciones que deben tenerse en cuenta en lo referente al equilibrio aerostático que sustenta el globo. Así, variables como masa de helio contenida en la membrana, presión de inflado o peso del globo deben ser equilibradas de tal forma que el fenómeno de flotación pueda ser posible.

### 6.1. Masa de Helio Contenida

La masa de helio contenida en la membrana del dirigible debe cumplir principalmente la ecuación (6.1). En esta expresión se establece la condición crítica para la cual será posible el fenómeno de flotación, dado que se plantea que la cantidad de masa del conjunto (membrana del dirigible, componentes, y helio contenido) debe ser menor o igual - en el peor de los casos - a la masa de aire desplazado por el volumen del dirigible.

$$Masa_{DIRGIBLE} + Masa_{COMPONENTES} + Masa_{HELIO} \leq Masa_{AIRE\_DESPLAZADO} \quad (6.1)$$

La ecuación (6.1) plantea la condición de equilibrio aerostático, una condición que en lo que respecta al desarrollo de este proyecto, ha sido considerada de tal forma que el dirigible no está acelerado en ninguna dirección, es decir, el peso total de todo el conjunto en vuelo y del volumen de aire desplazado son iguales. Sin embargo, nótese que con la presencia de balonetes en el interior de la membrana del dirigible, esta condición puede ser alterada convirtiéndose en una variable de control de altura durante el proceso de vuelo del globo.

Nótese que aunque las variables de presión y volumen de la membrana varían durante un período de vuelo, es recomendable que la condición planteada en la ecuación (6.1) no sea rota, ya que de serlo, parte de la fuerza de propulsión entregada por los motores deberá ser invertida en compensar la sustentación faltante para conseguir la flotación del conjunto, por lo cual la acción de control se verá comprometida y por lo tanto la eficiencia de los motores no podrá ser aprovechada al máximo.

En el caso particular del presente proyecto, la masa del dirigible y sus componentes es tomada como 18.375Kg (ver tabla 4.1), en tanto que la masa de aire desplazado es

calculada a partir de la densidad del aire (tomada como  $1.3\text{Kg/m}^3$ ) y el volumen del dirigible *AS500* de  $15\text{m}^3$  (ver anexo 2). Estos cálculos indicaron la magnitud de masa crítica de helio presentada en la expresión (6.2) con la cual el dirigible flotará sin necesidad de fuerza de sustentación adicional dadas las condiciones atmosféricas descritas.

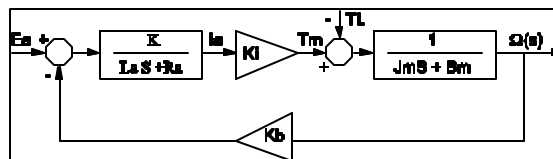
$$Masa_{HELIO} \leq 1.125\text{Kg} \quad (6.2)$$

## 7. SISTEMA DE PROPULSIÓN

El sistema de propulsión está conformado por motores eléctricos y hélices cuyo proceso de identificación es presentado en el presente capítulo: Por un lado, las hélices son descritas según sus características geométricas y parámetros que las caracterizan, diferenciando un modelo de hélice de otro. Por otro lado, los motores según sus características mecánicas y eléctricas, son estudiados para diseñar finalmente, en un paso posterior, lazos de control robustos.

### 7.1. Parámetros de Motores Eléctricos

Como se presentó en la sección 3.1, el modelo usado para describir la operación de los motores eléctricos contempla su naturaleza mecánica y eléctrica.



**Figura 7.1** Modelo de motor eléctrico empleado. El sistema es descrito por consideraciones de tipo eléctrico y mecánico asociando una velocidad angular del eje del motor para una entrada determinada de voltaje.

Dicho modelo es retomado en la figura 7.1 y el proceso de identificación para establecer magnitudes de los diferentes parámetros es presentado a continuación.

#### 7.1.1. Parámetros Mecánicos

A considerar desde el punto de vista mecánico, se tienen las variables de Inercia Rotacional  $J_m$  y de Coeficiente de Fricción Viscosa  $B_m$ .

Para obtener un valor aproximado para  $J_m$  se notó que el efecto de inercia rotacional del eje del motor es despreciable respecto al efecto generado inercialmente una vez la hélice es instalada en dicho eje. Por lo tanto, se modeló solamente la inercia de la hélice, asumiendo un comportamiento análogo al de una barra girando pivotada en su punto medio y por lo tanto, calculando la inercia de la hélice con la expresión correspondiente a la de una barra pivotada en su punto medio, bajo la salvedad de calcular un diámetro



equivalente de la sección transversal de la hélice dada su geometría de sección no-circular. Así, se planteó la expresión 7.1

$$J_m = \frac{M}{48} (3D_{Equivalente}^2 + 4l^2) \quad (7.1)$$

En (7.1),  $M$  será la masa de la hélice,  $D_{Equivalente}$  el diámetro calculado y  $l$  su longitud medida de extremo a extremo. Debe tenerse en cuenta que para determinar  $D_{Equivalente}$  se empleó un estándar que sugiere medir el área transversal de la hélice a la altura del 60% de su longitud total.

Para calcular el coeficiente de fricción viscosa  $B_m$ , se aplicó el principio de fuerza viscosa que se asocia a un coeficiente de viscosidad multiplicado por la velocidad que tiene el cuerpo al desplazarse en el medio. Así, para nuestro caso particular, se estableció esta misma relación para el caso rotacional, como se muestra en la ecuación (7.2)

$$B_m = \frac{Q}{\omega} \quad (7.2)$$

En (7.2) se establece que la relación instantánea  $B_m$  durante el estado estable de operación de la hélice puede ser planteada como el torque de carga  $Q$  respecto a la velocidad angular  $\omega$  del motor. Es importante notar que la importancia de establecer la relación planteada en la ecuación (7.2) durante el estado estable de operación radica en que una vez se alcanza esta instancia, la inercia rotacional ha sido vencida durante el período transitorio en el que el motor alcanza una velocidad angular  $\omega$  constante.

### 7.1.2. Parámetros Eléctricos

Las variables eléctricas del motor son su resistencia e inductancia de armadura  $R_a$  e  $L_a$  respectivamente, parámetros eléctricos que pueden ser determinados mediante mediciones directas. Es interesante sin embargo, notar que el modelo empleado para representar el comportamiento del motor muestra que por una parte la inductancia de armadura tiene implicaciones en la velocidad de respuesta del motor. Como se ve en la figura 7.1, la inductancia  $L_a$  corresponde al tiempo de respuesta eléctrica del motor, entre

tanto, la resistencia  $R_a$  afecta la magnitud de la salida del sistema en estado estable y con ello la velocidad angular  $w$  de salida del rotor.

## 7.2. Identificación de Parámetros de Hélices

Para obtener los valores  $K_Q(J)$  y  $K_T(J)$  que describen el desempeño de cada hélice en particular, es necesario establecer las magnitudes de torque de carga  $Q$  y fuerza de propulsión  $T$  a partir de valores conocidos. Las ecuaciones (3.2) y (3.4) replanteadas en (7.3) y (7.4) permiten ver que variables como el diámetro  $D$  descrito por la hélice o la velocidad angular  $n$  pueden ser medidas directamente.

$$T_L = Q = rD^5 K_Q(J)n^2 \quad (7.3)$$

$$T = rD^4 K_T(J)n^2 \quad (7.4)$$

De la misma forma, la densidad  $r$  del aire según la altura sobre el nivel del mar a la que se realicen las pruebas de vuelo puede ser medida, aunque debe tenerse en cuenta que un sistema de control más robusto debe considerar que la densidad del aire variará con la altura durante la operación de vuelo por lo cual será conveniente realizar mediciones constantes de esta variable para actualizar el modelo.

Sin embargo, los valores desconocidos  $K_Q(J)$  y  $K_T(J)$  que caracterizan el desempeño de una hélice no podrán ser determinados a menos que se conozca la magnitud de la potencia disipada por ella (asociada al torque de carga  $Q$ ) y la fuerza de propulsión  $T$  desarrollada.

### 7.2.1. Parámetro $K_Q(J)$ de Torque de Carga

Experimentalmente, la magnitud de potencia  $P_c$  consumida por una hélice puede ser medida, caso en el cual establecer el valor del parámetro  $K_Q(J)$  será cuestión de obtener valores según diferentes velocidad angulares  $n$ , a un determinado tamaño  $D$  de la hélice y una densidad  $r$  del aire. Para el caso del torque  $Q$ , se cumple la relación (7.5) que asocia una potencia  $P_c$  consumida por la hélice al producto de  $Q$  y la velocidad angular  $w$  del motor.

$$P_c = Qw \quad (7.5)$$

La figura 7.2 corresponde a mediciones experimentales de  $P_c$  realizadas para una hélice de dimensiones 12'' x 8'' según diferentes velocidades angulares. Sin embargo, aunque determinar la magnitud de  $P_c$  por métodos experimentales puede ser una alternativa que suministra más confiabilidad en el proceso de identificación, como alternativa adicional y económica se ha establecido  $P_c$  como se presenta en (7.6)<sup>2</sup>. Se trata de una ecuación empírica en términos de variables geométricas conocidas como el paso  $P$  y diámetro  $D$  de la hélice, entregando así una magnitud estimada de la potencia  $P_c$  consumida por la hélice según su tamaño y la velocidad angular  $w$  a la que esté girando.

$$P_c = (1.31)PD^4w^3 \quad (7.6)$$

La expresión (7.6)<sup>5</sup> ha sido planteada por Boucher y es empleada en el medio de los aeromodelos como herramienta para establecer el tipo de motor adecuado la hélice usada.

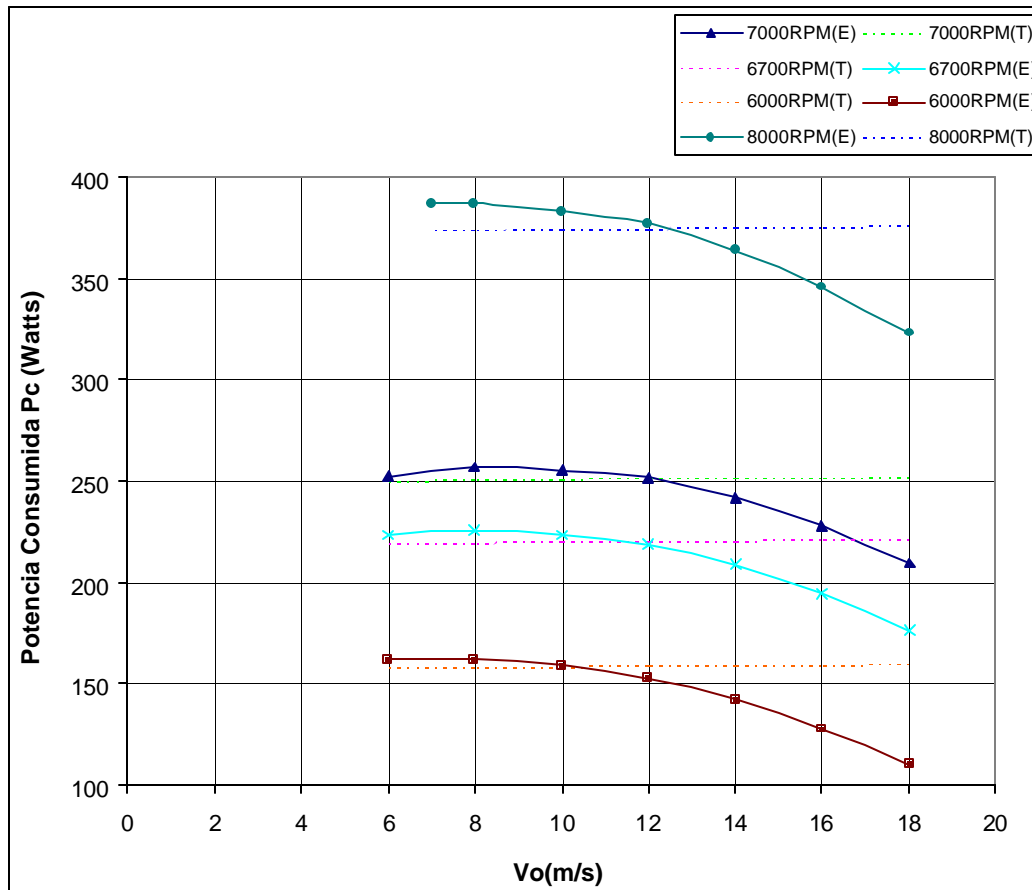
Para diferentes valores de velocidad angular  $w$  y reemplazando (7.6) en (7.5) y a su vez (7.5) en (7.3), es posible obtener un valor promedio estimado de  $K_Q(J)$  con el cual se caracteriza la hélice en particular.

Para el caso del presente proyecto, el valor de  $K_Q(J)$  usado para realizar simulaciones se presenta en la tabla 7.1.

$K_Q(J)$	$1.6211 \cdot 10^{-4}$
----------	------------------------

Tabla 7.1 Valor de parámetro  $K_Q(J)$  usado para construir el modelo a ser simulado

<sup>2</sup> Los valores en (7.6) deben ser expresados en pies (ft) para los casos del paso  $P$  y el diámetro  $D$  de la hélice y en miles de RPM (revoluciones por minuto) para el caso de la velocidad angular  $w$



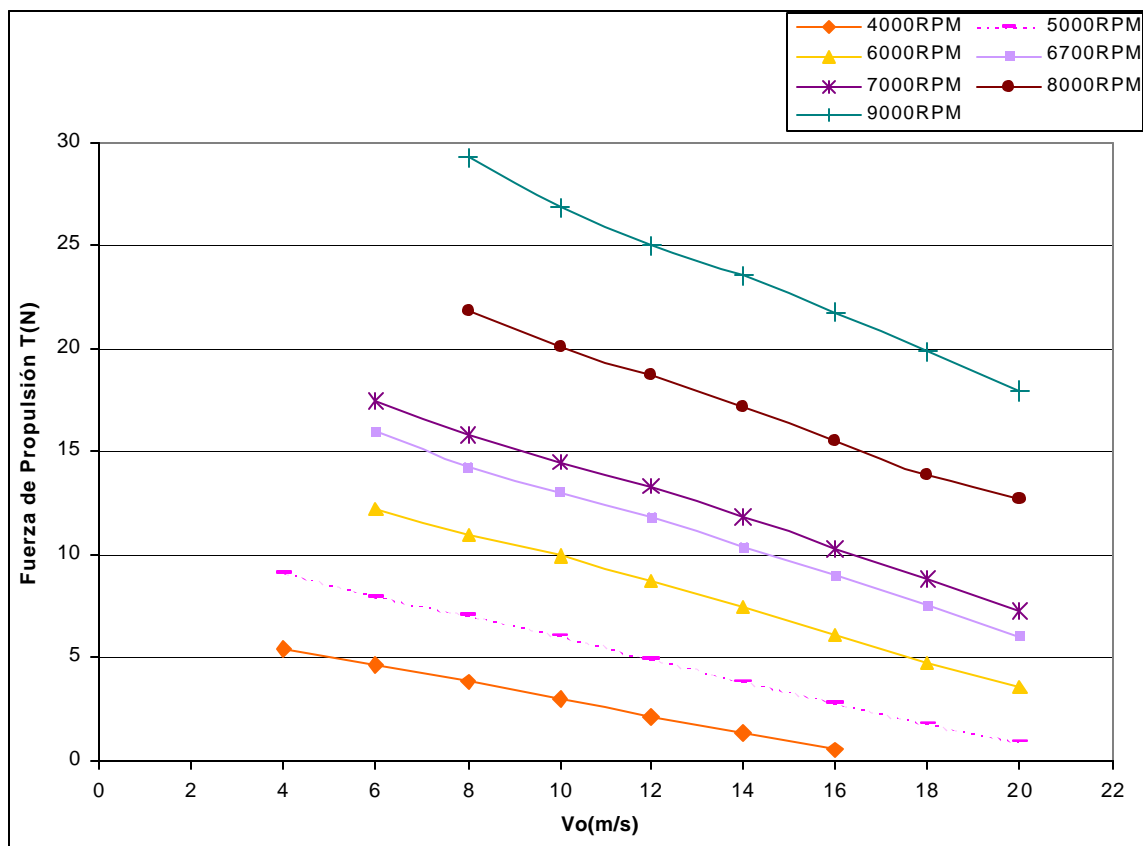
**Figura 7.2** Mediciones experimentales (E) de potencia consumida  $P_c$  por una hélice tipo 12'' x 8'' a diferentes magnitudes de velocidad angular y velocidad  $V_o$  de entrada del flujo de aire a la hélice. Igualmente se ilustra el comportamiento de la aproximación teórica (T) realizada en cada caso.

Nótese que el cálculo del parámetro  $K_Q(J)$  ha sido realizado asumiendo una velocidad constante de entrada del flujo de aire  $V_o$  a la hélice. Según las pruebas experimentales realizadas a partir de las cuales se comprobó la validez del planteamiento empírico realizado en este proyecto, se verificó que el parámetro  $a_{1Q}$  de la ecuación (3.3) suele ser mayor a  $a_{2Q}$  por mínimo un orden de magnitud, lo cual permite pensar que tomar el valor de  $V_o$  como nulo puede ser una aproximación aceptable siempre y cuando se manejen velocidades de desplazamiento del globo menores al orden de 10m/s.

Adicionalmente en la figura 7.2 se observa que los resultados de estimación de la potencia consumida  $P_c$  muestran un comportamiento favorable para velocidades  $V_o$  entre 6m/s y 12m/s. Si recordamos que el punto de operación es cercano a los 6 m/s, veremos que la aproximación resulta ser válida.

### 7.2.2. Parámetro $K_T(J)$ de Fuerza de Propulsión

El parámetro  $K_T(J)$  de la ecuación (7.4) es calculado una vez se determina la fuerza de propulsión  $T$  generada por los motores, en términos de variables ya expuestas como la densidad del aire, el diámetro descrito por la hélice y su velocidad angular. Al igual que el torque de carga  $Q$  impuesto por las hélices, la fuerza de propulsión  $T$  puede ser determinada mediante pruebas experimentales que caractericen cada modelo de hélice como lo muestra la figura 7.3.

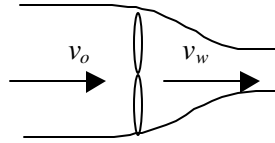


**Figura 7.3** Mediciones experimentales de fuerza de Propulsión  $T$  entregada por una hélice tipo  $12'' \times 8''$  a diferentes magnitudes de velocidad angular y velocidad  $V_o$  de entrada del flujo de aire a la hélice.

Sin embargo, en nuestro caso se ha empleado el modelo teórico presentado en la ecuación (7.7) que permite estimar la magnitud de  $T$  en términos de la potencia  $P_c$  disipada por la hélice expuesta en el numeral anterior.

$$P_C = T \left( \frac{v_o + v_w}{2} \right) = 2Tv_o \quad (7.7)$$

Para llegar a la ecuación (7.7) se consideró que típicamente la velocidad  $v_w$  de salida del flujo de aire una vez este es expulsado por la hélice en movimiento, es cerca de tres veces la velocidad de entrada  $v_o$  a la misma.



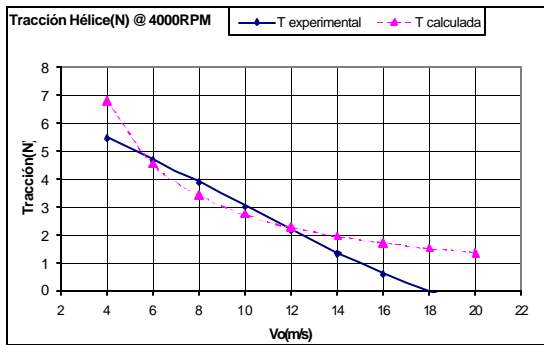
**Figura 7.4** Velocidad de Entrada  $v_o$  y de Salida  $v_w$  del flujo de aire en una hélice.

Así, para diferentes valores de  $P_C$  calculados en (7.6) según la magnitud de velocidad angular, es posible establecer diferentes valores de  $T$  para un valor medio de velocidad de entrada del flujo de aire  $V_o$  de 3m/s a 5m/s. Para el caso del presente proyecto, el valor de  $K_T(J)$  usado para realizar simulaciones se presenta en la tabla 7.2.

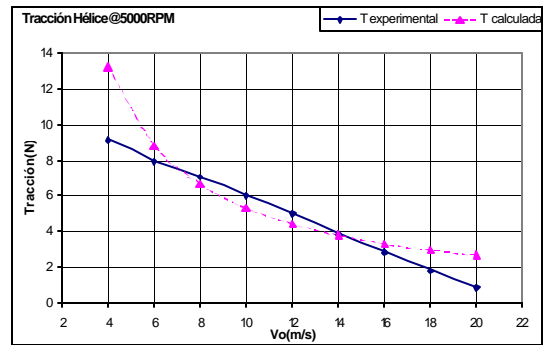
$K_T(J)$	$3.39573 \cdot 10^{-3}$
----------	-------------------------

**Tabla 7.2** Valor de parámetro  $K_T(J)$  usado para construir el modelo a ser simulado

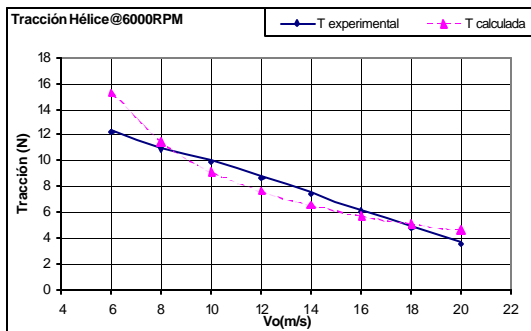
Los resultados obtenidos a partir de la aproximación realizada para determinar el valor estimado de  $K_T(J)$  se muestran en las figuras 7.5 a 7.9, evidenciando un comportamiento irregular según la velocidad angular del motor, ya que puede verse como el punto de operación (velocidad de entrada de flujo de aire a la hélice  $V_o$ ) para el cual la aproximación se hace válida, se desplaza desde un rango de [6m/s,12m/s] para una velocidad angular de 4000 RPM, hasta un rango de [12m/s,18m/s] para 8000RPM. Esto sugiere que  $K_T(J)$  será adecuado para ciertos casos y no lo será tanto en otros. De cualquier forma, el valor de  $K_T(J)$  presentado en la tabla 7.2 fue usado para realizar las simulaciones y como se verá en la sección respectiva, los resultados obtenidos fueron aceptablemente buenos para describir el desempeño de todo el conjunto.



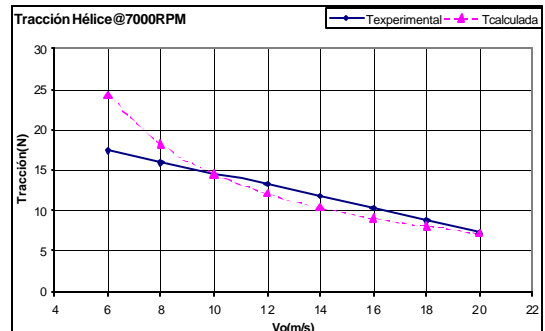
**Figura 7.5** Fuerza de Propulsión  $T$  teórica y experimental desarrollada por una hélice 12''x8'' a 4000 revoluciones por minuto.



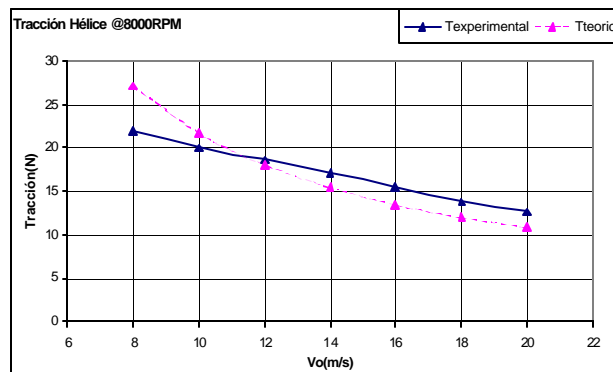
**Figura 7.6** Fuerza de Propulsión  $T$  teórica y experimental desarrollada por una hélice 12''x8'' a 5000 revoluciones por minuto.



**Figura 7.7** Fuerza de Propulsión  $T$  teórica y experimental desarrollada por una hélice 12''x8'' a 6000 revoluciones por minuto.



**Figura 7.8** Fuerza de Propulsión  $T$  teórica y experimental desarrollada por una hélice 12''x8'' a 7000 revoluciones por minuto.



**Figura 7.9** Fuerza de Propulsión  $T$  teórica y experimental desarrollada por una hélice 12''x8'' a 8000 revoluciones por minuto.

---

PARTE

**III**

---

SIMULACIÓN

El resultado de los procesos de modelaje e identificación realizados se presentan en esta tercera parte del proyecto. Para realizar las diferentes simulaciones se empleó MATLAB/Simulink implementando los diferentes sistemas que componen el modelo simulado.

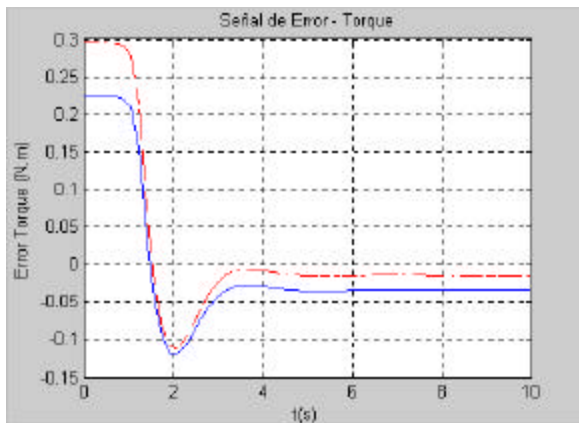


## 8. VALIDACIÓN DEL MODELO

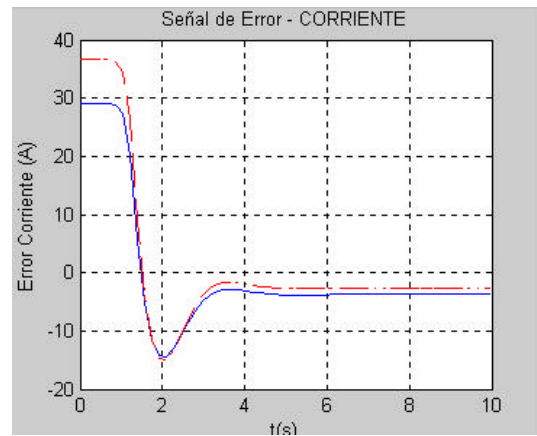
El capítulo 8 expone los resultados obtenidos luego de todo el proceso de modelaje e identificación presentado en las secciones I y II. Se muestra inicialmente el desempeño del modelo realizado de motores y hélices para luego entablar el nexo entre la fuerza de propulsión obtenida por las hélices y la velocidad de desplazamiento del dirigible.

### 8.1. Motores y Hélices

La salida obtenida del modelo de motores y hélices planteado fue validada empleando la información práctica disponible en [12] en donde variables tales como velocidad angular, corriente de armadura o potencia consumida permiten establecer una comparación entre los motores empleados<sup>3</sup> y el modelo, haciendo uso de una hélice de dimensiones 12`` x 8`` Las figuras 8.1 a 8.3 muestran la respuesta del modelo a dos entradas de voltaje diferentes, en donde la línea sólida corresponde a una entrada de 7.12 voltios y la línea punteada a una entrada de 8.42 voltios.



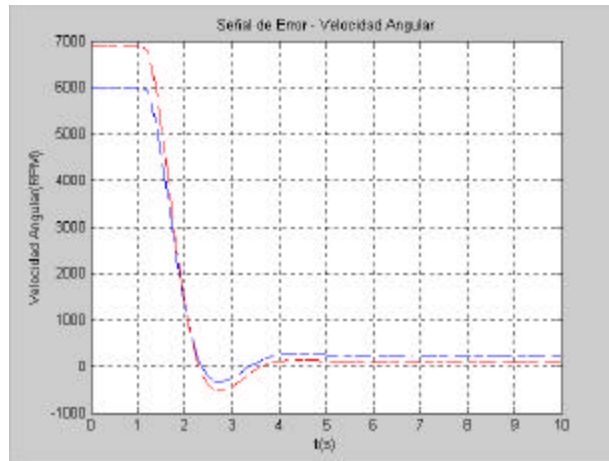
**Figura 8.1** Salida de error de torque desarrollado a dos entradas de voltaje diferentes.



**Figura 8.2** Salida de error de corriente de armadura a dos entradas de voltaje diferentes.

El desempeño del modelo mostró ser adecuado y aceptablemente preciso, validando así el planteamiento de identificación trazado y haciendo posible establecer una relación confiable entre la operación de los motores y el que será el modelo del dirigible.

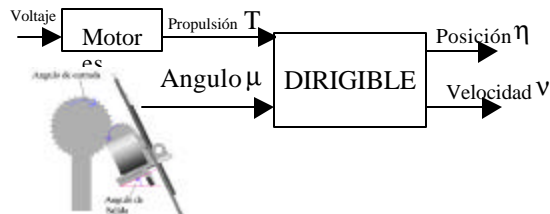
<sup>3</sup> Motores eléctricos de tipo Brushless AXI2820/10



**Figura 8.3** Salida de error de velocidad angular a dos entradas de voltaje diferentes.

### 8.2. Modelo Completo

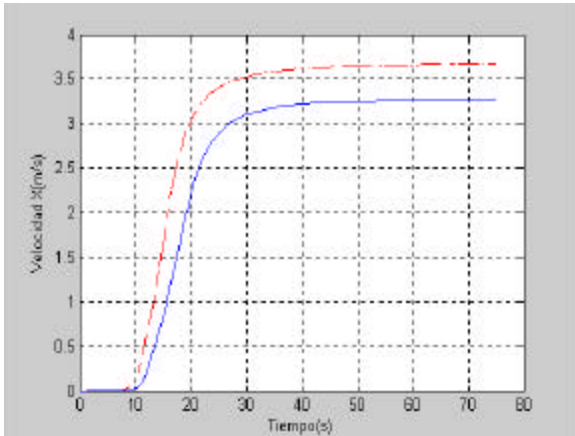
El esquema general de simulación corresponde con el expuesto en la figura 8.4. Allí puede verse que las variables que serán empleadas para establecer un primer acercamiento al control de vuelo del globo son la alimentación de voltaje de los motores y el ángulo de vectorización de estos que generará las diferentes componentes de fuerza de propulsión en las direcciones X y Z.



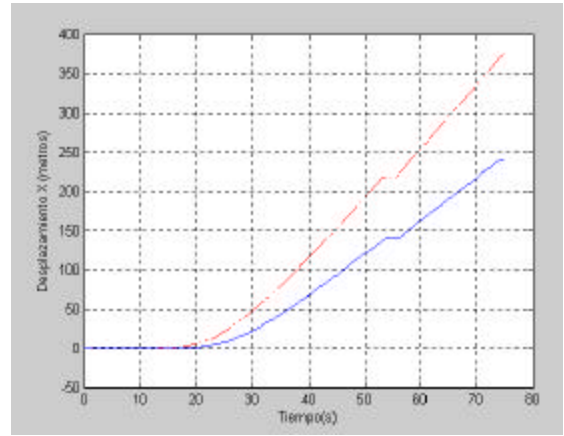
**Figura 8.4** Esquema general de simulación. El sistema responde a entradas de voltaje en los motores e inclinación de los mismos con salida de velocidad expresadas en las diferentes direcciones y la correspondiente evolución de la posición en el tiempo.

Así, se realizaron simulaciones a diferentes entradas de voltaje que demostraron coherencia de acuerdo con los resultados esperados. Las figuras 8.5 y 8.7 muestran la salida de velocidad en las direcciones X y Z para un ángulo de vectorización de 30°, evidenciando cómo se estabilizan dichas variables en ciertos valores al cabo de cerca de

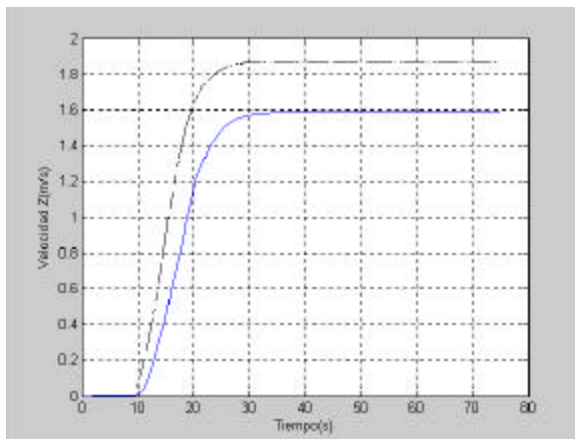
40 segundos. En las figuras 8.5 a 8.11, la línea **sólida** corresponde a una **entrada de 6.0 voltios** en los motores mientras que **la línea punteada** a una entrada de **7.5 voltios**.



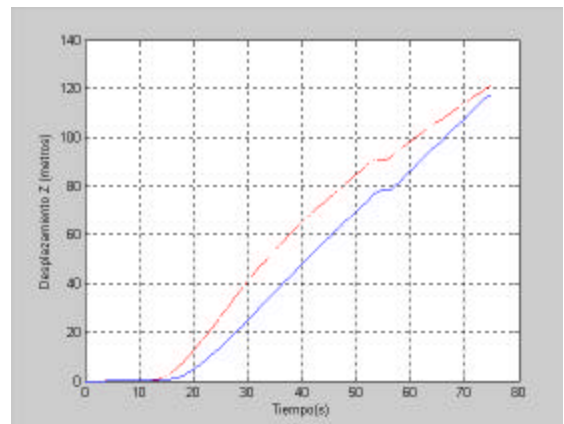
**Figura 8.5** Salida de velocidad  $V_x$  en la dirección X de desplazamiento longitudinal del dirigible. La entrada de mayor voltaje genera una magnitud mayor velocidad de estabilización.



**Figura 8.6** Salida de posición en la dirección X de desplazamiento longitudinal del dirigible. Nótese que en efecto, la entrada de mayor voltaje implica mayor desplazamiento del globo.



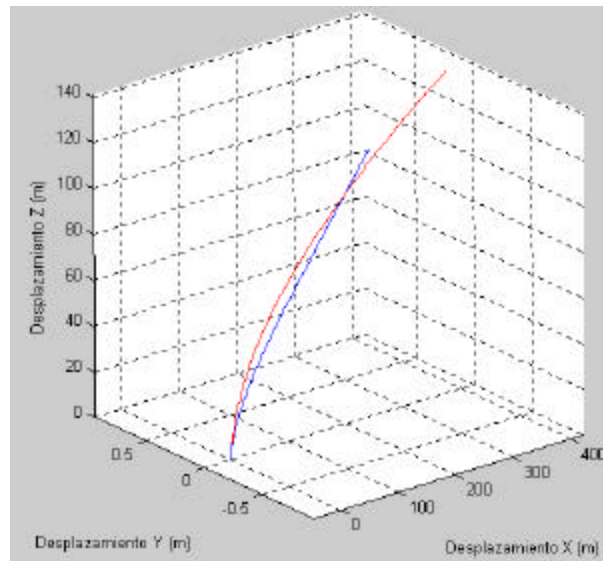
**Figura 8.7** Salida de velocidad  $V_z$  en la dirección Z de desplazamiento de ascenso/descenso del dirigible. La entrada de mayor voltaje genera una magnitud mayor de velocidad de estabilización.



**Figura 8.8** Salida de posición en la dirección Z de desplazamiento de ascenso/descenso del dirigible. La entrada de mayor voltaje implica mayor altura alcanzada por el globo dada la inclinación de  $30^\circ$  del soporte de los motores propulsores.

Nótese que la entrada de mayor voltaje (asociada a una mayor fuerza de propulsión generada), presenta valores de estabilización más grandes, además, puede verse que el desplazamiento ilustrado en las figuras 8.6 y 8.8 crece en el tiempo, indicando que el dirigible se aleje de su punto de partida.

Esta condición de vuelo ideal en la que las componentes de vuelo lateral (dirección  $Y$ ) son cero, se dan a nivel de simulaciones ya que matemáticamente la magnitud de los voltajes de alimentación de los motores es idéntica y por tanto la fuerza de propulsión generada es igual en los dos. Sin embargo, en la práctica podrán presentarse variaciones que generarán diferentes magnitudes de fuerza de propulsión generando así momentos respecto al centro de volumen del dirigible y con ello, componentes de velocidad en la dirección  $Y$ .



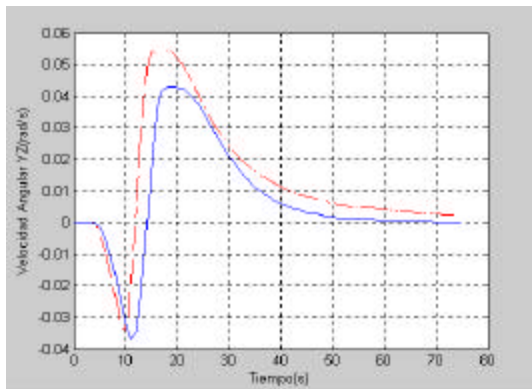
**Figura 8.9** Simulación de 75 segundos del desplazamiento tridimensional del centro de volumen CV del dirigible. Puede verse que en el mismo tiempo, las dos entradas de diferente voltaje consiguen un alcance mayor o menor según la magnitud de la entrada

El viento no ha sido incluido en el modelaje lo cual le da cierto carácter ideal al sistema simulado, esto teniendo en cuenta que hemos verificado que una pequeña fuerza puede romper el equilibrio aerostático que permite la operación de vuelo del globo y por lo tanto, considerar el viento será imperativo al diseñar un sistema de control cuya operación se espera sea robusta. La figura 8.9 muestra la trayectoria en 3D que seguirá el dirigible en las condiciones expuestas en las figuras 8.5 a 8.8

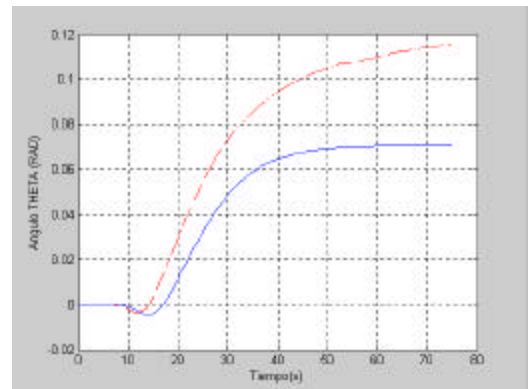
Puede decirse que los resultados son alentadores, las magnitudes de velocidad conseguidas son coherentes con los valores esperados (de 1m/s a 5m/s) y se observan

salidas estables del modelo de la misma forma que ocurre en el proceso real de vuelo de un dirigible.

Por otra parte, se observó que una vez el escalón de fuerza entregado por los motores impulsa el sistema, el dirigible experimenta una oscilación respecto a su eje transversal Y, que se estabiliza al cabo de cierto tiempo como lo muestran las figuras 8.10 y 8.11.



**Figura 8.10** Salida de velocidad angular  $w_y$  respecto al eje transversal del dirigible. La entrada de mayor voltaje genera una magnitud mayor de la amplitud de oscilación.



**Figura 8.11** Salida de orientación angular  $\theta$  del dirigible respecto a su eje transversal

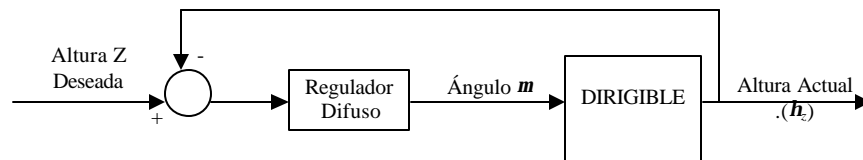
Sin embargo, la oscilación presentada por el globo es de pequeña amplitud; la figura 8.11 denota un ángulo de 0.12 radianes (cerca de  $8^\circ$ ), lo cual permite pensar que fuerzas de propulsión asociadas a mayores voltajes de alimentación de los motores, generarán oscilaciones más grandes en cuyo caso la estabilidad del proceso de vuelo puede verse comprometida. De cualquier manera, el tamaño del globo puede atenuar este efecto, de tal forma que globos de mayor talla, considerando su estabilidad de vuelo y la necesidad de ser impulsados por magnitudes mayores de fuerza, tendrán rangos más grandes de fuerza de propulsión permisible. Para nuestro caso, la figura 8.10 muestra que el globo oscila pero se estabiliza al cabo de 50 segundos, lo cual representa un movimiento suave y amortiguado que sugiere estabilidad más aún al notar que solamente se presentó una oscilación.

## 9. PLANTEAMIENTO INICIAL DE CONTROL DE VUELO

El presente capítulo expone un planteamiento inicial del sistema de control que hará posible la navegación autónoma del dirigible en instancias más avanzadas del proyecto. Se presentará el diseño de un primer regulador mediante lógica difusa, con el que se logrará que el modelo de dirigible siga una entrada de altura deseada en el tiempo.

### 9.1. Control de Altura

Se diseñó un regulador difuso que asigna cierta orientación de los motores propulsores representada por el ángulo de vectorización  $m$  (ver figura 8.4), a una determinada señal de error de altura. Así, se definió el sistema en lazo cerrado ilustrado en la figura 9.1.



**Figura 9.1** Esquema de control planteado para conseguir la navegación del dirigible a determinada altura  $Z$  deseada.

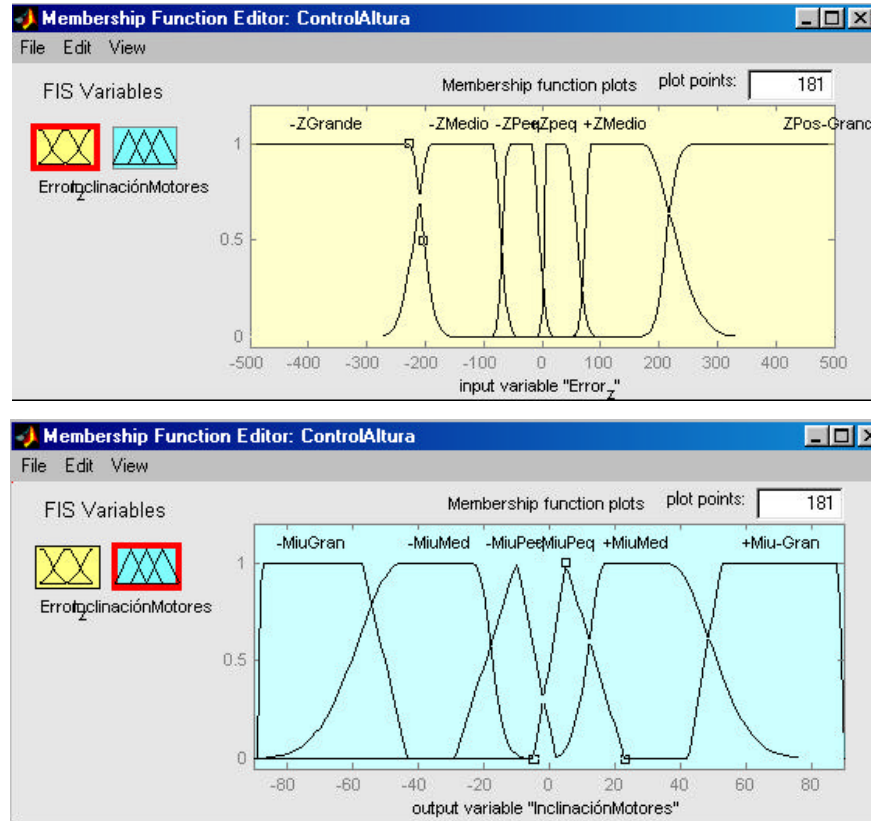
Para diseñar el regulador difuso, se definieron seis categorías dentro del universo de discurso tanto para la variable de entrada del regulador (error de altura) como para su salida (ángulo de vectorización)

Error Z Grande Negativo	→	Ángulo $m$ Grande Negativo
Error Z Medio Negativo	→	Ángulo $m$ Medio Negativo
Error Z Pequeño Negativo	→	Ángulo $m$ Pequeño Negativo
Error Z Pequeño Positivo	→	Ángulo $m$ Pequeño Positivo
Error Z Medio Positivo	→	Ángulo $m$ Medio Positivo
Error Z Grande Positivo	→	Ángulo $m$ Grande Positivo

**Tabla 9.1** Universos de discurso y reglas aplicadas por el regulador difuso diseñado para conseguir acción de control de altura de vuelo del dirigible.

En la tabla 9.1 se ilustran las reglas que rigen su criterio de decisión. A partir del conjunto de decisiones listadas en la tabla 9.1, puede verse que si el dirigible se encuentra a una altura muy inferior respecto a la altura  $Z$  deseada, el ángulo  $m$  será *Grande* y *Positivo* generando así un ascenso, Por otro lado, si se tiene el caso contrario en que el globo se encuentra a una altura muy superior respecto a la altura  $Z$  deseada, el ángulo  $m$  será *Grande* y *Negativo* generando así un descenso.

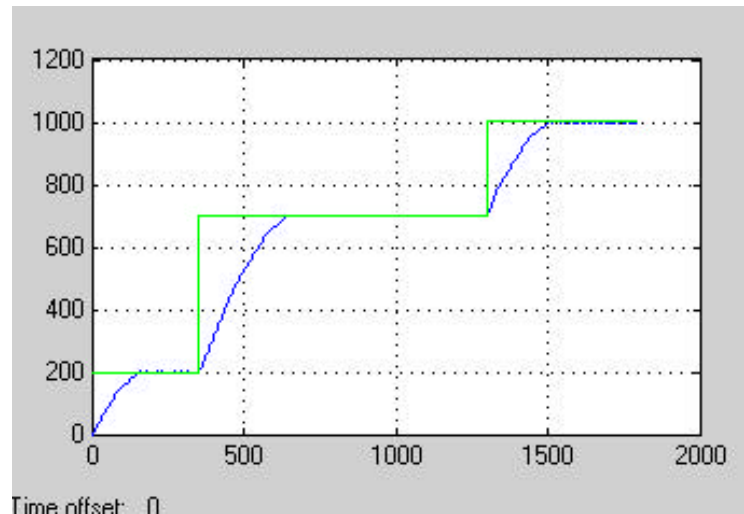
Para mayor claridad, las diferentes funciones de pertenencia asociadas a cada división del universo de discurso se presentan en la figura 9.2; debe notarse además que el ángulo  $m$  debe estar restringido al rango  $[-90^\circ, 90^\circ]$ .



**Figura 9.2** Universos de discurso de las variables de entrada *Error de Altura* y salida *Ángulo  $m$*  del regulador difuso diseñado. Se observan las funciones de pertenencia asignadas a cada rango de valores de dichas variables.

La respuesta del sistema en lazo cerrado para una entrada de voltaje constante (6.0 V), ostenta una respuesta muy adecuada ilustrada en la figura 9.3 en donde se nota que una

vez el dirigible consigue la altura deseada, la señal de control, correspondiente al valor del ángulo  $m$  oscila alrededor de valores pequeños positivos y negativos buscando estabilizarse en el valor de altura  $Z$  deseado.

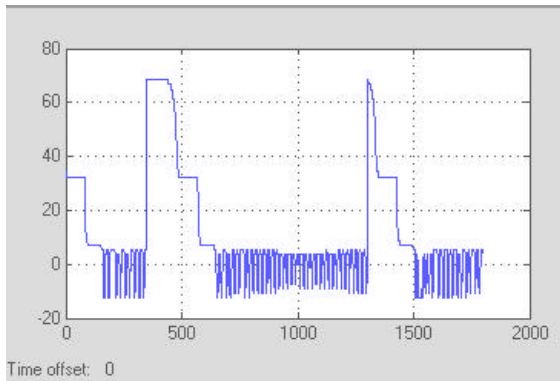


**Figura 9.3** Respuesta del sistema en lazo cerrado bajo la operación del controlador difuso de altura diseñado. Puede verificarse en esta simulación de 1800 segundos (30 minutos) que la altura (en metros) del dirigible en vuelo se estabiliza cerca de 6 minutos después de cambiar la altura de referencia.

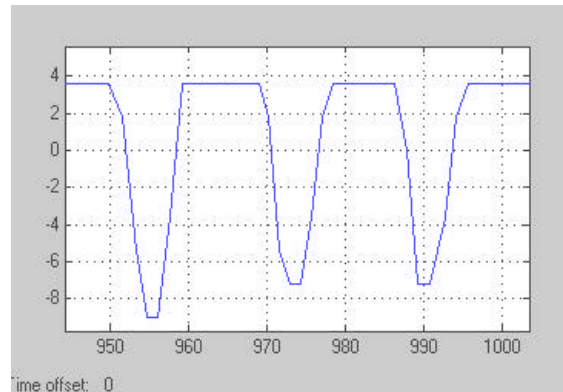
En la figura 9.3, el tiempo de estabilización necesario para que el globo alcance la altura deseada es del orden de 240 segundos ( $\approx$  6 minutos) lo cual tiene sentido considerando la distancia entre cada uno de los escalones de altura a seguir. Para el caso más crítico (cambio de referencia de 200 metros a 700 metros de altura) la velocidad de ascenso es de 1.5m/s, la cual es perfectamente posible.

La señal de control en la figura 9.4a, respetó el rango de  $[-90^\circ, 90^\circ]$  y presentó oscilaciones de muy baja frecuencia, sin afectar la operación de los motores propulsores. En el zoom de la figura 9.4b, se muestra que dichas oscilaciones son de magnitud media absoluta de  $12^\circ$  aproximadamente en lapsos de 5 a 6 segundos, lo significa que el motor que opere la orientación de los motores propulsores, deberá actuar en este lapso para conseguir el nuevo ángulo  $m$  de vectorización y considerando los tiempos de respuesta de un motor *paso a paso* (mucho menores que 5 segundos) podrá notarse que la oscilación no representa un problema para la señal de control.





**Figura 9.4a** Señal de Control del Regulador Difuso diseñado. El rango que restringe los valores del ángulo  $m$   $[-90^\circ, 90^\circ]$  se cumple.



**Figura 9.4b** Zoom de la señal de control presentada en la figura 9.4a. Las oscilaciones de amplitud absoluta de  $12^\circ$  no representan un cambio a alta frecuencia dado el lapso de 5 segundos en el que esta oscilación ocurre.

## 9.2. Consideraciones Adicionales de Control

El sistema en el que se trabaja en este proyecto está definido por bastantes variables tanto de entrada como de salida que pueden constituir lazos de control robustos para la navegación del globo. En la primera instancia del proyecto de navegación autónoma de un dirigible expuesta en este trabajo de grado, las variables consideradas como entradas para controlar el sistema fueron principalmente el voltaje de los motores y la orientación de estos en cuyo caso fue posible implementar desplazamientos en línea recta, ascensos y descensos. Además, según cierta variación del voltaje en alguno de los motores, se pueden inducir momentos generados por la desigualdad de fuerzas de propulsión de los dos motores, con lo cual el dirigible puede cambiar su dirección de desplazamiento sobre el plano XY.

Sin embargo, típicamente un dirigible al que puede accederse comercialmente, estará provisto de más elementos de control que de ser utilizados para su navegación, deberán ser incluidos en el modelaje, con el aliciente de tener mayor controlabilidad sobre el proceso. Dichos elementos permitirán realizar acciones de control adicional de ascensos y descensos, como es el caso de los balonetes instalados en el interior de la membrana que alteran el volumen ocupado por el helio contenido en ella; o se tendrá la posibilidad de cambiar la orientación de las superficies de la cola con lo cual se inducirán momentos para implementar giros.

Es importante añadir que el variado comportamiento de diferentes condiciones atmosféricas cambiará el desempeño del dirigible en vuelo. Hablamos de cambios de

temperatura, de variaciones de humedad y densidad del aire, circunstancias que estarán asociadas al espacio en el cual se realicen las pruebas según la altura respecto al nivel del mar, las corrientes de viento que se presenten, etc.

Por esto, el problema de control de navegación de un dirigible debe ser planteado dentro de una amplia gama de consideraciones dado que los sistemas caóticos a los que podría enfrentarse demandarán una acción de control robusta que haga confiable dicha navegación.

## CONCLUSIONES

Los resultados obtenidos al final del desarrollo del proyecto permitieron verificar la estabilidad del modelo a condiciones atmosféricas estándar<sup>4</sup>. En efecto, se esperaba obtener respuestas de estas características considerando que el proceso real de vuelo de un dirigible es igualmente estable; sin embargo, plantear un sistema de control para la navegación real de un prototipo de dirigible debe tomar en consideración condiciones atmosféricas locales tales como densidad del aire a determinada altura sobre el nivel del mar, humedad del ambiente, temperatura y de manera más relevante aún, la magnitud y dirección del viento.

Por otra parte, aunque las variables de control planteadas en este documento son suficientes para conseguir la navegación del dirigible, es posible pensar en variables adicionales según el prototipo de globo empleado. Para esto puede pensarse en motores adicionales o en la posibilidad de actuar las superficies móviles de la cola generando momentos que induzcan cambios de dirección, así como modificar la densidad del helio contenido en la membrana del dirigible a partir de la operación de los balonetes instalados en su interior. Estas variables abren las perspectivas para explorar alternativas de control que le den robustez al desempeño del sistema en lazo cerrado, esto sin olvidar que los actuadores principales no dejarán de ser los motores propulsores sobre cuyo desempeño quedan aún factores a resolver, tales como conseguir que un desplazamiento del globo en línea recta no se vea alterado por un giro indeseado producto de diferencias de voltaje entre los dos motores de propulsión.

Respecto al modelaje realizado, es importante anotar que la cantidad de información contenida en el modelo resulta ser de gran relevancia, considerando que los reguladores que sean diseñados tendrán un mejor desempeño si el modelo de la planta es conocido lo mejor posible.

Finalmente, la autonomía de vuelo de un dirigible impulsado por motores eléctricos suele ser de cerca de 60 minutos, lo cual representa una restricción en lo que será el conjunto de tareas al que se podrá someter el dirigible real en proyectos futuros. Esta condición lleva a considerar la viabilidad de emplear motores de combustión interna, que entreguen

---

<sup>4</sup> *Temperatura=25°, Densidad del aire=1.3Kg/m<sup>3</sup>, Presión atmosférica 101.3 kPa.*

IEL-I-2003-01

una mayor autonomía y potencia al sistema de propulsión aunque sugieran incluir modificaciones al modelaje, dado el fenómeno de cambio de masa en el tiempo como efecto de la combustión.

### **Bibliografía**

- [1] Hygounenc, E., Souères, P., Lacroix, S., “**Modélisation d’un dirigeable: étude de la cinématique et de la dynamique**”, Rapport LAAS-CNRS 426, octobre 2000.
- [2] Hygounenc, E., Souères, P., “**Une approche pour la modelisation et la commande des dirigeables**”, Rapport LAAS-CNRS 2193, mai 2002.
- [3] G.A. Khoury, J.D.Gillett, “**Airship Technology**”, Cambridge University Press, 1999.
- [4] Munk, Max M., “**Some tables of the factor of apparent additional mass**”, NACA technical report 197, july 1924. (ANEXO <http://naca.larc.nasa.gov/reports/1924/naca-tn-197/> )
- [5] Gracey, William, “**The additional-mass effect of plates as determined by experiments**”, Naca Report 707, 1941. (<http://naca.larc.nasa.gov/reports/1941/naca-report-707/> )
- [6] Kuo, Benjamin, “**Automatic control systems**” Prentice Hall, 1995.
- [7] Fossen, Thor I., “**Guidance and control of Ocean Vehicles**”, J. Wiley Press, 1996.
- [8] Street, Robert L., Watters Gary Z., Vennard, John K., “**Elementary Fluid Mechanics**”, John Wiley & Sons Inc., Seventh Edition, 1996.
- [9] Hygounenc E., “**Estimation des paramètres du dirigeable AS500**”, Rapport LAAS-CNRS
- [10] Arévalo E. Mauricio, “**Diseño e Implementación del Control de Vuelo para un Dirigible**”, Tesis Ingeniero Mecánico, Universidad de los Andes, 2002.
- [11] Anderson Jr., John D., “**Fundamentals of Aerodynamics**”, Mc Graw Hill, Second Edition, 1991.
- [12] Brushless DC motor, model motors AXI2820 Datasheet, [www.rcmodelairplanes.com](http://www.rcmodelairplanes.com)
- [13] Arévalo E. Mauricio, “**Identification and Validation for the Time-Continuous Model of a Brushless DC Motor AXI2820/10**”, Report LAAS/CNRS, october 2002.

ANEXOS

**ANEXO 1**Pre-producto vectorial

Para efectos de simplicidad en algunas de las expresiones empleadas en el desarrollo del modelaje presentado; se utilizó el operador  $S(A)$  conocido como *pre-producto vectorial del vector A*.

Sea  $A$  un vector tal que:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix}$$

Dada la expresión de producto vectorial  $(A \times B)$ , esta podrá expresarse también como la multiplicación matricial  $S(A)B$  en donde

$$S(A) = \begin{bmatrix} 0 & -A_3 & A_2 \\ A_3 & 0 & -A_1 \\ -A_2 & A_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Puede verse que  $S(A)$  es una matriz antisimétrica cuyo producto  $S(A)B$  será idéntico al producto vectorial  $(A \times B)$

## ANEXO 2

### Conjunto de propiedades y parámetros del dirigible AS500 y Sistema de Propulsión

- Características Geométricas y Desempeño

Volumen	15 m <sup>3</sup>
Longitud Total	8.0 m
Diámetro Máximo	1.9m
Relación de Aspecto $\lambda$ (longitud/diámetro)	4.21
Autonomía	60 minutos
Velocidad Máxima	25 Nudos $\equiv$ 12.86m/s
Velocidad de Operación	5m/s

- Inerciales

Carga Paga	7.0 Kg
Inercia Total (Ec. 4.13)	$I_{TOTAL} = \begin{pmatrix} 14.997 & 0 & -5.012 \\ 0 & 187.784 & 0 \\ -5.012 & 0 & 112.581 \end{pmatrix}$
Parámetro $k'$ de Inercia Virtual	0.63
Masa Total (Ec. 4.4)	$M_{TOTAL} = \begin{pmatrix} 19.8765 & 0 & 0 \\ 0 & 35.301 & 0 \\ 0 & 0 & 35.301 \end{pmatrix}$
Parámetro $k_1$ de Masa Virtual	0.077
Parámetro $k_2$ de Masa Virtual	0.868

- Aerodinámicas y Aerostáticas

Coeficiente $C_x$ de Fuerza de Arrastre $F_x$	0.25
Coeficiente $C_y$ de Fuerza de Arrastre $F_y$	Según Ecuación (5.2)
Coeficiente $C_z$ de Fuerza de Arrastre $F_z$	Según Ecuación (5.2)
Masa Crítica de Helio	1.125 Kg

- Motores de Propulsión y Hélices

Resistencia de Armadura $R_a$	0.1 $\Omega$
Inductancia de Armadura $L_a$	0.1H
Inercia Rotacional Eje Motor + Hélice $J_m$	$2.87 \times 10^{-4}$ Kg.m <sup>2</sup>
Coeficiente Fricción Viscosa $B_m$	$3.82 \times 10^{-4}$ N.m.s
Constante de Torque $K_t$	0.00787N.m/Amp
Constante de Voltaje Inducido $K_b$	0.00787 V.s/rad
Parámetro $K_Q(J)$ de Torque de Carga	$1.6211 \times 10^{-4}$
Parámetro $K_T(J)$ de Fuerza de Propulsión	$3.3957 \times 10^{-3}$