

Teorías gauge en esferas cuánticas

Sebastián Montes Valencia

ASESOR: Alexander Cardona Guio, PhD.

Universidad de los Andes
Departamento de Matemáticas
Bogotá, Colombia
2009

“At the hazard of wearying you this tale of vehement emotions must be prefaced by a discourse on geometry.

Nature moves in circles; Art in straight lines. The natural is rounded; the artificial is made up of angles. A man lost in the snow wanders, in spite of himself, in perfect circles; the city man’s feet, denaturalized by rectangular streets and floors, carry him ever away from himself.”

Squaring the circle - O. Henry

Agradecimientos

Dicen que del afán no queda sino el cansancio... espero que éste no sea el caso.

Agradezco a mi papá y a mi mamá por haberme apoyado desde Manizales, por haber confiado en mí como adulto responsable; a mi hermano Daniel por haber hecho más fáciles y más difíciles estos años; a Laura por estar ahí, alegrándome el día en estos semestres llenos de trabajo; a Fiallo por ser un compañero incansable de trabajo y haberme soportado todos los ataques de neurosis; a mis amigos lejanos Alejandro, Lucas, Sergio y Manuel; a Olga, Fabián, Nicolás García, Fabio Robayo, Daniel Wills, Karla y Juan Camilo Osorio, por ser mucho más que compañeros de estudio; a Carlos Román y Manuela Ríos, por la música, el whisky y los jalapeños.

Agradezco también a Alexander Cardona por haberme motivado para estudiar geometría, mostrándome que sí es posible combinar cuidadosamente Física y Matemáticas; a Alonso Botero por mostrarme como a un colega lo bueno, lo malo y lo feo de la Física; a Andrés Reyes por su seminario y su deseo de romper la barrera entre estudiantes y profesores; a Bernardo Gómez, Juan Carlos Sanabria, Carlos Ávila y Ahmed Ould.

Índice general

Introducción	7
1. Variedades conmutativas y no conmutativas	10
1.1. Variedades suaves	10
1.1.1. Punto de vista geométrico	10
1.1.2. Punto de vista algebraico	11
1.2. Entre álgebras y espacios	14
1.2.1. C^* -álgebras	14
1.2.2. Teoría espectral	16
1.2.3. Teorema de Gel'fand-Naimark y construcción GNS	17
2. Haces y conexiones	20
2.1. Haces fibrados	20
2.2. Conexiones	23
2.2.1. Conexiones en haces principales	23
2.2.2. Curvatura y derivadas covariantes	24
2.3. Haces vectoriales y módulos	26
3. Nociones de geometría espectral	28

3.1. Haces y operadores de Dirac	29
3.1.1. Motivación	29
3.1.2. Álgebras de Clifford	30
3.1.3. Haces de Clifford	31
3.1.4. Operadores de Dirac	32
3.2. Triplas espectrales	34
3.2.1. Generalidades	34
3.2.2. Infinitesimales y la traza de Dixmier	36
3.2.3. Tripla espectral canónica sobre una variedad	38
4. Teorías gauge	40
4.1. Teorías gauge clásicas	41
4.1.1. Teorías gauge en espacios suaves	41
4.1.2. Mecanismo de Higgs	43
4.2. Formas diferenciales	43
4.3. Conexiones sobre módulos	47
4.3.1. Conexiones gauge “abelianas”	47
4.3.2. Conexiones universales	49
4.4. Teorías gauge algebraicas	51
4.4.1. Teorías gauge en un espacio de dos puntos	51
4.4.2. Construcción general	54
5. Esferas cuánticas de Podleś	56
5.1. Tipos de esferas cuánticas	56
5.2. Esferas de Podleś	57
5.2.1. El disco no conmutativo \mathcal{D}_q	57

5.2.2.	Representación ecuatorial de $C(S_q^2)$	58
5.2.3.	Representación espinorial de $C(S_q^2)$	59
5.3.	Cálculo espectral para la esfera de Podleś	60
5.3.1.	Álgebra de funciones suaves: A^∞	61
5.3.2.	Triplas espectrales para A^∞	62
5.3.3.	Tripla espectral para la representación ecuatorial de $C(S_q^2)$	63
5.3.4.	Tripla espectral para la representación espinorial de $C(S_q^2)$	63
5.4.	Formas diferenciales en S_q^2	64
5.4.1.	Representación ecuatorial	65
5.4.2.	Representación espinorial	67
5.5.	Teorías gauge abelianas sobre $\mathcal{A}(S_q^2)$ ecuatorial	67
6.	Conclusiones	72
	Bibliografía	74

Introducción

Según las teorías físicas actuales, Johannes Kepler no mentía con su popular adagio “Ubi materia, ibi geometria” (“Donde hay materia, hay geometría”). Este matrimonio entre geometría y física se formaliza con los trabajos pioneros de Newton. Basta leer un poco de su *Principia*, el texto que da inicio a la Física Teórica, para darse cuenta de que entender la dinámica de los cuerpos en términos geométricos ya era un imperativo. La relatividad general de Albert Einstein lleva esta forma de pensar hasta sus últimas consecuencias, entablando una relación directa entre materia, dinámica y geometría. El electromagnetismo de Maxwell, formulado originalmente en términos analíticos, encontró en la geometría su hogar natural.

Los trabajos de Yang, Mills y Utiyama en los años 50's sirvieron como punto de partida para la formulación de teorías de interacción clásicas y cuánticas en términos geométricos; el *principio gauge*, nacido del electromagnetismo, se volvió un paradigma para la formulación teórica de las nuevas interacciones.

Por otro lado, la mecánica cuántica, entre sus muchas implicaciones fenomenológicas y epistemológicas, necesita de la no conmutatividad para dar cuenta de las observaciones experimentales. Como es de esperarse, las herramientas originales era netamente algebraicas. El tratamiento de esta no conmutatividad en otros marcos tiende a ser un poco artificial, ya que requiere de un proceso de *cuantización* de los observables clásicos, es decir, el paso de funciones suaves sobre una variedad (de dimensión 4 generalmente) a operadores en algún espacio de Hilbert.

A pesar de la sencillez de los postulados originales del principio gauge, estas teorías presentaron varias patologías cuando fueron “cuantizadas”. Uno de los problemas más famosos es el de la aparición de infinitos en cálculos de cantidades físicas concretas. Muchos matemáticos del siglo XX, directa o indirectamente, ayudaron a mejorar las herramientas existentes. Una solución interesante fue desarrollada por Alain Connes y su grupo de trabajo. La idea es bastante natural: cuanticemos el espacio en vez de los observables; sin embargo, la formulación general resultó ser bastante complicada, haciendo uso de todo el

arsenal de la matemática moderna (desde operadores pseudodiferenciales hasta teoría de números analítica).

La formulación original de teorías físicas (gauge) en estos términos resultó ser muy fructífera. La mayor ventaja es que las álgebras usadas en estos casos siguen usando la parte clásica, introduciendo la no conmutatividad a través de productos tensoriales con álgebras de dimensión finita. Esto ha sido muy útil para ofrecer alternativas rigurosas a varios problemas del Modelo Estándar de partículas, como la aparición de infinitos y el mecanismo de Higgs.

La idea de este trabajo es estudiar teorías gauge “abelianas” (el equivalente al Electromagnetismo) sobre un espacio no conmutativo abstracto. En este caso el álgebra que usamos, conocida como *esfera de Podleś*, es una deformación del álgebra de funciones sobre la esfera clásica, S^2 . Restringiendo nuestra atención a cierta subálgebra polinomial, mostramos que las teorías obtenidas son todas estáticas, es decir, la acción de la interacción es nula.

Dada la cantidad de herramientas necesarias, los primeros tres capítulos del trabajo contienen algunos preliminares de geometría, análisis funcional y física. El desarrollo no es autocontenido. Para demostraciones completas y resultados más generales se puede remitir, por ejemplo, a la bibliografía propuesta.

El primer capítulo de este trabajo busca explicar el paso de espacio clásicos (variedades) a espacios no conmutativos abstractos. Las definiciones y resultados de geometría diferencial clásica son contrastados con el formalismo de C^* -álgebras, basando la relación en el teorema de Gel’fand-Naimark.

Los capítulos dos y tres introducen estructuras geométricas necesarias, como haces fibrados y conexiones, para entender los ingredientes básicos de este trabajo: la definición de tripla espectral y de teoría gauge. Primero se introducen resultados de haces principales y vectoriales, con sus respectivas conexiones. Luego se describe brevemente el teorema de Serre-Swan para motivar la definición de haces vectoriales no conmutativos como módulos proyectivos finitamente generados. Finalmente se dan algunas nociones de geometría de espín para motivar la definición de tripla espectral general. En la definición de tripla espectral se hace énfasis en la integral no conmutativa (traza de Dixmier) y los infinitesimales de una tripla espectral.

El capítulo cuatro describe la formulación teórica de las teorías gauge. Primero se enuncian algunos resultados de la construcción clásica, introduciendo conceptos como potenciales y transformaciones gauge, y la acción de Yang-Mills. Después se describe el paradigma de Alain Connes para teorías gauge no conmutativas. Para esto se construye un complejo de formas diferenciales algebraicas y luego la noción de conexiones sobre módulos. Finalizamos con un ejemplo sencillo (un espacio de dos puntos) y la “receta” general para las teorías

gauge algebraicas.

En el último capítulo se define la esfera de Podleś y se estudian dos triplas espectrales. Luego se caracterizan las 1-formas obtenidas de estas representaciones, especialmente para el álgebra polinomial de la representación ecuatorial. Usando potenciales gauge definidos sobre esta álgebra se muestra que, al minimizar el valor del funcional de Yang-Mills, las dinámicas obtenidas son triviales.

Capítulo 1

Variedades conmutativas y no conmutativas

El concepto de variedad nace naturalmente del deseo de extender algunas propiedades de cálculo propias de \mathbb{R}^n a espacios topológicos como curvas, superficies, etc... La forma más común de trabajar con variedades es usar sistemas de coordenadas “bien comportados”. Existen formas un poco más abstractas que se basan en el álgebra de funciones suaves de la variedad. Como veremos, existe una correspondencia entre cierto tipo de álgebras *conmutativas* y variedades como espacios topológicos, lo cual nos permite usar cualquiera de las dos formulaciones.

La idea central de la geometría no conmutativa es trabajar con ciertos tipos de álgebras *no conmutativas* y, a partir de sus propiedades, determinar análogos de propiedades geométricas. En este capítulo veremos cómo se hace esta transición. Seguimos principalmente las referencias [13], [18], [22], [27].

1.1. Variedades suaves

1.1.1. Punto de vista geométrico

Un espacio topológico M es *localmente Euclídeo de dimensión n* si para todo punto $p \in M$ existe una vecindad (abierto) $U \subset M$ tal que existe un homeomorfismo $\phi : U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$, V abierto. Llamamos la pareja (U, ϕ) una carta, U una vecindad de coordenadas y ϕ un sistema de coordenadas en U . Una *variedad topológica de dimensión n* es un espacio

topológico Hausdorff, segundo contable, localmente Euclídeo de dimensión n .

Diremos que dos cartas (U, ϕ) , (V, ψ) de una variedad topológica son C^∞ -compatibles si los mapas

$$\phi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \rightarrow \phi(U \cap V), \quad \psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V),$$

son funciones C^∞ (en \mathbb{R}^n). Un *atlas* C^∞ , o simplemente un *atlas*, sobre un espacio localmente Euclídeo M es una colección $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_\alpha$ de cartas C^∞ -compatibles que cubren M , es decir, $M = \bigcup_\alpha U_\alpha$. Un atlas \mathfrak{A} se dice *maximal* si no está contenido en ningún otro atlas; en otras palabras, si \mathfrak{M} es otro atlas que contiene a \mathfrak{A} entonces $\mathfrak{M} = \mathfrak{A}$.

Definición: Una *variedad suave* o *variedad* C^∞ es una variedad topológica M junto con un atlas maximal. El atlas maximal también es llamado estructura diferenciable sobre M .

EJEMPLO: (Esfera S^2) Definimos S^2 como la esfera unitaria en \mathbb{R}^3 como los puntos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ que satisfacen la ecuación

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Es bien conocido que esta esfera es equivalente al plano compactificado $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ (tomando $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$). Con esta identificación, podemos definir dos cartas para describir la esfera, U_N y U_S , que omiten el polo norte y el polo sur respectivamente

$$U_N : z = e^{-i\phi} \cot\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad (1.1a)$$

$$U_S : \zeta = e^{i\phi} \tan\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad (1.1b)$$

relacionadas por $z = 1/\zeta$ en la intersección $U_N \cap U_S$.

1.1.2. Punto de vista algebraico

Las definiciones de la sección anterior pueden reescribirse en términos netamente algebraicos. Para mostrarlo necesitamos algunas definiciones.

Si F es un álgebra conmutativa, asociativa y unitaria sobre \mathbb{R} , denotamos por M_F el conjunto de todos los homomorfismos unitales de F en \mathbb{R} . En otras palabras, si $x \in M_F$, $x : F \rightarrow \mathbb{R}$ es tal que

$$x(f + g) = x(f) + x(g), \quad x(fg) = x(f)x(g), \quad x(\lambda f) = \lambda x(f), \quad x(1) = 1,$$

para todo $f, g \in F$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Definimos $\tilde{F} = \{\tilde{f} : M_F \rightarrow \mathbb{R} \mid \tilde{f}(x) := x(f), f \in F\}$. Este conjunto tiene una estructura natural de álgebra real

$$\begin{aligned}(\tilde{f} + \tilde{g})(x) &= \tilde{f}(x) + \tilde{g}(x) = x(f) + x(g), \\(\tilde{f}\tilde{g})(x) &= \tilde{f}(x)\tilde{g}(x) = x(f)x(g), \\(\lambda\tilde{f})(x) &= \lambda\tilde{f}(x) = \lambda x(f).\end{aligned}$$

Existe un homomorfismo natural $\tau : F \rightarrow \tilde{F}$ dado por $\tau(f) = \tilde{f}$. Por definición τ es sobreyectivo. Para garantizar que sea inyectivo, y por lo tanto un isomorfismo de álgebras, debemos imponer ciertas restricciones sobre F . Notamos que

$$\begin{aligned}f \in \ker(\tau) &\iff \tau(f) = \tilde{f} = 0 \\&\iff \tilde{f}(x) = x(f) = 0, \forall x \in M_F \\&\iff f \in \bigcap_{x \in M_F} \ker(x).\end{aligned}$$

Por lo tanto $\ker(\tau) = 0$ (es decir, τ es inyectivo) si y sólo si $I(F) := \bigcap_{x \in M_F} \ker(x) = 0$. Esto motiva la siguiente definición:

Definición: Un álgebra F conmutativa, asociativa y unitaria sobre \mathbb{R} se dice *geométrica* si

$$I(F) := \bigcap_{x \in M_F} \ker(x) = 0. \quad (1.2)$$

Toda álgebra geométrica real F es canónicamente isomorfa al álgebra real \tilde{F} de funciones reales sobre M_F . Si F es un álgebra conmutativa, asociativa y unitaria sobre \mathbb{R} entonces el álgebra cociente $F/I(F)$ es geométrica y $M_F = M_{F/I(F)}$ [22].

Dada un álgebra geométrica F podemos introducir una topología sobre M_F . Para esto usamos la topología inicial.

Proposición y Definición: [17] Sea X un conjunto, $(Y_i)_{i \in I}$ una familia de espacio topológicos y $f_i : X \rightarrow Y_i$, $i \in I$ una familia de aplicaciones. Entonces existe en X una topología τ para la cual todas las aplicaciones f_i son continuas. Esta topología se llama *topología inicial en X definida por la familia $(f_i)_{i \in I}$* . Una base para esta topología son los conjuntos de la forma

$$f_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap f_{i_2}^{-1}(U_{i_2}) \cap \dots \cap f_{i_n}^{-1}(U_{i_n}), \quad (1.3)$$

en donde $U_{i_k} \subset Y_{i_k}$ es abierto, $k = 1, \dots, n$. Además si existe otra topología τ_1 en X para la cual todas las f_i son continuas, $\tau \subset \tau_1$.

Dotamos entonces a M_F de la topología inicial definida por $\tilde{F} \cong F$, si F es un álgebra geométrica. Esta topología vuelve a M_F un espacio topológico Hausdorff, como es fácilmente verificable. Si F_1, F_2 son álgebras geométricas reales y $\varphi : F_1 \rightarrow F_2$ es un homomorfismo de álgebras, esto induce un mapa $\tilde{\varphi} : M_{F_1} \rightarrow M_{F_2}$ definido por $\tilde{\varphi}(x) = x \circ \varphi$. Es fácil verificar, usando la base para las topologías iniciales, que $\tilde{\varphi}$ es continua.

Si F es un álgebra real geométrica y $A \subset M_F$, la *restricción* $F|_A$ de F es el álgebra de todas las funciones $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ tales que para todo punto $a \in A$ existe una vecindad $U \subset A$ de a y un elemento $\bar{f} \in F$ tales que $f(x) = \bar{f}(x)$, para todo $x \in U$. Esta definición no se debe confundir con la restricción usual de funciones. De hecho, podemos definir el homomorfismo de restricción

$$\rho_A : F \rightarrow F|_A, \quad f \mapsto f|_A. \quad (1.4)$$

En general este homomorfismo no será sobreyectivo, ni siquiera en el caso $A = M_F$ (ver [22], p. 31). Un álgebra geométrica real F se dice *completa* si el homomorfismo de restricción $\rho : F \rightarrow F|_{M_F}$ es sobreyectivo (y por lo tanto isomorfismo). En otras palabras, si tenemos una función $\bar{f} : M_F \rightarrow \mathbb{R}$ tal que coincida localmente con elementos de F , entonces $\bar{f} \in F$.

Con todas estas definiciones podemos finalmente volver a las variedades de la sección anterior.

Definición: Un álgebra geométrica real completa F se dice *suave* si existe un cubrimiento abierto enumerable $\{U_k\}_k$ de M_F tal que las subálgebras $F|_{U_k}$ son isomorfas a $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, con n fijo. El entero n es llamado la dimensión del álgebra F .

En este contexto diremos que M_F es una variedad suave y F su álgebra de funciones. Es necesario decir que las variedades así definidas no tienen frontera. Para una definición de álgebras suaves con frontera ver [22], p. 37.

EJEMPLO: [22] (Esfera S^n) Considere la \mathbb{R} -álgebra $F = C^\infty(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})$. El grupo multiplicativo \mathbb{R}_+^* (los números reales positivos) actúa sobre F con el automorfismo h_λ :

$$h_\lambda(f)(r_1, \dots, r_{n+1}) = f(\lambda r_1, \dots, \lambda r_{n+1}),$$

con $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, $f \in F$ y $(r_1, \dots, r_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. Si tomamos el cociente respecto a la acción de este grupo, obtenemos una variedad suave (en el sentido algebraico). Puede mostrarse que el espacio obtenido corresponde a los puntos que satisfacen $r_1^2 + \dots + r_{n+1}^2 = 1$, es decir, la *esfera n -dimensional* S^n . Podemos obtener este espacio a partir del álgebra original usando el ideal $A_{S^n} = \{f \in F \mid f(a) = 0, \forall a \in S^n\}$ que es el ideal principal generado por la función $(r_1, \dots, r_{n+1}) \mapsto r_1^2 + \dots + r_{n+1}^2 - 1$.

Podemos recuperar nuestra intuición geométrica usando los siguientes teoremas.

Teorema: [22] Sea $F = C^\infty(M)$ el álgebra de funciones reales suaves de una variedad suave M . Entonces F es un álgebra suave y el mapa

$$\theta : M \rightarrow M_F, \quad (\theta(p))(f) = f(p),$$

es un homeomorfismo.

Existe un “converso” de este teorema que podemos considerar una versión débil del teorema de Gel’fand-Naimark que veremos en la próxima sección.

Teorema: [22] Sea F un álgebra real suave. Entonces existe un atlas en M_F tal que

$$\tilde{\theta} : F \rightarrow C^\infty(M_F), \quad f \mapsto (p \mapsto p(f))$$

es un isomorfismo de álgebras.

Como vemos el álgebra de funciones de una variedad determina completamente su topología.

1.2. Entre álgebras y espacios

1.2.1. C^* -álgebras

Como vimos, a partir del álgebra de funciones de una variedad podemos reconstruir nuevamente el espacio y su topología. En nuestro paso de los espacios conmutativos a los no conmutativos tendremos que considerar otro tipo más general de álgebras, las C^* -álgebras. Esto se debe a que la formulación también incluye espacios topológicos que no son necesariamente variedades. Necesitamos echar mano de nuevas herramientas, esta vez de Análisis funcional.

Un *espacio de Banach* complejo B es un espacio vectorial complejo dotado de una norma $\|\cdot\|$ tal que B es completo en la topología métrica inducida por su norma. Un álgebra compleja B es un *álgebra de Banach* si B es un espacio de Banach con una multiplicación que satisface

$$\|ab\| \leq \|a\| \|b\|. \tag{1.5}$$

para todos $a, b \in B$. Cuando un álgebra de Banach B tiene una unidad multiplicativa 1 , decimos que B es un álgebra de Banach *unitaria*. En general no es necesario que $\|1\| = 1$. Sin embargo siempre podemos conseguir una norma equivalente $\|\cdot\|$ tal que $\|1\| = 1$ [17].

Definición: Si un álgebra de Banach \mathcal{A} tiene un mapa $*$: $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ tal que para todos $a, b \in \mathcal{A}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tenemos

- $(\alpha a + \beta b)^* = \bar{\alpha}a^* + \bar{\beta}b^*$;
- $a^{**} = a$;
- $(ab)^* = b^*a^*$;
- $\|a^*\| = \|a\|$,

decimos que \mathcal{A} es una $*$ -álgebra de Banach. Si la norma $\|\cdot\|$ satisface la condición

$$\|a^*a\| = \|a\|^2, \quad a \in \mathcal{A}, \quad (1.6)$$

el álgebra \mathcal{A} es llamada una C^* -álgebra y la norma una C^* norma.

Tenemos dos ejemplos claves de C^* -álgebras que, como veremos, se pueden considerar los únicos.

EJEMPLO: Sea X un espacio localmente compacto Hausdorff. $C(X)$ denota el conjunto de funciones $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ continuas. Decimos que $f \in C(X)$ se anula en infinito si para todo $\epsilon > 0$ existe un compacto $K \subset X$ tal que $|f(x)| < \epsilon$ para todo $x \in X \setminus K$. Denotaremos el conjunto de tales funciones por $C_0(X)$. Tenemos que $C_0(X)$ es una C^* -álgebra conmutativa dotándola de

$$\begin{aligned} \text{Involución} & : f^*(x) = \overline{f(x)}, \\ \text{Norma} & : \|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|; x \in X\}. \end{aligned}$$

Es importante notar que, en general, $C_0(X)$ no tiene unidad. De hecho, $C_0(X)$ tiene una unidad multiplicativa si y sólo si X es compacto (si no es compacto las funciones constantes no se anulan en infinito). Si $X^\sim = X \cup \{\infty\}$ es la compactificación por un punto de X , $C(X^\sim) = C_0(X^\sim)$ es una C^* -álgebra con unidad y podemos ver $C_0(X)$ como la C^* -subálgebra $\{f \in C(X^\sim); f(\infty) = 0\}$.

EJEMPLO: Sea \mathcal{H} un espacio de Hilbert, $\dim(\mathcal{H}) \geq 2$. Denotamos por $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ el conjunto de operadores (lineales) acotados de \mathcal{H} . $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ es un álgebra compleja unitaria no conmutativa con producto dado por la composición. Podemos darle estructura de C^* -álgebra a través de $*$: $T \mapsto T^*$, $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, donde T^* es el operador adjunto de T . Recordamos que la norma es simplemente

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\|; x \in \mathcal{H}, \|x\| = 1\}. \quad (1.7)$$

Los ideales en una C^* -álgebra tienen gran importancia. Si \mathcal{A} es una C^* -álgebra y $\mathcal{I} \subset \mathcal{A}$ es un $*$ -ideal (es decir, un ideal derecho o izquierdo que es cerrado bajo involución) entonces es un ideal bilateral. Si \mathcal{I} es un $*$ -ideal bilateral cerrado (en la topología de la norma), entonces \mathcal{A}/\mathcal{I} es una C^* -álgebra. Decimos que una C^* -álgebra es *simple* si no tiene $*$ -ideales bilaterales cerrados no triviales. Un $*$ -ideal bilateral \mathcal{I} de una C^* -álgebra \mathcal{A} es llamado *esencial* en \mathcal{A} si todo ideal no nulo de \mathcal{A} tiene intersección no nula con \mathcal{I} .

1.2.2. Teoría espectral

Sea \mathcal{A} una C^* -álgebra con unidad. Para $a \in \mathcal{A}$, si existe $b \in \mathcal{A}$ tal que $ab = ba = 1$, se dice que a es invertible. Denotamos $GL_1(\mathcal{A})$ el conjunto de elementos invertibles de \mathcal{A} . Para todo $a \in \mathcal{A}$ definimos

$$\text{spec}(a) = \{\lambda \in \mathbb{C}; \lambda 1 - a \notin GL_1(\mathcal{A})\}. \quad (1.8)$$

El conjunto $\text{spec}(a)$ se llama el *espectro* de a . Su complemento $\mathbb{C} \setminus \text{spec}(a)$ se denomina la *resolvente* de a . El conjunto $\text{spec}(a)$ es no vacío, cerrado en el plano complejo y está contenido en $\{z \in \mathbb{C}; |z| \leq \|a\|\}$ [14]. En particular, $\text{spec}(a)$ es compacto. Si $a \in \mathcal{A}$

$$r(a) = \sup\{|\lambda|; \lambda \in \text{spec}(a)\} \quad (1.9)$$

se denomina el *radio espectral* de a .

Algunas propiedades algebraicas particulares ayudan a caracterizar el espectro de un elemento. Tenemos por ejemplo [28]

$$\begin{array}{ll} \text{spec}(a) \subset \mathbb{R} & \text{si } a \text{ es autoadjunto, } (a^* = a), \\ \text{spec}(a) \subset \mathbb{R}_+ & \text{si } a \text{ es positivo, } (a = b^*b, \text{ para algún } b \in \mathcal{A}), \\ \text{spec}(a) \subset \mathbb{T} & \text{si } a \text{ es unitario, } (a^*a = aa^* = 1). \end{array}$$

donde $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$.

Si a es autoadjunto entonces $r(a) = \|a\|$ [18]. Este resultado es bastante fuerte ya que el espectro, y por lo tanto el radio espectral, es una propiedad netamente algebraica y, en general, no dependerá de la norma que usemos. Sin embargo, en una C^* -álgebra la norma queda determinada por las propiedades algebraicas. Por lo tanto *en una C^* -álgebra existe a lo sumo una única C^* -norma*.

El resultado anterior tiene consecuencias muy interesantes. Por ejemplo todo $*$ -homomorfismo $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ (un homomorfismo continuo de álgebras que preserva la involución) contrae

normas, es decir

$$\|\varphi(a)\| \leq \|a\|, \quad a \in \mathcal{A}.$$

A partir de esto es posible mostrar que todo *-homomorfismo inyectivo es una isometría [18].

Para finalizar introducimos algunos conceptos de representaciones que utilizaremos más adelante.

Definición: Una *representación* de una C^* -álgebra \mathcal{A} es una pareja (\mathcal{H}, π) , donde \mathcal{H} es un espacio de Hilbert y π un *-homomorfismo

$$\pi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}). \quad (1.10)$$

La representación se dice *fiel* si $\ker(\pi) = \{0\}$, de forma tal que \mathcal{A} es *-isomorfa a $\pi(\mathcal{A})$. La representación se dice *irreducible* si los únicos espacios cerrados de \mathcal{H} invariantes bajo la acción de $\pi(\mathcal{A})$ son los subespacios triviales $\{0\}$ y \mathcal{H} .

Un subespacio \mathcal{I} de una C^* -álgebra \mathcal{A} es llamado un *ideal primitivo* si es el kernel de una representación irreducible de \mathcal{A} . Notamos que en este caso \mathcal{I} es automáticamente bilateral y cerrado.

1.2.3. Teorema de Gel'fand-Naimark y construcción GNS

Vimos en la sección 1.1.2 que el álgebra de funciones reales suaves de una variedad permite reconstruir el espacio original. El teorema de Gel'fand-Naimark sigue esta línea, identificando C^* -álgebras conmutativas con espacios topológicos de Hausdorff.

Un *caracter* de un álgebra de Banach \mathcal{A} es un homomorfismo no trivial $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$. El conjunto de todos los caracteres, que puede ser vacío, se denota $M(\mathcal{A})$. Por ejemplo, si $\mathcal{A} = C_0(X)$ es el álgebra de funciones continuas que se anulan en infinito sobre un espacio topológico Hausdorff localmente compacto X y $x \in X$, entonces $f \mapsto f(x)$ es un caracter de \mathcal{A} .

Si $a \in \mathcal{A}$, notamos que $\mu(a) \in \text{spec}(a)$ ya que $\mu(a - \mu(a)1) = 0$ implica que $a - \mu(a)1$ no es invertible. Tenemos entonces $|\mu(a)| \leq \|a\|$. Por lo tanto todos los caracteres son continuos. En particular, $\|\mu\| = 1$ ya que siempre se tiene $\mu(1) = 1$.

Si \mathcal{A} es un álgebra de Banach conmutativa llamamos a $M(\mathcal{A})$ el *espectro de \mathcal{A}* . La topología inducida en $M(\mathcal{A})$ por la topología débil-* de \mathcal{A}^* (el espacio de funcionales lineales continuos de \mathcal{A} en \mathbb{C}) se conoce como la *topología de Gel'fand* de $M(\mathcal{A})$. Dado que

la bola unitaria de \mathcal{A}^* es compacta por el teorema de Banach-Alaoglu, podemos mostrar que el espectro de Gel'fand de un álgebra de Banach conmutativa dotado de la topología de Gel'fand es un espacio topológico localmente compacto. En estos términos podemos definir la *transformada de Gel'fand*

$$\hat{a} : M(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{C}, \quad \hat{a}(\mu) := \mu(a). \quad (1.11)$$

Esta función es continua por la definición de la topología débil-*. Por lo tanto $\mathcal{G} : \mathcal{A} \rightarrow C_0(M(\mathcal{A}))$ dada por $a \mapsto \hat{a}$ tiene sentido. \mathcal{G} es llamada *transformación de Gel'fand* y resulta ser muy útil a pesar de no ser inyectiva, ni sobreyectiva, en general.

Si \mathcal{A} es una C^* -álgebra es fácil ver que los caracteres son *-homomorfismos. Primero notamos que si $a \in \mathcal{A}$ es autoadjunto, entonces $\mu(a) \in \mathbb{R}$ porque $\mu(a) \in \text{spec}(a)$. Si $a \in \mathcal{A}$ no es autoadjunto, escribimos $a = a_1 + ia_2$, donde $a_1 = \frac{1}{2}(a^* + a)$ y $a_2 = \frac{i}{2}(a^* - a)$ son elementos autoadjuntos de \mathcal{A} . Entonces

$$\mu(a^*) = \mu(a_1) - i\mu(a_2) = \overline{\mu(a)} \quad \Leftrightarrow \quad \hat{a}^* = (\hat{a})^*.$$

Teorema (Gel'fand-Naimark): [13] Si \mathcal{A} es una C^* -álgebra conmutativa entonces la transformación de Gelfand \mathcal{G} es un *-isomorfismo isométrico de \mathcal{A} en $C_0(M(\mathcal{A}))$.

Este teorema es muy poderoso. Nos dice que *una C^* -álgebra es conmutativa si y sólo si es isométricamente isomorfa al álgebra de funciones continuas de un espacio topológico*. Esta es una caracterización completa ya que si dos espacios topológicos Hausdorff son homeomorfos sus álgebras de funciones serán isomorfas. Esta observación es el punto de partida de la geometría no conmutativa. Si se puede estudiar espacios topológicos usando únicamente álgebras conmutativas, es natural preguntarse que estructuras se preservan al eliminar la condición de conmutatividad.

Otra herramienta bastante útil al trabajar con C^* -álgebras en general es la construcción de Gel'fand-Naimark-Segal (GNS) [13, 15]. Como vimos antes, los ejemplos más comunes de C^* -álgebras no conmutativas venían de álgebras de operadores lineales en espacios de Hilbert. La idea de la construcción GNS es precisamente obtener representaciones de C^* -álgebras abstractas.

Un *estado* de una C^* -álgebra \mathcal{A} es un funcional lineal $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ positivo (es decir, $\phi(a^*a) \geq 0, \forall a \in \mathcal{A}$) y de norma uno ($\|\phi\| = 1$). Si \mathcal{A} tiene unidad, la positividad implica $\phi(1) = 1$. El conjunto $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ de todos los estados de \mathcal{A} es un espacio convexo.

Los elementos de la frontera de $\mathcal{S}(\mathcal{A})$, es decir, los elementos que no se pueden escribir como combinación convexa de otros dos, se denominan *estados puros* y se denotan por

$\mathcal{PS}(\mathcal{A})$. Si \mathcal{A} es conmutativa entonces los estados puros corresponden a caracteres y el espacio $\mathcal{PS}(\mathcal{A})$ es el espectro $M(\mathcal{A})$. Dado un estado $\phi \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ definimos el espacio

$$\mathcal{N}_\phi = \{a \in \mathcal{A}; \phi(a^*a) = 0\}. \quad (1.12)$$

La relación $\phi(a^*b^*ba) \leq \|b\|^2\phi(a^*a)$ y la positividad de ϕ implican que \mathcal{N}_ϕ es un ideal izquierdo (cerrado) de \mathcal{A} . Podemos definir un producto escalar en $\mathcal{A}/\mathcal{N}_\phi$

$$\langle a + \mathcal{N}_\phi, b + \mathcal{N}_\phi \rangle := \phi(a^*b). \quad (1.13)$$

Denotamos por \mathcal{H}_ϕ el espacio de Hilbert obtenido al completar $\mathcal{A}/\mathcal{N}_\phi$ usando este producto interno. A cada elemento $a \in \mathcal{A}$ le asociamos el operador $\pi(a) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_\phi)$ definido por

$$\pi(a)(b + \mathcal{N}_\phi) := ab + \mathcal{N}_\phi \quad (1.14)$$

Usando la relación $\|\pi(a)(b + \mathcal{N}_\phi)\|^2 = \phi(b^*a^*ab) \leq \|a\|^2\phi(b^*b) = \|b + \mathcal{N}_\phi\|^2$, obtenemos $\|\pi(a)\| \leq \|a\|$. Podemos extender $\pi(a)$ de manera única a un operador π_ϕ en \mathcal{H}_ϕ dado que $\mathcal{A}/\mathcal{N}_\phi$ es un subespacio denso y $\pi(a) \in \mathcal{L}(\mathcal{A}/\mathcal{N}_\phi)$. Es fácil verificar que π_ϕ es una representación de \mathcal{A} en \mathcal{H}_ϕ .

El estado ϕ se puede representar como un *estado vectorial*, es decir, si $\psi_\phi := 1 + \mathcal{N}_\phi$ entonces

$$\phi(a) = \langle \psi_\phi, \pi_\phi(a)\psi_\phi \rangle, \quad \forall a \in \mathcal{A}. \quad (1.15)$$

Más aún, el conjunto $\{\pi_\phi(a)\psi_\phi; a \in \mathcal{A}\}$ es denso en \mathcal{H}_ϕ , es decir, el vector ψ_ϕ es un *vector cíclico* para la representación $(\mathcal{H}_\phi, \pi_\phi)$. Esta representación cíclica es única salvo equivalencias unitarias. El estado ϕ es puro si y sólo si $(\mathcal{H}_\phi, \pi_\phi)$ es una representación irreducible [13].

La principal utilidad de la construcción GNS es darle un sentido operativo a las C^* -álgebras. En particular, cuando veamos la noción de tripla espectral en el capítulo 3, las representaciones serán el ingrediente básico para formular teorías espectrales con sentido geométrico. Si no tenemos una representación para una C^* -álgebra exótica, la construcción GNS nos permite obtener un escenario concreto.

Capítulo 2

Haces y conexiones

En Física teórica es natural considerar el espacio-tiempo desde un punto de vista geométrico, desde mecánica clásica hasta teoría de campos cuánticos. Las teorías que modelan interacciones fundamentales como el Modelo Estándar consideran el espacio-tiempo como una variedad de 4 dimensiones que sirve como “base” para la dinámica. Las interacciones a su vez son modeladas con conexiones que poseen ciertas simetrías determinadas por las teorías físicas. Esta formulación geométrica permite dar cuenta de la posible complejidad global de una situación física, manteniendo la simplicidad necesaria para cálculos locales. Seguimos en este capítulo las referencias [4], [15], [20].

2.1. Haces fibrados

Los grupos en Física generalmente aparecen para modelar simetrías propias de ciertas teorías. Por ejemplo, en el caso del momento angular (una cantidad para describir el movimiento de un objeto que rota) es natural que aparezca $SO(3)$, el grupo de rotaciones en el espacio.

En muchas situaciones no basta considerar acciones *globales* del grupo de simetrías. Debemos implementar acciones locales, por ejemplo para modelar interacciones en el Modelo Estándar. En este marco aparecen los haces vectoriales y principales [20].

Definición: Un *haz fibrado* (E, π, M, F, G) consiste en los siguientes elementos:

1. Una variedad diferenciable E llamada espacio total.
2. Una variedad diferenciable M llamada espacio de base.

3. Una variedad diferenciable F llamada fibra.
4. Una sobreyección $\pi : E \rightarrow M$ llamada proyección. La imagen inversa $\pi^{-1}(p) := F_p \cong F$ es llamada la fibra en $p \in M$.
5. Un grupo de Lie G llamada grupo de estructura que actúa sobre F a la izquierda.
6. Un cubrimiento abierto (enumerable) $\{U_i\}_{i \in I}$ de M con difeomorfismos $\phi_i : U_i \times F \rightarrow \pi^{-1}(U_i)$ tal que $\pi \circ \phi_i(p, f) = p, \forall p \in U_i, \forall f \in F$. Estas funciones son llamadas trivializaciones locales.
7. Si escribimos $\phi_{i,p}(f) := \phi_i(p, f)$, el mapa $\phi_{i,p} : F \rightarrow F$ es un difeomorfismo. Si $p \in U_i \cap U_j$, exigimos que $t_{ij}(p) := \phi_{i,p}^{-1} \phi_{j,p} : F \rightarrow F$ sea un elemento del grupo de estructura G , de forma tal que se cumpla la ecuación

$$\phi_j(p, f) = \phi_i(p, t_{ij}(p)f). \quad (2.1)$$

$\{t_{ij}\}$ son llamadas funciones de transición.

Generalmente, mientras no haya confusión, escribiremos $E \xrightarrow{\pi} M$ para denotar un haz fibrado con la notación de la definición anterior.

La idea detrás de la definición de haz fibrado es “pegar” en cada punto de M una copia de F . En principio la forma de “pegar” esto puede ser no trivial, haciendo interesante la geometría y la topología de E . También tenemos muchas libertad en el tipo de fibra. Lo más natural es elegir un espacio vectorial de dimensión finita real o complejo (con la topología inducida por \mathbb{R}^n o \mathbb{C}^n , según sea el caso) o un grupo de Lie.

Sea $E \xrightarrow{\pi} M$ un haz fibrado. Una *sección* $s : M \rightarrow E$ es una función suave que satisface $\pi \circ s = id_M$. Claramente, $s(p)$ es un elemento de $F_p = \pi^{-1}(p), p \in M$. El conjunto de todas estas secciones se denota $\Gamma(M, E)$. En muchos casos las secciones no se pueden definir sobre toda la variedad M , es decir, *globalmente*. Es necesario recurrir entonces a *secciones locales* que sólo están definidas en $U \subseteq M$ abierto. En este caso denotamos las secciones por $\Gamma(U, E)$.

Las secciones permiten generalizar la idea de función sobre una variedad ya que, de cierta forma, permiten “dibujar” o “subir” la variedad (o un abierto de ella) al espacio total. Un ejemplo sencillo de secciones son los campos vectoriales, que resultan ser secciones del haz tangente TM .

Un *haz vectorial* real (complejo) $E \xrightarrow{\pi} M$ es un haz fibrado cuya fibra es un espacio vectorial V real (complejo, respectivamente) y el grupo de estructura G un subgrupo de $GL(V, \mathbb{R})$ ($GL(V, \mathbb{C})$, respectivamente). Esto exige $\{t_{ij}\} \subseteq G$, es decir, cada t_{ij} es un

isomorfismo lineal. El ejemplo más sencillo de un haz vectorial es $E = TM$, es decir, el haz tangente sobre una variedad. Podemos formar también haces vectoriales triviales como $E = M \times V$, con la proyección natural, donde V es cualquier espacio vectorial (de dimensión finita).

Un *haz principal* $P \xrightarrow{\pi} M$ es un haz fibrado donde la fibra F coincide con el grupo de estructura G . Generalmente se denota por $P(M, G)$.

En un haz principal podemos definir también una acción derecha. Si $\phi_i : U_i \times G \rightarrow \pi^{-1}(U_i)$ es una trivialización local, la acción derecha de G se define fibra a fibra por

$$ua := \phi_i(p, g_i a),$$

donde $u := \phi_i(p, g_i) \in \pi^{-1}(p)$, $a \in G$. Denotaremos $R_a(u) := ua$. Nótese que $\pi(ua) = \pi(u)$, es decir, la acción “mueve” a los elementos del grupo dentro de la misma fibra. Esta acción es transitiva, i.e. si $u_1, u_2 \in \pi^{-1}(p)$, existe $g \in G$ tal que $u_1 = u_2 g$, ya que G actúa transitivamente sobre sí mismo. También es libre ya que si $ua = u$, para algún $u \in \pi^{-1}(p)$, $a \in G$, entonces a es la identidad de G .

Dado un haz principal $P(M, G)$, si G actúa sobre una variedad F a la izquierda, podemos construir un *haz fibrado asociado* de la siguiente manera. Defina la acción de $g \in G$ sobre $P \times F$ por

$$(u, f) \mapsto (ug, g^{-1}f)$$

con $u \in P$, $f \in F$. Entonces el haz fibrado asociado (E, π, M, G, F, P) tiene como espacio total $P \times F$ partido por la relación de equivalencia $(u, f) \sim (ug, g^{-1}f)$.

Si F es un espacio vectorial V de dimensión k , la acción de G viene dada por una representación k dimensional $\rho : G \rightarrow GL(V)$. El *haz vectorial asociado* $P \times_{\rho} V$ está definido por la relación de equivalencia $(u, v) \sim (ug, \rho(g)^{-1}v)$ en $P \times V$ con $u \in P$, $g \in G$, $v \in V$.

La estructura de haz vectorial de un haz vectorial asociado $E := P \times_{\rho} V \xrightarrow{\pi} M$ se hereda naturalmente de $P(M, G)$. La proyección $\pi_E : E \rightarrow M$ se define por $\pi_E(u, v) := \pi(u)$, que queda bien definida porque $\pi_E(ug, \rho(g)^{-1}v) = \pi(u) = \pi(ug) = \pi_E(u, v)$, lo cual justifica la relación de equivalencia definida más arriba. Las trivializaciones locales están dadas por $\psi_i : U_i \times V \rightarrow \pi_E^{-1}(U_i)$, donde claramente la fibra viene dada por $V/\rho(G)$. Las funciones de transición son simplemente $\{\rho(t_{ij}(p))\}$, donde las t_{ij} vienen de $P(M, G)$.

De manera similar, dado un haz vectorial $E \xrightarrow{\pi} M$ con fibra V se puede inducir un *haz principal asociado*, donde la fibra sería $GL(V, \mathbb{R})$ o $GL(V, \mathbb{C})$, dependiendo del caso.

2.2. Conexiones

2.2.1. Conexiones en haces principales

Si queremos movernos sobre el espacio total emulando al máximo el movimiento sobre el espacio base, i.e. “levantando” curvas de M , es natural pensar que lo lograremos si nos vamos moviendo “horizontalmente”, es decir, no por la fibras sino por la “sombra” de la variedad base. El concepto de conexión surge naturalmente para formalizar esta idea.

Dado un haz principal $P(M, G)$, podemos obtener estos levantamientos horizontales definiéndolos “localmente”, es decir, trabajando únicamente con vectores tangentes de M [4]. Los levantamientos de las curvas serán obtenidos entonces como las curvas integrales de los campos vectoriales levantados. Llegamos entonces a una primera definición de una conexión sobre un haz principal:

Definición: Una *conexión sobre un haz principal* (P, M, π, G) es una aplicación suave $\sigma_x : T_p(M) \rightarrow T_x(P)$, con $\pi(x) = p$, para todo $x \in P$ tal que

1. σ_x es lineal,
2. $(d\pi)\sigma_x$ es la identidad de $T_p(M)$, donde $d\pi : TP \rightarrow TM$ es la derivada de la proyección π .
3. $\sigma_{R_g x} = (dR_g)\sigma_x$, para todo $g \in G$, donde $R_g : P \rightarrow P$ es la acción por derecha de $g \in G$ y $dR_g : TP \rightarrow TP$ su derivada.

Llamaremos al subespacio vectorial $H_x := \sigma_x(T_p(M)) \leq T_x(P)$ el espacio horizontal en $x \in P$, donde $p = \pi(x) \in M$. Como $(d\pi)(H_x) = T_p(M)$, vemos que $H_p \cong T_p(M)$ y H_p sirve de representante del espacio tangente de M en el punto p en el tangente del espacio total.

De manera similar definimos $V_x := T_x(G_p) = T_x(\pi^{-1}(p)) = \ker((d\pi)_x)$ como el espacio vertical en $x \in P$, con $p = \pi(x)$. Como $(d\pi)V_x = \{0\}$, tenemos $T_x(P) = H_x \oplus V_x$. Nótese que la definición de V_x no depende de σ_x .

Existe un isomorfismo canónico entre el álgebra de Lie \mathfrak{g} de G (definida como $T_e(G)$ o como los campos vectoriales a izquierda [12]) y el espacio vertical V_p . Si $A \in \mathfrak{g}$ y $u \in P$ podemos definir una curva $\gamma_A : \mathbb{R} \rightarrow P$ tal que $\gamma_A(0) = u$ usando la acción derecha

$$\gamma_A(t) := R_{\exp(tA)}u = u \exp(tA),$$

donde $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ es el mapa exponencial. Como $\pi(u) = \pi(u \exp(tA)) = p$, la curva se mantiene dentro de $G_p = \pi^{-1}(p)$. Podemos definir entonces el campo vectorial $A^\# \in \mathfrak{X}(P)$ por

$$A^\# f(u) := \frac{d}{dt} f(u \exp(tA))|_{t=0}, \quad (2.2)$$

donde $f : P \rightarrow \mathbb{R}$ es una función suave arbitraria. Esto define un isomorfismo de álgebras de Lie entre \mathfrak{g} y los campos vectoriales verticales de P (es decir, que punto a punto pertenecen a V_u , $u \in P$), donde el corchete de Lie en este último es el conmutador de campos vectoriales.

Las anteriores definiciones nos dan la intuición geométrica detrás de las conexiones en haces principales. Sin embargo su utilidad es limitada a la hora de hacer cálculos. Es por esto que es conveniente definir una noción equivalente usando “matrices” de 1-formas sobre P .

Definición: Una 1-forma de conexión $\omega \in \mathfrak{g} \otimes T^*P$ es una 1-forma con valores en el álgebra de Lie \mathfrak{g} tal que

1. $\omega_u(A^\#) = A$, con $u \in P$, $A \in \mathfrak{g}$.
2. $\omega_{R_g u}(dR_g(v)) = Ad(g^{-1})\omega_u(v)$, con $u \in P$, $v \in T_u(P)$, donde $Ad(g) : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ es la representación adjunta de G en su álgebra de Lie [12].

En algunos libros ω es llamada *conexión de Ehresmann*. Este nombre se debe a que esta definición resulta ser equivalente a la presentada antes definiendo

$$H_u := \{X \in T_u(P) | \omega(X) = 0\} \quad (2.3)$$

Dijimos que ω puede verse como una matriz de 1-formas. Esto se debe a que, una vez evaluada en un campo vectorial, obtenemos un elemento del álgebra de Lie \mathfrak{g} , que en la mayoría de casos de interés (grupos de Lie matriciales) es simplemente una matriz.

2.2.2. Curvatura y derivadas covariantes

Dado que tenemos formas con valores en espacios vectoriales, nos gustaría definir una derivada exterior sobre ellas. Trabajamos nuevamente con un haz principal $P(M, G)$ dotado de una conexión, de forma tal que $T_u P = H_u P \oplus V_u P$. De esta forma, si $X \in T_u P$,

podemos escribir $X = X^H + X^V$ con $X^H \in H_uP$ y $X^V \in V_uP$. Si $\phi \in \Omega^r(P) \otimes \mathfrak{g}$ y $X_1, \dots, X_{r+1} \in T_uP$, entonces la *derivada covariante* de ϕ se define

$$D\phi(X_1, \dots, X_{r+1}) := d_P\phi(X_1^H, \dots, X_{r+1}^H), \quad (2.4)$$

donde $d_P\phi := \sum_{\alpha} d_P\phi^{\alpha} \otimes e_{\alpha}$ si $\{e_{\alpha}\}_{\alpha}$ es una base de \mathfrak{g} .

Definición: La *2-forma de curvatura* Ω de una 1-forma de conexión ω es su derivada covariante

$$\Omega = D\omega \in \Omega^2(P) \otimes \mathfrak{g}. \quad (2.5)$$

La curvatura se comporta bastante bien. Por ejemplo, para todo $a \in G$ tenemos $R_a^*\Omega = a^{-1}\Omega a$. Además, si $X, Y \in T_uP$, se satisface la *ecuación de estructura de Cartan* [20]

$$\Omega(X, Y) = d_P\omega(X, Y) + [\omega(X), \omega(Y)] \implies \Omega = d_P\omega + \omega \wedge \omega. \quad (2.6)$$

Como veremos en el capítulo 4, la curvatura estará relacionada con la intesidad de la interacción, modelada a su vez por la conexión.

Con este andamiaje teórico, podremos derivar secciones de un haz vectorial asociado teniendo en cuenta la conexión impuesta sobre el haz principal. Esta derivada tendrá información sobre cómo escogimos la conexión y qué simetrías modela el grupo usado como fibra (a través de su álgebra de Lie). La construcción de esta derivada no es muy complicada y se encuentra en varios libros (por ejemplo [4], [19], [20]). Nos limitaremos a enunciar algunas propiedades importantes.

Una *derivada covariante sobre un haz vectorial* E es un mapa lineal $\nabla : \Gamma(M, E) \rightarrow \Omega^1(M) \otimes \Gamma(M, E)$ tal que

$$\nabla(fe) = df \otimes e + f\nabla e, \quad f \in C^{\infty}(M), e \in \Gamma(M, E). \quad (2.7)$$

De esta forma, dado un campo vectorial suave X sobre M , obtenemos un mapa $\nabla_X : \Gamma(M, E) \rightarrow \Gamma(M, E)$ llamado *derivada covariante respecto a X* . Si E es un haz vectorial asociado a $P(M, G)$, la derivada covariante ∇ asociada a la 1-forma de conexión ω tendrá ciertas propiedades particulares. Para hacer explícita la acción de la conexión sobre el haz principal notamos que si V es la fibra del haz vectorial asociado y ω es la 1-forma de conexión de $P(M, G)$, podemos definir una 1-forma valuada en V a través de

$$(\omega \cdot s)_p(X) = \omega_p(X) \cdot s, \quad s \in \Gamma(M, E), X \in T_pM. \quad (2.8)$$

A partir de esto podemos mostrar que [19]

$$\nabla s = ds + \omega \cdot s, \quad (2.9)$$

donde $ds(p) = \sum_{\alpha} dX^{\alpha}(p)e_{\alpha}$ en coordenadas locales tales que $\{e_{\alpha}\}_{\alpha}$ es una base para $E_p \simeq V$.

La fórmula (2.9) será fundamental al hacer las analogías pertinentes para definir un haz vectorial no conmutativo en términos de módulos en el capítulo 4.

La siguiente proposición será bastante útil cuando estemos hablando de haces de Clifford en el capítulo 3:

Proposición: [16] Sea ω una 1-forma de conexión sobre $P_{SO}(E)$. Entonces ω determina una única derivada covariante sobre un haz vectorial riemanniano arbitrario E por medio de

$$\nabla e_i = \sum_{j=1}^n \tilde{\omega}_{ji} \otimes e_j, \quad (2.10)$$

donde $\mathfrak{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ es una familia local de secciones ortonormales de E (es decir, secciones locales de $P_{SO}(E)$) y $\tilde{\omega} = \mathfrak{E}^* \omega$ (ω escrita en la base \mathfrak{E}). Esta derivada covariante satisface

$$X(\langle e, e' \rangle) = \langle \nabla_X e, e' \rangle + \langle e, \nabla_X e' \rangle, \quad (2.11)$$

para todo $X \in TM$ y $e, e' \in E$, donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto interno de E . Conversamente toda derivada covariante sobre E que satisfaga (2.11) determina una única 1-forma de conexión por la ecuación (2.10).

2.3. Haces vectoriales y módulos

Al cambiar espacios suaves con coordenadas por álgebras abstractas es necesario tener a la mano caracterizaciones algebraicas de objetos geométricos familiares. En el caso de los espacios tenemos el teorema de Gel'fand-Naimark. Para los haces vectoriales tenemos el teorema de Serre-Swan, que enunciaremos más adelante.

Definición: [15] Sea \mathcal{A} un álgebra asociativa y \mathcal{E} un \mathcal{A} -módulo derecho. Decimos que \mathcal{E} es un módulo proyectivo si satisface una de las siguientes propiedades equivalentes:

1. Dado un homomorfismo sobreyectivo $\rho : M \rightarrow N$ de \mathcal{A} -módulos derechos, todo homomorfismo $\lambda : \mathcal{E} \rightarrow N$ puede ser levantado a un homomorfismo $\tilde{\lambda} : \mathcal{E} \rightarrow M$ tal

que $\rho \circ \tilde{\lambda} = \lambda$,

$$\begin{array}{ccc}
 id : M & \longleftrightarrow & M \\
 & \tilde{\lambda} \uparrow & \downarrow \rho \\
 \lambda : \mathcal{E} & \longrightarrow & N \\
 & & \downarrow \\
 & & 0
 \end{array} \tag{2.12}$$

2. Todo morfismo sobreyectivo de módulos $\rho : M \rightarrow \mathcal{E}$ se puede “factorizar” (splits), es decir, existe un morfismo de módulo $s : \mathcal{E} \rightarrow M$ tal que $\rho \circ s = id_{\mathcal{E}}$.
3. El módulo \mathcal{E} es un sumando directo de un módulo libre, es decir, existe un módulo libre F y un módulo \mathcal{E}' tales que $F = \mathcal{E} \oplus \mathcal{E}'$.

Dado que todo \mathcal{A} -módulo libre F es isomorfo a \mathcal{A}^N , para algún $N \in \mathbb{N}$, el punto (3) de la definición anterior nos permite escribir un módulo proyectivo \mathcal{E} como $\mathcal{E} \simeq p\mathcal{A}^N$, con $p \in End_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}^N) \simeq M_N(\mathcal{A})$ un proyector ($p^2 = p$). Esta caracterización será muy útil cuando construyamos teorías gauge sobre triplas espectrales en los últimos capítulos.

Teorema (Serre-Swan): [13] Sea M una variedad compacta de dimensión finita. Un $C^\infty(M)$ -módulo \mathcal{E} es isomorfo a un módulo $\Gamma(E, M)$ de secciones suaves de un haz $E \rightarrow M$, si y sólo si \mathcal{E} es un módulo proyectivo finitamente generado.

Esta forma de ver los haces vectoriales nos permitirá definir estructuras análogas para espacios no conmutativos (triplas espectrales) en el capítulo 4. Esto nos dará las herramientas necesarias para definir teorías gauge.

Capítulo 3

Nociones de geometría espectral

Uno de los grandes descubrimientos de la Mecánica Cuántica temprana es el de “grados de libertad internos”. El más importante, el espín de una partícula, es una cantidad intrínseca de la materia y no tiene equivalente clásico. Dado que todas las partículas fundamentales masivas tienen espín, en los modelos de interacción la materia se modela con *espinores*. Estos objetos matemáticos tienen en cuenta los grados de libertad habituales (como la posición), el espín y la evolución dada por la interacción con algún potencial físico.

Estos resultados fueron recibidos con entusiasmo por la comunidad matemática. Los primeros modelos físicos dieron paso a una formulación matemática completa, que generalizó todos los ingredientes (simetrías, haces, álgebras, etc...), aclarando bastante los conceptos básicos involucrados. El principal protagonista es el *operador de Dirac*; el estudio de su espectro reveló su profundo significado geométrico. Estas ideas permitieron a Alain Connes formular los fundamentos de la geometría no conmutativa en términos de triplas espectrales, la generalización natural de estas estructuras a álgebras no conmutativas.

Seguimos en este capítulo la referencia [16] para la parte clásica relacionada con geometría de espín y [13], [15] para la formulación algebraica de triplas espectrales.

3.1. Haces y operadores de Dirac

3.1.1. Motivación

En Mecánica Cuántica no relativista la dinámica de un sistema está determinada por la ecuación diferencial

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi(x, t) = -\frac{1}{2m}\nabla^2\psi(x, t) + V(x)\psi(x, t), \quad (3.1)$$

donde m es la masa de la partícula, t representa la variable temporal, $x = (x_1, x_2, x_3)$ las coordenadas espaciales, $V : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua a trozos (el potencial) y $\psi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función que debemos encontrar. Esta ecuación es conocida como la *ecuación de Schrödinger*.

Esta ecuación presenta un inconveniente cuando se quiere determinar la evolución de una partícula relativista, es decir, que se mueve a grandes velocidades (un electrón, por ejemplo). En la formulación de la Relatividad Especial, las cuatro coordenadas que determinan la ubicación de una partícula (3 espaciales y una temporal) son tratadas de manera similar. Los “boosts” (cambios de coordenadas entre marcos de referencia que se mueven) involucran tanto la dirección de movimiento como la coordenada temporal. Por lo tanto una teoría cuántica relativista debe formularse de forma tal que las cuatro coordenadas sean tratadas en los mismos términos.

Si miramos la ecuación (3.1) vemos que las coordenadas temporales aparecen en el Laplaciano como derivadas de segundo orden, mientras que el tiempo aparece como una derivada de primer orden. El primer intento para superar este problema fue la ecuación de Klein-Gordon

$$-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi(x, t) + \nabla^2\psi(x, t) = m^2\psi(x, t). \quad (3.2)$$

Aquí todas las coordenadas aparecen en derivadas de segundo orden. Sin embargo esta ecuación resultó insatisfactoria. Las derivadas de segundo orden respecto al tiempo no permiten interpretar ψ como una función que determine el estado de una partícula [10]. Es aquí donde Dirac hace su aparición. Consciente de la naturaleza del problema, notó que encontrar una “raíz cuadrada” del Laplaciano sería suficiente para recobrar el significado probabilístico usual de ψ . A través de manipulaciones algebraicas encontró un operador D tal que $D^2 = -\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2 - m^2$. La ecuación de evolución es entonces

$$D\psi(x, t) = \left(-i \sum_{\mu, \nu=0}^3 \eta_{\mu\nu} \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m \right) \psi(x) = 0, \quad (3.3)$$

donde definimos $x_0 = t$ de forma tal que $x = (x_0, \dots, x_3)$, $\eta_{\mu\nu}$ es la métrica de Minkowski y $\{\gamma^\mu\}$ elementos que satisfacen

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu}.$$

No vamos a entrar en detalles sobre la notación en este momento. Lo interesante es que, buscando “factorizar” el Laplaciano, surge una estructura algebraica inicialmente inesperada que a su vez incluye la geometría subyacente (en este caso a través de la métrica de Minkowski). El trabajo de Dirac en estos temas fue generalizado posteriormente por varios matemáticos, notablemente Atiyah y Singer, cuando trabajaban en la relación entre la topología de una variedad Riemanniana y el espectro de ciertos operadores diferenciales geométricos [16].

3.1.2. Álgebras de Clifford

Sea V un espacio vectorial sobre un campo \mathbb{K} y $q : V \rightarrow \mathbb{K}$ una forma cuadrática sobre V . El *álgebra de Clifford* asociada a V y q es un álgebra asociativa con unidad definida de la siguiente manera. Sea

$$\mathcal{T}(V) = \sum_{r=0}^{\infty} \bigotimes^r V$$

el álgebra tensorial de V y defina $\mathcal{I}_q(V) \subset \mathcal{T}(V)$ el ideal generado por los elementos de la forma $v \otimes v + q(v)$, con $v \in V$. Entonces el álgebra de Clifford se define como el cociente

$$Cl(V, q) = \mathcal{T}(V)/\mathcal{I}_q(V).$$

Hay una inclusión natural $V \hookrightarrow Cl(V, q)$ a través de la proyección $\pi_q : \mathcal{T}(V) \rightarrow Cl(V, q)$, ya que π_q resulta ser inyectiva al restringirse a V . De esta forma es fácil caracterizar $Cl(V, q)$ como el álgebra generada por el espacio vectorial $V \subset Cl(V, q)$ sujeto a la relación

$$v \cdot v = -q(v)1, \quad v \in V. \quad (3.4)$$

Si la característica de \mathbb{K} es diferente de 2, tenemos

$$v \cdot w + w \cdot v = -2q(v, w), \quad (3.5)$$

para $v, w \in V$, donde $2q(v, w) := q(v + w) - q(v) - q(w)$ es la forma bilineal simétrica canónica de q . El álgebra de Clifford así definida tiene una interesante propiedad universal:

Proposición: [16] Sea $f : V \rightarrow \mathcal{A}$ un mapa lineal del espacio vectorial V a la \mathbb{K} -álgebra asociativa con unidad \mathcal{A} tal que

$$f(v) \cdot f(v) = -q(v)1$$

para todo $v \in V$. Entonces f se extiende de forma única a un homomorfismo de \mathbb{K} -álgebras $\tilde{f} : Cl(V, q) \rightarrow \mathcal{A}$. Además, $Cl(V, q)$ es la única \mathbb{K} -álgebra asociativa con esta propiedad.

Una consecuencia importante de esto es que el grupo ortogonal $O(V, q) = \{f \in GL(V); f^*q = q\}$, donde f^*q es el pullback de q por f , se extiende de forma canónica a un grupo de automorfismos de $Cl(V, q)$.

Podemos “descomponer” $Cl(V, q)$ en dos partes con propiedades similares. Para esto definimos un automorfismo $\alpha : Cl(V, q) \rightarrow Cl(V, q)$ generado por $\alpha(v) = -v$ para $v \in V$. Como $\alpha^2 = Id$ entonces α tiene como valores propios 1 y -1 . Esto permite la descomposición

$$Cl(V, q) = Cl^0(V, q) \oplus Cl^1(V, q), \quad (3.6)$$

donde $Cl^r(V, q) := \{\phi \in Cl(V, q); \alpha(\phi) = (-1)^r \phi\}$. Estos subespacios satisfacen

$$Cl(V, q)^r \cdot Cl(V, q)^s \subseteq Cl^{r+s}(V, q),$$

tomando los exponentes módulo 2. En palabras más sofisticadas decimos que $Cl(V, q)$ es un álgebra \mathbb{Z}_2 -graduada. De estos dos subespacios, sólo $Cl^0(V, q)$ es una subálgebra.

Un ejemplo importante es $Cl(\mathbb{R}^n, g)$, donde g es el producto interno canónico de \mathbb{R}^n . De ahora en adelante lo notaremos simplemente por $Cl(\mathbb{R}^n)$. En este caso podemos calcular explícitamente algunos ejemplos [16]:

$$\begin{aligned} Cl(\mathbb{R}) &\simeq \mathbb{C}, \\ Cl(\mathbb{R}^2) &\simeq \mathbb{H}, \\ Cl(\mathbb{R}^3) &\simeq \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}, \end{aligned}$$

donde \mathbb{H} es el álgebra de los cuaterniones.

3.1.3. Haces de Clifford

Sea M una variedad riemanniana orientable. Escoger una orientación para M es equivalente a escoger un haz principal con fibra $SO(n)$, donde n es la dimensión de la variedad.

Definimos entonces $P_{SO}(M)$ como el haz de marcos ortonormales orientados. De forma análoga definimos $P_{SO}(E)$ si $E \xrightarrow{\pi} M$ es un haz vectorial riemanniano orientable.

Definición: El *haz de Clifford* de un haz vectorial riemanniano orientable E es

$$Cl(E) = P_{SO}(E) \times_{cl(\rho_n)} Cl(\mathbb{R}^n), \quad (3.7)$$

donde n es la dimensión de E , $cl(\rho_n) : SO(n) \rightarrow Aut(Cl(\mathbb{R}^n))$ es la representación canónica de $SO(n)$ en $Aut(Cl(\mathbb{R}^n))$ según se definió en la sección anterior.

En otras palabras, E es un haz de espacios vectoriales con producto interno y $Cl(E)$ es el haz asociado de álgebras de Clifford. También podemos definir $Cl(E)$ a través del cociente

$$Cl(E) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \bigotimes^n E \right) / \mathcal{I}(E),$$

donde $\mathcal{I}(E)$ es el haz de ideales (es decir, el haz cuya fibra en $x \in M$ es el ideal bilateral $\mathcal{I}(E_x)$ en $\mathcal{T}(E_x)$ según se definió en la sección anterior) generados por los elementos $v \otimes v + \|v\|^2$ para $v \in E_x$. De esta forma $Cl(E)$ es simplemente un haz de álgebras de Clifford sobre M que siguen siendo \mathbb{Z}_2 -graduadas.

El caso especial $E = TM$ si M es una variedad riemanniana orientable lo denotaremos $Cl(M)$.

Podemos ahora discutir conexiones en haces de Clifford. Supongamos que E es un haz vectorial riemanniano orientado de dimensión n dotado de una conexión riemanniana (es decir, una conexión τ en $P_{SO}(E)$). El haz de Clifford $Cl(E)$ es asociado a E por la representación $cl(\rho_n) : SO(n) \rightarrow Aut(Cl(\mathbb{R}^n))$. Entonces τ induce una única conexión τ' sobre $Cl(E)$. Por lo tanto tenemos

Proposición: [16] La derivada covariante ∇ sobre $Cl(E)$ actúa como una derivación en el álgebra de secciones, es decir,

$$\nabla(\phi \cdot \psi) = (\nabla\phi) \cdot \psi + \phi \cdot (\nabla\psi), \quad (3.8)$$

para todo par de secciones ϕ y ψ de $Cl(E)$.

3.1.4. Operadores de Dirac

Sea M una variedad riemanniana con haz de Clifford $Cl(M)$ y sea S un haz riemanniano de módulos izquierdos sobre $Cl(M)$, es decir, un haz vectorial riemanniano sobre M tal que en

cada punto $x \in M$ la fibra S_x es un módulo izquierdo sobre el álgebra $\mathcal{Cl}(M)_x$. Bajo estas hipótesis definimos un operador diferencial canónico de primer orden $D : \Gamma(S) \rightarrow \Gamma(S)$ llamado *operador de Dirac* de S fijando

$$D\sigma(x) := \sum_{i=1}^n e_i \cdot \nabla_{e_i} \sigma(x), \quad x \in M, \quad (3.9)$$

donde e_1, \dots, e_n es una base ortonormal de $T_x M$, ∇ es la derivada covariante sobre S definida por la conexión y “ \cdot ” es la multiplicación de Clifford (haciendo la identificación $TM \simeq T^*M$ usando la métrica riemanniana). El operador D^2 es llamado *Laplaciano de Dirac*.

El símbolo principal de un operador diferencial $F : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$ de orden m es un mapa que asocia a cada punto $x \in M$ y a cada vector cotangente $\zeta \in T_x^*M$ un mapa lineal $\sigma_\zeta(F) : E_x \rightarrow E_x$ definido (en coordenadas locales) por

$$\sigma_\zeta(F) = i^m \sum_{|\alpha|=m} A_\alpha(x) \zeta^\alpha,$$

si

$$F = \sum_{|\alpha| \leq m} A_\alpha(x) \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}, \quad \zeta = \sum_k \zeta_k dx_k.$$

En la ecuación anterior α es un multiíndice que tiene un número de entradas igual a la dimensión de M , el espacio base. Si $\sigma_\zeta(F)$ es un isomorfismo para todo $\zeta \neq 0$ se dice que D es un operador *elíptico*.

Proposición: [16] Sea D el operador de Dirac de un haz riemanniano S de módulos izquierdos sobre $\mathcal{Cl}(M)$. Entonces para todo $\zeta \in T^*M \simeq TM$ tenemos

$$\sigma_\zeta(D) = i\zeta \cdot, \quad \sigma_\zeta(D^2) = \|\zeta\|^2, \quad (3.10)$$

donde en el primer caso el símbolo representa multiplicación de Clifford por ζ y en el segundo multiplicación por el escalar $\|\zeta\|^2$. En particular, D y D^2 son elípticos.

Es natural imponerle a S ciertas condiciones de compatibilidad con la estructura algebraica de $\mathcal{Cl}(E)$. Aprovechamos la estructura riemanniana de S para lograr esto.

Un *haz de Dirac* sobre una variedad riemanniana M es un haz riemanniano S de módulos sobre $\mathcal{Cl}(M)$ dotado de una conexión $\tilde{\nabla}$ tal que:

1. Si $\sigma_1, \sigma_2 \in S_x$ y $e \in T_x M$, $\|e\| = 1$,

$$\langle e \cdot \sigma_1, e \cdot \sigma_2 \rangle = \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle, \quad (3.11)$$

para todo $x \in M$.

2. $\tilde{\nabla}$ es una derivación, es decir

$$\tilde{\nabla}(\phi \cdot \sigma) = (\nabla \phi) \cdot \sigma + \phi \cdot \tilde{\nabla}(\sigma), \quad (3.12)$$

donde ∇ es la conexión riemanniana canónica de $C\ell(E)$.

Todo haz de Dirac tiene asociado un operador de Dirac canónico definido por (3.9) usando $\tilde{\nabla}$. Además, existe un producto interno sobre $\Gamma(S)$ dado por la multiplicación puntual

$$(\sigma_1, \sigma_2) := \int_M \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle. \quad (3.13)$$

Denotaremos por $L^2(S)$ el espacio de Hilbert obtenido a partir del espacio pre-Hilbert de secciones cuadrado-integrables (es decir, si $\sigma \in L^2(S)$ entonces $(\sigma, \sigma) < \infty$).

Proposición: [16] Sea S un haz de Dirac sobre una variedad riemanniana orientable M y D su operador de Dirac canónico. Entonces,

- D es formalmente autoadjunto, es decir

$$(D\sigma_1, \sigma_2) = (\sigma_1, D\sigma_2),$$

para $\sigma_1, \sigma_2 \in \Gamma(S)$ de soporte compacto.

- Si M es una variedad completa entonces la clausura de D en $L^2(S)$ es un operador autoadjunto. Además

$$\ker(D) = \ker(D^2)$$

en $L^2(S)$.

3.2. Triplas espectrales

3.2.1. Generalidades

La noción de tripla espectral nos permite trasladar muchas herramientas usadas en geometría diferencial clásica al caso de álgebras abstractas. El vínculo primordial es el

operador de Dirac y su espectro. Como veremos más adelante, podemos definir triplas espectrales canónicas sobre variedades conmutativas (i.e. clásicas) usando el respectivo operador de Dirac. Estas triplas contienen toda la información geométrica y topológica de los respectivos espacios.

Definición: Una *tripla espectral* $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ está dada por un álgebra involutiva \mathcal{A} de operadores acotados sobre un espacio de Hilbert \mathcal{H} , junto con un operador autoadjunto $D = D^*$ sobre \mathcal{H} con las siguientes propiedades

1. El operador $(D - \lambda)^{-1}$, $\lambda \notin \mathbb{R}$, es compacto en \mathcal{H} .
2. $[D, a] := Da - aD$ es un operador acotado para todo $a \in \mathcal{A}$. En general, es suficiente que esta condición se satisfaga sólo en una subálgebra densa de \mathcal{A} .

La tripla se dice *par* si existe una \mathbb{Z}_2 -graduación en \mathcal{H} , es decir, un operador Γ en \mathcal{H} tal que $\Gamma = \Gamma^*$, $\Gamma^2 = 1$, que satisface

$$\Gamma D + D\Gamma = 0, \quad (3.14a)$$

$$\Gamma a - a\Gamma = 0, \quad \forall a \in \mathcal{A}. \quad (3.14b)$$

Si no existe tal graduación se dice que la tripla es *impar*. La pareja (\mathcal{H}, D) se conoce también como un *K-ciclo* sobre \mathcal{A} .

En general D es un operador no acotado y sólo está definido en un subespacio denso de \mathcal{H} . Si $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$ es el dominio de D , la condición $[D, a] \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ es equivalente a [15]

- Para $\phi, \psi \in \mathcal{D}$, la forma sesquilineal definida por

$$q(\phi, \psi) := \langle D\phi, a\psi \rangle - \langle a^*\phi, D\psi \rangle$$

es acotada en $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$ ($\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto interno en \mathcal{H}).

- Para $\phi \in \mathcal{D}$, se tiene que $a\phi \in \mathcal{D}$ y $[D, a]$ es acotado (en norma) sobre \mathcal{D} .

El operador $|D| := \sqrt{D^2}$ existe [14] y lo llamaremos el *valor absoluto del operador de Dirac*. Esto nos permite definir una derivación δ sobre $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ dada por

$$\delta(T) = [|D|, T], \quad T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}).$$

Definimos $\mathcal{A}^k \subset \mathcal{A}$, para $k \geq 2$, como la subálgebra generada por los elementos de $a \in \mathcal{A}$ tales que $\delta(a)$ y $\delta([D, a])$ son operadores acotados. Fijamos $\mathcal{A}^0 = \mathcal{A}$ y \mathcal{A}^1 como los elementos $a \in \mathcal{A}$ tales que $[D, a] \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. En estos términos, diremos que un elemento $a \in \mathcal{A}$ es de clase \mathcal{C}^∞ si pertenece a $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{A}^k$.

3.2.2. Infinitesimales y la traza de Dixmier

Dado un operador compacto $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$, sabemos que su espectro $\text{spec}(T)$ es un subconjunto discreto del plano complejo que no tiene puntos de acumulación, salvo quizás $\lambda = 0$. Además, todos los elementos de $\text{spec}(T)$ corresponden a valores propios (espectro puntual) y tienen multiplicidad finita si son diferentes de cero [17]. Usando la descomposición polar $T = U|T|$, restringimos nuestra atención a los valores propios de $|T|$. Dado que todos son positivos, los podemos organizar en una sucesión decreciente $\{\mu_n(T)\}_n$ teniendo en cuenta las multiplicidades, de forma tal que $\mu_n(T) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Llamaremos a $\{\mu_n(T)\}$ los *valores característicos de T* .

Definición: Sea $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Decimos que $T \in \mathcal{K}(H)$ es un infinitesimal de orden α si satisface

$$\mu_n(T) = O(n^{-\alpha}), \text{ cuando } n \rightarrow \infty, \quad (3.15)$$

es decir, si existe $C > 0$ tal que $\mu_n(T) \leq Cn^{-\alpha}$, para todo $n \geq 1$. Todos los infinitesimales de orden α conforman un ideal bilateral no cerrado en $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Notemos que la definición depende del espectro de $|T|$.

Nos gustaría encontrar una “integral” para estos infinitesimales, es decir, un operador lineal que ignore los infinitesimales de orden mayor a 1. Esto se logra con la *traza de Dixmier*, denotada por tr_ω . En la geometría no conmutativa de Connes, la traza de Dixmier corresponde a la integral [5]. Esta asignación tendrá sentido cuando veamos la tripla espectral canónica de una variedad.

Denotamos por $\mathcal{L}^{(1,\infty)}$ los operadores compactos que son infinitesimales de orden 1. Definimos

$$tr_\omega(T) := \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln N} \sum_{n=0}^{N-1} \mu_n(T), \quad T \geq 0, T \in \mathcal{L}^{(1,\infty)}. \quad (3.16)$$

Dado que la traza de Dixmier es lineal y positiva para los operadores positivos [5], podemos extenderla a todos los elementos de $\mathcal{L}^{(1,\infty)}$. Si $T \in \mathcal{L}^{(1,\infty)}$ es autoadjunto pero no positivo, usamos la descomposición polar $T = U|T|$, donde U es unitario y $|T| = \sqrt{T^*T} = \sqrt{T^2}$ es autoadjunto y positivo. Es fácil notar que $U^2 = 1$ usando $T^2 = |T|^2$, $U|T| = |T|U^*$ y una base de vectores propios de T (existe porque T es compacto). Escribiendo $U_\pm = \frac{1}{2}(1 \pm U)$, tenemos la descomposición

$$T = U_+|T| - U_-|T| = |T|_+ - |T|_- .$$

Usando nuevamente la base de vectores propios de T , podemos mostrar que $|T|_+, |T|_- \in \mathcal{L}^{(1,\infty)}$ son operadores compactos positivos. Definimos entonces

$$tr_\omega(T) := tr_\omega(|T|_+) - tr_\omega(|T|_-).$$

Un elemento arbitrario $T \in \mathcal{L}^{(1,\infty)}$ no es necesariamente autoadjunto o positivo. Si lo escribimos $T = \frac{1}{2}(T + T^*) + i\frac{1}{2i}(T - T^*)$, tenemos que $\frac{1}{2}(T + T^*)$ y $\frac{1}{2i}(T - T^*)$ son autoadjuntos y podemos definir

$$tr_\omega(T) := tr_\omega\left(\frac{1}{2}(T + T^*)\right) + i tr_\omega\left(\frac{1}{2i}(T - T^*)\right).$$

En este caso se satisfacen las propiedades para $T, S \in \mathcal{L}^{(1,\infty)}$:

1. $tr_\omega(T) \geq 0$ si $T \geq 0$.
2. $tr_\omega(\lambda_1 T + \lambda_2 S) = \lambda_1 tr_\omega(T) + \lambda_2 tr_\omega(S)$, para todo $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$.
3. $tr_\omega(BT) = tr_\omega(TB)$, para todo $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$.
4. $tr_\omega(T) = 0$ si T es un infinitesimal de orden mayor que uno.

Usaremos el subíndice ω para diferenciar la traza de Dixmier de la traza convencional. Hay varias sutilezas en la escogencia del límite de la ecuación (3.16). Sin embargo, en todas las aplicaciones relacionadas con teorías gauge, podemos trabajar con el límite usual [15]. El lector interesado en propiedades y generalizaciones de la traza de Dixmier puede consultar [1].

En estos términos, diremos que una tripla espectral $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ es de *dimensión* $n > 0$ (o *n-sumable*) si $|D|^{-1}$ es un infinitesimal de orden $\frac{1}{n}$, que es equivalente a que $|D|^{-n}$ sea un infinitesimal de orden 1. En general una tripla espectral no conmutativa puede tener varias dimensiones. En este caso, el conjunto de dimensiones se denomina *espectro dimensional de la tripla espectral* [13]. Si tenemos una tripla espectral n -dimensional, la *integral* de un elemento $a \in \mathcal{A}$ se define como

$$\int a := \frac{1}{V} tr_\omega(a|D|^{-n}), \quad (3.17)$$

donde la constante V se determina por el comportamiento de los valores característicos de $|D|^{-n}$, de forma tal que $\mu_k(|D|^{-n}) \leq \frac{V}{k}$ cuando $k \rightarrow \infty$. Se puede mostrar que \int es una traza normalizada no negativa sobre \mathcal{A} [15]. Esta integral no conmutativa jugará un papel muy importante cuando definamos la acción de Yang-Mills para la curvatura de un potencial vectorial en el capítulo 4.

3.2.3. Tripla espectral canónica sobre una variedad

Las definiciones y construcciones de las secciones anteriores adquieren más sentido cuando se tiene en cuenta el caso de espacios clásicos, determinados por álgebras conmutativas según el teorema de Gel'fand - Naimark (Capítulo 1). En esta sección enunciaremos algunos resultados que permiten afianzar la intuición geométrica detrás de las triplas espectrales.

El ejemplo principal de una tripla espectral está construido a partir del operador de Dirac sobre una variedad riemanniana de espín (M, g) . Esta tripla se conoce como *tripla espectral canónica sobre la variedad M* . Estas triplas son estudiadas en varios libros [5], [13], [15]. Los detalles geométricos y algebraicos generales sobre el haz espinorial y el operador de Dirac pueden encontrarse en [16]. La tripla espectral canónica está constituida por

1. $\mathcal{A} = C_c^\infty(M)$ es el álgebra de funciones complejas suaves sobre M .
2. $\mathcal{H} = L^2(M, S)$ es el espacio de Hilbert de secciones cuadrado-integrables del haz espinorial irreducible sobre M . El producto interno en \mathcal{H} es el asociado a la métrica g

$$\langle \psi, \phi \rangle = \int_M d\mu(g) \overline{\psi(x)} \phi(x),$$

donde la barra denota conjugación compleja, $\mu(g)$ la medida inducida por la métrica riemanniana y el producto escalar entre espinores es el natural heredado de $\mathbb{C}^{2^{[n/2]}}$.

3. D es el operador de Dirac asociado a la conexión de Levi-Civita de la métrica g .

Los elementos de \mathcal{A} sobre actúan \mathcal{H} como operadores de multiplicación

$$(f\psi)(x) := f(x)\psi(x), \quad \forall f \in \mathcal{A}, \psi \in \mathcal{H}, x \in M. \quad (3.18)$$

Proposición: [15] Sea $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ la tripla espectral canónica sobre una variedad M de dimensión n . Entonces

1. El espacio M es el espectro de $\overline{\mathcal{A}}$ (en el sentido de la sección 1.2.3), donde $\overline{\mathcal{A}}$ es la clausura (respecto a la norma) de \mathcal{A} .
2. La distancia geodésica entre dos puntos de M está dada por

$$d(p, q) = \sup_{f \in \mathcal{A}} \{|f(p) - f(q)|; \|[D, f]\| \leq 1\}, \quad \forall p, q \in M, \quad (3.19)$$

3. La medida de Riemann sobre M está dada por

$$\int_M f = c(n)tr_\omega(f|D|^{-n}), \quad \forall f \in \mathcal{A}, \quad (3.20)$$

donde $c(n) = 2^{n-[n/2]-1}\pi^{n/2}n\Gamma(\frac{n}{2})$ y tr_ω es la traza de Dixmier.

Esta construcción nos muestra que el operador de Dirac D determina tanto aspectos locales como globales de la variedad. También nos permite interpretar $|D|^{-n}$ como el equivalente a la forma de volumen, algo que ya estaba implícito en la definición de la integral no conmutativa de la sección anterior.

Capítulo 4

Teorías gauge

La noción de transformación gauge surgió en el electromagnetismo clásico como una herramienta de cálculo conveniente. La idea es muy sencilla: dada una configuración de un sistema físico, nos interesa saber cómo son los campos eléctrico y magnético, ya que estos son los que determinan la dinámica de las partículas cargadas presentes. Esto se puede describir matemáticamente con “potenciales”. A pesar de que la configuración física es única, los potenciales no lo son. Sin embargo, los diferentes potenciales están relacionados a través de ciertas transformaciones que dejan invariantes los campos observables. Esta libertad de cambiar de potenciales es conocida como *libertad gauge*.

Basados en una idea de Heisenberg, años más tarde Yang, Mills y Utiyama propusieron una generalización de estas ideas, involucrando nuevos grupos de simetrías locales para modelar nuevas interacciones. La idea fue recibida con entusiasmo por la comunidad física y actualmente es la base del Modelo Estándar de partículas.

En este capítulo revisaremos primero algunos conceptos básicos de las teorías gauge clásicas para fijar notación, y mejorar la intuición geométrica y operacional. Luego pasaremos al formalismo no conmutativo, introduciendo la noción de formas diferenciales y conexiones sobre módulos proyectivos (haciendo el papel de haces vectoriales). Seguimos las referencias [19][20] para la parte clásica y [5][15] para la no conmutativa.

4.1. Teorías gauge clásicas

4.1.1. Teorías gauge en espacios suaves

Sea $P \xrightarrow{\pi} M$ un haz principal con fibra G . Una sección local $s : V \subset M \rightarrow \pi^{-1}(V)$ se conoce en la literatura física como un *gauge local*. Si ω es una 1-forma de conexión sobre P , el pullback $A = s^*\omega$ se conocemos como un *campo gauge* o *potencial gauge local* (en el gauge s). Estos potenciales, en el marco de teorías físicas concretas, son determinados por ecuaciones diferenciales [19].

La libertad que tenemos para escoger la trivialización local del haz nos permite decidir la opción más conveniente para trabajar. Cambiar de una trivialización a otra se conoce en la literatura física como *transformación gauge*. Muchas veces las conexiones globales son definidas por gauges locales que se “pegan” convenientemente. Esto se puede formalizar con el siguiente teorema

Teorema: [19] Sea G un grupo de Lie con álgebra de Lie \mathfrak{g} y $P(M, G)$ un haz principal sobre M con fibra G . Sea $\{(V_j, \Psi_j)\}_{j \in J}$ una familia de trivializaciones locales de $P(M, G)$ con $\cup_{j \in J} U_j = M$. Suponga que para cada $j \in J$, A_j es una 1-forma de conexión sobre V_j y que si $V_i \cap V_j \neq \emptyset$, en tal intersección se satisface

$$A_j = ad_{g_{ij}^{-1}} \circ A_i + \Theta_{ij}, \quad (4.1)$$

donde $g_{ij} : V_i \cap V_j \rightarrow G$ es la función de transición y $\Theta_{ij} := g_{ij}^* \Theta$ es el pullback por g_{ij} de la conexión de Cartan Θ . Bajo estas hipótesis, existe una única 1-forma de conexión ω sobre P tal que para todo $j \in J$, $A_j = s_j^* \omega$, donde $s_j : V_j \rightarrow \pi^{-1}(V_j)$ es la sección transversal canónica asociada a la trivialización (V_j, Ψ_j) .

Una *transformación gauge local* es un cambio de sección transversal en una trivialización dada. Si $s : V \rightarrow \pi^{-1}(V)$ es una sección transversal y $f : V \rightarrow G$ es una función suave, defina $s_f : V \rightarrow \pi^{-1}(V)$ por $s_f(x) = s(x) \cdot f(x)$, $x \in V$. De esta forma podemos definir un automorfismo $k : \pi^{-1}(V) \rightarrow \pi^{-1}(V)$ por $k(s(x) \cdot h) = s_f(x) \cdot h$. Conversamente, si k es un automorfismo de $\pi^{-1}(V)$ y $s : V \rightarrow \pi^{-1}(V)$ es una sección transversal, definimos una aplicación $s_k : x \mapsto k^{-1}(s(x))$. Notamos que s_k es otra sección transversal.

Por lo anterior, una transformación gauge local sobre $V \subset M$ se puede identificar con un automorfismo de $\pi^{-1}(V)$. Definimos entonces una *transformación gauge global* como un automorfismo del haz $P(M, G)$, es decir, un difeomorfismo $f : P \rightarrow P$ que preserva las fibras ($\pi \circ f = \pi$) y conmuta con la acción ($f(p \cdot g) = f(p) \cdot g$). La familia de todos los

automorfismos del haz tiene una estructura natural de grupo y se conoce como *grupo de transformaciones gauge* [19].

En la terminología de la literatura física, la curvatura Ω de una 1-forma de conexión ω se conoce como *campo gauge*. El pullback $s^*\Omega$, donde s es una sección local del haz principal, se conoce como *intensidad local del campo* (en el gauge s). Si $s : V \rightarrow P$ es una sección transversal local de $P(M, G)$, definimos $A = s^*\omega$ y $F = s^*\Omega$. Podemos reescribir la ecuación de estructura de Cartan (2.6) como [19]

$$F = dA + \frac{1}{2}A \wedge A. \quad (4.2)$$

En coordenadas locales $A = \sum_i A_i dx^i$ y $F = \sum_{i,j} \frac{1}{2} F_{ij} dx^i dx^j$, donde A_i y F_{ij} son funciones sobre $V \subset M$ con valores en \mathfrak{g} . En estos términos, la ecuación anterior se puede escribir

$$F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i + [A_i, A_j],$$

donde $[\cdot, \cdot]$ es el corchete de Lie de \mathfrak{g} .

Cuando estas conexiones definen interacciones, aparecen términos en las ecuaciones de movimiento que corresponden a la dinámica de los campos gauge que generan la interacción. Siguiendo los principios de minimización de la acción clásica, encontrar las ecuaciones de movimiento para los campos es equivalente a minimizar el funcional

$$YM(A) = \frac{1}{2} \int_M tr(F \wedge *F), \quad (4.3)$$

donde $*$ es la estrella de Hodge. Este funcional se conoce como *funcional de Yang-Mills* o *acción de Yang-Mills*. Los potenciales A que más interesan en Física son los que minimizan (localmente) el funcional de Yang-Mills [19].

Los ingredientes básicos de una teoría gauge sobre una variedad suave que se mantienen cuando se pasa a espacios no conmutativos (triplas espectrales) son la derivada covariante sobre un haz vectorial (inducida por una conexión sobre un haz principal), la respectiva curvatura (para determinar la intensidad de la interacción) y el funcional de Yang-Mills (para determinar la dinámica de los campos). Una de las grandes diferencias (y dificultades) del caso conmutativo es la necesidad de imponer un mecanismo extra que permita darle dinámica a las partículas que median la interacción: el mecanismo de Higgs.

4.1.2. Mecanismo de Higgs

Daremos una descripción muy básica de la idea detrás del mecanismo de Higgs. La intención no es exponer argumentos formalmente, sólo ampliar el panorama de las teorías gauge descritas más arriba.

Generalmente el espacio base de las teorías gauge es \mathbb{R}^4 . Por lo tanto los haces son triviales y las conexiones se describen fácilmente como derivadas covariantes. Los “términos extra” que aparecen en las derivadas (es decir, los potenciales gauge dados por una conexión) son interpretados en Física como partículas de interacción. El problema es que estas partículas no tienen masa, lo cual contradice las observaciones experimentales. Para obtener partículas masivas es necesario romper la simetría de alguna forma. Esta ruptura debe ser espontánea, es decir, no puede ser introducida por términos *ad hoc* que afecten la interpretación física de las ecuaciones [3].

El mecanismo de Higgs es una forma de solucionar el problema. Como ilustración consideremos un potencial $V : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ dado por la ecuación

$$V(\phi) = -\mu^2|\phi|^2 + \lambda|\phi|^4, \quad (4.4)$$

donde μ y λ son constantes reales. Vemos que el mínimo de esta función corresponde a $|\phi| = (\frac{\mu^2}{2\lambda})^{1/2} =: \phi_0$. Si interpretamos esta energía mínima como la “energía del vacío”, vemos que hay un degeneramiento. Dado que las soluciones son de la forma $\phi = \phi_0 e^{i\theta}$, con $\theta \in \mathbb{R}$, este degeneramiento está determinado por el grupo de simetría $U(1)$. Si afirmamos que el sistema de manera espontánea escoge uno de los estados de vacío posibles, decimos que la simetría $U(1)$ se ha roto. Esta escogencia, sumada al teorema de Goldstone que afirma que una ruptura espontánea de simetría crea otras partículas sin masa, de alguna forma conspira para darle masa a las partículas que median la interacción [3].

Mucho se ha hecho en matemáticas y física para formalizar esta construcción. Algunos trabajos son construcciones geométricas clásicas, generalmente basadas en reducciones de haces principales [24, 26]. El Modelo Estándar propuesto por Connes y su grupo intenta explicar este fenómeno como manifestaciones de la no conmutatividad del espacio subyacente [5].

4.2. Formas diferenciales

Pasamos ahora a la construcción no conmutativa. Lo primero que debemos tener a la mano es una definición de formas diferenciales conveniente para trabajar con triplas espectrales.

En el estudio de las variedades de espín llegamos a la siguiente fórmula [16]:

$$d\hat{f} = -i[D, \hat{f}], \quad (4.5)$$

donde D es el operador de Dirac sobre la variedad. Dada una tripla espectral $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$, es de esperarse que las “formas diferenciales” no conmutativas estén determinadas por el operador D . Esta idea funciona bastante bien, pero debemos tener un poco de cuidado en la definición.

Para esto necesitamos primero construir el *álgebra diferencial universal* de \mathcal{A} . Es posible definirla en forma general para cualquier álgebra asociativa con unidad [15]. Sin embargo usaremos una manera constructiva útil para nuestro caso particular.

Consideramos primero $\mathcal{A} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{A}$ como \mathcal{A} -bimódulo. Si “ \cdot ” es la multiplicación en \mathcal{A} , definimos $m : \mathcal{A} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$, $m(a \otimes b) = a \cdot b$. Haciendo uso de este mapa fijamos

$$\Omega^1 \mathcal{A} := \ker(m) = \{a \otimes b \in \mathcal{A} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{A}; a \cdot b = 0\}. \quad (4.6)$$

Omitiremos el signo “ \cdot ” de ahora en adelante. Notamos que $\Omega^1 \mathcal{A}$ es un ideal generado por los elementos de la forma $1 \otimes a - a \otimes 1$, con $a \in \mathcal{A}$. En efecto, si $\sum_i a_i b_i = m(\sum_i a_i \otimes b_i) = 0$ entonces $\sum_i a_i \otimes b_i = \sum_i a_i (1 \otimes b_i - b_i \otimes 1)$. Esta observación nos permite definir

$$\delta : \mathcal{A} \rightarrow \Omega^1 \mathcal{A}, \quad \delta a = 1 \otimes a - a \otimes 1. \quad (4.7)$$

La forma en que definimos $\Omega^1 \mathcal{A}$ es bastante conveniente ya que la aplicación δ satisface la regla de Leibniz

$$\delta(ab) = 1 \otimes (ab) - (ab) \otimes 1 = (\delta a)b + a(\delta b),$$

lo cual nos permite entenderla como una derivada exterior. Para formas de orden mayor definimos

$$\Omega^p \mathcal{A} = \underbrace{\Omega^1 \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{A}} \dots \otimes_{\mathcal{A}} \Omega^1 \mathcal{A}}_{p \text{ veces}} \subset \underbrace{\mathcal{A} \otimes_{\mathbb{C}} \dots \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{A}}_{p+1 \text{ veces}}, \quad (4.8)$$

donde los elementos son de la forma

$$a_0 \delta a_1 \delta a_2 \dots \delta a_p := a_0 (1 \otimes a_1 - a_1 \otimes 1) \otimes_{\mathcal{A}} \dots \otimes_{\mathcal{A}} (1 \otimes a_p - a_p \otimes 1), \quad (4.9)$$

para $p \in \mathbb{N}$ y $a_k \in \mathcal{A}$. A partir de esto obtenemos un álgebra graduada (poniendo $\Omega^0 \mathcal{A} = \mathcal{A}$)

$$\Omega \mathcal{A} = \bigoplus_{p \geq 0} \Omega^p \mathcal{A}, \quad (4.10)$$

donde el producto y la estructura de \mathcal{A} -bimódulo son los naturales

$$\begin{aligned} (\omega_1 \otimes_{\mathcal{A}} \dots \otimes_{\mathcal{A}} \omega_p) \cdot (\omega_{p+1} \otimes_{\mathcal{A}} \dots \otimes_{\mathcal{A}} \omega_{p+q}) &= \omega_1 \otimes_{\mathcal{A}} \dots \otimes_{\mathcal{A}} \omega_{p+q}, \\ a \cdot (\omega_1 \otimes_{\mathcal{A}} \dots \otimes_{\mathcal{A}} \omega_p) &= (a\omega_1) \otimes_{\mathcal{A}} \dots \otimes_{\mathcal{A}} \omega_p, \\ (\omega_1 \otimes_{\mathcal{A}} \dots \otimes_{\mathcal{A}} \omega_p) \cdot a &= \omega_1 \otimes_{\mathcal{A}} \dots \otimes_{\mathcal{A}} (\omega_p a), \end{aligned}$$

para todo $\omega_j \in \Omega^1 \mathcal{A}$, $a \in \mathcal{A}$ [15]. Completamos nuestra construcción extendiendo la definición de δ para que $(\Omega \mathcal{A}, \delta)$ sea un álgebra diferencial graduada. Nuevamente usamos la analogía con el caso de variedades suaves y definimos

$$\delta(\omega_1 \otimes_{\mathcal{A}} \dots \otimes_{\mathcal{A}} \omega_p) = \sum_{i=1}^p (-1)^{i+1} \omega_1 \otimes_{\mathcal{A}} \dots \otimes_{\mathcal{A}} \delta \omega_i \otimes_{\mathcal{A}} \dots \otimes_{\mathcal{A}} \omega_p. \quad \omega_j \in \Omega^1 \mathcal{A}. \quad (4.11)$$

Dado que \mathcal{A} tiene una involución $*$, es natural querer que $\Omega \mathcal{A}$ también sea un álgebra involutiva. Esto se logra definiendo

$$\begin{aligned} (\delta a)^* &= -\delta(a^*), \\ (a_0 \delta a_1 \dots \delta a_p)^* &= (\delta a_p)^* \dots (\delta a_1)^* a_0^* \\ &= a_p^* \delta a_{p-1}^* \dots \delta a_0^* + \sum_{i=0}^{p-1} (-1)^{p+i} \delta a_p^* \dots \delta (a_{i+1}^* a_i^*) \dots \delta a_0^*, \end{aligned}$$

con $a_j \in \mathcal{A}$.

Para que nuestras definiciones tengan sentido es importante que coincidan con lo que ya conocemos de formas diferenciales en variedades suaves. Lamentablemente $\Omega \mathcal{A}$ es un álgebra demasiado grande y sólo nos servirá como paso intermedio. Una muestra de esto es que la cohomología de $\Omega \mathcal{A}$ es trivial [15].

Para lograr nuestro objetivo usamos nuestra tripla espectral $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ completa. Definimos la representación

$$\pi : \Omega \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}), \quad \pi(a_0 \delta a_1 \dots \delta a_p) = a_0 [D, a_1] \dots [D, a_p], \quad a_j \in \mathcal{A}, \quad (4.12)$$

donde claramente en el lado derecho de la ecuación identificamos \mathcal{A} con la respectiva subálgebra de operadores acotados de \mathcal{H} . Dado que δ y $[D, \cdot]$ son derivaciones en \mathcal{A} , π es un homomorfismo de álgebras. Además $[D, a]^* = -[D, a^*]$ implica $\pi(\omega)^* = \pi(\omega^*)$, para todo $\omega \in \Omega \mathcal{A}$, volviendo a π un $*$ -homomorfismo.

Es tentador definir el espacio de formas diferenciales simplemente como la imagen $\pi(\Omega\mathcal{A})$. El problema es que, en general, $\pi(\omega) = 0$ no implica $\pi(\delta\omega) = 0$. Estas formas son llamadas *formas basura*. La buena noticia es que podemos controlarlas hasta cierto punto.

Proposición: [5] Sea $J_0 = \bigoplus_p J_0^p$ el ideal bilateral graduado de $\Omega\mathcal{A}$ dado por

$$J_0^p = \{\omega \in \Omega^p\mathcal{A}; \pi(\omega) = 0\}. \quad (4.13)$$

Entonces $J = J_0 + \delta J_0$ es un ideal bilateral diferencial graduado de $\Omega\mathcal{A}$.

Definición: Dada una tripla espectral $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$, el *álgebra de formas diferenciales sobre \mathcal{A}* se define como

$$\Omega_D\mathcal{A} = \Omega\mathcal{A}/J \simeq \pi(\Omega\mathcal{A})/\pi(\delta J_0). \quad (4.14)$$

Esta álgebra sigue siendo un álgebra diferencial graduada. Basta notar que las p -formas son

$$\Omega_D^p\mathcal{A} = \Omega^p\mathcal{A}/J^p,$$

y que la derivada exterior es

$$d : \Omega_D^p\mathcal{A} \rightarrow \Omega_D^{p+1}\mathcal{A}, \quad d[\omega] = [\delta\omega] \simeq [\pi(\delta\omega)],$$

con $\omega \in \Omega^p\mathcal{A}$ y $[\omega]$ la clase de equivalencia correspondiente.

Podemos dar una caracterización de cada grado de esta álgebra.

- **0-formas:** Dado que la representación de \mathcal{A} en los operadores de \mathcal{H} es fiel, tenemos $J \cap \Omega^0\mathcal{A} = J_0 \cap \mathcal{A} = \{0\}$. Entonces $\Omega_D^0\mathcal{A} \simeq \mathcal{A}$.
- **1-formas:** Tenemos $J \cap \Omega^1\mathcal{A} = J_0 \cap \Omega^1\mathcal{A}$. Por lo tanto $\Omega_D^1\mathcal{A} \simeq \pi(\Omega^1\mathcal{A})$, es decir, elementos de la forma $\sum_j a_0^j [D, a_1^j]$.
- **2-formas:** En este caso $J \cap \Omega^2\mathcal{A} = J_0 \cap \Omega^2\mathcal{A} + J_0 \cap \Omega^1\mathcal{A}$. Por lo tanto

$$\Omega_D^2\mathcal{A} \simeq \pi(\Omega^2\mathcal{A})/\pi(\delta(J_0 \cap \Omega^1\mathcal{A})). \quad (4.15)$$

Estos son los elementos de la forma $\sum_j a_0^j [D, a_1^j] [D, a_2^j]$, $a_i^j \in \mathcal{A}$, módulo el sub-bimódulo

$$\left\{ \sum_j [D, b_0^j] [D, b_1^j]; b_i^j \in \mathcal{A}, \sum_j b_0^j [D, b_1^j] = 0 \right\}.$$

- **p -formas:** En general las p -formas están dadas por

$$\Omega_D^p \mathcal{A} \simeq \pi(\Omega^p \mathcal{A}) / \pi(\delta(J_0 \cap \Omega^{p-1} \mathcal{A})). \quad (4.16)$$

Los elementos son de la forma $\sum_j a_0^j [D, a_1^j] \dots [D, a_p^j]$, $a_i^j \in \mathcal{A}$, módulo el sub-bimódulo

$$\left\{ \sum_j [D, b_0^j] [D, b_1^j] \dots [D, b_{p-1}^j]; b_i^j \in \mathcal{A}, \sum_j b_0^j [D, b_1^j] \dots [D, b_{p-1}^j] = 0 \right\}.$$

Como es esperarse, las formas diferenciales que acabamos de definir corresponden finalmente a las formas diferenciales familiares de geometría diferencial (complejo de de Rham) si $\mathcal{A} = \mathcal{F}(M)$ es el álgebra de funciones complejas suaves de una variedad cerrada M [13, 15].

Es natural preguntarse por qué estas formas son el objeto matemático adecuado. La respuesta no es directa ya que las generalizaciones hechas en geometría no conmutativa casi nunca son canónicas. Sin embargo, podemos afirmar que el cálculo diferencial así definido es el más útil en las aplicaciones físicas relacionadas con Mecánica Cuántica [11]. Por lo tanto su aplicación a teorías gauge abstractas tiene sentido.

4.3. Conexiones sobre módulos

Para generalizar la construcción de conexiones de la sección 2.2, pasamos de tener una variedad suave tradicional a una tripla espectral $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ de dimensión n (es decir, el operador $|D|^{-n}$ es un infinitesimal de orden 1, sec. 3.2.2). Trabajaremos con las formas diferenciales $\Omega_D \mathcal{A}$ definidas anteriormente, denotando $d := [D, \cdot]$.

4.3.1. Conexiones gauge “abelianas”

El electromagnetismo es una teoría gauge relativamente sencilla en términos algebraicos ya que el grupo que modela las simetrías es $U(1) = S^1$, un grupo de Lie abeliano unidimensional. Siguiendo la analogía de la teoría gauge clásica sobre \mathbb{R}^4 , podemos formular el equivalente al electromagnetismo en espacios no conmutativos.

Un *potencial vectorial* V es un elemento autoadjunto de $\Omega_D^1 \mathcal{A}$. Su *curvatura* $\theta \in \Omega_D^2 \mathcal{A}$ es una 2-forma definida por (recordar la ecuación (4.2))

$$\theta = dV + V^2. \quad (4.17)$$

A pesar de que V se puede escribir de muchas formas como $V = \sum_j a_j [D, b_j]$, $a_j, b_j \in \mathcal{A}$, su derivada exterior dV está bien definida (ver la sección sobre formas diferenciales), por lo tanto podemos escribir $dV = \sum_j [D, a_j][D, b_j]$, módulo formas basura. Notamos que

$$dV - (dV)^* = \sum_j [D, a_j][D, b_j] - \sum_j [D, b_j^*][D, a_j^*].$$

Dado que $V - V^* = 0$, las derivadas exteriores de V y V^* deben ser iguales módulo 2-formas basura. Usando $V^* = -\sum_j [D, b_j^*]a_j^* = -\sum_j [D, b_j^*a_j^*] + \sum_j b_j^*[D, a_j^*]$ tenemos que

$$dV - dV^* = \sum_j [D, a_j][D, b_j] - \sum_j [D, b_j^*][D, a_j^*].$$

Comparando las dos ecuaciones anteriores obtenemos $dV = dV^* = (dV)^*$ en $\pi(\Omega_D^2 \mathcal{A})$. Esto implica que la curvatura θ es una 2-forma autoadjunta.

Aprovechando la conjugación en \mathcal{A} , definimos el grupo de elementos unitarios

$$\mathcal{U}(\mathcal{A}) := \{u \in \mathcal{A}; u^*u = uu^* = 1\}. \quad (4.18)$$

Este grupo nos dará las transformaciones gauge más generales. Es posible que ciertas situaciones requieran trabajar con subgrupos de $\mathcal{U}(\mathcal{A})$. Imponemos, por analogía con el caso clásico, que $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ actúe sobre potenciales vectoriales a través de una acción afín

$$(V, u) \mapsto V^u := uVu^* + u[D, u^*], \quad u \in \mathcal{U}(\mathcal{A}). \quad (4.19)$$

Un cálculo directo nos muestra que la curvatura se transforma de manera adjunta

$$\theta^u := dV^u + (V^u)^2 = u(dV + V^2)u^* = u\theta u^*, \quad (4.20)$$

donde usamos la relación $udu^* + (du)u^* = 0$.

Con estas herramientas definimos el *funcional de Yang-Mills*, análogo al que teníamos en la ecuación (4.3),

$$YM(V) := \langle dV + V^2, dV + V^2 \rangle_2, \quad (4.21)$$

donde V es un potencial vectorial,

$$\langle T_1, T_2 \rangle_2 = \int T_1^* T_2 = \text{tr}_\omega(T_1^* T_2 |D|^{-n}) = \text{tr}_\omega(T_1^* |D|^{-n} T_2), \quad T_1, T_2 \in \pi(\Omega_D^2 \mathcal{A}) \quad (4.22)$$

tr_ω es la traza de Dixmier (sec. 3.2.2) y n la dimensión de la tripla espectral. Este funcional es positivo e invariante bajo transformaciones de conjugación de $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ (transformaciones gauge) [15].

Las 2-formas basura pueden ser bastante incómodas en estos cálculos. Sin embargo, podemos caracterizar el funcional de Yang-Mills usando el espectro del operador de Dirac y la traza de Dixmier:

Proposición: [5] Si V es un potencial vectorial

$$YM(V) = \inf\{I(\alpha); \pi(\alpha) = V, \alpha \in \Omega^1 \mathcal{A}\}, \quad (4.23)$$

donde $I(\alpha) := tr_\omega(\pi(\delta\alpha + \alpha^2)^2 |D|^{-n})$ y n es la dimensión de la tripla espectral.

La sencillez de este tipo de teorías gauge nos permitirá en el capítulo 5 hacer construcciones explícitas para la esfera de Podlés. El factor decisivo será la caracterización de las 1-formas, obteniendo así varios candidatos para nuestro potencial gauge.

4.3.2. Conexiones universales

Podemos generalizar la construcción de las conexiones “abelianas” a casos más generales. Para esto consideramos una estructura algebraica más amplia en términos de módulos, nuestra versión algebraica de haces vectoriales.

Sea \mathcal{E} un módulo proyectivo finitamente generado sobre \mathcal{A} . Una *estructura hermítica* sobre \mathcal{E} es una aplicación sesquilineal $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{A}$ que satisface

1. $\langle \zeta a, \eta b \rangle = a^* \langle \zeta, \eta \rangle b$, para todo $\zeta, \eta \in \mathcal{E}$ y $a, b \in \mathcal{A}$.
2. $\langle \zeta, \zeta \rangle \geq 0$, es decir, es un elemento positivo de \mathcal{A} .
3. \mathcal{E} es auto-dual respecto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Escribiendo $\mathcal{E} = p\mathcal{A}^N$, con $p = p^2 = p^* \in M_N(\mathcal{A})$ un proyector, tenemos que

$$\langle \zeta, \eta \rangle = \sum_i \zeta_i^* \eta_i \in \mathcal{A}, \quad \zeta = (\zeta_i), \eta = (\eta_i) \in \mathcal{E}, \quad (4.24)$$

es una posible estructura hermítica para \mathcal{E} .

Una *conexión* sobre un \mathcal{A} -módulo \mathcal{E} es un mapa \mathbb{C} -lineal

$$\nabla : \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{A}} \Omega_D^p \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{A}} \Omega_D^{p+1} \mathcal{A}, \quad (4.25)$$

que satisface la regla de Leibniz

$$\nabla(\omega\rho) = (\nabla\omega)\rho + (-1)^p\omega d\rho, \quad \forall\omega \in \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{A}} \Omega_D^p\mathcal{A}, \rho \in \Omega_D\mathcal{A}. \quad (4.26)$$

Una conexión está completamente determinada por su restricción $\nabla : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{A}} \Omega_D^1\mathcal{A}$, que satisface

$$\nabla(\eta a) = (\nabla\eta)a + \eta \otimes_{\mathcal{A}} da, \quad \eta \in \mathcal{E} \ a \in \mathcal{A}.$$

La composición $\nabla^2 = \nabla \circ \nabla : \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{A}} \Omega_D^p\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{A}} \Omega_D^{p+2}\mathcal{A}$ es un mapa $\Omega_D\mathcal{A}$ -lineal [15]. Su restricción a \mathcal{E} es la *curvatura de la conexión* $F : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{A}} \Omega_D^2\mathcal{A}$. La curvatura es \mathcal{A} -lineal (es decir, $F(\sigma a) = F(\sigma)a$, $\sigma \in \mathcal{E}$, $a \in \mathcal{A}$) y satisface

$$\nabla^2(\sigma \otimes_{\mathcal{A}} \rho) = F(\sigma)\rho, \quad \forall\sigma \in \mathcal{E}, \rho \in \Omega_D\mathcal{A}. \quad (4.27)$$

Todo módulo proyectivo tiene una conexión. Consideremos primero el módulo libre $\mathcal{E} = \mathbb{C}^N \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{A} \simeq \mathcal{A}^N$. En este caso podemos hacer una identificación natural $\mathbb{C}^N \otimes \Omega_D\mathcal{A} \simeq (\Omega_D\mathcal{A})^N$. Una conexión sobre este espacio sería

$$\nabla_0 = id \otimes d : \mathbb{C}^N \otimes_{\mathbb{C}} \Omega_D^p\mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}^N \otimes_{\mathbb{C}} \Omega_D^{p+1}\mathcal{A}. \quad (4.28)$$

Si pensamos que la conexión actúa sobre $(\Omega_D\mathcal{A})^N$ entonces podemos escribir $\nabla_0 = (d, d, \dots, d)$, N veces.

Si tomamos ahora un módulo proyectivo \mathcal{E} de forma tal que $p : \mathcal{A}^N \rightarrow \mathcal{E}$ es la proyección y $\iota : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{A}^N$ es la inclusión, definimos una conexión en \mathcal{E} usando la composición

$$\nabla_0 : \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{A}} \Omega_D^p\mathcal{A} \xrightarrow{\iota} \mathbb{C}^N \otimes_{\mathbb{C}} \Omega_D^p\mathcal{A} \xrightarrow{id \otimes d} \mathbb{C}^N \otimes_{\mathbb{C}} \Omega_D^{p+1}\mathcal{A} \xrightarrow{p} \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{A}} \Omega_D^{p+1}\mathcal{A}, \quad (4.29)$$

extendiendo naturalmente ι , p a las formas con valores en \mathcal{E} . La conexión definida por (4.29) se denomina *conexión Grassmaniana*. Informalmente podemos escribirla $\nabla_0 = pd$.

Decimos que una conexión es *compatible con la métrica* si $\langle \zeta, \nabla\eta \rangle - \langle \nabla\zeta, \eta \rangle = d\langle \zeta, \eta \rangle$. Se puede mostrar que dos conexiones compatibles ∇_1, ∇_2 sobre \mathcal{E} sólo difieren en un elemento $\Gamma = \nabla_1 - \nabla_2 \in Hom_{\mathcal{A}}(\mathcal{E}, \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{A}} \Omega_D^1\mathcal{A})$ [5, 15]. Con esto en mente podemos escribir toda conexión como

$$\nabla = pd + A, \quad (4.30)$$

donde A es un elemento de $Hom_{\mathcal{A}}(\mathcal{E}, \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{A}} \Omega_D^1\mathcal{A})$, que puede verse como un elemento de $M_N(\mathcal{A}) \otimes_{\mathcal{A}} \Omega_D^1\mathcal{A}$ tal que $A = Ap = pA = pAp$. Esta matriz A de 1-formas es llamada *potencial gauge* de la conexión ∇ . La curvatura puede calcularse explícitamente

$$F = pdA + A^2 + pdpdp. \quad (4.31)$$

Con esta caracterización, notamos que una conexión será compatible con la métrica de la ecuación (4.24) si A es autoadjunto.

Llamamos $C(\mathcal{E})$ el espacio afín de conexiones compatibles modelado sobre $End_{\mathcal{A}}\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{A}} \Omega_D^1 \mathcal{A}$. El grupo de automorfismos unitarios de \mathcal{E} , $\mathcal{U}(\mathcal{E})$, actúa por conjugación en $C(\mathcal{E})$

$$\gamma_u(\nabla) = u\nabla u^*, \quad \forall u \in \mathcal{U}(\mathcal{E}), \nabla \in C(\mathcal{E}).$$

De esta forma, el potencial gauge y la curvatura se transforman de la manera usual

$$(u, A) \mapsto A^u := u(pd + A)u^*, \quad (4.32a)$$

$$(u, F) \mapsto F^u := uFu^*, \quad \forall u \in \mathcal{U}(\mathcal{E}). \quad (4.32b)$$

Es posible construir un producto interno sobre $End_{\mathcal{A}}\mathcal{E}$ usando la estructura hermítica de \mathcal{E} junto con la traza usual de matrices [15]. Combinando este producto con el producto interno definido para $\Omega_D^2 \mathcal{A}$ en (4.22), obtenemos un producto interno natural $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ para $End_{\mathcal{A}}\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{A}} \Omega_D^2 \mathcal{A}$. Dado que la curvatura pertenece a este espacio, podemos definir la *acción de Yang-Mills* para la conexión ∇ :

$$YM(\nabla) = \langle F, F \rangle_2. \quad (4.33)$$

Por construcción, este funcional es invariante bajo las transformaciones gauge definidas en (4.32). Vale la pena notar que si $\mathcal{E} = \mathcal{A}$, la construcción de esta sección corresponde a una teoría gauge abeliana.

4.4. Teorías gauge algebraicas

Posiblemente la mejor manera de entender la idea básica de las teorías gauge en geometría no conmutativa sea introduciendo un ejemplo sencillo, tomado de [5]. Después de esto daremos las pautas de la construcción general.

4.4.1. Teorías gauge en un espacio de dos puntos

Si consideramos un espacio de dos puntos $X = \{a, b\}$, el álgebra de funciones continuas es $\mathcal{A} := C(X) = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$. Para la tripla espectral tomamos $\mathcal{H} = \mathcal{H}_a \oplus \mathcal{H}_b$, con $dim(\mathcal{H}_x) < \infty$, $x = a, b$, de forma tal que la representación sea

$$f \in \mathcal{A} \mapsto \begin{pmatrix} f(a)\mathbb{I}_{\mathcal{H}_a} & 0 \\ 0 & f(b)\mathbb{I}_{\mathcal{H}_b} \end{pmatrix}. \quad (4.34)$$

En el desarrollo posterior identificaremos $f(x)\mathbb{I} \leftrightarrow f(x)$ y para el operador de Dirac usaremos la notación

$$D = \begin{pmatrix} D_{aa} & D_{ab} \\ D_{ba} & D_{bb} \end{pmatrix}.$$

Dado que los términos diagonales D_{xx} conmutan con la representación de \mathcal{A} y lo que nos importa del operador de Dirac son principalmente sus conmutadores, podemos fijar $D_{xx} = 0$, $x = a, b$, sin pérdida de generalidad. Además, como D debe ser autoadjunto, $D_{ab} = D_{ba}^*$. Con todo esto podemos resumir nuestra tripla espectral como

$$\mathcal{A} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}, \quad \mathcal{H} = \mathcal{H}_a \oplus \mathcal{H}_b, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & M^* \\ M & 0 \end{pmatrix}, \quad M \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_a, \mathcal{H}_b). \quad (4.35)$$

Ahora, si $f \in \mathcal{A}$, su conmutador con el operador de Dirac es fácil de calcular

$$[D, f] = (f(b) - f(a)) \begin{pmatrix} 0 & M^* \\ -M & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.36)$$

y su norma será $\|[D, f]\| = |f(b) - f(a)|\lambda$, donde λ es el valor propio máximo de la matriz $|M| = \sqrt{MM^*}$. Por lo tanto la distancia no conmutativa entre los dos puntos es

$$d(a, b) = \sup\{|f(a) - f(b)|; \|[D, f]\| \leq 1\} = \frac{1}{\lambda}.$$

Recordamos que el espacio de 1-formas $\Omega_D^1 \mathcal{A}$ lo podemos identificar con el kernel de $m : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$, $m(f \otimes g) = fg$. Por lo tanto en nuestro ejemplo de dos puntos podemos identificarlas con funciones sobre $X \times X$ que se anulan en la diagonal. Será entonces un espacio vectorial de dimensión 2. Si definimos una función $e(a) = 1$, $e(b) = 0$, notamos que una base para $\Omega_D^1 \mathcal{A}$ es

$$ede, \quad (1 - e)d(1 - e) = -(1 - e)de, \quad (4.37)$$

ya que $d1 = 0$. Si identificamos los elementos de \mathcal{A} con su representación en \mathcal{A} tenemos

$$\begin{aligned} ede = e[D, e] &= \begin{pmatrix} 0 & -M^* \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ (1 - e)de = (1 - e)[D, e] &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ M & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Para calcular el diferencial de los elementos de \mathcal{A} basta notar que $f = f(a)e + f(b)(1 - e)$, de tal forma que

$$df = (\Delta f)ede + (\Delta f)(1 - e)de = (\Delta f)de, \quad \Delta f = f(a) - f(b). \quad (4.38)$$

Como ya vimos en la sección 2.3, un módulo proyectivo será de la forma $\mathcal{E} = p\mathcal{A}^N$, donde p es un proyector en $M_N(\mathcal{A})$. Salvo transformaciones unitarias, podemos escribir una forma genérica para p

$$p = \text{diag}(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_m, \underbrace{e, \dots, e}_{N-m}), \quad (4.39)$$

con $m \leq N$. Podemos pensar en este módulo como N copias de \mathbb{C} sobre el punto a y m copias de \mathbb{C} sobre b . En otras palabras, $\mathcal{E} \simeq \mathbb{C}^N \oplus \mathbb{C}^m$. Si $N = m$ tenemos que el módulo es trivial.

Si $\mathcal{E} = \mathcal{A}$, los potenciales vectoriales son elementos autoadjuntos de $\Omega_D^1 \mathcal{A}$. Por lo tanto cada uno estará determinado por un número complejo Φ tal que

$$V = \begin{pmatrix} 0 & \bar{\Phi}M^* \\ \Phi M & 0 \end{pmatrix}.$$

Notamos que $V = -\bar{\Phi}ede + \Phi(1-e)de$. Por lo tanto su curvatura será

$$dV + V^2 = -(\bar{\Phi} + \Phi + |\Phi|^2)dede. \quad (4.40)$$

Dado que estamos trabajando con un álgebra de dimensión finita, las trazas se pueden tomar simplemente como las matriciales [5]. Por lo tanto

$$\begin{aligned} YM(V) &:= \text{tr}(dV + V^2)^2 = 2(\bar{\Phi} + \Phi + |\Phi|^2)^2 \text{tr}(M^*M)^2 \\ &= 2(|\Phi + 1|^2 - 1)^2 \text{tr}(M^*M)^2. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Físicamente, la dinámica de un sistema está dada por la minimización del funcional de Yang-Mills. En el cálculo anterior vemos que el mínimo es degenerado, es decir, si $\Phi = e^{i\theta} - 1$, con $\theta \in \mathbb{R}$ arbitrario, tenemos que $YM(V) = 0$. Por lo tanto, dada la forma no conmutativa del espacio, se presenta un comportamiento similar al del campo de Higgs (Sección 4.1.2). Este hecho se ha usado para interpretar geoméricamente la aparición de la masa en el Modelo Standard de partículas [5].

Otro módulo de interés es $\mathcal{E} = f\mathcal{A}^2$, donde

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix}. \quad (4.42)$$

Esto corresponde a un haz no trivial donde la fibra sobre a es de dimensión 2 y la fibra sobre b de dimensión 1. Si $\nabla_0 \xi = fd\xi$ es la conexión Grassmaniana para este módulo, una conexión compatible arbitraria será de la forma

$$\nabla \xi = \nabla_0 \xi + \rho \xi, \quad (4.43)$$

donde $\rho = \rho^* \in M_2(\Omega_D^1 \mathcal{A})$ es tal que $f\rho = \rho f = \rho$. Con estas condiciones es fácil mostrar que

$$\rho = \begin{pmatrix} -\bar{\Phi}_1 e de + \Phi_1 (1-e) de & \Phi_2 (ede)^* \\ \bar{\Phi}_2 e de & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.44)$$

donde $\Phi_1, \Phi_2 \in \mathbb{C}$. Usando que la curvatura está dada por $\theta = fdfdf + fd\rho f + \rho^2$, es fácil caracterizar el funcional de Yang-Mills en términos de Φ_1 y Φ_2 :

$$YM(\nabla) = (1 + 2(1 - (|\Phi_1 + 1|^2 + |\Phi_2|^2))^2) tr(M^* M)^2. \quad (4.45)$$

En este caso los valores que minimizan el funcional pertenecen a una 3-esfera

$$\{(\Phi_1, \Phi_2) \in \mathbb{C}^2; |\Phi_1 + 1|^2 + |\Phi_2|^2 = 1\}.$$

Si interpretamos $YM(\nabla)$ como la integral de la curvatura dada por la conexión, vemos que ésta nunca será cero. Por lo tanto el módulo no es plano.

En el capítulo 5, cuando estudiemos teorías gauge abelianas sobre la esfera de Podleś, tendremos que el funcional de Yang-Mills será cero para varios potenciales, es decir, las teorías son estáticas.

4.4.2. Construcción general

La construcción anterior para un espacio de dos puntos nos permite entender las partes básicas de la formulación gauge en geometría no conmutativa. Esta “receta” está motivada por los modelos clásicos usados desde los años 1950’s para organizar las observaciones que hoy conforman el Modelo Estándar de partículas elementales [5]. Podemos entonces generalizar el procedimiento a cualquier “espacio no conmutativo”:

1. Dada una tripla espectral $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$, caracterizamos primero el espacio de formas $\Omega_D \mathcal{A}$, especialmente las 1-formas y las 2-formas.
2. Construimos un módulo proyectivo finitamente generado sobre \mathcal{A} , $\mathcal{E} = p\mathcal{A}^N$, donde p es un proyector del álgebra $M_N(\mathcal{A})$. Este módulo representará el haz vectorial de interés, como vimos antes. Los elementos de \mathcal{E} (que corresponden a secciones del haz vectorial) representan las “partículas” cuya dinámica queremos determinar.
3. Fijamos una conexión para \mathcal{E} . La forma más sencilla de lograr esto es usar la conexión Grassmaniana definida en la ecuación (4.29) y un potencial vectorial construido con elementos de $\Omega_D^1 \mathcal{A}$. Físicamente, esto corresponde a determinar la interacción de las partículas con los campos de interés.

4. Obtenemos la curvatura de la conexión. A partir de ella calculamos el funcional de Yang-Mills y, si es posible, los valores que lo minimizan. Los valores mínimos corresponden a la dinámica física de las partículas.

Las teorías gauge no conmutativas más estudiadas se construyen usualmente sobre espacios no conmutativos obtenidos a partir de álgebras de matrices con entradas en funciones sobre variedades clásicas [6]. En el siguiente capítulo estudiaremos teorías gauge abelianas sobre una tripla espectral de la esfera de Podleś usando la construcción de este capítulo.

Capítulo 5

Esferas cuánticas de Podleś

Siguiendo la filosofía de la geometría no conmutativa, los espacios son descritos por sendas C^* -álgebras. Dado que conocemos varios resultados provenientes de espacios “clásicos”, es decir, que vienen de C^* -álgebras conmutativas, es conveniente encontrar maneras de trasladar esta intuición geométrica al difuso mundo algebraico propio de los espacios no conmutativos.

Una manera ingeniosa de lograr esto es deformar espacios conocidos. “Deformación” en este contexto no debe entenderse como homeomorfismos u homotopías. Estas operaciones modificarán el álgebra con la cual trabajamos, pero obtendremos al final otro espacio topológico con un álgebra de funciones conmutativa. Para obtener un espacio no conmutativo es necesario recurrir a cambios drásticos, teniendo que abandonar en la mayoría de los casos la noción de “punto” en el espacio [13].

En este trabajo centraremos nuestra atención en las esferas de Podleś [23] siguiendo el tratamiento de D’Andrea y Dąbrowski [9]

5.1. Tipos de esferas cuánticas

Comenzamos notando, en el espíritu del teorema de Stone-Weierstrass, que el álgebra de funciones (continuas complejas) sobre la esfera clásica $C(S^2)$ puede entenderse como la C^* -álgebra universal generada por tres elementos autoadjuntos x, y, z que conmutan entre ellos, sujetos a la relación $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ [21]. Esta definición en términos de generadores es bastante útil ya que nos permite tener cierto control sobre toda el álgebra, que es de dimensión infinita.

Tomando en cuenta lo anterior, estaremos interesados en C^* -álgebras no conmutativas obtenidas a partir de cambios en las relaciones de conmutación de los generadores de $C(S^2)$. Generalmente estas modificaciones estarán dadas por unos cuantos parámetros, obteniendo la esfera clásica en cierto límite.

Como es de esperarse, existen diferentes formas de deformar o “cuantizar” $C(S^2)$. Los enfoques dependen de cuál es la noción de esfera para el autor y cómo se mantiene su identidad después de la deformación. Como ya ha sido señalado por ejemplo en [7], existe todo un “jardín” de esferas cuánticas. Entre ellas, la esfera de Podleś es una de las esferas deformadas más estudiadas [8, 9, 23, 25].

5.2. Esferas de Podleś

Para $q \in \mathbb{R}$, $0 < q < 1$, la $*$ -álgebra de polinomios $\mathcal{A}(S_q^2)$ es generada por a , a^* y $b = b^*$ con relaciones

$$ba = q^2 ab, \quad a^* a + b^2 = 1, \quad q^4 a a^* + b^2 = q^4. \quad (5.1)$$

Una base para $\mathcal{A}(S_q^2)$ como espacio vectorial es $\{a^n b^m, (a^*)^{n+1} b^m; n, m, \in \mathbb{N}\}$. Denotamos por $C(S_q^2)$ la C^* -álgebra universal generada por $\mathcal{A}(S_q^2)$.

Las relaciones (5.1) tienen sentido para cualquier $q \in \mathbb{R}$. Sin embargo, notamos que la asignación $a \mapsto a^*$, $b \mapsto q^{-2}b$ se puede extender a un isomorfismo entre $\mathcal{A}(S_q^2)$ y $\mathcal{A}(S_{q^{-1}}^2)$. También tenemos un isomorfismo trivial entre $\mathcal{A}(S_q^2)$ y $\mathcal{A}(S_{-q}^2)$ ya que todo está determinado por q^2 . Esto nos permite restringir q al intervalo $[0, 1]$ sin pérdida de generalidad.

Los dos casos límites son de interés. Si $q = 1$, las relaciones en (5.1) corresponden a las del álgebra de polinomios en la esfera clásica S^2 . Esto queda más claro si escribimos $a = x + iy$, con x, y autoadjuntos, y $b = z$. Su clausura corresponderá entonces a $C(S^2)$.

5.2.1. El disco no conmutativo \mathcal{D}_q

Si $q = 0$ la tercera relación implica $b = 0$. Por lo tanto $\mathcal{A}(S_0^2)$ está generada sólo por a y a^* sujetos a la relación $a^* a = 1$. Podemos entender mejor este caso con un representación concreta (para más detalles, ver [28] p. 68).

Si $\{|n\rangle\}_{n \in \mathbb{N}}$ es la base ortonormal hilbertiana canónica de $\ell^2(\mathbb{N})$ (el espacio de Hilbert de sucesiones de cuadrado sumable, [17]) consideramos el operador lineal continuo $w \in$

$\mathcal{L}(\ell^2(\mathbb{N}))$ definido por $w(|n\rangle) = |n+1\rangle$, $n \in \mathbb{N}$. Es fácil ver que $w^*(|n\rangle) = |n-1\rangle$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $w^*(|0\rangle) = 0$. Por lo tanto $w^*w = 1$. La C^* -álgebra unitaria separable generada por w y w^* se denomina *álgebra de Toeplitz* y se denota \mathcal{T} . La representación que buscamos es simplemente identificar $\mathcal{T} \simeq C(S_0^2)$.

El resultado anterior puede ser interpretado geoméricamente; esto será de gran utilidad más adelante para entender la idea de “esfera cuántica” para Podleś. Denotamos por \mathcal{K} los operadores compactos de $\ell^2(\mathbb{N})$. Dado que todos los operadores de rango finito pueden generarse con w y por lo tanto están en \mathcal{T} , tenemos que \mathcal{K} es un $*$ -ideal de \mathcal{T} . Se puede mostrar que $\mathcal{T}/\mathcal{K} \simeq C(S^1)$ [28]. Esto nos permite definir la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{T} \xrightarrow{\sigma} C(S^1) \rightarrow 0, \quad (5.2)$$

donde $\sigma(w)(\theta) = e^{i\theta}$, extendiendo luego por linealidad y continuidad a un homomorfismo de C^* -álgebras. Esta sucesión exacta se puede identificar con

$$0 \rightarrow C_0(\text{disco abierto}) \rightarrow C(\text{disco cerrado}) \rightarrow C(S^1) \rightarrow 0.$$

Interpretamos $C(S_0^2)$ como el álgebra de funciones en un disco no conmutativo con frontera S^1 , σ la “restricción” a la frontera y \mathcal{K} las funciones continuas en el disco que se anulan en la frontera. Notamos este disco \mathcal{D}_q , de forma tal que $C(\mathcal{D}_q) = \mathcal{T}$.

5.2.2. Representación ecuatorial de $C(S_q^2)$

A partir de ahora asumiremos $0 < q < 1$, a menos que se diga lo contrario. Nuevamente denotamos $\{|n\rangle\}_{n \in \mathbb{N}}$ la base ortonormal hilbertiana canónica de $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$.

Definimos $\mu := \mu_+ \oplus \mu_- : C(S_q^2) \rightarrow \mathcal{L}(\ell^2(\mathbb{Z}_+) \oplus \ell^2(\mathbb{Z}_+))$ a partir de

$$\mu_{\pm}(a) |n\rangle = \sqrt{1 - q^{4n}} |n+1\rangle, \quad \mu_{\pm}(b) |n\rangle = \pm q^{2n} |n\rangle. \quad (5.3)$$

Las representaciones μ_+ , μ_- son irreducibles por la acción de $\mu_{\pm}(a)$ y $\mu_{\pm}(a^*)$ en $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{Z}_+) \oplus \ell^2(\mathbb{Z}_+) \simeq \ell^2(\mathbb{Z}_+) \otimes \mathbb{C}^2$. Sin embargo no son fieles. Si los fueran, $\mu_{\pm}(C(S_q^2)) \simeq C(S_q^2)$. Sin embargo, basta notar que $\mu_+(b)$ tiene espectro positivo y $\mu_-(b)$ tiene espectro negativo. Por lo tanto $\mu_{\pm}(b)$ no tiene el mismo espectro que b . Concluimos entonces $\mu_{\pm}(C(S_q^2)) \not\simeq C(S_q^2)$.

Podemos verificar que $\mu_{\pm}(C(S_q^2))$ es isomorfa a \mathcal{T} . Basta notar que $\mu_{\pm}(a^*a) = 1 - \mu_{\pm}(b)^2$ es un operador hermítico acotado definido positivo en \mathcal{H} . Por lo tanto existe un operador

$T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ hermítico definido positivo tal que $T^2 = \mu_{\pm}(a^*a)$ [17]. Más aún, $T \in \mu_{\pm}(C(S_q^2))$ por el teorema espectral. Usando esto es fácil notar que $w = \mu_{\pm}(a)T^{-1} \in \mu_{\pm}(C(S_q^2))$, donde $w|n\rangle = |n+1\rangle$. Usando un argumento similar para mostrar que $\mu_{\pm}(a), \mu_{\pm}(b) \in \mathcal{T}$, podemos concluir $\mathcal{T} \simeq \mu_{\pm}(C(S_q^2))$. Interpretamos entonces $C(S_q^2)/\ker(\mu_+)$ y $C(S_q^2)/\ker(\mu_-)$ como un par de discos no conmutativos, que tomaremos como “hemisferios” cerrados de nuestra esfera.

Dado que $\mu_+(\mathcal{A}(S_q^2)) \simeq \mu_-(\mathcal{A}(S_q^2))$, identificamos ambas álgebras y definimos $\mathcal{A}(\mathcal{D}_q) := \mu_+(\mathcal{A}(S_q^2)) = \mu_-(\mathcal{A}(S_q^2))$, es decir, como la $*$ -álgebra de polinomios generados por $\mu_{\pm}(a)$ y $\mu_{\pm}(b)$. A pesar de que

$$C(S_q^2)/\ker(\mu_{\pm}) \simeq C(\mathcal{D}_q) = \mathcal{T} \simeq C(S_0^2),$$

tenemos las $*$ -álgebras polinomiales $\mathcal{A}(\mathcal{D}_q)$ y $\mathcal{A}(S_0^2)$ no son isomorfas, ya que los elementos que las generan (w en el caso de $\mathcal{A}(S_0^2)$ y $\mu_{\pm}(a), \mu_{\pm}(b)$ en el caso de $\mathcal{A}(\mathcal{D}_q)$) están relacionados por procesos de límite (usando la completitud de la C^* -álgebra \mathcal{T} y el teorema espectral).

Por otra parte, $\mu = \mu_+ \oplus \mu_-$ sí es una representación fiel. Esto nos permite identificar $C(S_q^2)$ con $\mu(C(S_q^2))$. A través de la asignación $f \mapsto (\mu_+(f), \mu_-(f))$ definimos el isomorfismo [25]

$$C(S_q^2) \simeq \{(x, y) \in C(\mathcal{D}_q) \oplus C(\mathcal{D}_q); \sigma(x) = \sigma(y)\}. \quad (5.4)$$

De esta forma un elemento de $C(S_q^2)$, visto como una “función” continua sobre S_q^2 , se puede representar por un par de “funciones” en los hemisferios \mathcal{D}_q que coinciden en la frontera (el ecuador S^1). En el caso extremo $q = 0$, la esfera degenera en un solo disco dado que $C(S_0^2) \simeq C(\mathcal{D}_q) = \mathcal{T}$.

La construcción anterior nos da entonces dos esferas cuánticas distintas: el disco degenerado si $q = 0$ y la esfera ecuatorial para $0 < q < 1$ (las esferas S_q^2 y $S_{q'}^2$, con $0 < q, q' < 1$ son isomorfas). Es natural que la ecuación (5.2) definida para \mathcal{D}_q tenga un análogo para S_q^2 . En efecto, tenemos la siguiente sucesión exacta

$$0 \rightarrow \mathcal{K} \oplus \mathcal{K} \rightarrow C(S_q^2) \xrightarrow{\rho} C(S^1) \rightarrow 0,$$

donde $\rho : C(S_q^2) \rightarrow C(S^1)$ está definido por $\rho(x, y) = \sigma(x) = \sigma(y)$, para $x, y \in C(\mathcal{D}_q)$ (es decir, la extensión de $\rho(a)(\theta) = e^{i\theta}$, $\rho(b) = 0$).

5.2.3. Representación espinorial de $C(S_q^2)$

Como vemos, la representación ecuatorial es muy sencilla pero no se involucra demasiado con la geometría de la esfera. Podemos solucionar esto parcialmente buscando un representación

que use por ejemplo la estructura de espín de S^2 . Esta representación, propuesta en [8], resulta ser mucho más rica en detalles.

Si $L^2(S^2)$ es el espacio de Hilbert de los espinores clásicos de cuadrado integrable sobre S^2 (ver capítulo 3), definimos $\mathcal{H} = L^2(S^2) \otimes \mathbb{C}^2 = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-$. Una base ortonormal para este espacio son los espinores armónicos $\{|l, m\rangle_+, |l, m\rangle_-\}$ etiquetados por $l \in \mathbb{N} + \frac{1}{2}$ y $m = -l, -l+1, \dots, l-1, l$. Las *representaciones quirales* son las representaciones fieles e irreducibles $\pi_\pm : C(S^2_q) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_\pm)$ definidas por

$$\begin{aligned} \pi_\pm(a) |l, m\rangle_\pm &:= q^{m-l-\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{[l+m+1][l+m+2]}}{[2l+2]} |l+1, m+1\rangle_\pm \\ &\quad - q^{m+l+\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{[l-m-1][l-m]}}{[2l]} |l-1, m+1\rangle_\pm \\ &\quad \pm \frac{(1+q^2)q^{m-\frac{1}{2}}}{[2l][2l+2]} \sqrt{[l+m+1][l-m]} |l, m+1\rangle_\pm, \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned} \pi_\pm(b) |l, m\rangle_\pm &:= -q^{m+1} \frac{\sqrt{[l+m+1][l-m+1]}}{[2l+2]} |l+1, m\rangle_\pm \\ &\quad - q^{m+1} \frac{\sqrt{[l+m][l-m]}}{[2l]} |l-1, m\rangle_\pm \\ &\quad \pm \frac{[l-m+1][l+m] - q^2[l-m][l+m+1]}{[2l][2l+2]} |l, m\rangle_\pm, \end{aligned} \quad (5.6)$$

donde $[x] := (q^x - q^{-x})/(q - q^{-1})$ es el q -análogo de $x \in \mathbb{C}$. La *representación espinorial* π sobre \mathcal{H} es la suma directa $\pi := \pi_+ \oplus \pi_-$. Dado que en el límite $q \rightarrow 1$ tenemos $[x] \rightarrow x$, recobramos la estructura de $C(S^2)$ -módulo del haz de espín de S^2 [8].

Si $q = 0$, la anterior representación todavía tiene sentido. Dado que $C(S^2_0) = \mathcal{T}$, en ese caso $\pi_\pm(w) |l, m\rangle = |l+1, m+1\rangle$, que coincide con μ_\pm (también en el límite $q = 0$) en el subespacio generado por la restricción $l - m = k$, con k fijo.

5.3. Cálculo espectral para la esfera de Podleś

Ya definidas nuestras representaciones podemos pasar a la geometría. Como vimos en el capítulo 3, toda la información geométrica está codificada en triplas espectrales, siendo el operador de Dirac la base para los análogos del cálculo diferencial y la métrica.

5.3.1. Álgebra de funciones suaves: A^∞

Si w es el generador del álgebra de Toeplitz \mathcal{T} definimos A^∞ como el generado por los elementos de la forma

$$f = \sum_{n \in \mathbb{N}} (f_n w^n + f_{-n-1} (w^*)^{n+1}) + \sum_{j,k \in \mathbb{N}} f_{jk} w^j (1 - ww^*) (w^*)^k \quad (5.7)$$

donde $\{f_n\} \in \mathcal{S}(\mathbb{Z})$ y $\{f_{jk}\} \in \mathcal{S}$, si $\mathcal{S}(\mathbb{Z})$ son las sucesiones que decaen rápidamente ($(a_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{S}(\mathbb{Z})$ si $\lim_{n \rightarrow \pm\infty} |n|^k a_n = 0, \forall k \in \mathbb{N}$) y \mathcal{S} las matrices de decaimiento rápido en $\ell^2(\mathbb{N})$ ($(a_{j,k})_{j,k \in \mathbb{N}} \in \mathcal{S}$ si $\lim_{j,k \rightarrow \infty} j^n k^m a_{j,k} = 0, \forall n, m, \in \mathbb{N}$). Claramente $A^\infty \subset \mathcal{T}$ y no depende de q .

Es fácil ver que A^∞ es una *-álgebra con unidad y $\sigma : A^\infty \rightarrow C^\infty(S^1)$ definido por

$$\sigma(f)(\theta) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n e^{in\theta}$$

es un homomorfismo sobreyectivo de *-álgebras (identificando $\mathcal{S}(\mathbb{Z}) \simeq C^\infty(S^1)$ usando series de Fourier). Notamos que σ es simplemente la restricción a A^∞ del σ usado en (5.2).

El *-ideal bilateral $\ker(\sigma)$ es isomorfo a \mathcal{S} . El isomorfismo se sigue de la igualdad

$$[w^j (1 - ww^*) (w^*)^k] [w^{j'} (1 - ww^*) (w^*)^{k'}] = \delta_{j'k} w^j (1 - ww^*) (w^*)^{k'}$$

o simplemente de la representación de Fock

$$f |k\rangle = \sum_{j \in \mathbb{Z}_+} f_{j-1, k-1} |j\rangle,$$

donde $f = \sum_{j,k \in \mathbb{N}} f_{jk} w^j (1 - ww^*) (w^*)^k \in \ker(\sigma)$ [9]. Tenemos entonces la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \mathcal{S} \rightarrow A^\infty \xrightarrow{\sigma} C^\infty(S^1) \rightarrow 0. \quad (5.8)$$

Usando una analogía similar a la de (5.2), la anterior sucesión nos permite llamar a A^∞ el álgebra de elementos “suaves” de \mathcal{D}_q . La analogía se fortalece notando que A^∞ es una pre- C^* -álgebra de Fréchet [9] que contiene las álgebras polinomiales $\mathcal{A}(\mathcal{D}_q)$ (generada por $\mu_\pm(a), \mu_\pm(b)$) y $\mathcal{A}(S_0^2)$ (generada por w).

Este último hecho es fácilmente verificable. Dado que $w \in A^\infty$, es claro que $\mathcal{A}(S_0^2) \subset A^\infty \subset \mathcal{T}$ y A^∞ es densa en \mathcal{T} . Además

$$q^{2N} = \sum_{j,k \in \mathbb{N}} \delta_{jk} q^{2k} w^{k+1} (1 - ww^*) (w^*)^{k+1}$$

nos muestra que $\mu_\pm(b) \in A^\infty$. Como A^∞ es cerrada bajo cálculo funcional holomorfo (por ser todos operadores acotados y ser cerrada en \mathcal{T}), tenemos que $\sqrt{1 - q^{4N}} \in A^\infty$. Dado que $\mu_\pm(a) = w\sqrt{1 - q^{4N}}$ tenemos $\mathcal{A}(\mathcal{D}_q) \subset A^\infty$.

Definimos entonces las funciones “suaves” sobre S_q^2

$$C^\infty(S_q^2) := \{(x, y) \in A^\infty \oplus A^\infty; \sigma(x) = \sigma(y)\} \subset C(S_q^2). \quad (5.9)$$

Esta álgebra es independiente de q y satisface la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \mathcal{S} \oplus \mathcal{S} \rightarrow C^\infty(S_q^2) \rightarrow C^\infty(S^1) \rightarrow 0.$$

5.3.2. Triplas espectrales para A^∞

Trabajaremos con dos triplas espectrales para A^∞ simultáneamente, con representaciones en $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$ y $\mathcal{H}_+ \simeq \bigoplus_{l+1/2 \in \mathbb{Z}_+} \mathbb{C}^{2l+1}$ respectivamente. Usamos las bases canónicas $\{|n\rangle; n \in \mathbb{Z}_+\}$ en $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$ y $\{|l, m\rangle; l+1/2 \in \mathbb{Z}_+, m = -l, -l+1, \dots, l\}$ en \mathcal{H}_+ .

Nuevamente, si w es el generador del álgebra de Toeplitz (y por lo tanto de A^∞), las representaciones estarán dadas por

$$w |n\rangle = |n+1\rangle, \quad w |l, m\rangle = |l+1, m+1\rangle. \quad (5.10)$$

No especificaremos el espacio de Hilbert a menos que el contexto no lo deje claro. Tomaremos

$$N |n\rangle = n |n\rangle, \quad |D| |l, m\rangle = \left(l + \frac{1}{2}\right) |l, m\rangle \quad (5.11)$$

como los operadores de Dirac respectivos para $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$ y \mathcal{H}_+ . Los operadores de Dirac serán entonces “diagonales”, autoadjuntos y necesariamente no acotados.

Un cálculo directo nos muestra que $[N, w] = w$ y $[|D|, w] = w$. Por lo tanto A^∞ es invariante bajo las derivaciones $[N, \cdot]$ $[|D|, \cdot]$. En particular, los conmutadores de los elementos de A^∞ con N y $|D|$ son acotados, como es requerido. Por lo tanto $(A^\infty, \ell^2(\mathbb{Z}_+), N)$ y $(A^\infty, \mathcal{H}_+, |D|)$ son triplas espectrales regulares.

5.3.3. Tripla espectral para la representación ecuatorial de $C(S_q^2)$

Dado que $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{Z}_+) \oplus \ell^2(\mathbb{Z}_+) \simeq \ell^2(\mathbb{Z}_+) \otimes \mathbb{C}^2$, la representación dada en (5.3) se puede escribir como

$$\mu(a) = w\sqrt{1 - q^{4N}} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mu(b) = q^{2N} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (5.12)$$

Basados en la tripla para A^∞ fijamos como operador de Dirac

$$D' = N \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.13a)$$

$$F = \text{sign}(D') = id_{\ell^2(\mathbb{Z}_+)} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad |D'| = N \otimes id_{\mathbb{C}^2}. \quad (5.13b)$$

Recordando que $\mu_\pm(a), \mu_\pm(b) \in A^\infty$, tenemos que $\mu(a), \mu(b) \in A^\infty \oplus A^\infty$, que en $\mathcal{L}(\ell^2(\mathbb{Z}_+) \otimes \mathbb{C}^2) \simeq \mathcal{L}(\ell^2(\mathbb{Z}_+)) \otimes M_2(\mathbb{C})$ se ven como matrices diagonales con entradas en A^∞ . Identificando $\mathcal{A}(S_q^2)$ con su imagen bajo μ tenemos

$$\mathcal{A}(S_q^2) \subset \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\ell^2(\mathbb{Z}_+) \otimes \mathbb{C}^2); x, y \in A^\infty, \sigma(x) = \sigma(y) \right\} =: C^\infty(S_q^2),$$

donde $C^\infty(S_q^2)$ es claramente la misma álgebra definida en (5.9). Podemos reescribir la sucesión exacta (5.8) en este caso como

$$0 \rightarrow \mathcal{S} \oplus \mathcal{S} \rightarrow C^\infty(S_q^2) \xrightarrow{\rho} C^\infty(S^1) \rightarrow 0, \quad (5.14)$$

definiendo nuevamente $\rho\left(\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}\right) = \sigma(x) = \sigma(y)$, $\left(\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \in C^\infty(S_q^2)\right)$. Para los generadores tenemos $\rho(a)(\theta) = e^{i\theta}$ y $\rho(b)(\theta) = 0$.

Podemos mostrar usando esto que $(C^\infty(S_q^2), \ell^2(\mathbb{Z}_+) \otimes \mathbb{C}^2, D')$ es una tripla espectral regular de dimensión 1, a pesar de que la esfera clásica sea de dimensión 2 [9]. Esto es frecuente en triplas espectrales obtenidas por deformación de álgebras conmutativas.

5.3.4. Tripla espectral para la representación espinorial de $C(S_q^2)$

Vamos a trabajar con el álgebra polinomial $\mathcal{A}(S_q^2)$. Para esta representación el espacio de Hilbert es $\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_- \simeq \hat{\mathcal{H}} \otimes \mathbb{C}^2$, donde $\{|l, m\rangle; l + 1/2 \in \mathbb{Z}_+, m = -l, -l + 1, \dots, l\}$, es una base ortonormal de $\hat{\mathcal{H}}$.

Podemos identificar \mathcal{H}_\pm con $\hat{\mathcal{H}}$ a través de la isometría natural $|l, m\rangle_\pm \mapsto |l, m\rangle$. Usando la representación dada por las ecuaciones (5.5) y (5.6) definimos

$$\rho_\pm := \frac{\pi_+ \pm \pi_-}{2} : \mathcal{A}(S_q^2) \rightarrow \mathcal{L}(\hat{\mathcal{H}}). \quad (5.15)$$

Con esto escribimos la representación espinorial $\pi = \pi_+ \oplus \pi_-$ como

$$\pi = \rho_+ \otimes id_{\mathbb{C}^2} + \rho_- \otimes \gamma, \quad \gamma := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (5.16)$$

Podemos calcular explícitamente la representación para los generadores del álgebra polinomial:

$$\begin{aligned} \rho_+(a) |l, m\rangle &= \frac{\sqrt{1 - q^{2(l+m+1)}} \sqrt{1 - q^{2(l+m+2)}}}{1 - q^{4(l+1)}} |l + 1, m + 1\rangle \\ &\quad - \frac{\sqrt{q^{2(l+m)} - q^{4l}} \sqrt{q^{2(l+m+1)} - q^{4l}}}{1 - q^{4l}} |l - 1, m + 1\rangle, \end{aligned} \quad (5.17a)$$

$$\begin{aligned} \rho_+(b) |l, m\rangle &= - \frac{\sqrt{1 - q^{2(l+m+1)}} \sqrt{q^{2(l+m+2)} - q^{4l+6}}}{1 - q^{4(l+1)}} |l + 1, m\rangle \\ &\quad - \frac{\sqrt{1 - q^{2(l+m)}} \sqrt{q^{2(l+m+1)} - q^{4l+2}}}{1 - q^{4l}} |l - 1, m\rangle, \end{aligned} \quad (5.17b)$$

$$\rho_-(a) |l, m\rangle = \frac{(1 - q^4)q^{3l+m}}{(1 - q^{2l})(1 - q^{2l+2})} \sqrt{1 - q^{2(l+m+1)}} \sqrt{1 - q^{2(l-m)}} |l, m + 1\rangle, \quad (5.17c)$$

$$\rho_-(b) |l, m\rangle = \frac{(1 - q^2)q^{2l+1}}{(1 - q^{2l})(1 - q^{2l+2})} \left\{ 1 + q^{4l+2} - (1 + q^2)q^{2(l+m)} \right\} |l, m\rangle. \quad (5.17d)$$

Esta forma de escribir la representación π nos permitirá simplificar los cálculos de las formas diferenciales. El operador de Dirac viene dado simplemente por

$$D = |D| \otimes F, \quad |D| |l, m\rangle = \left(l + \frac{1}{2}\right) |l, m\rangle, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.18)$$

$(\mathcal{A}(S_q^2), \mathcal{H}, D)$ es una tripla espectral regular [9]. Nuevamente, daremos más detalles de esta afirmación en la sección siguiente.

5.4. Formas diferenciales en S_q^2

El cálculo de formas diferenciales (también conocido como *complejo de Connes - de Rahm*) para una tripla espectral dada puede ser bastante complicado [2]. En el caso de nuestras

representaciones podemos calcular algunos casos concretos.

5.4.1. Representación ecuatorial

Es fácil calcular los conmutadores de los generadores de nuestra álgebra en esta representación con el operador de Dirac D' dado en la ecuación (5.13). Para $\mu(a)$ notamos que $[N, w] = w$ y $[N, \sqrt{1 - q^{4N}}] = 0$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} [D', \mu(a)] &= (Nw\sqrt{1 - q^{4N}} - w\sqrt{1 - q^{4N}}N) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= w\sqrt{1 - q^{4N}} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \mu(a)F. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Tenemos además $[D', \mu(a^*)] = -([D', \mu(a)])^* = -\mu(a^*)F$. Para $\mu(b)$ el conmutador depende solo de la parte matricial

$$\begin{aligned} [D', \mu(b)] &= Nq^{2N} \otimes \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= 2Nq^{2N} \otimes \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -2N\mu(b)F. \end{aligned} \quad (5.20)$$

A partir de esto es difícil caracterizar completamente las 1-formas de $C^\infty(S_q^2)$. Sin embargo, si nos restringimos al álgebra polinomial $\mathcal{A}(S_q^2)$, podemos ser más explícitos. Usando

$$\begin{aligned} [D', \mu(a)]\mu(a) &= \mu(a)[D', \mu(a)], & [D', \mu(b)]\mu(b) &= -\mu(b)[D', \mu(b)], \\ \mu(a)F &= F\mu(a), & \mu(b)F &= -F\mu(b), \\ N\mu(a) - \mu(a)N &= \mu(a), & N\mu(b) &= \mu(b)N. \end{aligned}$$

podemos mostrar que

$$[D', \mu(a)]\mu(b) = -\frac{1}{q^2}\mu(b)[D', \mu(a)], \quad (5.21a)$$

$$[D', \mu(b)]\mu(a) = -2\mu(b)[D', \mu(a)] + q^2\mu(a)[D', \mu(b)], \quad (5.21b)$$

con resultados similares para a^* . Dado que una base para $\mathcal{A}(S_q^2)$ es $\{a^n b^m, (a^*)^{n+1} b^m; n, m, \in \mathbb{N}\}$, usando la regla de Leibniz y las relaciones anteriores tenemos que las 1-formas del álgebra polinomial se pueden escribir como

$$\omega = c_1[D', \mu(a)] + c_2[D', \mu(a^*)] + c_3[D', \mu(b)],$$

con $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}^\infty(S_q^2)$. Estos coeficientes c_i en general no pertenecen a $\mathcal{A}(S_q^2)$. Por ejemplo Nq^{2N} no es un elemento del álgebra polinomial; se obtiene a partir de los generadores por un proceso de límite, usando el teorema espectral, por ejemplo.

Dado que $Nq^{2N} = \sum_{j,k \in \mathbb{N}} \delta_{jk} k q^{2k} w^{k+1} (1 - ww^*) (w^*)^{k+1} \in A^\infty$ y $\mu_\pm(a) \in A^\infty$, a partir de (5.19) y (5.20) notamos que $\Omega_D^1 \mathcal{A}(S_q^2) \subset A^\infty \otimes M_2(\mathbb{C})$. Como A^∞ es un álgebra completa (por ser de Fréchet), tenemos en general

$$\Omega_D^1 C(S_q^2) \subset A^\infty \otimes M_2(\mathbb{C}).$$

En [2] se calcula el complejo de Connes - de Rham para una familia de esferas que tiene como límite la que estamos trabajando aquí. Las relaciones de los generadores corresponden a las definidas originalmente por Podleś en [23]

$$\tilde{b}^* = \tilde{b}, \quad \tilde{a}\tilde{a}^* = \tilde{b} - \tilde{b}^2 + c1, \quad (5.22a)$$

$$\tilde{b}\tilde{a} = q^2\tilde{a}\tilde{b}, \quad \tilde{a}^*\tilde{a} = q^2\tilde{b} - q^4 + c1, \quad (5.22b)$$

donde $q, c \in \mathbb{R}$, $|q| < 1$, $c > 0$. Denotaremos esta C^* -álgebra universal por $C(S_{qc}^2)$. Tomando $\mathcal{H}_\pm = \ell^2(\mathbb{N})$, se definen las representaciones $\tilde{\mu}_\pm : C(S_{qc}^2) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_\pm)$ por

$$\tilde{\mu}_\pm(\tilde{b})(e_n) = \lambda_\pm q^{2n} e_n \quad \text{donde} \quad \lambda_\pm = \frac{1}{2} \pm \left(c + \frac{1}{4}\right)^{1/2}, \quad (5.23a)$$

$$\tilde{\mu}_\pm(\tilde{a})(e_n) = c_\pm(n)^{1/2} e_{n+1} \quad \text{donde} \quad c_\pm(n) = \lambda_\pm q^{2n} - (\lambda_\pm q^{2n})^2 + c. \quad (5.23b)$$

En este caso también se puede reconstruir la esfera como dos “hemisferios” no conmutativos identificados en la frontera. Esta familia de esferas cuánticas de cierta forma incluye la que veníamos estudiando. Podemos recuperar las relaciones que definimos inicialmente en (5.1) y la representación (5.3) si consideramos los límites

$$a = \lim_{c \rightarrow \infty} (c^{-1/2}\tilde{a}), \quad b = q^2 \lim_{c \rightarrow \infty} (c^{-1/2}\tilde{b}),$$

haciendo la salvedad que los espacios de Hilbert son un poco distintos ($\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{Z}_+)$ para la representación en (5.3) y $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{N})$ para (5.23)). Usando el operador de Dirac de la ecuación (5.13) y el álgebra polinomial $\mathcal{A}(S_{qc}^2)$ generada por \tilde{a}, \tilde{b} se obtiene una tripla espectral regular $(\mathcal{A}(S_{qc}^2), \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-, D)$ que satisface [2]

$$\Omega_D^n \mathcal{A}(S_{qc}^2) = 0 \quad \text{para } n \geq 2, \quad (5.24a)$$

$$\Omega_D^1 \mathcal{A}(S_{qc}^2) = \mathbb{C}[e^{i\theta}, e^{-i\theta}], \quad \text{donde la igualdad es como } \mathcal{A}(S_{qc}^2) \text{ - módulos.} \quad (5.24b)$$

5.4.2. Representación espinorial

Hacemos uso de la representación π escrita en la forma (5.16). Para simplificar las manipulaciones, recordando (5.17) escribimos $\rho_+(a) = a_+ + a_-$, $\rho_+(b) = b_+ + b_-$ con la notación obvia. De esta forma a_\pm y b_\pm son una descomposición de los operadores que cambian el índice l de los elementos de la base en ± 1 . Notamos además que $\rho_-(a)$ y $\rho_-(b)$ no cambian el índice l , por lo tanto conmutan con el operador de Dirac (5.18).

Un cálculo directo nos muestra que $[[D], a_\pm] = \pm a_\pm$, $[[D], b_\pm] = \pm b_\pm$ y $[F, \gamma] = 2F\gamma$. Con esto podemos calcular directamente

$$[D, \pi(a)] = (a_+ - a_-) \otimes F + 2D(\rho_-(a) \otimes \gamma), \quad (5.25a)$$

$$[D, \pi(b)] = (b_+ - b_-) \otimes F + 2D(\rho_-(b) \otimes \gamma). \quad (5.25b)$$

A pesar de que ρ_- no es una representación, se puede verificar directamente de la definición (5.15) que satisface la identidad

$$\rho_-(xy) = \pi_+(x)\rho_-(y) + \rho_-(x)\pi_-(y).$$

En [9] se muestra que la imagen de $\mathcal{A}(S_q^2)$ bajo ρ_- está contenida en \mathcal{S} (la matrices de decaimiento rápido en $\ell^2(\mathbb{N})$ definidas en la sección 5.3.1). Por lo tanto los conmutadores $[D, \rho_-(x)]$, $x \in \mathcal{A}(S_q^2)$, son operadores acotados, uno de los requisitos para que $(\mathcal{A}(S_q^2), \mathcal{H}, D)$ sea una tripla espectral regular.

Para esta representación encontramos nuevamente problemas para escribir un resultado cerrado para $\Omega_D C(S_q^2)$. Más aún, dadas las relaciones de conmutación entre las 1-formas (5.25) y los generadores de $\mathcal{A}(S_q^2)$, las formas de los elementos polinomiales también presentan complicaciones.

5.5. Teorías gauge abelianas sobre $\mathcal{A}(S_q^2)$ ecuatorial

Dado que tenemos una forma explícita para las 1-formas de $(\mathcal{A}(S_q^2), \mathcal{H}, D')$ usando la representación ecuatorial, podemos hacer teorías gauge abelianas siguiendo la sección 4.4.1.

En este caso el módulo proyectivo $\mathcal{E} = \mathcal{A}(S_q^2)$ es trivial y la conexión está dada por

$$\nabla = [D', \cdot] + V, \quad (5.26)$$

donde el potencial gauge $V = V^*$ es un elemento autoadjunto de $\Omega^1 \mathcal{A}(S_q^2)$. Como vimos en la sección anterior, podemos escribir $V = c_1[D', \mu(a)] + c_2[D', \mu(a^*)] + c_3[D', \mu(b)]$, con $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}^\infty(S_q^2)$.

Notamos primero que el funcional de Yang-Mills definido en (4.21) nos sirve para determinar la “dinámica” del modelo. Por lo tanto los términos que no afecten el valor de la integral no conmutativa (la traza de Dixmier) no aportarán nada a nuestro modelo gauge. Recordamos que la traza de Dixmier está diseñada para que los infinitesimales de orden mayor que 1 (definidos en sec. 3.2.2) se anulen. Esto nos permite ignorar operadores infinitesimales en el potencial gauge y la curvatura.

Revisemos ahora los valores característicos de $[D', \mu(b)]$ (ver sección 3.2.2). Tenemos

$$|[D', \mu(b)]| = \sqrt{[D', \mu(b)]^* [D', \mu(b)]} = 2Nq^{2N} \otimes id_{\mathbb{C}^2}. \quad (5.27)$$

El espectro de este operador es $\sigma_b := \{2nq^{2n}; n \in \mathbb{Z}_+\}$. Vemos que σ_b está compuesto por enumerables números reales decrecientes y $2nq^{2n} \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Además, como

$$\left\{ |n\rangle \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |n\rangle \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}_{n \in \mathbb{Z}_+} \quad (5.28)$$

es una base hilbertiana de vectores propios, cada valor propio tiene multiplicidad finita. Por lo tanto $|[D', \mu(b)]|$ es un operador compacto [17].

Los elementos de σ_b decaen exponencialmente. En otras palabras, dado $k \in \mathbb{Z}_+$, existe $N_k \in \mathbb{Z}_+$ tal que $nq^{2n} < \frac{1}{n^k}$, para todo $n > N_k$. Esto nos permite concluir que $[D', \mu(b)]$ es un infinitesimal de orden α , para todo $\alpha \in \mathbb{R}_+$. En particular, $[D', \mu(b)]$ será un infinitesimal de orden mayor a uno y obtenemos

$$\int |[D', \mu(b)]| = 0. \quad (5.29)$$

Por lo anterior tenemos que las 1-formas $c[D', \mu(b)]$, $c \in C^\infty(S_q^2)$ son todas infinitesimales de orden mayor que uno y su traza de Dixmier será cero. Concluimos que no aportarán nada al funcional de Yang-Mills, es decir, serán inocuas para la “dinámica” que queremos modelar con nuestra teoría. Dado que el espectro de $\mu(b)$ es $\{\pm q^{2n}; n \in \mathbb{Z}_+\}$, también será un infinitesimal de orden mayor que uno (por un argumento similar al que usamos para $[D', \mu(b)]$). En suma tenemos

$$\int Tb = \int bT = 0, \quad T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}). \quad (5.30)$$

Para $\mu(a)$ el comportamiento es distinto. Tenemos

$$|[D', \mu(a)]| = \sqrt{[D', \mu(a)]^* [D', \mu(a)]} = \sqrt{1 - q^{4N}} \otimes id_{\mathbb{C}^2}. \quad (5.31)$$

Dado que el espectro de $\| [D', \mu(a)] \|$ es $\sigma_a := \{ \sqrt{1 - q^{4n}}; n \in \mathbb{Z}_+ \}$, no será un operador compacto. De hecho, podemos calcular explícitamente usando que esta tripla espectral tiene dimensión uno

$$\int \| [D', \mu(a)] \| = \text{tr}_\omega(\| [D', \mu(a)] \| |D|^{-1}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_{n=1}^N \frac{\sqrt{1 - q^{4n}}}{n}}{\log(N)} = 1, \quad (5.32)$$

notando que asintóticamente la diferencia entre $\sum_{n=1}^N \frac{\sqrt{1 - q^{4n}}}{n}$ y $\sum_{n=1}^N \frac{1}{n}$ es arbitrariamente pequeña. Podemos obtener un resultado similar para $\mu(a^*)$. Dado que $[D', \mu(a)]$ y $[D', \mu(a^*)]$ no son triviales desde el punto de vista del funcional de Yang-Mills, serán la base de nuestros potenciales gauge.

Para empezar proponemos una familia sencilla de potenciales

$$\begin{aligned} V_{\alpha\beta} &:= \alpha \left([D', \mu(a)] + [D', \mu(a)]^* \right) + i\beta \left([D', \mu(a)] - [D', \mu(a)]^* \right) \\ &= \alpha \left(\mu(a) + \mu(a^*) \right) F + i\beta \left(\mu(a) - \mu(a^*) \right) F, \end{aligned} \quad (5.33)$$

donde α y β son números reales. Dado que F es autoadjunto y conmuta con $\mu(a)$, tenemos que $V_{\alpha\beta}$ es una 1-forma autoadjunta, para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Además, como son 1-formas puras, tendremos $dV_{\alpha\beta} = 0$. Con esto podemos calcular la curvatura

$$\begin{aligned} \theta_{\alpha\beta} &= V_{\alpha\beta}^2 + dV_{\alpha\beta} \\ &= \alpha^2 \left(\mu(a) + \mu(a^*) \right)^2 - \beta^2 \left(\mu(a) - \mu(a^*) \right)^2 + 2i\alpha\beta \left(\mu(a)^2 - \mu(a^*)^2 \right) \\ &= \left(\alpha + i\beta \right)^2 \mu(a)^2 + \left(\alpha - i\beta \right)^2 \mu(a^*)^2 + 2(\alpha^2 + \beta^2) - (1 - q^{-4})(\alpha^2 + \beta^2)\mu(b)^2, \end{aligned} \quad (5.34)$$

donde usamos $F^2 = 1$. Notemos que $\theta_{\alpha\beta}$ es autoadjunto. Para obtener la acción de nuestro modelo, debemos calcular (siguiendo la ecuación (4.21))

$$\begin{aligned} YM(V_{\alpha\beta}) &= \langle V_{\alpha\beta}^2 + dV_{\alpha\beta}, V_{\alpha\beta}^2 + dV_{\alpha\beta} \rangle_2 \\ &= \langle \theta_{\alpha\beta}, \theta_{\alpha\beta} \rangle_2 = \int \theta_{\alpha\beta}^2 = \text{tr}_\omega(\theta_{\alpha\beta}^2 |D|^{-1}). \end{aligned} \quad (5.35)$$

Con esto tenemos

$$\begin{aligned} \theta_{\alpha\beta}^2 &= (\alpha + i\beta)^4 \mu(a)^4 + (\alpha - i\beta)^4 \mu(a^*)^4 + (\alpha^2 + \beta^2)^2 \left(\mu(a)^2 \mu(a^*)^2 + \mu(a^*)^2 \mu(a)^2 \right) \\ &\quad + 4(\alpha^2 + \beta^2) \left[(\alpha + i\beta)^2 \mu(a)^2 + (\alpha - i\beta)^2 \mu(a^*)^2 \right] + 4(\alpha^2 + \beta^2)^2 \end{aligned} \quad (5.36)$$

ignorando los términos con $\mu(b)$ por ser infinitesimales de orden mayor que uno. Dado que

$$\mu(a^*)^2\mu(a)^2 = \mu(a^*)(1 - \mu(b)^2)\mu(a), \quad (5.37a)$$

$$\mu(a)^2\mu(a^*)^2 = \mu(a)(1 - q^{-4}\mu(b)^2)\mu(a^*), \quad (5.37b)$$

tenemos $\mu(a^*)^2\mu(a)^2 = \mu(a^*)\mu(a) = 1$ y $\mu(a)^2\mu(a^*)^2 = \mu(a)\mu(a^*) = 1$ módulo infinitesimales de orden mayor que uno. Esto facilita mucho los cálculos ya que sólo debemos calcular la traza de Dixmier de $\mu(a)^2$ y $\mu(a)^4$. Notamos primero

$$\int 1 = \text{tr}_\omega(|D|^{-1}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_{n=1}^N \frac{1}{n}}{\log(N)} = 1. \quad (5.38)$$

La traza de Dixmier de $\mu(a)^k$ es mucho más complicada de calcular. Siguiendo la definición dada en la sec. 3.2.2, escribimos $\mu(a) = \frac{1}{2}(\mu(a) + \mu(a^*)) + i\frac{1}{2i}(\mu(a) - \mu(a^*))$. Por un lado tenemos

$$\begin{aligned} |\mu(a) + \mu(a^*)|^2 &= w\sqrt{1 - q^{4N}}w\sqrt{1 - q^{4N}} + \sqrt{1 - q^{4N}}w^*\sqrt{1 - q^{4N}}w^* \\ &\quad + w(1 - q^{4N})w^* + 1 - q^{4N}, \end{aligned} \quad (5.39a)$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{i}(\mu(a) - \mu(a^*)) \right|^2 &= -w\sqrt{1 - q^{4N}}w\sqrt{1 - q^{4N}} - \sqrt{1 - q^{4N}}w^*\sqrt{1 - q^{4N}}w^* \\ &\quad + w(1 - q^{4N})w^* + 1 - q^{4N}. \end{aligned} \quad (5.39b)$$

Vemos que no es inmediato escribir $\mu(a) + \mu(a^*)$ y $\frac{1}{2i}(\mu(a) - \mu(a^*))$ como suma de dos operadores positivos. Una posible forma de lograrlo es diagonalizar (i.e. encontrar una base de vectores propios) de los operadores (5.39) para obtener su raíz cuadrada y luego, comparando cómo actúa sobre la base, encontrar la descomposición. Este procedimiento es mucho más dispendioso si consideramos potencias de $\mu(a)$ y $\mu(a^*)$.

Volviendo al funcional de Yang-Mills, lo reescribimos como

$$\begin{aligned} YM(V_{\alpha\beta}) &= (\alpha + i\beta)^4 \int \mu(a)^4 + (\alpha - i\beta)^4 \int \mu(a^*)^4 \\ &\quad + 4(\alpha^2 + \beta^2) \left[(\alpha + i\beta)^2 \int \mu(a)^2 + (\alpha - i\beta)^2 \int \mu(a^*)^2 \right] \\ &\quad + 6(\alpha^2 + \beta^2), \end{aligned} \quad (5.40)$$

usando (5.38). Recordando la definición de la traza, es claro que $\int T^* = \overline{\int T}$. Con esto en mente, si consideramos las integrales indicadas en (5.40) como constantes de la tripla

espectral, tenemos que $YM(V_{\alpha\beta})$ es un polinomio *real* en α y β (notando $YM(V_{\alpha\beta}) = \overline{YM(V_{\alpha\beta})}$).

Para minimizar el valor de $YM(V_{\alpha\beta})$, tenemos en cuenta que es un funcional positivo. Por lo tanto, si α y β son parámetros variables de la teoría, tendremos $\inf\{YM(V_{\alpha\beta}); \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = 0$. Recobrando el sentido físico original, tendremos que no hay dinámica, es decir, todo es estático. Este fenómeno ya lo habíamos visto en el espacio de dos puntos discutido en la sección 4.4.1.

Este comportamiento del funcional de Yang-Mills se extiende a potenciales gauge un poco más generales. Recordando nuevamente que los términos que involucren $\mu(b)$ no afectan el valor del funcional, restringimos nuestra atención a la *-álgebra polinomial generada por $\mu(a)$ y $\mu(a^*)$. Usando (5.37), es claro que

$$a^n(a^*)^m = \begin{cases} a^{n-m} & \text{si } n > m \\ (a^*)^{m-n} & \text{si } m > n \\ 1 & \text{si } n = m, \end{cases} \quad (5.41)$$

módulo infinitesimales de orden mayor que uno (i.e. términos que incluyen $\mu(b)$). Tendremos potenciales de la forma

$$V = \left(\sum_{k=1}^n (\tau_k \mu(a)^k + \sigma_k \mu(a^*)^k) + \varphi \right) F,$$

con $\tau_k, \sigma_k, \varphi \in \mathbb{C}$. Imponiendo que V sea autoadjunto, llegamos a la condición $\overline{\tau_k} = \sigma_k$ y $\varphi \in \mathbb{R}$. Escribiendo $\tau_k = \alpha_k + i\beta_k$ tenemos

$$V = \left(\sum_{k=1}^n \left[\alpha_k (\mu(a) + \mu(a^*)) + i\beta_k (\mu(a) - \mu(a^*)) \right] + \varphi \right) F. \quad (5.42)$$

El cálculo de la curvatura $V^2 + dV$ será análogo al que hicimos para la familia $V_{\alpha\beta}$, con la salvedad que V ya es no es una 2-forma pura y $dV \neq 0$. Lo interesante es que nuevamente el funcional de Yang-Mills estará dado por polinomios reales homogéneos positivos en α_k, β_k y φ . Al minimizarlos para encontrar la dinámica “física” obtendremos nuevamente que todo es estático.

Una observación interesante es la pérdida de isotropía en la esfera de Podleś. En la esfera clásica, los generadores autoadjuntos x, y, z son todos intercambiables, lo cuál da cuenta de todas las simetrías. En la esfera de Podleś las cosas cambian desde la deformación que la define (5.1). Esta asimetría resurge en el cálculo de estas teorías gauge, ya que $b = z$, dado su espectro, debe ser ignorado en la formulación.

Capítulo 6

Conclusiones

El uso de analogías en Matemáticas siempre es fructífero. La generalización de las construcciones geométricas usando álgebras no conmutativas promete ser de gran utilidad en varias ramas del conocimiento, especialmente en Física. Un ejemplo es las teorías gauge. Como vimos, su formulación geométrica usual puede extenderse de forma directa a triplas espectrales siguiendo el esquema de Alain Connes, descrito en el capítulo 4. El estudio de estas teorías puede llevarse a cabo en álgebras completamente abstractas, como la esfera de Podleś. Este “espacio” sirve como modelo de juguete dado que sus representaciones se han estudiado extensamente.

En este trabajo se estudiaron dos triplas espectrales para la esfera de Podleś, una ecuatorial siguiendo la formulación original y otra espinorial surgida del estudio de $SU_q(2)$, ambas interpretadas en el marco de la geometría diferencial de Connes. A partir de ellas se caracterizaron algunas formas diferenciales, para poder definir conexiones, y a su vez teorías gauge. Dada la naturaleza de los cálculos, centramos nuestra atención en el álgebra polinomial de la representación ecuatorial. Notando que uno de los generadores no afectaba el valor del funcional de Yang-Mills, logramos mostrar que la dinámica, descrita por una amplia gama de potenciales polinomiales, era trivial, es decir, todo el modelo era estático.

Surgen dudas interesantes. Es posible que la trivialidad de los resultados desaparezca al considerar módulos proyectivos más complejos, con conexiones más elaboradas; podrían surgir fenómenos interesantes si se estudia toda la C^* -álgebra, $C(S_q^2)$. También valdría la pena estudiar la representación espinorial y ver si, por lo menos para el álgebra polinomial, las dinámicas siguen siendo triviales.

Como vimos, la noción de formas diferenciales es la base de gran parte de la construcción. En este caso una definición diferente de formas diferenciales no conmutativas puede llevar

a resultados completamente distintos¹. El mayor problema en este caso sería garantizar la interpretación de la integral no conmutativa, ya que este depende igualmente de las características del operador de Dirac. Un estudio siguiendo esta motivación implicaría una reformulación de la geometría no conmutativa de Connes, por lo menos en su interpretación.

¹Agradezco a Eric Backelin por notar esto.

Bibliografía

- [1] Carey, A.L., Sukochev, F.A. *Dixmier traces and some applications in Noncommutative Geometry*, arXiv:mathOA/0608375v2
- [2] Chakraborty, P.S., Pal, A. *Spectral triples and associated Connes-de Rham complex for the quantum $SU(2)$ and the quantum sphere*, Comm.Math.Phys.**240** (2003) 447–456.
- [3] Cheng, T., Li, L. *Gauge theory of elementary particle physics*, Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1984
- [4] Choquet-Bruhat, Y., DeWitt-Morette, C., Dillard-Bleick, M. *Analysis, manifolds and Physics*, vol. 1, Elsevier, Amsterdam, 1996
- [5] Connes, A. *Noncommutative Geometry*, Academic Press, San Diego, California, 1994
- [6] Connes, A., Chamseddine, A.H. *Inner fluctuations of the spectral action*, Journal of Geometry and Physics **57** (2006) 1-21
- [7] Dąbrowski, L. *The garden of quantum spheres*, arXiv:math/0212264
- [8] Dąbrowski, L., Landi, G., Paschke, M., Sitarz, A. *The spectral geometry of the equatorial Podleś sphere*, arXiv:math.QA/0408034
- [9] D’Andrea, F., Dąbrowski, L. *Local index formula on the equatorial Podleś Sphere*, Letters in Mathematical Physics, Volume 75, Number 3, March 2006 , pp. 235-254(20)
- [10] Dirac, P.A.M. *The Quantum Theory of the Electron*, Proc. R. Soc. (A117) 610, 1928
- [11] Dubois-Violette, M. *Lectures on graded differential algebras and noncommutative geometry*, arXiv:math.QA/9912017v3

-
- [12] Duistermaat, J.J., Kolk, J.A.C. *Lie groups*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1999
- [13] Gracia-Bondía, J.M., Várilly, J.C., Figueroa, H. *Elements of Noncommutative Geometry*, Birkhäuser advanced texts, Boston, 2001
- [14] Kadison, R., Ringrose, J. *Fundamentals of the theory of operator algebras. Elementary theory*, Academic Press, New York, 1983
- [15] Landi, G. *An introduction to Noncommutative Spaces and their geometry*, Springer-Verlag, Berlin. Heidelberg, 1997
- [16] Lawson, H. Blaine, Michelson, M.L. *Spin geometry*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1994
- [17] Lesmes. J. *Elementos de Análisis Funcional, Academia C*, 2002
- [18] Moriyoshi, H., Natsume, T. *Operator algebras and Geometry*, Translation of Mathematical monographs, American Mathematical Society, 2008
- [19] Naber, G.L. *Topology, geometry and gauge fields: Foundations*, Springer-Verlag, New York, 1997
- [20] Nakahara, M. *Geometry, Topology and Physics*, Institute of Physics Publishing, Bristol, England, 1990
- [21] Natsume, T., Olsen, C.L. *A new family of noncommutative 2-spheres*, Journal of Functional Analysis 202 (2003) 363-391
- [22] Nestruiev, J. *Smooth Manifolds and Observables*, Springer-Verlag, New York, 2003
- [23] Podleś, P. *Quantum spheres*, Lett. Math. Phys. 14 (1987) 521–531
- [24] Sardanashvily, G. *On the geometry of spontaneous symmetry breaking*, J. Math. Phys. **33** (4), April 1992
- [25] Sheu, A.J-L. *Quantization of the Poisson $SU(2)$ and its Poisson homogeneous space — the 2-sphere*, Comm. Math. Phys. **135** (1991) 217-232.
- [26] Talmadge, A. *Symmetry breaking via internal geometry*, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences 2005:13 (2005) 2023–2030
- [27] Tu, Loring W. *An introduction to Manifolds*, Springer Science+Business Media, LLC, 2008

- [28] Wegge-Olsen. N.E. *K-theory and C^* -algebras: A friendly approach*, Oxford University Press Inc., New York, 1993