

Análisis comparativo de métodos de resolución de cadenas de Markov aplicados a un switch óptico

Trabajo de Tesis
presentado al
Departamento de Ingeniería Eléctrica y Electrónica

por

Rafael Caroprese Castro

Asesor: Juan Fernando Pérez Bernal

Para optar al título de
Ingeniero Electrónico

Ingeniería Eléctrica y Electrónica
Universidad de Los Andes
Diciembre 2011

Análisis comparativo de métodos de resolución de cadenas de Markov aplicados a un switch óptico

Aprobado por:

Roberto Bustamante Miller

Juan Fernando Pérez Bernal, Asesor

Fecha de Aprobación _____

Tabla de Contenido

Lista de Tablas	v
I. Introducción	1
II. Objetivos	2
2.1. Objetivo general	2
2.2. Objetivos específicos	2
2.3. Alcance	2
III. Descripción de la problemática	3
IV. Marco teórico	4
4.1. Optical Burst Switching	4
4.2. Procesos de Markov	4
4.2.1. Proceso de Arribos MAP	5
4.3. Métodos de solución de cadenas de Markov	6
4.3.1. Método de Akar	6
4.3.2. Método de potencias	9
4.3.3. Método de Gauss-Seidel	9
4.3.4. Método GMRES	10
4.4. Trabajos anteriores	12
V. Definición y especificación del trabajo	13
5.1. Definición	13
5.2. Especificaciones	13

VI. Metodología del trabajo	14
6.1. Plan de trabajo	14
6.2. Búsqueda de información	14
6.3. Alternativas de desarrollo	15
6.4. Descripción del resultado final	16
6.5. Trabajo computacional	16
VII. Validación del trabajo	17
7.1. Metodología de prueba	17
7.2. Validación de los resultados del trabajo	17
7.3. Evaluación del plan de trabajo	27
VIII. Discusión	28
IX. Conclusiones	30
Referencias	31

Lista de Tablas

1.	Probabilidad de pérdida de paquetes	21
2.	Tiempo de procesamiento con respecto al número de fases usadas . .	22
3.	Probabilidad de pérdida de paquetes con respecto a la correlación . .	25
4.	Probabilidad de pérdida de paquetes con respecto a la utilización . .	26
5.	Arribo de un paquete	28
6.	Paquete servido	29

Capítulo I

Introducción

El presente trabajo comprende el análisis de la eficiencia de diferentes métodos de resolución de sistemas lineales aplicados a un problema de telecomunicaciones. La razón principal de la elección de este proyecto es porque incluye conceptos de diversas áreas del conocimiento, entre ellas: las comunicaciones, los procesos estocásticos y las matemáticas aplicadas. En el mismo se combinan dos temas de gran aplicación: las cadenas de Markov y los switches ópticos. Las primeras permiten modelar sistemas con componentes estocásticos y su rango de aplicación es muy amplio. Los últimos permiten conmutar señales ópticas maximizando la cantidad de información procesada en el espectro óptico.

Existen diferentes métodos generales para resolver cadenas de Markov, entre ellos están el método de potencias, Gauss-Seidel y GMRES, de los cuales, los primeros dos se basan en la aplicación de una matriz de iteración, y el último encuentra la solución utilizando proyecciones a un subespacio. El objetivo es aplicarlos en el caso particular del modelo de un switch óptico, desarrollado en el artículo de Akar, Karasan, y Dogan (2006), y compararlos con el método analítico matricial propuesto en este artículo. Se tienen en cuenta la precisión y los tiempos de cada método, y la influencia de diferentes parámetros, como la utilización, la correlación del proceso de arribos y el número de longitudes de onda utilizadas.

En el documento se presenta un marco teórico donde se explican los conceptos más relevantes del proyecto, se muestra la metodología usada para el desarrollo del trabajo, los resultados del mismo junto a su respectiva validación y análisis y por último las conclusiones del proyecto.

Capítulo II

Objetivos

2.1. Objetivo general

Comparar los métodos de resolución de cadenas de Markov mencionados, aplicados al modelo específico desarrollado en Akar et al. (2006).

2.2. Objetivos específicos

- Implementación de los códigos en MATLAB de los diferentes métodos de resolución de cadenas de Markov, aprovechando la estructura interna de la matriz de transición de la cadena de Markov desarrollada en Akar et al. (2006).
- Obtener resultados de la eficiencia de los métodos medida por varios factores relevantes para el caso de estudio, entre ellos la precisión y la rapidez de resolución.
- Evaluar el efecto de algunos parámetros que son interesantes para el modelo y afectan el desempeño de los algoritmos.

2.3. Alcance

Se implementará cada uno de los algoritmos, de tal forma que se puedan modificar fácilmente los parámetros del sistema. Se hará un análisis extensivo con diversas instancias interesantes y se concluirá al respecto.

Capítulo III

Descripción de la problemática

En la actualidad, con la omnipresencia de la Internet y el gran desarrollo tecnológico existente en el campo de la computación, la eficiencia y rapidez de las redes que la conforman se han vuelto temas de gran importancia. Es ahí, donde la conmutación óptica tiene un rol importante, puesto que las técnicas usadas con este tipo de proceso permiten una gran rapidez en la transmisión de grandes cantidades de datos y una probabilidad de pérdida de paquetes menor a la de la conmutación tradicional. Además, con la acogida que han tenido dichos sistemas, su modelamiento se ha vuelto un tema importante, y dado que el mismo se puede realizar basándose en el concepto de cadenas de Markov, se ha decidido implementar diferentes métodos generales de resolución de cadenas y compararlos con un método directo de resolución para un modelo específico de un switch óptico sin buffer y con conversores de longitud de onda.

Capítulo IV

Marco teórico

4.1. Optical Burst Switching

Optical Burst Switching (OBS), es una técnica de conmutación usada en redes de telecomunicaciones, planteada para aprovechar las características favorables que presenta el uso de fibra óptica para la transmisión de información. En este proceso se envía primero un paquete de control, seguido por la carga útil, sin esperar ninguna clase de confirmación sobre el establecimiento de la conexión, es decir, usa protocolos de reserva de una vía. Su uso implica una disminución del tiempo de transmisión, gracias a que la cantidad de conversiones requeridas desde el espectro óptico al electromagnético y viceversa es menor que en el caso de la conmutación tradicional, puesto que el procesamiento de la carga útil se da en el espectro óptico, mientras que solo el encabezamiento es procesado en el espectro electromagnético.(Qiao y Yoo, 1999)

4.2. Procesos de Markov

En (Stewart, 1994) se observa como un proceso de Markov se caracteriza principalmente porque su estado actual depende únicamente del estado inmediatamente anterior. Existen diferentes clases de procesos de Markov, los cuales se clasifican de acuerdo a las características del tiempo y del espacio, que pueden ser continuos o discretos. Es así como se pueden tener procesos de Markov donde los estados son discretos, caso en el cual se denominan cadenas de Markov, que pueden ser de tiempo continuo o de tiempo discreto, y también se encuentra el caso donde los estados son continuos, denominado proceso de Markov, ya sea de tiempo continuo o de tiempo

discreto. Uno de los parámetros más importantes en las cadenas es el de la utilización, el cual se representa con la letra ρ , y es igual, en el caso más sencillo, a la tasa de arribos, λ , sobre la tasa de transmisión, μ . Para las cadenas se puede tener una matriz de transición de probabilidad P o una matriz generadora infinitesimal Q , y el principal resultado buscado es el vector de probabilidades de estado estable π , el cual muestra la distribución que siguen los estados de la cadena tras estabilizarse. En el primer caso se debe cumplir que

$$\pi P = \pi, \pi \mathbf{1} = \pi \quad (1)$$

y en el segundo caso se tiene

$$\pi Q = \mathbf{0} \text{ y } \pi \mathbf{1} = \pi. \quad (2)$$

4.2.1. Proceso de Arribos MAP

En (Latouche y Ramaswami, 1999) se ve como uno de los procesos de arribos más sencillos corresponde al proceso de Poisson, en el cual los eventos se dan de manera independiente y continua, sin embargo, dicho modelo puede resultar limitado. Es allí donde, para generalizar un poco más el sistema al implementar un proceso de arribos markovianos (Lucantoni, Meier-Hellstern, y Neuts, 1990). Siguiendo los lineamientos presentados en (Akar et al., 2006), donde el proceso era de tipo fase, e implementando arribos de tal forma que sigan una distribución Erlang(n, λ), en la cual se tienen n fases. En las primeras $n - 1$ no se produce ningún arribo, mientras que en la última este se produce con una tasa λ , por lo tanto, la tasa de arribos del sistema termina siendo de $\frac{\lambda}{n}$. En la figura 1 se muestra un ejemplo de este proceso de arribos en el cual n es 4.

Las matrices que definen este proceso son dos: la matriz que lleva el proceso de fase (C) y la que lleva el proceso de conteo (D). Dichas matrices se encuentran

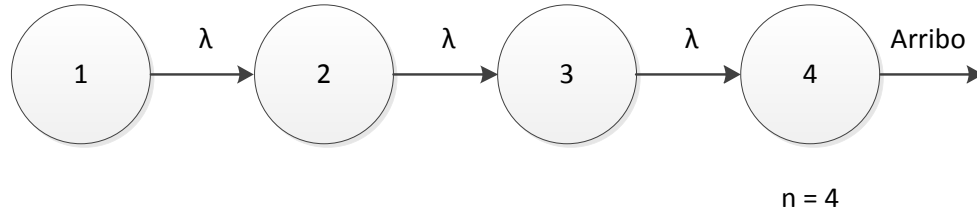


Figura 1: Ejemplo del modelo usado para los arribos tipo MAP.

a partir de una matriz T , que corresponde a la matriz del proceso de fase, y dos vectores, un vector fila de probabilidad, v , que en este caso tiene ceros en todas sus posiciones excepto la primera que es 1, y T^0 , un vector columna que es hallado al realizar la siguiente operación: $T^0 = -T\mathbf{1}$. Es así como se tiene $C = T$ y $D = T^0v$. Es con la ayuda de estas matrices que, de acuerdo a lo mostrado en (Mitchell, 2001) se pueden producir los procesos de arribos con diferentes correlaciones. El proceso para generar los arribos correlacionados, teniendo $C = T$ y $0 \leq \psi < 1$, donde el término ψ es el que controla la correlación de los arribos

$$D = (1 - \psi)T^0v - \psi T. \quad (3)$$

4.3. Métodos de solución de cadenas de Markov

Existen diversos métodos para solucionar cadenas de Markov. Dichos métodos pueden clasificarse en diferentes tipos, por ejemplo, se tienen los métodos directos, los iterativos y los de proyección (Stewart, 1994).

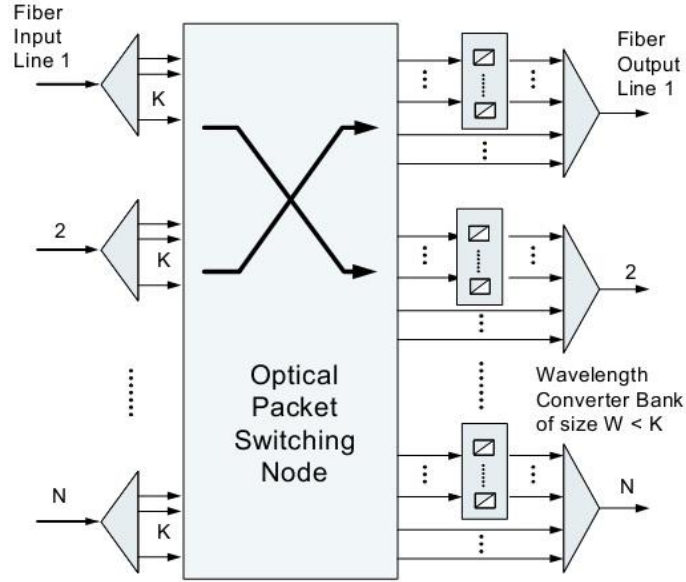


Figura 2: Arquitectura de un switch óptico con N fibras de entrada, K longitudes de onda por cada fibra y un banco de conversores de onda de tamaño W compartido por las líneas de la salida. (Akar et al., 2006)

4.3.1. Método de Akar

Este método corresponde al presentado en el paper de Akar et al. (2006) este proyecto se centra principalmente en la implementación de este modelo. En la figura 2 se muestra la arquitectura de un switch óptico, el estudio simula lo que ocurre en una de las N fibras de entrada.

El proceso estudiado es $X(t) = \{(i(t), l(t), j(t)) : t \geq 0\}$, donde $i(t)$ describe las longitudes de onda usadas, $l(t)$ corresponde a la fase, y $j(t)$ es el número de conversores ocupados, todos ellos en el tiempo t . La matriz del sistema estudiado se muestra a continuación.

$$Q = \begin{bmatrix} A_0 & U_1 & & & \\ D_0 & A_1 & U_2 & & \\ & D_1 & A_2 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & U_K \\ & & & D_{K-1} & A_K \end{bmatrix}$$

Las matrices A_i , U_i y D_i se encuentran, como se muestra en (Akar et al., 2006, p. 72), de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} U_i &= D \otimes \bar{U}_i, \\ D_i &= \mu I_m \otimes \bar{D}_i \end{aligned}$$

y

$$A_i = \begin{cases} (C - i\mu I_m) \otimes I_{i+1} & i < W, \\ (C - i\mu I_m) \otimes I_{W+1} + D \otimes \bar{I}_i & W \leq i < K, \\ (E - i\mu I_m) \otimes I_{W+1} & i = K. \end{cases}$$

Basándose en los siguientes lineamientos:

$$\begin{cases} \bar{U}_i = \\ \left\{ \begin{array}{ll} \text{bloque superior izquierdo de tamaño } (W+1) \times (W+1) \text{ de } N_i & W \leq i, \\ \text{bloque superior izquierdo de tamaño } (i+1) \times (i+2) \text{ de } N_i & 0 \leq i < W \end{array} \right. \\ \bar{D}_{i-1} = \\ \left\{ \begin{array}{ll} \text{bloque superior izquierdo de tamaño } (W+1) \times (W+1) \text{ de } M_i & W < i, \\ \text{bloque superior izquierdo de tamaño } (i+1) \times (i) \text{ de } M_i & 1 \leq i \leq W \end{array} \right. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} N_i &= \begin{bmatrix} \frac{K-i}{K} & \frac{i}{K} & & & \\ & \frac{K-i}{K} & \frac{i}{K} & & \\ & & \frac{K-i}{K} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix}, \\ M_i &= \begin{bmatrix} i & & & & \\ 1 & i-1 & & & \\ & 2 & i-2 & & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & & \ddots \end{bmatrix}, \\ \bar{I}_i &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{i}{K} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Por lo tanto, el primer enfoque fue crear la matriz generadora Q . Dicha matriz es uno de los insumos de los métodos generales. Por lo tanto se decidió realizar una función en MATLAB que se encarga de generar la matriz Q a partir de los parámetros del sistema, entre ellos: la tasa de arribos, la tasa de transmisión, el número de canales y el número de convertidores de longitud de onda. Además, se implementaron funciones para generar las diferentes matrices necesarias para obtener Q (es decir A , U y D).

En este caso se sabe que, siendo e un vector columna de unos y siendo π la solución en estado estable, se cumple que:

$$\pi Q = \mathbf{0}, \pi e = 1$$

El siguiente paso fue implementar el pseudo-algoritmo que se puede observar en (Akar et al., 2006, p. 73). Éste contempla un ligero cambio a la matriz Q para tener una matriz P , dichos cambios son:

$$A_0 := \lambda, D_0 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Con los cuales, siendo b un vector fila de ceros a excepción de su primer valor, que es 1, se tiene que si z es una solución de:

$$zP = b$$

Entonces

$$\pi := \frac{z}{ze}$$

4.3.2. Método de potencias

Este método obtiene la distribución del sistema en un instante. Para un número entero k , el estado del sistema tras k transiciones se obtiene al multiplicar el vector de probabilidad tras $k - 1$ transiciones por P .

$$\pi^{(k)} = \pi^{(k-1)}P = \pi^{(k-2)}P^2 = \dots = \pi^{(0)}P^k$$

Si la cadena de Markov es finita, aperiódica e irreducible los vectores $\pi^{(k)}$ convergen a un vector de probabilidad estacionario π , es decir:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \pi^{(k)} = \pi$$

Debido a que se tiene la matriz generadora Q en lugar de la matriz de probabilidad de transición P se debe primero obtener un equivalente a esta última para emplear este método. Esto se hace de la siguiente manera: primero, se encuentra una constante ϑ que corresponde al mayor elemento de la diagonal de Q cuyo valor absoluto es el máximo. Una vez se tiene dicha constante la matriz P se encuentra usando la uniformización encontrada en (Kulkarni, 2010) la cual se realiza de la siguiente manera: $P = I + Q \frac{1}{\vartheta}$. Es importante aclarar que P tiene la propiedad de tener la misma distribución de estado estable, π , que Q . Se inicia con un vector de probabilidad inicial π_0 y se obtiene el siguiente vector de probabilidad al usar $\pi^{(k+1)}P = \pi^{(k)}$. Cuando la diferencia entre el vector de probabilidad anterior y el actual es menor a la tolerancia exigida el método se detiene.

4.3.3. Método de Gauss-Seidel

En (Stewart, 1994) se puede ver que el método de Gauss-Seidel es un método iterativo que utiliza únicamente los resultados disponibles más recientes, lo cual se puede hacer al sobrescribir los elementos tan pronto se obtiene la nueva aproximación. Teniendo a d_{ii} como los elementos de la diagonal de Q^T , l_{ij} , como el elemento i, j de la parte inferior de Q^T y a u_{ij} como el elemento i, j de la matriz triangular superior de Q^T , la fórmula de la iteración se muestra a continuación:

$$\pi_i^{(k+1)} = \frac{1}{d_{ii}} \left(\sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} \pi_j^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^n u_{ij} \pi_j^{(k)} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Al definir D como la matriz formada con la diagonal de Q^T , L como el negativo de la triangular inferior de Q^T y U como el negativo de la triangular superior de Q^T se puede enunciar la fórmula anterior en términos de matrices. Es así como se tiene que, para una aproximación π^k , el resultado en la siguiente iteración se obtiene al aplicar:

$$(D - L) \pi^{(k+1)} = U \pi^{(k)}$$

Al despejar $\pi^{(k+1)}$ se tiene:

$$\pi^{(k+1)} = (D - L)^{-1} U \pi^{(k)}$$

Por lo tanto la matriz de iteración de este método es:

$$H = (D - L)^{-1} U$$

Y las diferentes aproximaciones se hallan de la siguiente manera:

$$\pi^{(k+1)} = H \pi^{(k)}$$

Este método recibe la matriz generadora Q y el vector de probabilidad inicial π_0 , se encuentra la matriz de transición H , y se encuentra el siguiente vector de probabilidad al multiplicar el vector anterior por la matriz de transición hallada. Se encuentra la diferencia entre los dos vectores de probabilidad y si es menor a la tolerancia indicada el método se detiene.

Para este método también es necesario usar el hecho de que el vector de probabilidades suma uno, por lo tanto, para cumplir con esta restricción, al haber cumplido con el el vector resultante se normaliza.

4.3.4. Método GMRES

El método GMRES, siglas que significan *Generalized Minimal Residual*, es un método en el cual se realiza un proceso de proyección ortogonal al subespacio de Krylov

$$\mathcal{K}_m = \text{span}\{v_1, Av_1, \dots, A^{m-1}v_1\}$$

Dicho subespacio se produce al realizar varias iteraciones del método de potencias. La proyección ortogonal se realiza utilizando el método modificado de Gram-Schmidt. El objetivo de este método es encontrar una aproximación de la forma $\pi_m = \pi_0 + z_m$ donde z_m es escogido del subespacio de Krylov de forma tal que se minimice $\| -Q^T \pi_m \|_2$. Teniendo r_0 , como el vector obtenido al realizar $Q^T \pi_0$, β como la norma de dicho vector, y \bar{H}_m como la matriz superior de Hessenberg de tamaño $(m \times m)$. Al escribir $z_m = V_m y_m$, se tiene que y_m debe minimizar la siguiente función de y :

$$J(y) = \|\beta_1 - \bar{H}_m y\|_2$$

Al encontrar dicho vector y_m se estará encontrando la solución $\pi_m = \pi_0 + V_m y_m$ y su convergencia será monótona.

Los pasos usados para desarrollar este método son los siguientes:

1. *Inicio:* Defina un tamaño m para el subespacio de Krylov, una tolerancia para el error aceptable y una solución inicial aproximada π_0 .
2. *Proceso de Arnoldi:* For $j = 1, 2, \dots, m$ do
 - Calcule $r_0 = -Q^T x_0$, $\beta = \|r_0\|_2$ y $v_1 = r_0/\beta$.
 - Calcular $w = Q^T v_j$.
 - For $i = 1, 2, \dots, j$ do
 - Calcule $h_{ij} = v_i^T w$.
 - Calcule $w = w - h_{ij} v_i$.
 - Calcule $h_{j+1,j} = \|w\|_2$ y $v_{j+1} = w/h_{j+1,j}$.
3. *Forme la solución aproximada:*
 - Encuentre el vector $y_m \in \Re^m$ tal que la función $J(y) = \|\beta e_1 - \bar{H}_m y\|_2$ se minimice.
 - Calcule $\pi_m = \pi_0 + V_m y_m$.
4. *Reinicio:* Si satisface la condición pare; de lo contrario actualice $\pi_0 = \pi_m$ y vaya a 2.

4.4. Trabajos anteriores

Wavelength Converter Sharing in Asynchronous Optical Packet/Burst Switching: An Exact Blocking Analysis for Markovian Arrivals (Akar et al., 2006)

Este artículo es central para este trabajo, puesto que se implementarán los diferentes algoritmos de resolución para el modelo planteado en el artículo. Se presenta un sistema probabilístico para calcular las probabilidades de pérdida de paquetes en

un sistema OBS (Optical Burst Switching) con conversores de onda. El proceso de arribos se supone markoviano. La solución comprende encontrar la solución de estado estable de la cadena de Markov de tiempo continuo basándose en factorizaciones LU.

Optical Burst Switching - A New Paradigm for an Optical Internet (Qiao y Yoo, 1999)

En este artículo proponen el método de OBS para mejorar el uso de Internet. De esta forma nacería la generación del Internet Óptico. Se tienen en cuenta diferentes factores, como el uso de Fiber Delay Lines, que pueden retrasar paquetes por una determinada cantidad de tiempo, proporcional a la longitud de la línea, y Wavelength Division Multiplexing o WDM, que combina múltiples longitudes de onda en una sola fibra óptica.

Terabit Burst Switching (Turner, 1999)

Este artículo trata diferentes temas, como WDM, y plantea el uso de sistemas de conmutación por ráfagas (Burst Switching Systems) para administrar el ruteo de los datos. También hablan de cómo manejar las ráfagas de datos de una forma eficiente.

Capítulo V

Definición y especificación del trabajo

5.1. Definición

Se desea implementar tres métodos de resolución de cadenas de Markov a partir de la aplicación de métodos generales a un caso en particular, que presenta una estructura característica con una matriz tridiagonal cuya construcción se basa en tres matrices diferentes. Además, se debe analizar el efecto que tiene el cambio de diferentes variables relevantes para este caso, entre ellas, la correlación en el proceso de arribos, la cantidad de longitudes de onda y conversores de longitud de onda utilizados, y la utilización.

5.2. Especificaciones

Los tiempos de resolución de los métodos generales deben ser cercanos al tiempo empleado por el método directo mostrado en (Akar et al., 2006). Debe ser posible modificar diferentes aspectos relevantes para el modelo, como la correlación del proceso de arribos, la cantidad de longitudes de onda y conversores de longitud de onda, la tasa de arribos y la tasa de servicio.

Capítulo VI

Metodología del trabajo

Para la realización de este proyecto se ha seguido una metodología que comprende diferentes etapas. La primera de ellas corresponde a la lectura y comprensión del funcionamiento de los diferentes métodos. Posteriormente se define el pseudo-algoritmo de tal forma que se tenga una guía para su implementación en MATLAB. El siguiente paso corresponde a implementar el algoritmo y con esto completado se puede proceder a comparar la eficiencia de los diversos métodos.

6.1. Plan de trabajo

El plan de trabajo consistió en dividir el proyecto en varias partes: en la primera se buscaba información acerca de los métodos a implementar, después de tener dicha información y comprender los métodos se procedió a realizar una implementación sencilla de cada uno de estos, después de dicho paso se concentraron los esfuerzos en reducir el tiempo empleado en cada uno de estos, aprovechando las características del problema a solucionar. Una vez completado cada algoritmo se completó la comparación de la forma en que influenciaba al comportamiento cada una de las posibles variables, entre ellas, la correlación entre los arribos, la cantidad de longitudes de onda y de conversores de longitud de onda, la utilización y el tipo de arribos, es decir si son Poisson o Markovianos.

6.2. Búsqueda de información

La búsqueda de información se centró, principalmente, en libros como (Kulkarni, 2010), (Latouche y Ramaswami, 1999) y (Stewart, 1994). Además, se utilizaron

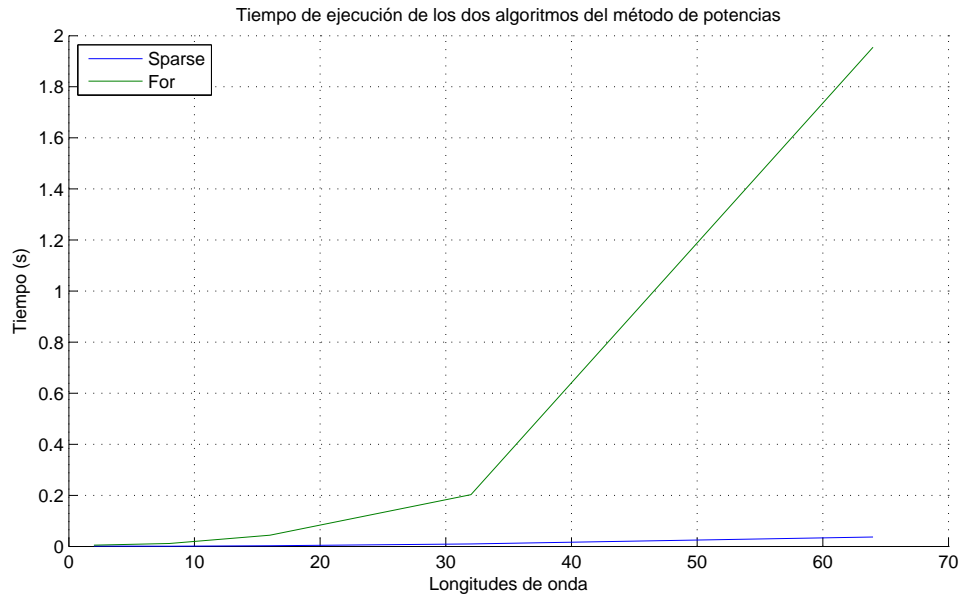


Figura 3: Tiempo utilizado por el método de potencias, según el algoritmo usado. El valor usado para la tolerancia es de $1E-6$.

diversos artículos en los cuales se muestran formas de mejorar el rendimiento de los métodos.

6.3. Alternativas de desarrollo

A lo largo del proyecto se realizaron diferentes implementaciones de cada uno de los métodos. En el caso del método de potencias, se desarrolló un procedimiento en el cual se utilizaban las matrices internas presentes en la matriz generadora, es decir, las matrices A_i , U_i y D_i , y, mediante un ciclo, se realizaba la multiplicación entre la matriz de transición y el vector de probabilidad. En la figura 3 se puede ver el tiempo de ejecución de los dos algoritmos utilizados para implementar este método.

En el caso del método GMRES, la principal incógnita era la del tamaño del subespacio de Krylov a elegir, puesto que si dicho tamaño era muy grande, el tiempo de procesamiento correspondiente a la generación de dicho subespacio sería muy grande, sin embargo, si se elegía un tamaño pequeño la tasa de convergencia del

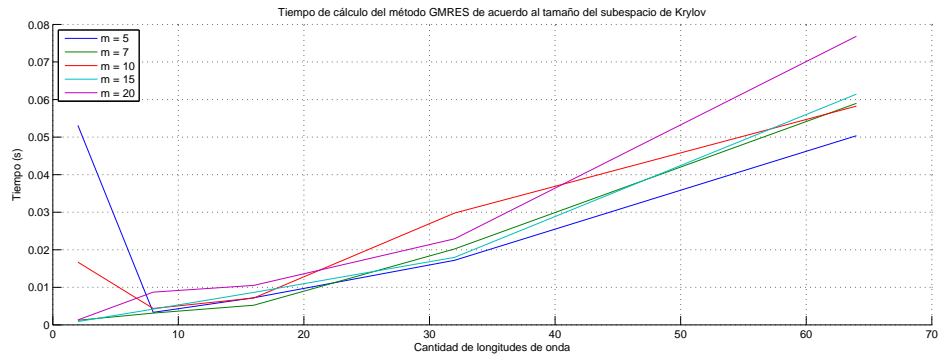


Figura 4: Tiempo utilizado por el método GMRES de acuerdo al tamaño del subespacio de Krylov usado. El valor usado para la tolerancia es de 10^{-8} .

método bajaba.

6.4. Descripción del resultado final

Al final del proceso de trabajo, se tienen diferentes métodos que cumplen con tareas como: producir la matriz generadora, generar la matriz de transición de probabilidad a partir de la anterior, encontrar las probabilidades de estado estable mediante los métodos de potencias, Gauss-Seidel y GMRES.

6.5. Trabajo computacional

El trabajo computacional consistió en la realización de varios métodos mediante los cuales se construían las diversas matrices que conformaban la matriz generadora del proceso. Entre estas matrices, se encontraban las matrices C y D que caracterizaban el proceso de arribos. Las matrices A_i , D_i y U_i en las cuales se basaba la estructura de la matriz, además del método que combinaba todas estas matrices y formaba la generadora, se encontraba un método que a partir de la generadora producía la matriz de transición, y los diversos algoritmos en los que se basaban los métodos de resolución.

Capítulo VII

Validación del trabajo

7.1. Metodología de prueba

Para la metodología de prueba se ha decidido comprobar diferentes casos. Se varía el coeficiente que regula la correlación, se han elegido diferentes niveles de tolerancia, y se ha tomado la decisión de mantener una relación fija de 2 longitudes de onda por cada conversor, duplicando el número de los primeros de tal forma que se evalúen los casos en los que hay desde 2 longitudes de onda, hasta 64. Además, se mantiene la utilización en valores fijos, es así que, cuando se duplica el número de longitudes disponibles, lo mismo se debe hacer con la tasa de arribos, para mantener constante la utilización.

7.2. Validación de los resultados del trabajo

Las figuras 5, 6 y 7 muestran los tiempos de ejecución de los diferentes métodos desarrollados. Las tolerancias utilizadas en estos casos fueron de $1E-6$, $1E-7$ y $1E-8$, en las mismas figuras se muestra la correspondencia entre cada una de ellas. Se puede observar como los métodos de potencias y GMRES tienen tiempos de ejecución comparables con el método de Akar, mientras que el método de Gauss-Seidel se demora mucho más que los demás.

En las figuras 8, 9 y 10 se puede observar el error máximo entre los vectores de probabilidad de estado estable de los métodos de potencias, Gauss-Seidel y GMRES con respecto al resultado obtenido al aplicar el método de Akar. El método que produce resultados más exactos es el GMRES, seguido del método de Gauss-Seidel y por último se encuentra el método de potencias.

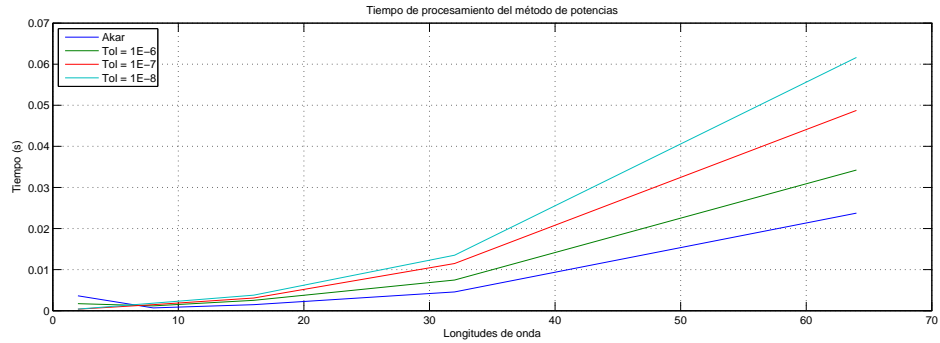


Figura 5: Tiempo utilizado por el método de potencias, según la tolerancia indicada, se incluye el tiempo usado por el algoritmo presentado en (Akar et al., 2006).

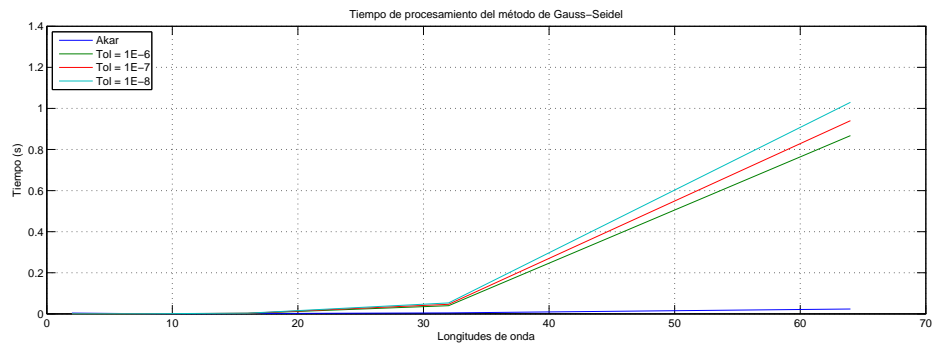


Figura 6: Tiempo utilizado por el método de Gauss-Seidel, según la tolerancia indicada, se incluye el tiempo usado por el algoritmo presentado en (Akar et al., 2006).

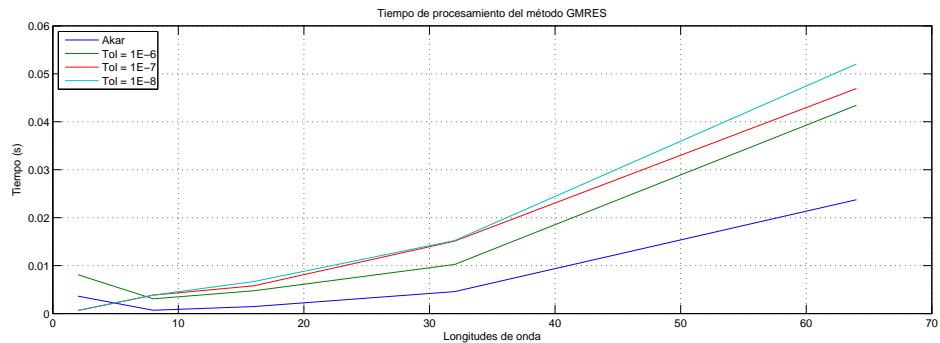


Figura 7: Tiempo utilizado por el método GMRES, según la tolerancia indicada, se incluye el tiempo usado por el algoritmo presentado en (Akar et al., 2006).



Figura 8: Error máximo del método de potencias con respecto a los resultados del método mostrado en (Akar et al., 2006), según la tolerancia indicada.



Figura 9: Error máximo del método de Gauss-Seidel con respecto a los resultados del método mostrado en (Akar et al., 2006), según la tolerancia indicada.



Figura 10: Error máximo del método GMRES con respecto a los resultados del método mostrado en (Akar et al., 2006), según la tolerancia indicada.

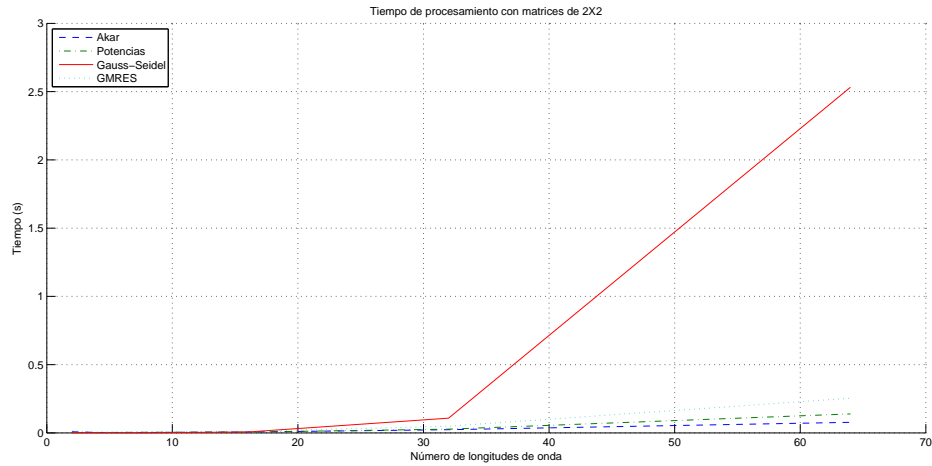


Figura 11: Tiempo de procesamiento para cada uno de los métodos de resolución, con 2 fases en la matriz MAP.

En la tabla 1 se muestra la probabilidad de pérdida de paquetes calculada para 3 diferentes escenarios con tres valores de tolerancia cada uno, mediante el uso de los métodos desarrollados. Dichos escenarios son:

- $K = 2, W = 1, \rho = 0,9975$, sin correlación entre los arribos y con 2 fases.
- $K = 16, W = 8, \rho = 0,9975$, sin correlación entre los arribos y con 2 fases.
- $K = 64, W = 32, \rho = 0,9975$, sin correlación entre los arribos y con 2 fases.

De dicha tabla se puede decir que los métodos producen resultados satisfactorios, y que, de los tres, el método de GMRES es el que mejor se comporta, obteniendo valores muy cercanos al verdadero aún utilizando tolerancias mayores que en los otros métodos.

En la tabla 2 se muestra el tiempo empleado por cada uno de los algoritmos con respecto al número de fases utilizadas. Además, la figura 11 muestra una comparación de los tiempos para cada uno de los métodos utilizados cuando el número de fases es de dos.

Las figuras 12, 13, 14 y 15 muestran el tiempo de procesamiento utilizado por cada uno de los métodos, con respecto al índice de correlación utilizado, esta probabilidad es mayor para el caso en el que la correlación en el proceso de arribos es

Tabla 1: Probabilidad de pérdida de paquetes

K = 2		
Método	Tolerancia	Probabilidad de pérdida de paquetes
Akar	N/A	0,230471679
Potencias	1E-6	0,230475631
	1E-7	0,230471998
	1E-8	0,230471705
Gauss-Seidel	1E-6	0,230471666
	1E-7	0,230471678
	1E-8	0,230471679
GMRES	1E-6	0,230471679
	1E-7	0,230471679
	1E-8	0,230471679
K = 16		
Método	Tolerancia	Probabilidad de pérdida de paquetes
Akar	N/A	0,003333753
Potencias	1E-6	0,003347127
	1E-7	0,003335114
	1E-8	0,003333883
Gauss-Seidel	1E-6	0,003332202
	1E-7	0,003333613
	1E-8	0,003333744
GMRES	1E-6	0,003333761
	1E-7	0,003333753
	1E-8	0,003333752
K = 64		
Método	Tolerancia	Probabilidad de pérdida de paquetes
Akar	N/A	$6,4085 \times 10^{-7}$
Potencias	1E-6	$7,4646 \times 10^{-7}$
	1E-7	$6,5080 \times 10^{-7}$
	1E-8	$6,4184 \times 10^{-7}$
Gauss-Seidel	1E-6	$6,2622 \times 10^{-7}$
	1E-7	$6,3937 \times 10^{-7}$
	1E-8	$6,4070 \times 10^{-7}$
GMRES	1E-6	$6,4108 \times 10^{-7}$
	1E-7	$6,4086 \times 10^{-7}$
	1E-8	$6,4085 \times 10^{-7}$

Tabla 2: Tiempo de procesamiento con respecto al número de fases usadas

K = 2		
Método	Número de fases	Tiempo (segundos)
Akar	3	0,001094
	4	0,001247
Potencias	3	0,000595
	4	0,001624
Gauss-Seidel	3	0,000194
	4	0,000276
GMRES	3	0,002382
	4	0,008578
K = 16		
Método	Número de fases	Tiempo (segundos)
Akar	3	0,008550
	4	0,012280
Potencias	3	0,007788
	4	0,020353
Gauss-Seidel	3	0,010312
	4	0,022054
GMRES	3	0,024988
	4	0,042631
K = 64		
Método	Número de fases	Tiempo (segundos)
Akar	3	0,105198
	4	0,160545
Potencias	3	0,168710
	4	0,267900
Gauss-Seidel	3	5,403185
	4	9,150301
GMRES	3	0,442679
	4	0,776600

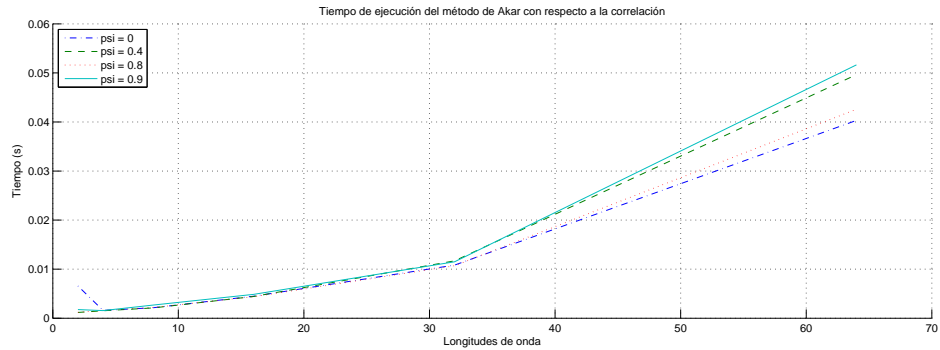


Figura 12: Tiempo de procesamiento con respecto al factor de correlación de arribos para el método de Akar.

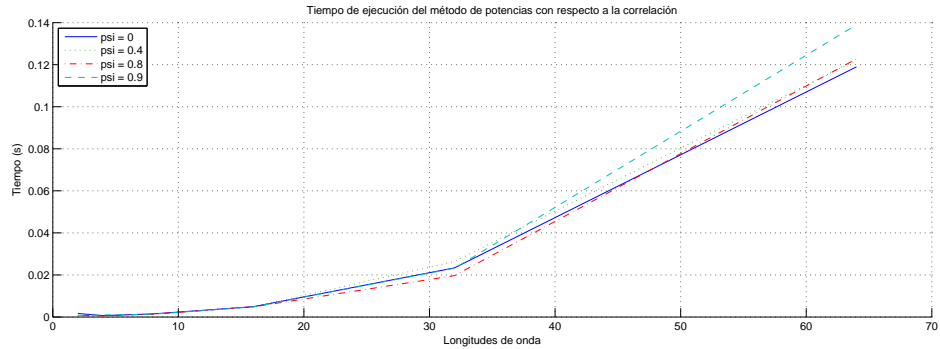


Figura 13: Tiempo de procesamiento con respecto al factor de correlación de arribos para el método de potencias.

mayor. La tabla 3 muestra las probabilidades de pérdida de paquetes con respecto a la correlación usada.

Por último, en la tabla 4 se muestran las probabilidades de pérdida de paquetes con respecto a la utilización usada. Para este caso, el coeficiente ψ de la correlación es cero. El número de fases usadas es de 2. Se puede observar como el método GMRES no obtiene los valores correctos de dicha probabilidad cuando esta es muy pequeña. A la vez, se observa como el tiempo empleado por el método de Gauss-Seidel es mucho más elevado que el de los demás en casos en los que el tamaño de la matriz generadora es muy alto.

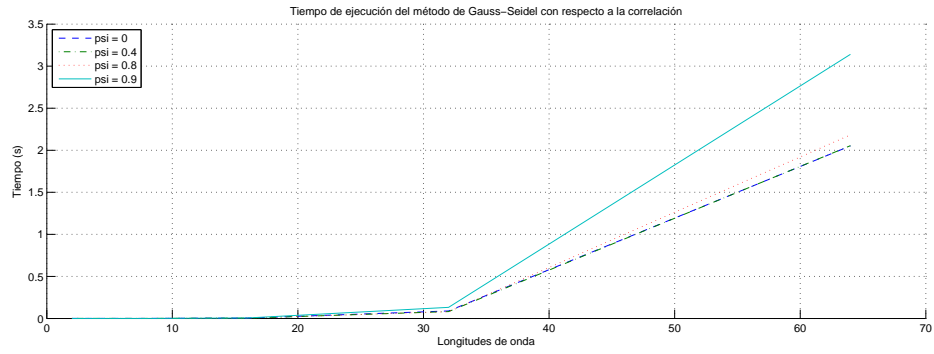


Figura 14: Tiempo de procesamiento con respecto al factor de correlación de arribos para el método de Gauss-Seidel.

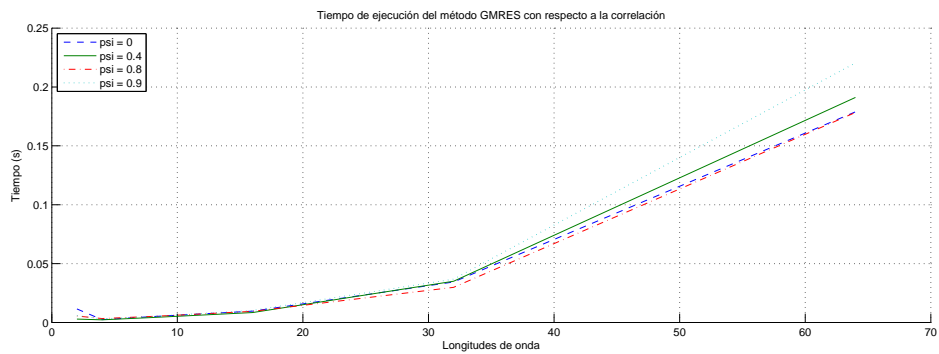


Figura 15: Tiempo de procesamiento con respecto al factor de correlación de arribos para el método de GMRES.

Tabla 3: Probabilidad de pérdida de paquetes con respecto a la correlación

K = 16		
Método	ψ	Probabilidad de pérdida de paquetes
Akar	0	0,000593126
	0.4	0,000336148
	0.9	0,004983209
Potencias	0	0,000593161
	0.4	0,00033616
	0.9	0,004983357
Gauss-Seidel	0	0,000593116
	0.4	0,000336144
	0.9	0,004983093
GMRES	0	0,000593126
	0.4	0,000336148
	0.9	0,004983209
K = 64		
Método	ψ	Probabilidad de pérdida de paquetes
Akar	0	$2,06756E - 08$
	0.4	$5,17086E - 09$
	0.9	$1,16284E - 05$
Potencias	0	$2,06966E - 08$
	0.4	$5,17532E - 09$
	0.9	$1,16319E - 05$
Gauss-Seidel	0	$2,06592E - 08$
	0.4	$5,16724E - 09$
	0.9	$1,16276E - 05$
GMRES	0	$2,06774E - 08$
	0.4	$5,17944E - 09$
	0.9	$1,16284E - 05$

Tabla 4: Probabilidad de pérdida de paquetes con respecto a la utilización

K = 16			
Método	ρ	Probabilidad de pérdida de paquetes	Tiempo (segundos)
Akar	0.25	$1,09408E - 07$	0,00444127
	0.5	$5,36195E - 05$	0,004792163
	0.75	$5,93126E - 04$	0,00812038
Potencias	0.25	$1,09410E - 07$	0,003512578
	0.5	$5,36214E - 05$	0,004532842
	0.75	$5,93161E - 04$	0,00722694
Gauss-Seidel	0.25	$1,09408E - 07$	0,002762169
	0.5	$5,36193E - 05$	0,003239076
	0.75	$5,93116E - 04$	0,005936415
GMRES	0.25	$1,09419E - 07$	0,005387384
	0.5	$5,36195E - 05$	0,007425077
	0.75	$5,93126E - 04$	0,015922282
K = 64			
Método	ψ	Probabilidad de pérdida de paquetes	Tiempo (segundos)
Akar	0.25	$6,24416E - 21$	0,056914782
	0.5	$9,22232E - 12$	0,060664801
	0.75	$2,06756E - 08$	0,056308215
Potencias	0.25	$6,24535E - 21$	0,094731012
	0.5	$9,22834E - 12$	0,127131088
	0.75	$2,06966E - 08$	0,134428125
Gauss-Seidel	0.25	$6,24411E - 21$	1,303860878
	0.5	$9,22079E - 12$	1,804936248
	0.75	$2,06592E - 08$	2,432504939
GMRES	0.25	$1,25039E - 13$	0,091604578
	0.5	$1,45758E - 11$	0,16064989
	0.75	$2,06774E - 08$	0,205369718

7.3. Evaluación del plan de trabajo

El plan de trabajo implementado ha permitido comprender la forma en que actúan los métodos de resolución utilizados. Gracias a la implementación inicial básica, la curva de aprendizaje de este tema no fue tan elevada como pudo haber sido. Sin embargo, el trabajo pudo haberse realizado mucho más rápido de lo ocurrido.

Capítulo VIII

Discusión

Para un trabajo futuro se podría incluir en el modelo el sistema de switch híbrido planteado en (Guo, Zhang, y Yang, 2011), donde se tiene un switch óptico que funciona junto a un buffer electrónico compartido. En este caso, el modelo debería adaptarse un poco, puesto que en los casos en los que se producía un paquete bloqueado en el modelo inicial, dicho paquete se agregaría a los que se encuentran en el buffer, hasta cuando se llena, momento en el cual los paquetes que arriban serían desechados. También se deben tener en cuenta las transiciones de la cadena en que una longitud de onda es liberada, considerando si se ha liberado o no un conversor de longitud de onda. En dichas transiciones se puede presentar una situación especial en la que hasta dos paquetes que se encuentran en el buffer son procesados.

La tabla 5 muestra los posibles estados a los que se puede enfrentar un paquete que arriba en los momentos en que, en el caso del modelo anterior, sería perdido. El buffer se considera de tamaño B y los estados son del tipo (b, i, j) donde b es el número de paquetes en el buffer, i es la cantidad de longitudes de onda ocupadas y j es la cantidad de conversores de longitud de onda utilizados en el momento. Como

Tabla 5: Arribo de un paquete

Estado actual	Estado siguiente	Probabilidad	Bloqueado
$(0, K, j)$	$(1, K, j)$	λ	No
$(0, i, W)$	$(1, i, W)$	$\lambda \cdot \frac{i}{K}$	No
(b, K, j)	$(b + 1, K, j)$	λ	No
(b, i, W)	$(b + 1, i, W)$	$\lambda \cdot \frac{i}{K}$	No
(B, K, j)	(B, K, j)	λ	Si
(B, i, W)	(B, i, W)	$\lambda \cdot \frac{i}{K}$	Si

Tabla 6: Paquete servido

Estado actual	Estado siguiente	Probabilidad
(b, K, j)	$(b - 1, K, j)$	$\mu \cdot \frac{W-j}{W} \cdot \frac{1}{K}$
(b, K, j)	$(b - 1, K, j + 1)$	$\mu \cdot \frac{W-j}{W} \cdot \frac{K-1}{K}$
(b, K, j)	$(b - 1, K, j - 1)$	$\mu \cdot \frac{j}{W} \cdot \frac{1}{K}$
(b, K, j)	$(b - 1, K, j)$	$\mu \cdot \frac{j}{W} \cdot \frac{K-1}{K}$
$(b, K, 0)$	$(b - 1, K, 0)$	$\mu \cdot \frac{1}{K}$
$(b, K, 0)$	$(b - 1, K, 1)$	$\mu \cdot \frac{K-1}{K}$
(b, i, W)	$(b - 1, i, W)$	$\mu \cdot \frac{1}{i} \cdot \frac{i-W}{i}$
(b, i, W)	$(b, i - 1, W)$	$\mu \cdot \frac{i-1}{i} \cdot \frac{i-W}{i}$
(b, i, W)	$(b - 2, i, W)$	$\mu \cdot \frac{1}{i} \cdot \frac{W}{i}$
(b, i, W)	$(b - 1, i, W)$	$\mu \cdot \frac{i-1}{i} \cdot \frac{W}{i}$

se puede observar, un paquete es descartado únicamente en los dos casos mostrados al final de dicha tabla.

En la tabla 6 se muestran los estados en los cuales hay paquetes en el buffer y uno de los paquetes en el switch es servido. En este caso se pueden presentar diferentes situaciones, como por ejemplo, que la longitud de onda liberada corresponde a la del primer paquete en el buffer, que se necesite un conversor para dicho paquete, o incluso, un caso muy particular en el que se puedan pasar dos paquetes desde el buffer hasta el switch.

Capítulo IX

Conclusiones

Se ha podido ver como es posible alcanzar tiempos de ejecución comparables al de un método directo, mediante la implementación de métodos generales, con algunos ajustes en su funcionamiento, de esta forma, es posible obtener soluciones a modelos, con errores aceptables, sin la necesidad de desarrollar métodos específicos para cada situación.

Se observó cómo al cambiar el tamaño de la matriz generadora, modificando el número de longitudes de onda, el de convertidores o la cantidad de fases, el tiempo de ejecución de los diferentes métodos variaba más que en el caso en el que se modificaban los valores de la matriz, al cambiar la correlación o la utilización.

Se encontraron algunas limitaciones en los métodos implementados. Estas incluían, entre otros, errores al calcular probabilidades de pérdida de paquetes muy pequeñas y tiempos de ejecución elevados.

Pese a la novedad del tema enfrentado, se pudo implementar soluciones razonables, alcanzando resultados satisfactorios en cuanto a precisión y velocidad de los diferentes métodos en la mayoría de los casos.

Referencias

- Akar, N., Karasan, E., y Dogan, K. (2006). Wavelength converter sharing in asynchronous optical packet/burst switching: An exact blocking analysis for markovian arrivals. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 24, 69–80.
- Guo, Z., Zhang, Z., y Yang, Y. (2011). Performance modeling of hybrid optical packet switches with shared buffer. En *IEEE INFOCOM, 2011 proceedings IEEE* (pp. 1692–1700).
- Kulkarni, V. G. (2010). *Introduction to modeling and analysis of stochastic systems* (2.^a ed.). New York: Springer.
- Latouche, G., y Ramaswami, V. (1999). *Introduction to matrix analytic methods in stochastic modeling* (ASA-SIAM, Ed.). American Statistical Association and the Society for Industrial and Applied Mathematics.
- Lucantoni, D. M., Meier-Hellstern, K. S., y Neuts, M. F. (1990). A single-server queue with server vacations and a class of non-renewal arrival processes. *Advances in Applied Probability*, 22, 676–705.
- Mitchell, K. (2001). Constructing a correlated sequence of matrix exponentials with invariant first-order properties. *Operations Research Letters*, 28, 27–34.
- Qiao, C., y Yoo, M. (1999). Optical burst switching (obs) - a new paradigm for an optical internet. *Journal of High Speed Networks, Special Issue on Optical Networks*, 8(1), 69–84.
- Stewart, W. J. (1994). *Introduction to the numerical solution of markov chains*. Princeton University Press.
- Turner, J. S. (1999). Terabit burst switching. *Journal of High Speed Networks*, 8(1), 3–16.



NIT: 860.007.386-1

**SISTEMA DE BIBLIOTECAS
IDENTIFICACIÓN TRABAJO DE
GRADO**

FECHA DE ELABORACIÓN		
DD	MM	AAAA
25	01	2012

I. IDENTIFICACIÓN AUTOR(ES) DEL TRABAJO DE GRADO

CÓDIGO	DOCUMENTO DE IDENTIDAD		APELLIDOS	NOMBRES	CORREO ELECTRÓNICO
	TIPO	NÚMERO			
200811821	CC <input type="checkbox"/>	1015419241	Caroprese Castro	Rafael	rafacaropre@gmail.com
	CC <input type="checkbox"/>				
	CC <input type="checkbox"/>				
	CC <input type="checkbox"/>				
	CC <input type="checkbox"/>				
	CC <input type="checkbox"/>				

PROGRAMA	Pregrado <input type="checkbox"/>	ENTREGÓ FORMATO: <input checked="" type="checkbox"/> SB-10 "Entrega trabajo de grado y autorización de uso a favor de la Universidad de los Andes". Documento con el cual, el autor permite que su trabajo sea utilizado por la Universidad, para fines de consulta y de mención en sus catálogos bibliográficos, tanto físicos como en línea.
FACULTAD	Facultad de Ingeniería <input type="checkbox"/>	
DEPARTAMENTO	Departamento de Ingeniería Eléctrica y Electrónica <input type="checkbox"/>	

I.1 IDENTIFICACIÓN DE TRABAJO DE GRADO PARA DOBLE TITULACIÓN

PROGRAMA	No Aplica <input type="checkbox"/>	TESIS PARA DOBLE TITULACIÓN: <input type="checkbox"/> Si el trabajo de grado presentado aplica para obtener dos (2) titulaciones, por favor marque esta casilla y diligencie la información de esta sección.
FACULTAD	No Aplica <input type="checkbox"/>	
DEPARTAMENTO	No Aplica <input type="checkbox"/>	

2. INFORMACIÓN GENERAL DEL TRABAJO DE GRADO**TÍTULO DEL TRABAJO DE GRADO:**

Análisis comparativo de métodos de resolución de cadenas de Markov aplicados a un switch óptico

DESCRIPCIÓN FÍSICA

Número de páginas: 37
 Ilustraciones: 15

MATERIAL ACOMPAÑANTE (Cantidad):

Casetes: _____ Discos compactos: _____
 Audio: _____ Diapositivas: _____
 Video: _____
 Disquetes: _____ Otros: ¿Cuáles? _____

FECHA DE ELABORACIÓN

DD	MM	AAAA

***RESUMEN DEL TRABAJO DE GRADO:**

Este proyecto reúne conceptos de diferentes campos de estudio, principalmente, de las telecomunicaciones, los procesos estocásticos y las matemáticas aplicadas. Es así como, partiendo de un switch óptico con características específicas (sin buffer, con múltiples longitudes de onda y conversores) y de su modelo se plantean diferentes métodos de resolución. En total se comparan cuatro métodos, el primero de ellos es el mostrado en (Akar et al., 2006), el cual es un método analítico-matricial que encuentra una solución exacta al problema; los otros tres son métodos numéricos para resolver sistemas lineales, dos de ellos de naturaleza iterativa, i.e. método de potencias y método de Gauss-Seidel, y el último un método de proyección, GMRES; al final de cada método se muestra el tiempo de cálculo y se obtiene el vector de probabilidades en estado estable, con el cual se pueden calcular parámetros como la probabilidad de pérdida de paquetes.

OBJETIVOS DEL TRABAJO DE GRADO:

...

METODOLOGÍA DEL TRABAJO DE GRADO:

CONCLUSIONES DEL TRABAJO DE GRADO:

...

*PALABRAS CLAVES (TEMAS) DEL TRABAJO DE GRADO:

Cadenas de Markov, GMRES, método de Gauss-Seidel, método de potencias, switch óptico.

ACUERDOS DE CONFIDENCIALIDAD: NO TIENE ACUERDO(S) TIENE ACUERDO(S)

Si selecciona tener acuerdo de confidencialidad, por favor diligencie el siguiente cuadro:

Persona natural o jurídica	Desde			Hasta		
	DD	MM	AAAA	DD	MM	AAAA

3. FIRMAS

AUTORES (Nombre completo)	*FIRMAS
Rafael Caroprese Castro	Rafael Caroprese
DIRECTORES / ASESORES (Nombre completo)	*FIRMAS
Juan Fernando Pérez Bernal	Juan Fernando Pérez Bernal
JURADO / LECTOR (Nombre completo)	*FIRMAS
Roberto Bustamante Miller	Roberto Bustamante

Las firmas de Autor y Director/Asesor son obligatorias. Si tiene inconvenientes con el registro de la firma del Jurado/Lector, deberá tramitar ante la respectiva Facultad la autorización para registrar las firmas de pares o un sello que justifique la ausencia de la firma faltante.

SB-09

Verificar Información

Imprimir



ENTREGA EJEMPLAR TRABAJO DE GRADO Y AUTORIZACIÓN DE SU USO A FAVOR DE LA UNIVERSIDAD DE LOS ANDES

Yo Rafael Caroprese Castro, mayor de edad, vecino de Bogotá D.C., identificado con la Cédula de Ciudadanía N° 1015419241 de Bogotá D.C., actuando en nombre propio, en mi calidad de autor del trabajo de tesis, monografía o trabajo de grado denominado: Análisis comparativo de métodos de resolución de cadenas de Markov aplicados a un switch óptico

, hago entrega del ejemplar respectivo y de sus anexos del ser el caso, en formato digital o electrónico (CD-ROM) y autorizo a LA UNIVERSIDAD DE LOS ANDES, para que en los términos establecidos en la Ley 23 de 1982, Ley 44 de 1993, Decisión Andina 351 de 1993, Decreto 460 de 1995 y demás normas generales sobre la materia, utilice y use en todas sus formas, los derechos patrimoniales de reproducción, comunicación pública, transformación y distribución (alquiler, préstamo público e importación) que me corresponden como creador de la obra objeto del presente documento. PARÁGRAFO: La presente autorización se hace extensiva no sólo a las facultades y derechos de uso sobre la obra en formato o soporte material, sino también para formato virtual, electrónico, digital, óptico, usos en red, internet, extranet, intranet, etc., y en general para cualquier formato conocido o por conocer.

EL AUTOR - ESTUDIANTES, manifiesta que la obra objeto de la presente autorización es original y la realizó sin violar o usurpar derechos de autor de terceros, por lo tanto la obra es de su exclusiva autoría y tiene la titularidad sobre la misma. PARÁGRAFO: En caso de presentarse cualquier reclamación o acción por parte de un tercero en cuanto a los derechos de autor sobre la obra en cuestión, EL ESTUDIANTE - AUTOR, asumirá toda la responsabilidad, y saldrá en defensa de los derechos aquí autorizados; para todos los efectos la Universidad actúa como un tercero de buena fe.

Para constancia se firma el presente documento en dos (02) ejemplares del mismo valor y tenor, en Bogotá D.C., a los veinticinco 25 días del mes de enero de Dos Mil doce 20 12.

EL AUTOR - ESTUDIANTE.

(Firma)

Rafael Caroprese

Nombre Rafael Caroprese Castro

C.C. N° 1015419241 de Bogotá D.C.

SB-10