

# **OPTIMIZACION DE UN PORTAFOLIO DE TES SUJETO A RESTRICCIONES EN EL VAR**

ANDRES JAVIER PERDOMO FORERO

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA INDUSTRIAL  
BOGOTA, D.C.  
2002

# **OPTIMIZACIÓN DE UN PORTAFOLIO DE TES SUJETO A RESTRICCIONES EN EL VAR**

ANDRES JAVIER PERDOMO FORERO

Trabajo de Grado para acceder al título de Ingeniero Industrial

Asesor:  
Héctor Fernando Beltrán PhD  
Profesor Asociado

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA INDUSTRIAL  
BOGOTA  
2002

Nota de aceptación:

---

---

---

---

---

---

---

---

Firma del presidente del jurado

---

Firma del jurado

---

Firma del asesor

Bogotá D.C., 30 de enero de 2003

A mis padres, quienes han sido mi mayor soporte durante mi carrera y mi vida.

## **AGRADECIMIENTOS**

Agradezco sinceramente a todas las personas que estuvieron presentes en la realización de este proyecto de grado. A los miembros del grupo de Investigación en Análisis de Riesgo Financiero GIRAFa, a mi asesor Fernando Beltrán y a Augusto Perilla por su gran colaboración y orientación, a mis antiguos compañeros del Banco de La República por su apoyo, a Javier Gómez y Nicolas Acevedo por los datos y a la comunidad GloriaMundi en Internet por la completa información sobre VaR.

A mi querida Universidad, su campus y su gente, con quien viví los seis mejores años de mi vida.

# CONTENIDO

|  | pág. |
|--|------|
| 1. INTRODUCCIÓN.....   | 9    |
| 2. EL RIESGO DE MERCADO .....  | 11   |
| 2.1 EL RIESGO FINANCIERO .....   | 11   |
| 2.2 VALOR EN RIESGO Y VALOR EN RIESGO CONDICIONAL .....                    | 12   |
| 2.3 PANORAMA INTERNACIONAL .....   | 16   |
| 2.4 PANORAMA NACIONAL.....   | 17   |
| 3. MODELO DE OPTIMIZACION DE PORTAFOLIO CON RESTRICCIONES EN EL CVAR ..... | 20   |
| 3.1 MINIMIZACIÓN DE CVAR.....  | 20   |
| 3.2 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA DE OPTIMIZACIÓN.....                          | 23   |
| 3.3 DISCRETIZACIÓN Y LINEALIZACIÓN .....                                   | 24   |
| 4. METODOLOGÍA.....  | 25   |
| 4.1 SELECCIÓN DE TÍTULOS.....  | 25   |
| 4.2 GENERACIÓN DE ESCENARIOS .....   | 27   |
| 4.3 IMPLEMENTACIÓN DEL MODELO DE OPTIMIZACIÓN .....                        | 30   |
| 5. RESULTADOS .....  | 32   |
| 6. COMPARACIÓN CON EL MÉTODO DE MÍNIMA VARIANZA.....                       | 36   |
| 7. CONCLUSIONES .....  | 41   |
| BIBLIOGRAFÍA.....  | 43   |

## INDICE DE ILUSTRACIONES

|   | pág. |
|---|------|
| Figura 1. Valor en Riesgo como percentil de la distribución de rentabilidad.....  | 13   |
| Figura 2. Convexidad del Valor en Riesgo Condicional.....   | 15   |
| Figura 3. Pasos para la selección de títulos .....  | 27   |
| Figura 4. Pasos para la generación de escenarios .....  | 30   |
| Figura 5. Pasos para la implementación del modelo de optimización y creación de<br>la frontera eficiente .....                  | 31   |
| Figura 6. Diferentes aproximaciones de la frontera eficiente .....  | 33   |
| Figura 7. Frontera eficiente para 1000 escenarios.....  | 33   |
| Figura 8. Combinaciones de pérdidas esperadas y VaR para los títulos.....   | 35   |
| Figura 9. Fronteras eficientes en términos de VaR, para los métodos de<br>Minimización de Varianza y Minimización de CVaR. .... | 37   |
| Figura 10. Distribución de pérdidas de portafolio óptimo con VaR = 2.55. ....   | 38   |
| Figura 11. Distribución de pérdidas de portafolio óptimo con VaR = 1.86. ....   | 39   |
| Figura 12. Fronteras eficientes para los dos métodos en términos de Varianza ...  | 40   |

## INDICE DE TABLAS

|   | pág. |
|---|------|
| Tabla 1. Títulos seleccionados.....   | 26   |
| Tabla 2. Posiciones óptimas del portafolio.....                                   | 34   |
| Tabla 3. Posiciones óptimas del portafolio por el método de Varianza Mínima. .... | 36   |



# 1. INTRODUCCIÓN

El riesgo es un factor que cobra cada vez más importancia para la administración financiera. Las nuevas tendencias internacionales en materia de regulación de riesgo financiero, que pretenden garantizar la solidez de los sistemas y la incursión de este tipo de políticas en la reglamentación colombiana, obligan a las instituciones financieras del país a ser actores cada vez más involucrados y activos en el proceso de medición, manejo y control del riesgo al que se ven expuestos.

El Valor en Riesgo (VaR), es la medida de riesgo de mayor importancia en la actualidad, debido a que los organismos reguladores se basan en ésta para calcular los niveles mínimos de capital que les exigen a las entidades para compensar su exposición al riesgo.

El presente proyecto implementa una metodología de medición y control de riesgo de mercado medido a través de VaR, por medio de la aplicación de un reciente algoritmo de optimización de portafolio, a los instrumentos de deuda pública más activos del mercado de capitales colombiano, los Títulos de Tesorería TES.

Se construye un portafolio compuesto por los TES más líquidos del mercado, en proporciones que arrojan, para un nivel de riesgo determinado, la mayor rentabilidad esperada posible.

Inicialmente se identifican las características de los Títulos de Tesorería de mayor circulación en el mercado de capitales del país y se seleccionan los de mayor relevancia en cuanto a su transabilidad y volumen. Para esto se toman las características principales de los diferentes tipos de TES que circulan en el mercado colombiano, se ordenan según su relevancia y se escogen los más representativos. Además se identifican sus diferentes fuentes de incertidumbre y una manera de modelarlas.

Por último, se aplica el algoritmo de optimización, a los instrumentos previamente seleccionados, para encontrar el portafolio que muestra la mayor rentabilidad para ciertos valores de su nivel de riesgo. De esta manera, se construye una frontera eficiente, donde se muestra un conjunto de combinaciones óptimas de riesgo y rentabilidad para dicho portafolio. Estos resultados son comparados al realizar cambios en el número de escenarios con los que se realiza la optimización y también con los obtenidos por el método de Mínima Varianza.

En el capítulo dos, se realiza una breve introducción al riesgo financiero, explicando el significado de riesgo de mercado, los métodos de medición y la regulación nacional e internacional que existe al respecto. En el tercer y cuarto capítulo, se describe el modelo de optimización empleado y la metodología que se utiliza para implementarlo, respectivamente.

Finalmente, se muestran los resultados de la optimización por medio de la frontera eficiente del portafolio; además, se realiza al final una comparación con los resultados obtenidos a través de la metodología de Mínima Varianza; estos resultados se muestran en los capítulos cinco y seis.

## **2. EL RIESGO DE MERCADO**

### **2.1 EL RIESGO FINANCIERO**

Las instituciones financieras se enfrentan a múltiples fuentes de incertidumbre, generadas por diversos factores controlables y no controlables para la compañía. En épocas como la actual, el fácil acceso a los mercados mundiales, el confuso panorama de seguridad internacional y las frecuentes crisis económicas en países en vía de desarrollo y aún en los desarrollados, son algunos de los principales factores que generan incertidumbre.

El riesgo financiero se define como el grado de incertidumbre de los retornos futuros de un portafolio de inversiones de una compañía, y es un factor de vital importancia en la toma de decisiones, ya que su magnitud muestra la pérdida potencial de recursos a la que se está enfrentado. Por esta razón, la administración del riesgo financiero ha cobrado en los últimos años una importancia sin precedentes como herramienta de planeación, manejo y control de los portafolios de inversión.

La administración del riesgo es el proceso por el cual se identifica, mide y controla la exposición al riesgo. Las instituciones saben que deben medir las fuentes de incertidumbre tan precisamente como sea posible para valorar y controlar adecuadamente el riesgo. Manejar el riesgo significa para la administración financiera, estar en la capacidad de realizar planeación para enfrentar las consecuencias de escenarios adversos.

Existen varios tipos de riesgo financiero, entre los cuales los más importantes son el riesgo de mercado y el riesgo crediticio, pero también existen el riesgo de liquidez, operacional y legal.

El riesgo de mercado se origina por la presencia de diversos factores incontrolables que poseen un comportamiento incierto, debido a cambios en las condiciones de mercado, como la tasa de interés, el tipo de cambio y el precio de las acciones y de los artículos de consumo. Los inversionistas tratan de anticipar eventos y expresan su opinión al respecto en el precio que pagan por los activos. Las expectativas y acciones que de ellas se derivan se basan en eventos de orden político, social y económico.

El riesgo crediticio se origina por el hecho de que las contrapartes en una transacción o acuerdo financiero, pueden incumplir sus obligaciones contractuales. El aumento de este riesgo depende del deterioro de la estructura financiera de una contraparte, que puede llevar a disminuir su capacidad de pago. Este riesgo se relaciona directamente con la forma en que las entidades financian sus actividades, su estructura de capital y su evolución financiera.

El riesgo operacional se genera por la posibilidad de que existan errores en la realización de transacciones. El riesgo de liquidez se refleja en la incapacidad de una firma para soportar sus activos ilíquidos.

## **2.2 VALOR EN RIESGO Y VALOR EN RIESGO CONDICIONAL**

Las instituciones financieras usualmente calculan medidas de riesgo para todas las variables de mercado a las cuales están expuestas. Pero se necesita una medida de riesgo que resuma el riesgo total de un portafolio de activos financieros. Valor en Riesgo (VaR: Value at Risk), es la medida de riesgo más utilizada en la actualidad por las entidades financieras en el mundo y además posee el más alto estatus en la industria reguladora.

Valor en Riesgo (VaR) permite cuantificar la exposición al riesgo de mercado, utilizando técnicas estadísticas tradicionales; con éste, se mide la pérdida que se podría sufrir en condiciones normales de mercado en un intervalo de tiempo determinado y con un cierto nivel de probabilidad o de confianza<sup>1</sup>. Es una medida estadística de riesgo utilizada frecuentemente por instituciones que desean medir los riesgos en portafolios de inversión.

La filosofía general de la metodología de VaR, radica en conocer con una certeza del X por ciento, que el portafolio de la compañía no perderá más que una cierta cantidad de dinero V, en los próximos N días. Donde la variable V es el VaR del portafolio y es función de N, el horizonte de tiempo y de X, el nivel de confianza. La figura 1, muestra gráficamente la filosofía del cálculo del VaR.

Uno de los principales atractivos del VaR es que es un concepto fácil de entender y a ello se debe su gran aceptación. Adicionalmente, el cálculo del VaR para un portafolio se puede descomponer en valores marginales para cada uno de los activos que lo componen, es decir, se puede identificar la contribución de cada activo al VaR total del portafolio.

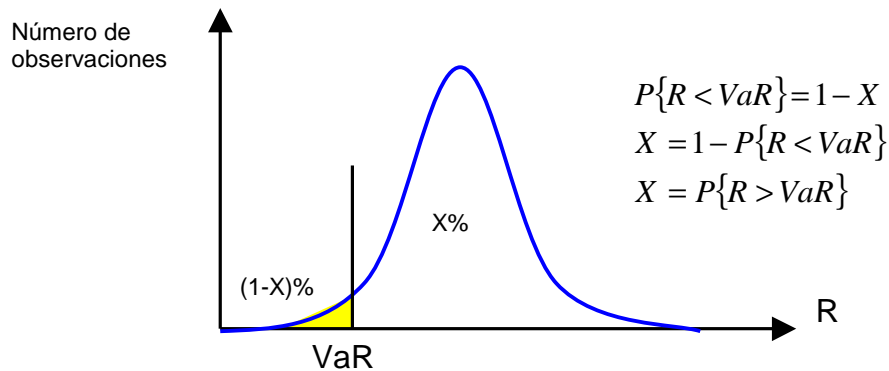
Al utilizar VaR como medida de riesgo, se cumple el principio de diversificación o subaditividad, es decir el VaR total de un portafolio será menor o igual que la suma

---

<sup>1</sup> JORION, Philippe. Value At Risk. Nueva York: McGraw-Hill, 2001. p.22.

de los VaR de cada uno de los activos que lo componen, vistos de manera independiente<sup>2</sup>.

Figura 1. Valor en Riesgo como percentil de la distribución de rentabilidad



Fuente: Risk Metrics. Technical Document

Los reguladores del sector financiero usualmente utilizan, para calcular el capital requerido de un banco, un horizonte de tiempo N de 10 días y un intervalo de confianza X del 99%. El capital requerido suele entonces ser 3 veces el VaR de 10 días con un 99% de confiabilidad<sup>3</sup>.

Existen en la actualidad varios métodos para calcular el VaR de un portafolio; entre estos encontramos los modelos delta, simulación histórica y simulación de Monte Carlo. Todos estos métodos poseen ciertas ventajas y desventajas sobre los otros, y su principal diferencia radica en su desempeño en cuanto a velocidad de computación y en la exactitud de la valoración. El método delta es relativamente fácil de implementar y posee una buena precisión, pero no es apropiado para portafolios con opciones. El modelo de simulación histórica es también de fácil implementación porque se adecua a todo tipo de activos, pero su precisión depende bastante del intervalo de tiempo sobre el cual se estiman sus parámetros. La simulación de Monte Carlo es uno de los métodos más versátiles, al permitir incorporar una mayor variedad de supuestos sobre los parámetros, escenarios, distribuciones y tipo de activos, que en los métodos anteriores, pero esta flexibilidad es compensada por un aumento en su dificultad de implementación y requerimientos computacionales<sup>4</sup>.

Aunque la metodología VaR se desarrolló inicialmente para medición de riesgo de mercado, se han desarrollado nuevos métodos que permiten la extensión del

<sup>2</sup>JORION, Value at Risk, Op. Cit., p.74.

<sup>3</sup>HULL, John. Options, Futures and other Derivatives. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2000. p.342.

<sup>4</sup>JORION, Value at Risk, Op. Cit., p.224.

modelo para ser aplicado como medida integral del riesgo financiero de una entidad, incluyendo riesgo crediticio y de liquidez.

A pesar de la popularidad y gran aceptación del VaR en la industria financiera, éste posee ciertas deficiencias como medida de riesgo y también presenta dificultades numéricas, cuando se trabaja con escenarios de pérdidas que no son normalmente distribuidos, lo cual ocurre en la mayoría de los casos, debido a que estas distribuciones tienden a presentar ciertas características, como extremos abultados, que una distribución normal no es capaz de modelar<sup>5</sup>.

Recientemente, se han establecido cuatro propiedades deseables en las medidas de riesgo, las cuales son:<sup>6</sup>

- Monotonicidad: Si un portafolio tiene sistemáticamente mayores retornos que otro para todos los estados del mundo, entonces su riesgo debe ser mayor.
- Invarianza de translación: Al adicionar una cierta cantidad de efectivo a un portafolio, se debe reducir su riesgo en esa misma cantidad.
- Homogeneidad: Al incrementar el tamaño de portafolio en una cierta cantidad, el riesgo del portafolio debe incrementarse en esa misma cantidad.
- Subaditividad: El riesgo de un portafolio compuesto por dos o más activos, debe ser menor que la suma de los riesgos individuales de cada uno de los activos.

VaR no cumple la última propiedad, especialmente cuando los retornos no se distribuyen normalmente<sup>7</sup>.

Como ya se mencionó, VaR muestra un límite para las pérdidas con una confiabilidad dada, pero no provee control sobre los casos en los que las pérdidas superan esta cantidad. Es incapaz de distinguir entre situaciones donde las pérdidas esperadas por encima de su valor sean considerables, a una situación que posea un VaR similar, pero donde las pérdidas esperadas superando esta medida no sean tan alarmantes<sup>8</sup>.

Adicionalmente, VaR es un indicador del límite inferior del extremo de la distribución de pérdidas, mostrando una desviación hacia el optimismo en vez de mantener el conservatismo que debe prevalecer en la administración del riesgo.

---

<sup>5</sup> ROCKAFELLAR, Tyrrell y URYASEV, Stanislav. Conditional Value At Risk for General Loss Distributions. Gainesville: 2001. p.2.

<sup>6</sup> ARTZNER, Philippe et al. Coherent Measures of Risk. 1999. p.18.

<sup>7</sup> JORION, Value at Risk, Op. Cit., p.114.

<sup>8</sup> ROCKAFELLAR, Op. Cit., p.2.

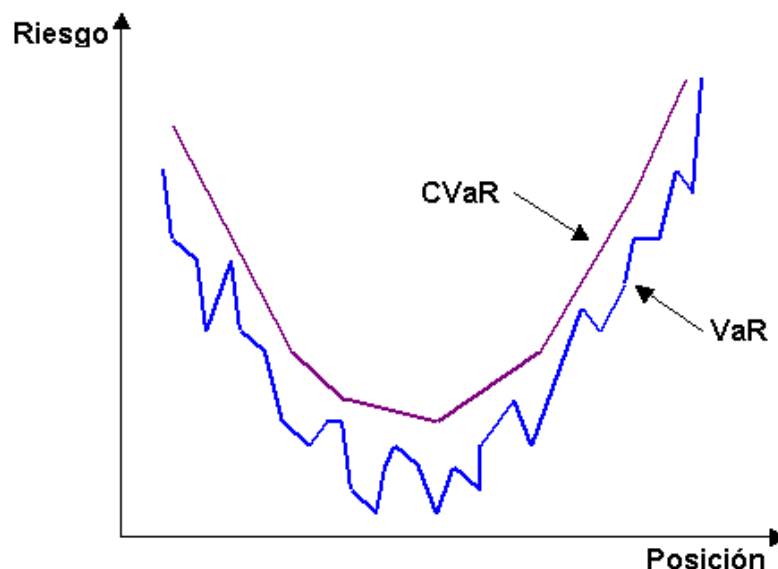
Una medida de riesgo alterna, que cuantifica el valor esperado de las pérdidas cuando estas superan el VaR, es el Valor en Riesgo Condicional (CVaR, Conditional Value at Risk).

Recientes investigaciones han demostrado que, como herramienta en modelos de optimización y como medida de riesgo en general, CVaR posee propiedades superiores que VaR, manteniendo consistencia con VaR cuando se trabaja con distribuciones de pérdidas normalmente distribuidas<sup>9</sup>.

Dentro de las principales características que hacen más atractivo al CVaR frente al VaR se encuentran su coherencia como medida de riesgo, ya que cumple las cuatro propiedades deseadas en este tipo de medidas, su estabilidad con respecto al nivel de significancia y su convexidad con respecto a las posiciones en el portafolio<sup>10</sup>.

Esta última característica, es una de las principales razones por las que se prefiere utilizar CVaR en problemas de optimización. A diferencia de VaR, el Valor en Riesgo Condicional muestra convexidad con respecto a las posiciones en el portafolio, lo cual es una gran ventaja al tratar de encontrar combinaciones óptimas de posiciones, debido a la inexistencia de múltiples extremos locales que puedan dificultar la búsqueda de la mejor solución global<sup>11</sup>. En la figura 2 se puede apreciar esta característica.

Figura 2. Convexidad del Valor en Riesgo Condicional



Fuente: Uryasev, Stanislav. Conditional Value At Risk: Algorithms and Applications.

<sup>9</sup> Ibid., p.2.

<sup>10</sup> ARTZNER, Coherent Measures of Risk, Op. Cit., p.20.

<sup>11</sup> ROCKAFELLAR, Conditional Value At Risk for General Loss Distributions, Op. Cit., p.2.

Finalmente, en problemas de optimización cuando se trabaja con CVaR, se pueden emplear métodos de programación lineal<sup>12</sup>, lo cual permite optimizar portafolios con grandes números de activos y escenarios con relativa facilidad.

Experimentos numéricos indican que la minimización de CVaR, se aproxima a las soluciones óptimas en términos del VaR, debido a que CVaR es siempre mayor o igual que el VaR<sup>13</sup>.

## **2.3 PANORAMA INTERNACIONAL**

En el año de 1974, los gobernadores de los bancos centrales del grupo G10, establecieron el Comité de Supervisión Bancaria de Basilea, con el fin de mejorar la colaboración entre las autoridades de supervisión bancaria. El objetivo principal del Comité de Basilea es el de garantizar una supervisión eficaz de las actividades bancarias en todo el mundo; para esto, el Comité intenta mejorar las normas de supervisión, particularmente en lo que respecta a la solvencia, con el objetivo de reforzar la solidez y estabilidad de la actividad bancaria internacional. Su documento más conocido es el Acuerdo de Capital de Basilea de 1988, diseñado para conseguir una convergencia internacional respecto del nivel de adecuación de capital de los bancos, y para establecer unas exigencias mínimas al respecto.

En la actualidad el Comité se encuentra trabajando, en conjunto con autoridades bancarias de todo el mundo, en la construcción de un nuevo acuerdo que permita armonizar mejor la suficiencia de capital con elementos claves de los riesgos bancarios y ofrecer incentivos a los bancos para que mejoren su capacidad de medir y manejar estos riesgos. Como principio para el desarrollo del nuevo marco, se estableció que es imposible alcanzar los objetivos de solidez y seguridad empleando únicamente los requisitos de capital mínimo, y por ello el nuevo acuerdo se encuentra soportado en tres pilares básicos, mutuamente reforzantes: requisitos de capital mínimo, examen supervisor y disciplina de mercado. Juntos, estos tres pilares contribuyen a elevar el nivel de seguridad y solidez en el sistema financiero<sup>14</sup>.

Los requisitos de capital mínimo hacen referencia a la cantidad mínima de capital que deben poseer los bancos y demás entidades financieras, como respaldo del riesgo crediticio, operativo y de mercado, al cual se encuentran expuestas en su diaria actividad. Este valor se puede calcular como un porcentaje fijo de un indicador de riesgo previamente establecido.

---

<sup>12</sup> KROKHMAL, Pavlo; PALMQUIST, Jonas y URYASEV, Stanislav. Portfolio Optimization with Conditional Value at Risk Objective and Constrains. 2001. p.6.

<sup>13</sup> Ibid., p.5.

<sup>14</sup> BASEL COMMITTEE ON BANKING SUPERVISIÓN. An Internal Model-Based Approach to Market Risk capital Requirements. 1995. p.8.



El proceso de examen supervisor, se compone de cuatro actividades básicas desarrolladas en conjunto entre bancos y reguladores:

1. Evaluación de la suficiencia de capital por los bancos. Es la dirección del banco la responsable de manejar los riesgos y asegurar que el capital mantenido por el banco corresponda a su perfil de riesgo.
2. Examen de las valoraciones y estrategias de la suficiencia de capital.
3. Exigencia de trabajo por encima de los mínimos.
4. Intervención con prontitud cuando se presenten insuficiencias.

La utilización eficaz de la disciplina de mercado, tiene como premisa principal la divulgación de información y transparencia ante los participantes del mercado sobre los valores de capital y riesgo a los que se someten las entidades.

Un elemento a resaltar, presente en el nuevo acuerdo, es el énfasis sobre la evaluación por los mismos bancos, de los riesgos a los que se exponen al calcular las exigencias de capital regulador<sup>15</sup>.

## **2.4 PANORAMA NACIONAL**

En el plano colombiano, la Superintendencia Bancaria de Colombia, en su calidad de autoridad supervisora de la actividad financiera del país, por medio de la circular externa 042 de 2001, define los criterios y procedimientos que deben seguir los establecimientos de crédito para la medición de su exposición a los riesgos de mercado, con el fin de asegurar que la operación del sistema financiero se realice en condiciones de seguridad, transparencia y eficacia.

Es importante anotar que la Superintendencia, por medio de la aplicación de ésta normatividad, pretende incorporar los aspectos más relevantes de los estándares internacionales en materia de medición, control y gestión de riesgos de mercado<sup>16</sup>, como los establecidos en el Acuerdo de Basilea, para que las instituciones mantengan en todo momento un monto de capital adecuado que guarde correspondencia con los niveles de riesgo asumidos.

Para la medición de la exposición a los riesgos de mercado, los establecimientos de crédito deberán determinar el efecto que cambios en las condiciones de mercado pueden tener sobre el valor económico de su patrimonio.

Esta medición se realizará utilizando modelos internos de valoración de riesgo o en su defecto, el modelo estándar planteado por la Superintendencia Bancaria.

---

<sup>15</sup> Ibid., p.10.

<sup>16</sup> COLOMBIA. SUPERINTENDENCIA BANCARIA. Circular Externa 042. 2001. p.1.

El modelo planteado por la Superintendencia Bancaria, aplica los conceptos estadísticos de la metodología VaR, realizando algunas adaptaciones al entorno nacional, manejando varios supuestos y utilizando parámetros de entrada del modelo que en ciertos casos son calculados directamente por dicha entidad.

Para determinar el riesgo de tasa de interés, el modelo estándar utiliza el concepto de duración y emplea un sistema de bandas de tiempo que permite asumir cambios no paralelos en la estructura a término de las tasas de interés. Se mide de manera separada la exposición para las posiciones en moneda legal, moneda extranjera y UVR. La valoración del riesgo por tasa de cambio se realiza mediante la estimación de las máximas pérdidas probables derivadas de variaciones en las tasas de cambio de cada divisa en la que se posean inversiones, mediante la multiplicación de cada posición neta expresada en moneda legal por la variación máxima probable en la tasa de cambio correspondiente. Similares procedimientos se realizan para la estimación del valor en riesgo debido a cambios en el valor de la UVR, cartera hipotecaria y precio de acciones.

Las entidades que posean modelos internos de medición de riesgos podrán emplearlos para efectos de cumplir con la reglamentación siempre y cuando cumplan con los requisitos cualitativos y cuantitativos que exige la Superintendencia.

Los requisitos cualitativos hacen referencia a actividades de control y seguimiento de la entidad sobre el desempeño del modelo, acompañadas de políticas claras sobre el manejo y control adecuado de sus riesgos.

Adicionalmente, los modelos internos deberán cumplir como mínimo, con los siguientes requisitos cuantitativos:

- Para las posiciones del libro de tesorería se debe manejar un periodo de tenencia de 10 días. Para las posiciones del libro bancario, se debe emplear un cambio en los precios para un periodo de un año.
- Para la estimación de parámetros estadísticos del modelo se debe considerar un periodo de observación efectivo de por lo menos 4 años.
- Los Valores en riesgo deberán ser estimados utilizando un intervalo de confianza mínimo del 98%.
- Deben estar en la capacidad de efectuar mediciones que contemplen escenarios extremos, deben capturar los principales factores de riesgo a los que se está expuesto, con la posibilidad de considerar sus correlaciones, entre otros.

Hasta el momento, son escasas las entidades que utilizan modelos internos de valoración de riesgos. Por su parte, el papel de algunos bancos nacionales en la implementación del modelo planteado por la Superintendencia Bancaria, se

restringe únicamente a cumplir con el requisito que ésta le exige, sin utilizar este instrumento de manera eficaz en su política de inversiones y en la administración de su portafolio.

Este panorama se puede explicar principalmente, por la escasa cultura de manejo de riesgo que existe en nuestro país y la relativamente nueva teoría que se ha desarrollado en el mundo acerca del tema, por lo cual ciertas entidades nacionales no poseen aún la capacidad, en recursos humanos y técnicos, para explotar el enorme potencial de la herramienta e implementar eficazmente un programa de manejo integrado del riesgo.

Cuando el riesgo se maneja de manera eficiente, puede ser considerado como el precio que se paga por obtener una mayor rentabilidad. Las instituciones financieras colombianas que no realizan un manejo adecuado del riesgo de sus portafolios, no son capaces de saber si están pagando el menor precio, medido a través de su riesgo, por la utilidad que reciben, es decir, si están obteniendo el mayor beneficio posible para el riesgo al que se encuentran enfrentadas.

Además, el hecho de tener que destinar una parte de sus recursos a cubrir su exposición, por medio del capital de riesgo exigido por el ente regulador, es un factor que obliga a las instituciones financieras que deseen usar sus recursos de manera eficiente, a minimizar su VaR para la rentabilidad que desean obtener o equivalentemente, a maximizar los ingresos para el nivel de riesgo que estén dispuestas a asumir.

### 3. MODELO DE OPTIMIZACION DE PORTAFOLIO CON RESTRICCIONES EN EL CVAR

Desde la aparición de VaR como medida de riesgo, se le ha dado una gran importancia al desarrollo y análisis de los métodos para calcularlo. Recientemente, se han comenzado a implementar modelos que buscan encontrar una combinación óptima de los activos que conforman un portafolio, de tal forma que se obtengan los más altos resultados en la rentabilidad total del portafolio, cumpliendo con un límite establecido para su VaR.

El problema de optimización de portafolio sujeto a restricciones en el VaR, consiste en un problema de optimización no lineal muy difícil de manejar cuando se evalúan portafolios que manejan una gran cantidad de activos. Por medio de la creación de medidas de riesgo derivadas del VaR, tales como el Valor en Riesgo Condicional (CVaR), se ha pretendido manipular el modelo de optimización para poder resolverlo por medio de programación lineal, manteniendo los atributos del problema inicial<sup>17</sup>.

A continuación se describirá el método de optimización de portafolio con restricciones en el CVaR desarrollado por R. Tyrrell Rockafellar y Stanislav Uryasev<sup>18</sup>, en el cual se basa el presente proyecto.

#### 3.1 MINIMIZACIÓN DE CVAR

Sea  $f(X,Y)$  la función de pérdidas asociada con el vector de decisión  $\mathbf{x}$ , que es escogido de un conjunto  $\mathbf{X}$  en  $\mathbf{R}^n$  y el vector aleatorio  $\mathbf{y}$  en  $\mathbf{R}^m$ . El vector  $\mathbf{y}$  representa las incertidumbres que pueden afectar la pérdida.

Para cada  $\mathbf{x}$ , la pérdida  $f(X,Y)$  es una variable aleatoria que posee una función de densidad en  $\mathbf{R}$  denotada por  $p(\mathbf{y})$ , la cual es inducida por la distribución de  $\mathbf{y}$ . La probabilidad de que  $f(X,Y)$  no supere un valor dado  $\zeta$ , está dada por:

$$\Psi(x, \zeta) = \int_{f(x,y) \leq \zeta} p(y) dy$$

---

<sup>17</sup> ROCKAFELLAR, Tyrrell y URYASEV, Stanislav. Optimization of Conditional Value at Risk. 1999. p.3.

<sup>18</sup> Ibid. p.3.

Como función de  $\zeta$ , para un  $\mathbf{x}$  fijo,  $\Psi(x, \zeta)$  es la función acumulada de la pérdida asociada con  $\mathbf{x}$ . Esta determina completamente el comportamiento de esta variable aleatoria y es fundamental en la definición de VaR y CVaR.

La función  $\Psi(x, \zeta)$ , es no decreciente con respecto a  $\zeta$  y se asume que  $\Psi(x, \zeta)$  es continua en todo punto con respecto a  $\zeta$ .

Los valores de  $\alpha$ -VaR y de  $\alpha$ -CVaR para la pérdida asociada con  $\mathbf{x}$  y a un nivel de probabilidad específico  $\alpha$ , será denotado por  $\zeta_\alpha(x)$  y  $\phi_\alpha(x)$ . Estos dos valores están dados por:

$$\zeta_\alpha(x) = \min\{\zeta \in R : \Psi(x, \zeta) \geq \alpha\}$$

y por:

$$\phi_\alpha(x) = (1 - \alpha)^{-1} \int_{f(x, y) \geq \zeta_\alpha(x)} f(x, y) p(y) dy$$

En la primera fórmula,  $\zeta_\alpha(x)$  resulta ser el punto izquierdo del intervalo que contiene los valores de  $\zeta$ , tales que  $\Psi(x, \zeta) = \alpha$ . En la segunda fórmula, la probabilidad que  $f(x, y) \geq \zeta_\alpha(x)$  es por lo tanto igual a  $1 - \alpha$ . Entonces,  $\phi_\alpha(x)$  resulta ser el valor esperado condicional de la pérdida asociada con  $\mathbf{x}$ , relativo a que esa pérdida es mayor o igual que  $\zeta_\alpha(x)$ .

La clave de la aproximación es una caracterización de  $\phi_\alpha(x)$  y  $\zeta_\alpha(x)$  en términos de la función  $F_\alpha$  en  $X \times R$  que se define como:

$$F_\alpha(x, \zeta) = \zeta + (1 - \alpha)^{-1} \int_{y \in R^n} [f(x, y) - \zeta]^+ p(y) dy$$

Donde  $[t]^+ = \max(t, 0)$ . Las principales características de  $F_\alpha$ , bajo los supuestos mencionados son:

**Teorema 1:** Como función de  $\zeta$ ,  $F_\alpha(x, \zeta)$  es convexa y diferenciable continuamente. El  $\alpha$ -CVaR de la pérdida asociada con algún  $\mathbf{x} \in X$  puede ser determinado por la fórmula:

$$\phi_\alpha(x) = \min_{\zeta \in R} F_\alpha(x, \zeta)$$

En esta fórmula, el conjunto de valores de  $\zeta$  para el cual se obtiene el óptimo, denominado:

$$A_\alpha(x) = \arg \min_{\zeta \in R} F_\alpha(x, \zeta)$$

es un intervalo acotado, cerrado y no vacío, y el  $\alpha - VaR$  de la pérdida está dado por:

$$\zeta_\alpha(x) = \text{punto extremo izquierdo de } A_\alpha(x)$$

En particular, siempre se tiene que:

$$\zeta_\alpha(x) \in \arg \min_{\zeta \in R} F_\alpha(x, \zeta) \text{ y } \phi_\alpha(x) = F_\alpha(x, \zeta_\alpha(x))$$

Para una explicación de la convexidad, la cual es una propiedad clave en optimización, que elimina la posibilidad de que un mínimo local sea diferente de un mínimo global, ver Rockafellar (1970). Otras importantes ventajas de ver el VaR y el CVaR a través de las fórmulas del teorema 1, se muestran en el siguiente teorema:

**Teorema 2:** Minimizar el  $\alpha - CVaR$  de la pérdida asociada con  $\mathbf{x}$  sobre todos los  $\mathbf{X}$  es equivalente a minimizar  $F_\alpha(x, \zeta)$  sobre todos los  $(x, \zeta) \in X \times R$ , en el sentido que:

$$\min_{x \in X} \phi_\alpha(x) = \min_{(x, \zeta) \in X \times R} F_\alpha(x, \zeta)$$

Donde además un par  $(x^*, \zeta^*)$  logra el mínimo de la mano derecha si y solo si  $x^*$  alcanza el mínimo de la mano izquierda y  $\zeta^* \in A_\alpha(x^*)$ . En particular, y por lo tanto, en circunstancias donde el intervalo  $A_\alpha(x^*)$  se reduce a un simple punto (como es típico), la minimización de  $F(x, \zeta)$  sobre  $(x, \zeta) \in X \times R$  produce un par  $(x^*, \zeta^*)$ , no necesariamente único, tal que  $x^*$  minimiza el  $\alpha - CVaR$  y  $\zeta^*$  da el correspondiente  $\alpha - VaR$ .

Además,  $F_\alpha(x, \zeta)$  es convexa con respecto a  $(x, \zeta)$ , y  $\phi_\alpha(x)$  es convexa con respecto a  $\mathbf{x}$ , cuando  $f(x, y)$  es convexa con respecto a  $\mathbf{x}$ , en cuyo caso, si las restricciones son tales que  $\mathbf{X}$  es un conjunto convexo, la minimización conjunta es una instancia de programación convexa.

Acorde con el teorema 2, no es necesario, para el propósito de determinar un vector  $\mathbf{x}$  que determine el mínimo  $\alpha - CVaR$ , trabajar directamente con la función  $\phi_\alpha(x)$ , lo cual puede ser difícil de hacer debido a la naturaleza de su

definición en términos del valor del  $\alpha$ -VaR,  $\zeta_\alpha(x)$ , y de las usualmente problemáticas propiedades matemáticas de este valor. En vez de esto, uno puede operar sobre la mucho mas simple expresión  $F_\alpha(x, \zeta)$  con su convexidad con respecto a la variable  $\zeta$  y también, muy comúnmente, con respecto a  $(x, \zeta)$ .

### 3.2 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA DE OPTIMIZACIÓN

La rentabilidad esperada del portafolio asociada a un determinado conjunto de posiciones  $\mathbf{x}$  está dada por:

$$R(x) = x^T m$$

Donde  $\mathbf{m}$  es un vector con las rentabilidades esperadas de cada uno de los títulos que conforman el portafolio y  $\mathbf{x}$  es el vector de posiciones. La pérdida esperada del portafolio se define como el negativo de la rentabilidad.

El problema de optimización puede ser planteado de dos maneras diferentes; una que busque minimizar el CVaR con una restricción sobre la rentabilidad esperada del portafolio y otra que busque minimizar las pérdidas sujeto a una restricción en el CVaR. Es decir:

*Formulación 1:*

$$\begin{aligned} \min_x \phi(x), \quad x \in X \\ \text{s.a.} : R(x) \geq \rho \end{aligned}$$

*Formulación 2:*

$$\begin{aligned} \min_x -R(x), \quad x \in X \\ \text{s.a.} : \phi(x) \leq \bar{\omega} \end{aligned}$$

Estas dos maneras de abordar el problema son equivalentes en el sentido que generan el mismo resultado óptimo<sup>19</sup>. La formulación escogida para desarrollar el presente proyecto es la segunda, debido a que facilita la implementación del modelo de optimización.

---

<sup>19</sup> KROKHMAL; PALMQUIST y URYASEV, Portfolio Optimization with Conditional Value at Risk Objective and Constrains, Op. Cit., p.10.

### 3.3 DISCRETIZACIÓN Y LINEALIZACIÓN

Cuando se trabaja con escenarios, se obtiene una distribución discreta para  $\mathbf{y}$ . A partir de esta distribución, se puede aproximar la integral en  $F_\alpha(x, \zeta)$ , por medio de una sumatoria a lo largo de todos los escenarios. Si se tienen  $J$  escenarios para  $\mathbf{y}$ ,  $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_J$ , entonces la correspondiente función que aproxima a  $F_\alpha(x, \zeta)$  será:

$$\tilde{F}_\alpha(x, \zeta) = \zeta + (1 - \alpha)^{-1} \sum_{j=1}^J [f(x, y_j) - \zeta]^+$$

El uso de variables dummy  $z_j$ ,  $j=1, \dots, J$ , en lugar del término  $[f(x, y_j) - \zeta]^+$  en la función  $\tilde{F}_\alpha(x, \zeta)$ , permite reemplazar ésta función por la siguiente expresión lineal:

$$\tilde{F}_\alpha(z, \zeta) = \zeta + (1 - \alpha)^{-1} \sum_{j=1}^J z_j$$

Y por el siguiente conjunto de restricciones lineales:

$$\begin{aligned} z_j &\geq f(x, y_j) - \zeta \\ z_j &\geq 0 \end{aligned} \quad j = 1, \dots, J \quad \zeta \in R$$

Utilizando los anteriores resultados<sup>20</sup>, el modelo de optimización lineal, se puede plantear de la siguiente manera:

$$\min_x -R(x), \quad x \in X$$

Sujeto a:

$$\begin{aligned} \zeta + (1 - \alpha)^{-1} \sum_{j=1}^J z_j &\leq \omega \\ z_j &\geq f(x, y_j) - \zeta \\ z_j &\geq 0 \end{aligned} \quad j = 1, \dots, J \quad \zeta \in R$$

<sup>20</sup> KROKHMAL; PALMQUIST y URYASEV, Portfolio Optimization with Conditional Value at Risk Objective and Constrains, Op. Cit., p.14.



## **4. METODOLOGÍA**

En el presente capítulo se explica la metodología utilizada para la construcción de la frontera eficiente. En la sección 4.1, titulada “Selección de Títulos”, se muestran los criterios utilizados para escoger el conjunto de títulos sobre los que se trabaja; igualmente, se identifican los factores de riesgo de los mismos. En la sección 4.2, titulada “Generación de Escenarios”, se exponen los diferentes pasos que se deben seguir para generar los escenarios con los que se trabajará para aplicar el modelo de optimización; inicialmente, se explica la mecánica de la Simulación de Monte Carlo, la cual se escogió debido a su facilidad de implementación y a su gran versatilidad; se muestra también que factor de riesgo es el que se debe modelar y la manera en que se obtiene la distribución de rentabilidad de cada título. Finalmente, en la sección 4.3, titulada “Implementación del Modelo de Optimización”, se muestra la manera en que se plantea el problema de optimización con los escenarios, de tal forma que sea reconocido por un lenguaje de computadora, con lo cual se completa la metodología utilizada para la generación de la frontera eficiente.

Cada uno de los pasos de la presente metodología fue escogido por el autor, teniendo en cuenta las razones que se explican en cada uno de los mismos; sin embargo, todos ellos son susceptibles de ser tratados de manera diferente o con mayor o menor detalle, en la medida que sea requerido o no, un más alto refinamiento del problema. Esto es aplicable principalmente, a la selección de otros métodos de simulación, diferentes procesos estocásticos, supuestos de los modelos y criterios para la selección de títulos.

### **4.1 SELECCIÓN DE TÍTULOS**

El criterio principal para seleccionar los títulos que conformarán el portafolio óptimo es la liquidez. La liquidez de un título hace referencia a la facilidad con la cual este puede ser convertido en dinero, y es una característica que depende fuertemente del monto en circulación de la emisión, de la frecuencia y volumen de transacción, del nivel de riesgo del emisor y en general de la percepción que tenga el mercado sobre el título en cuanto a sus niveles de rentabilidad y de riesgo.

La bolsa de Valores de Colombia y otras entidades que brindan información financiera al mercado se basan en estas cualidades de los títulos, para realizar una clasificación de los mismos según su liquidez, y periódicamente publican una lista con los de mayor liquidez.

Igualmente, se trabajará con títulos que sean negociados en el mercado secundario, debido a la mayor cantidad de agentes que hacen parte de éste.

Aunque los títulos de Tesorería TES se encuentran denominados en moneda legal (COP), en moneda extranjera (USD) y en unidades de valor real (UVR), se decidió trabajar únicamente con títulos en pesos, para así analizar el efecto de un solo factor de riesgo, la tasa de interés de cada título.

Para la selección de los títulos también se tuvo en cuenta la calidad de la serie histórica de la tasa de interés con la que se contaba para calcular los parámetros estadísticos de cada uno de estos; los títulos con vencimiento en mayo 8 de 2003, noviembre 8 de 2005 y febrero 12 de 2009, son títulos de liquidez considerable en el mercado, pero desafortunadamente fueron excluidos del análisis, debido a que no se poseía una serie histórica con un periodo de observación considerable. Es muy difícil conseguir una serie de datos completa, debido a los intereses económicos de ciertas entidades que venden esta información.

Al final, se escogieron según los criterios ya mencionados, los doce títulos que se encuentran en la siguiente tabla ordenados en orden descendente según su liquidez.

Tabla 1. Títulos seleccionados.

| Vencimiento | Serie | Monto COP (M) | En circulación COP (M) | Cupón  |    |      |
|-------------|-------|---------------|------------------------|--------|----|------|
| 18-Mar-03   | B     | 863,298,300   | 863,298,300            | NORMAL | 12 | Fijo |
| 08-Oct-03   | B     | 1,147,069,400 | 1,147,069,400          | NORMAL | 13 | Fijo |
| 16-Abr-04   | B     | 1,996,912,000 | 1,994,812,032          | NORMAL | 15 | Fijo |
| 06-May-04   | B     | 627,316,300   | 627,316,300            | NORMAL | 12 | Fijo |
| 25-Jun-04   | B     | 1,634,820,900 | 1,606,620,928          | NORMAL | 15 | Fijo |
| 04-Feb-05   | B     | 813,432,000   | 669,828,096            | NORMAL | 15 | Fijo |
| 11-Mar-05   | B     | 678,058,000   | 678,058,000            | NORMAL | 13 | Fijo |
| 03-May-06   | B     | 1,030,610,000 | 1,020,209,984          | NORMAL | 15 | Fijo |
| 25-Jul-06   | B     | 897,289,700   | 881,189,696            | NORMAL | 15 | Fijo |
| 14-Mar-07   | B     | 1,282,617,700 | 1,282,617,700          | NORMAL | 15 | Fijo |
| 22-Ago-08   | B     | 1,040,416,000 | 996,515,968            | NORMAL | 15 | Fijo |
| 25-Ene-12   | B     | 1,522,266,900 | 1,495,166,848          | NORMAL | 15 | Fijo |

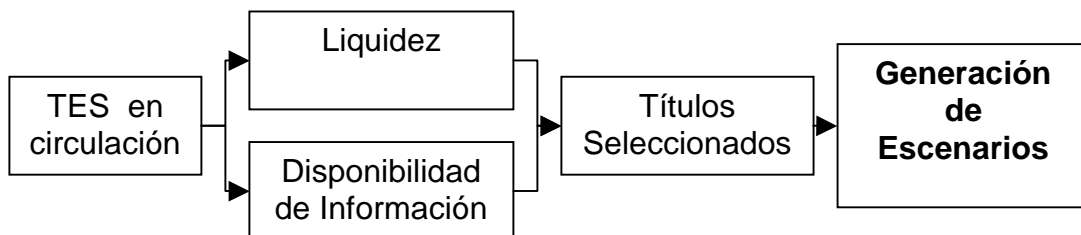
Fuente: Bloomberg.

Las series históricas de los títulos con vencimiento en marzo 18 de 2003, mayo 6 de 2004, marzo 11 de 2005 y marzo 14 de 2007, presentan un periodo de observación superior a 6 meses, pero inferior a un año; para el resto de títulos se contó con una serie histórica de una longitud efectiva entre uno y dos años.

Es importante resaltar, que la Superintendencia Bancaria de Colombia, exige un periodo de observación efectivo mínimo de 4 años para realizar el cálculo de los parámetros estadísticos de los modelos de valoración de riesgo.

Finalmente, en la figura 3 se puede apreciar el esquema del flujo de actividades mencionadas, necesarias para seleccionar los títulos.

Figura 3. Pasos para la selección de títulos



## 4.2 GENERACIÓN DE ESCENARIOS

Los escenarios se generan por simulación de Monte Carlo, método que permite considerar un amplio rango de factores de riesgo, tener en cuenta los efectos de no linealidades, variaciones en las volatilidades y escenarios extremos, entre otros, incorporando el avance del tiempo<sup>21</sup>.

El primer paso del método consiste en especificar un proceso estocástico para el comportamiento de las fuentes de riesgo y calcular los parámetros de dicho proceso, estimándolos de datos históricos o de información implícita en contratos a futuro. Estos parámetros incluyen volatilidades, medias de crecimiento y correlaciones, entre otros.

El segundo paso es simular caminos ficticios para el valor de cada factor de riesgo, y luego para cada escenario obtenido, en un horizonte de tiempo determinado, se calcula el precio de cada título generando así la distribución de los retornos de cada título, a partir de la cual se puede implementar el modelo de optimización.

El proceso estocástico escogido para modelar el comportamiento de los TES es el Movimiento Browniano Geométrico, debido a que es el más recomendado y

---

<sup>21</sup>JORION, Value at Risk, Op. Cit., p.224.

utilizado para modelar el comportamiento de diversas variables financieras como precios y tasas de rendimientos<sup>22</sup>.

En este proceso estocástico únicamente el valor presente de la variable analizada es relevante para predecir su valor futuro, el cual en tiempo discreto, se puede determinar por medio de la siguiente expresión:

$$V_t = V_{t-1} * \exp(\mu + \sigma \varepsilon_t)$$

Acá,  $V_t$  representa el valor de la variable en el tiempo  $t$ ,  $\mu$  se denomina el coeficiente de tendencia,  $\sigma$  el coeficiente de varianza del movimiento y  $\varepsilon_t$  es una variable aleatoria Normal independientemente distribuida con media cero y varianza 1.

Al suponer un comportamiento que sigue este tipo de proceso estocástico, se está asumiendo que el logaritmo natural de los rendimientos de la variable supuesta a comportarse con Movimiento Browniano geométrico, posee una distribución Normal. A este tipo de variables aleatorias se les denomina Logonormales.

Los TES, como instrumentos de renta fija, poseen series de precios y de yields. Se debe decidir cual de estas dos variables es más conveniente de modelar con el modelo de Movimiento Browniano Geométrico. Existe una razón muy fuerte para no modelar el comportamiento de los precios, ya que este modelo ignora el hecho de la convergencia del precio del bono a su valor facial, cuando se aproxima su fecha de maduración, lo cual genera una convergencia a cero de su volatilidad<sup>23</sup>.

Entonces, al modelar el comportamiento dinámico de los instrumentos de renta fija, se prefiere modelar el yield acorde con la distribución logonormal. Adicionalmente, otra importante razón para modelar el yield en lugar del precio, es que de esta manera se garantizan yields siempre positivos.

Las series de los yields tenidas en cuenta en este estudio violan el supuesto de logonormalidad, según lo muestran las pruebas de Bondad y Ajuste efectuadas sobre estas (Ver Anexo 1). A pesar de este hecho, se decidió trabajar con este modelo, principalmente porque es un estándar a nivel internacional y además porque facilita en cierta medida la implementación de la simulación de Monte Carlo.

De todas formas, vale la pena resaltar que la metodología de optimización acá propuesta, no presenta ninguna restricción acerca del método o de la distribución que se utilice en particular, para generar los escenarios.

---

<sup>22</sup> HULL, Options, Futures and other Derivatives, Op. Cit., p.225.

J.P. MORGAN y REUTERS. Risk Metrics – Technical Document. 4ed. Nueva York: 1996. p.50.

<sup>23</sup> J.P. MORGAN y REUTERS, Risk Metrics – Technical Document, Op. Cit., p.51.

El coeficiente de tendencia  $\mu$  se calcula mediante el promedio del logaritmo natural de los rendimientos en el periodo de tiempo  $t$  y el coeficiente de varianza  $\sigma$  como la desviación estándar de estos. Estos dos parámetros del modelo se obtienen a partir de la serie histórica del yield de cada título y se asumen constantes.

Una vez definido el proceso estocástico y calculados los parámetros del modelo, se procede a generar los caminos de los yields de cada uno de los títulos.

El punto de partida de cada camino es el valor de mercado de cada yield para el día del análisis, que en este caso es el 5 de septiembre de 2002. El paso de la simulación es de un día, debido a que los parámetros fueron calculados con series diarias. La simulación se realiza para un horizonte total de 10 días, tal como es requerido para los modelos internos de cuantificación del VaR en la circular 042.

Cada paso de la simulación se genera entonces por medio de la siguiente ecuación:

$$Y_t = Y_{t-1} * \exp(\mu + \sigma \varepsilon_t)$$

Se puede observar, que el problema de la simulación se reduce a generar un conjunto de variables aleatorias normalmente distribuidas, las cuales deben estar correlacionadas de la misma manera en que se correlacionan las series de los logaritmos de los rendimientos de los yields; para esto se debe generar primero un conjunto de variables aleatorias normales independientes  $Z$ , luego por medio de la factorización de Cholevsky se descompone la matriz de correlaciones  $\Lambda=AA'$ , y finalmente, el conjunto de variables deseadas se obtiene por medio de  $Y=AZ$ . (Ver Anexo 2)

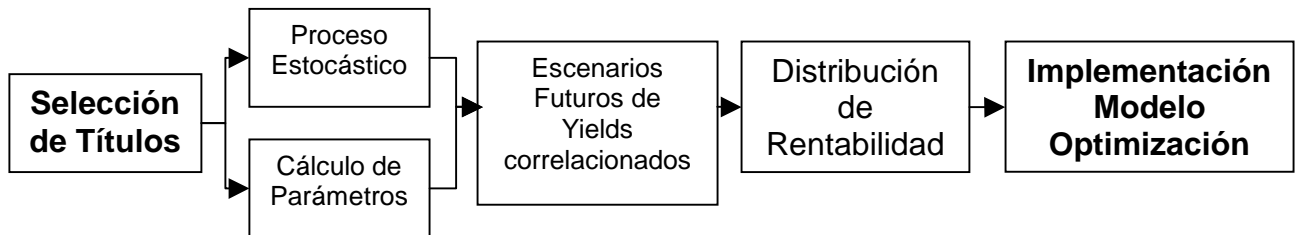
Este procedimiento se realiza tantas veces, como número de escenarios se deseen.

Una vez se han generado los escenarios futuros para los yields de cada título, se procede a calcular el precio de cada uno de estos, descontando sus flujos futuros de efectivo al yield obtenido en cada escenario. De esta manera se obtienen los escenarios para los precios de cada TES, los cuales al ser substraídos del precio inicial del título generan la distribución de utilidades de cada uno de estos.

Para la generación de los escenarios, se diseñó una hoja de cálculo de Excel, la cual realiza todo el proceso, desde el cálculo de los parámetros hasta la generación de las variables normales multivariadas y el cálculo de la distribución de precios y rentabilidades. Se realizaron simulaciones para diferentes números de escenarios: 200, 500 y 1000.

En la figura 4, a manera de resumen, se puede apreciar el esquema del flujo de actividades necesarias para generar los escenarios.

Figura 4. Pasos para la generación de escenarios



### 4.3 IMPLEMENTACIÓN DEL MODELO DE OPTIMIZACIÓN

La optimización del portafolio se realizó en Matlab, utilizando la función LP (Linear Programming).

La función LP resuelve el problema de programación lineal:

$$\min_x f^T * x$$

Sujeto a:

$$A * x \leq B$$

$$VLB \leq x \leq VUB$$

La función LP, también permite indicar que las N primeras restricciones definidas por A y B son restricciones de igualdad.

Se implementó un algoritmo en Matlab (Anexo 3), el cual toma los resultados de la generación de escenarios desde Excel y con estos se crea la matriz A y los vectores f, B, VLB y VUB, para que el formato del problema de optimización corresponda al requerido por la función LP.

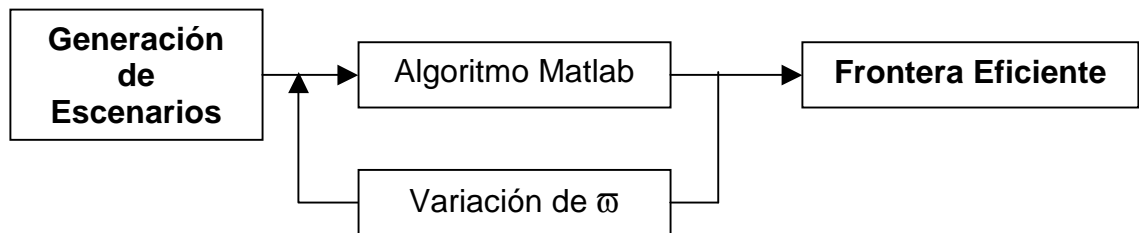
Esta rutina, se corrió en la versión Matlab 6.0, en una supercomputadora SGI Origin 2000 equipada con 4 procesadores, 36GB de disco y 1GB de memoria RAM, perteneciente a MOX Computación Avanzada, debido a la gran dificultad y

demanda de tiempo que se presentó al correr el algoritmo en un computador personal\*.

Para generar la frontera eficiente, se realizaron variaciones en el límite del valor en riesgo Condicional con un paso de 0.1 pesos y se calculó el portafolio óptimo para cada una de estas. Este procedimiento se realizó para los tres conjuntos de escenarios con los que se trabajó.

En la figura 5 se muestra el flujo de actividades empleadas para la generación de la frontera eficiente a partir de los escenarios generados.

Figura 5. Pasos para la implementación del modelo de optimización y creación de la frontera eficiente



---

\* Cada punto de la frontera se tarda aproximadamente 4 veces más en un PC. En SGI Origin 2000 se puede llegar a tardar más de 1 hora.

## 5. RESULTADOS

Se crearon distribuciones discretas para la serie de yields, obtenidas por medio de la generación de 200, 500 y 1000 escenarios. A partir de estas distribuciones, se calcularon las respectivas distribuciones de rentabilidad para cada uno de los títulos del portafolio.

Luego, sobre estas distribuciones discretas, se aplicó el modelo de optimización, variando el límite máximo del Valor en Riesgo Condicional desde valores\* muy pequeños (0\$), hasta valores muy grandes (\$5).

Al realizar el cálculo de la frontera eficiente, se encontraron límites de factibilidad para los valores de CVaR. Es decir, el CVaR no puede ser superior a \$3.3 aproximadamente, debido a que este es el CVaR del título que posee el mayor nivel de riesgo medido a través de esta variable. Para el límite inferior del CVaR del portafolio, se halló que este se encuentra en un valor cercano a \$1.9.

Por lo tanto, la frontera eficiente se cálculo variando el límite del CVaR, entre los dos valores extremos (\$1.9 , \$3.3), a intervalos de \$0.1. Este procedimiento se realizó para las distribuciones halladas según los diferentes números de escenarios. En la figura 6 se muestran estos resultados; se ha graficado la rentabilidad del portafolio en términos de su correspondiente CVaR.

En la gráfica se puede apreciar la similitud entre las fronteras obtenidas de las distribuciones de 500 y 1000 escenarios. Por su parte, la frontera resultante de 200 escenarios presenta una discrepancia mayor con las dos anteriores. Se espera que entre mayor número de escenarios se trabaje, la aproximación se vuelve mas precisa; sin embargo, para 1000 escenarios, el cálculo de cada punto de la frontera demandaba considerable tiempo computacional\*\*,

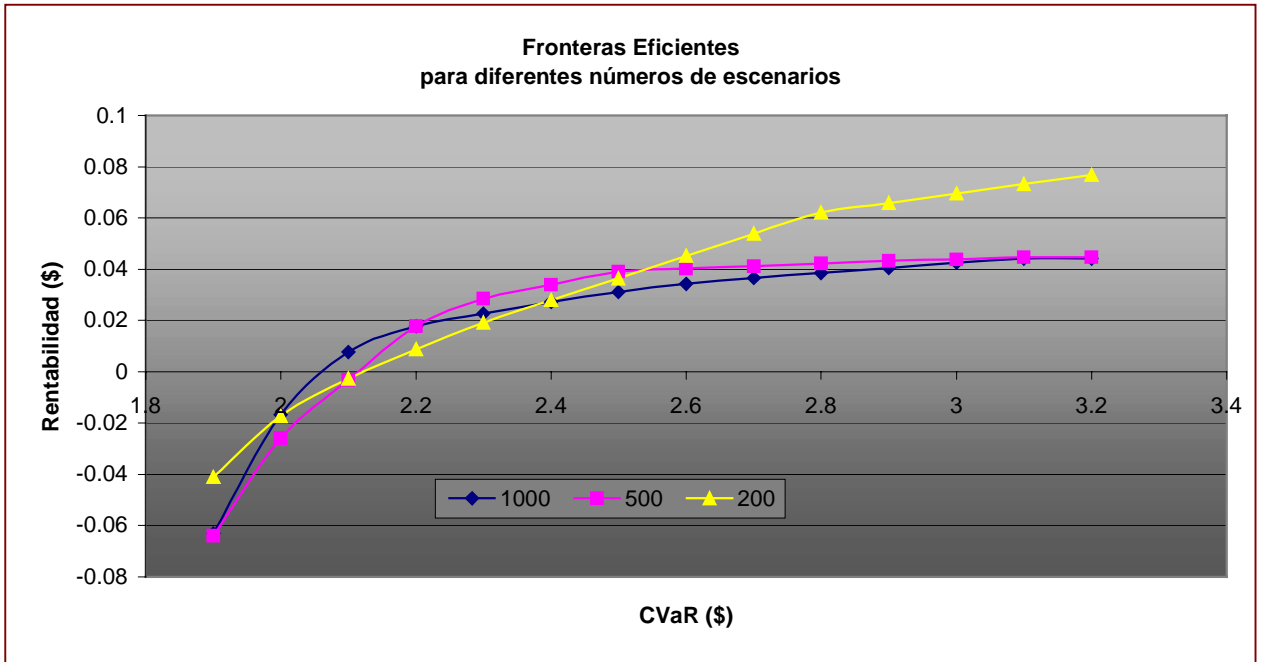
---

\* Se tomó una base de \$100, como el valor total a invertir. Los términos también se pueden ver como porcentajes.

\*\* En ocasiones el algoritmo en Matlab podía tardarse más de 1 hora para llegar a la solución.

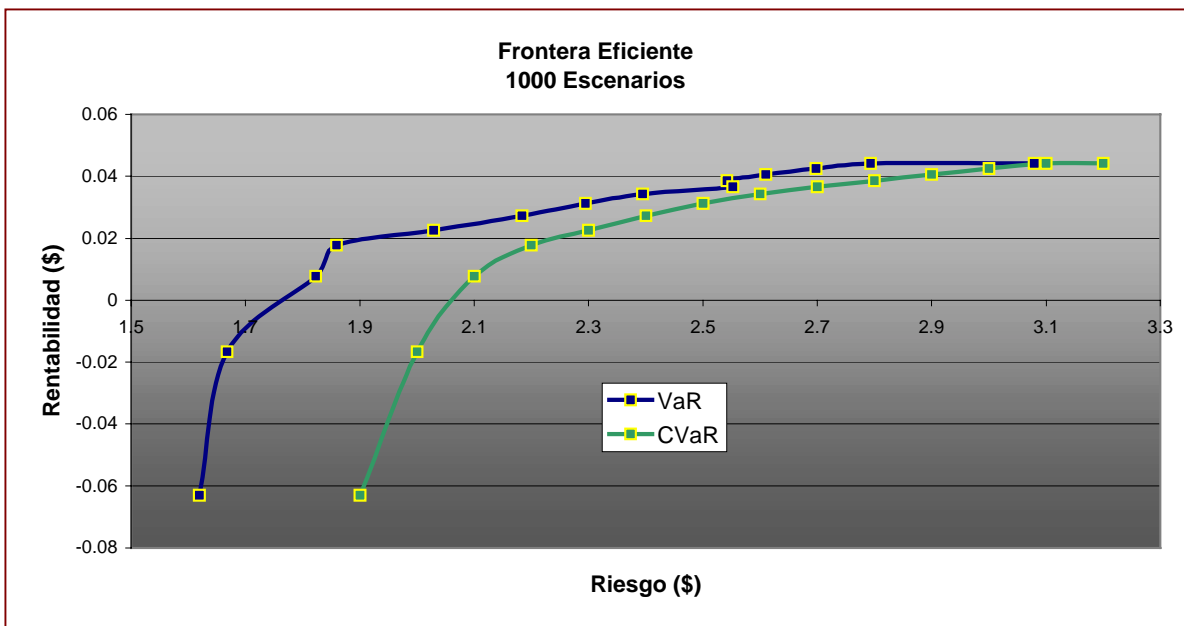


Figura 6. Diferentes aproximaciones de la frontera eficiente



La figura 7 muestra la frontera eficiente para 1000 escenarios, en términos del Valor en riesgo y del Valor en Riesgo Condicional.

Figura 7. Frontera eficiente para 1000 escenarios



En la tabla 2, se presenta el resultado total de la optimización. Para cada valor de CVaR se muestra la composición óptima del portafolio, la rentabilidad esperada y el VaR del portafolio.

Tabla 2. Posiciones óptimas del portafolio.

| <b>Rentabilidad</b> | <b>0.044</b> | <b>0.044</b> | <b>0.043</b> | <b>0.041</b> | <b>0.039</b> | <b>0.037</b> | <b>0.034</b> |
|---------------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| <b>CVaR</b>         | <b>3.200</b> | <b>3.100</b> | <b>3.000</b> | <b>2.900</b> | <b>2.800</b> | <b>2.700</b> | <b>2.600</b> |
| <b>VaR</b>          | <b>3.079</b> | <b>2.793</b> | <b>2.698</b> | <b>2.610</b> | <b>2.542</b> | <b>2.552</b> | <b>2.394</b> |
| <b>18-Mar-03</b>    | 0            | 0            | 0            | 0            | 0            | 0            | 0            |
| <b>08-Oct-03</b>    | 0            | 0.01%        | 4.73%        | 10.40%       | 16.08%       | 21.76%       | 28.48%       |
| <b>16-Abr-04</b>    | 0            | 0            | 0            | 0            | 0            | 0            | 0            |
| <b>06-May-04</b>    | 0            | 0            | 0            | 0            | 0            | 0            | 0            |
| <b>25-Jun-04</b>    | 0            | 0            | 0            | 0            | 0            | 0            | 0            |
| <b>04-Feb-05</b>    | 100%         | 99.99%       | 95.27%       | 89.60%       | 83.92%       | 78.24%       | 71.52%       |
| <b>11-Mar-05</b>    | 0            | 0            | 0            | 0            | 0            | 0            | 0            |
| <b>03-May-06</b>    | 0            | 0            | 0            | 0            | 0            | 0            | 0            |
| <b>25-Jul-06</b>    | 0            | 0            | 0            | 0            | 0            | 0            | 0            |
| <b>14-Mar-07</b>    | 0            | 0            | 0            | 0            | 0            | 0            | 0            |
| <b>22-Ago-08</b>    | 0            | 0            | 0            | 0            | 0            | 0            | 0            |
| <b>25-Ene-12</b>    | 0            | 0            | 0            | 0            | 0            | 0            | 0            |

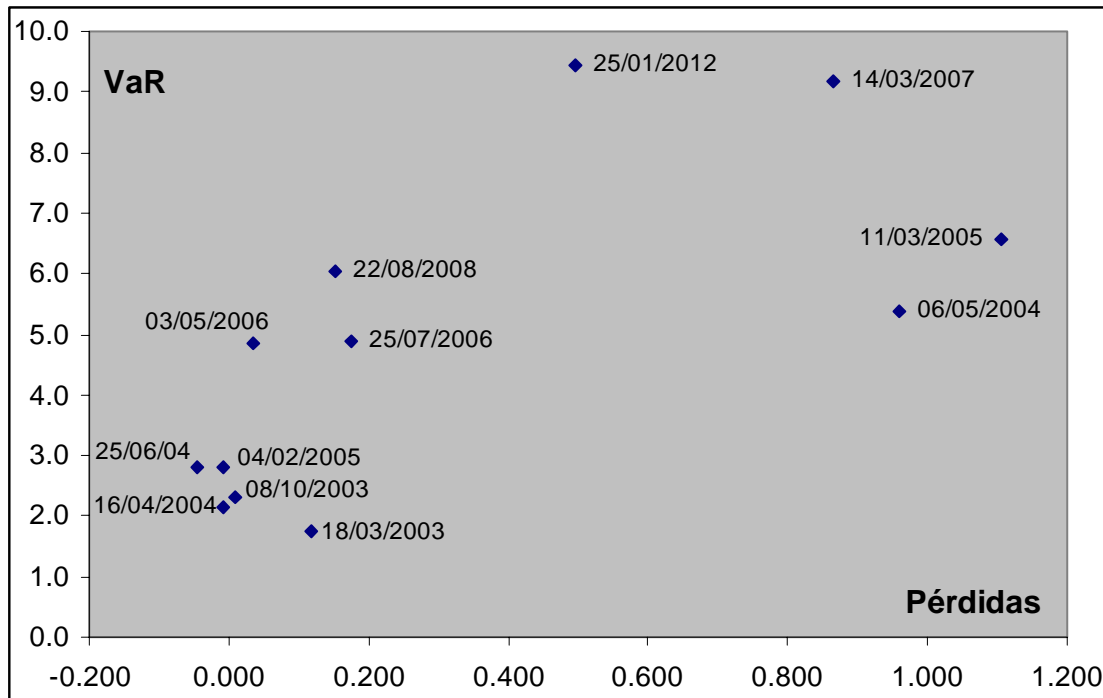
Tabla 2. Continuación.

| <b>Rentabilidad</b> | <b>0.031</b> | <b>0.027</b> | <b>0.023</b> | <b>0.018</b> | <b>0.008</b> | <b>-0.017</b> | <b>-0.063</b> |
|---------------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|---------------|---------------|
| <b>CVaR</b>         | <b>2.500</b> | <b>2.400</b> | <b>2.300</b> | <b>2.200</b> | <b>2.100</b> | <b>2.000</b>  | <b>1.900</b>  |
| <b>VaR</b>          | <b>2.294</b> | <b>2.183</b> | <b>2.029</b> | <b>1.859</b> | <b>1.823</b> | <b>1.668</b>  | <b>1.620</b>  |
| <b>18-Mar-03</b>    | 0            | 0            | 0            | 0            | 0            | 16.59%        | 51.90%        |
| <b>08-Oct-03</b>    | 37.03%       | 40.32%       | 39.91%       | 41.93%       | 37.58%       | 27.63%        | 15.70%        |
| <b>16-Abr-04</b>    | 0.11%        | 5.28%        | 14.07%       | 21.62%       | 43.19%       | 44.89%        | 32.42%        |
| <b>06-May-04</b>    | 0            | 0            | 0            | 0            | 0            | 0             | 0             |
| <b>25-Jun-04</b>    | 0            | 0            | 0            | 0            | 0            | 0             | 0             |
| <b>04-Feb-05</b>    | 62.86%       | 54.40%       | 46.02%       | 36.45%       | 19.23%       | 10.89%        | 0             |
| <b>11-Mar-05</b>    | 0            | 0            | 0            | 0            | 0            | 0             | 0             |
| <b>03-May-06</b>    | 0            | 0            | 0            | 0            | 0            | 0             | 0             |
| <b>25-Jul-06</b>    | 0            | 0            | 0            | 0            | 0            | 0             | 0             |
| <b>14-Mar-07</b>    | 0            | 0            | 0            | 0            | 0            | 0             | 0             |
| <b>22-Ago-08</b>    | 0            | 0            | 0            | 0            | 0            | 0             | 0             |
| <b>25-Ene-12</b>    | 0            | 0            | 0            | 0            | 0            | 0             | 0             |

Se puede apreciar que el título del 4 de febrero de 2005, es el que mayor rentabilidad esperada presenta según la simulación, y a su vez es el que posee el mayor VaR y CVaR; es así como al permitir un nivel mayor de riesgo en la frontera eficiente, el portafolio toma cada vez más posición de este activo, hasta que se llega al límite de CVaR = \$3.2, en el cual el portafolio se constituye en un 100% de este título.

Igualmente, de la tabla 2 se puede apreciar que los títulos con vencimiento al 6 de mayo de 2004, 25 de junio de 2004, 11 de marzo de 2005, 3 de mayo de 2006, 25 de julio de 2006, 14 de marzo de 2007, 22 de agosto de 2008 y 25 de enero de 2012, nunca intervienen en el portafolio óptimo. Se esperaba este resultado, debido a que según las series históricas, estos títulos presentan altos coeficientes de tendencia y de varianza para sus yields, lo cual se ve reflejado en el resultado de la simulación de los escenarios, donde la combinación de pérdidas esperadas y VaR individual no les favorece; esta combinación se muestra en la figura 8, para todos los títulos del portafolio.

Figura 8. Combinaciones de pérdidas esperadas y VaR para los títulos



En la figura 8, los títulos que se encuentren más a la izquierda y hacia abajo, serán los más opcionados para pertenecer al portafolio óptimo, ya que presentan menores pérdidas esperadas y a la vez un menor VaR.

## 6. COMPARACIÓN CON EL MÉTODO DE MÍNIMA VARIANZA

Como medida de verificación del modelo, se realizó el cálculo de la frontera eficiente por el método de Mínima Varianza.

El cálculo del portafolio óptimo por el método de Mínima Varianza, se realizó sobre la distribución de pérdidas calculada con 1000 escenarios. Para realizarlo, se calcula la varianza total del portafolio en términos de las varianzas individuales de los títulos y sus posiciones en el portafolio, luego se calcula la rentabilidad esperada del portafolio en términos de las rentabilidades individuales de los títulos y de sus posiciones en el portafolio. Las posiciones de los títulos son las variables de decisión para resolver el problema de optimización de maximizar la rentabilidad esperada sujeto a una restricción en el valor máximo que puede alcanzar la varianza del portafolio. Este procedimiento se implementó en Excel y se resolvió mediante la herramienta SOLVER. Los resultados se muestran en la tabla 3.

Tabla 3. Posiciones óptimas del portafolio por el método de Varianza Mínima.

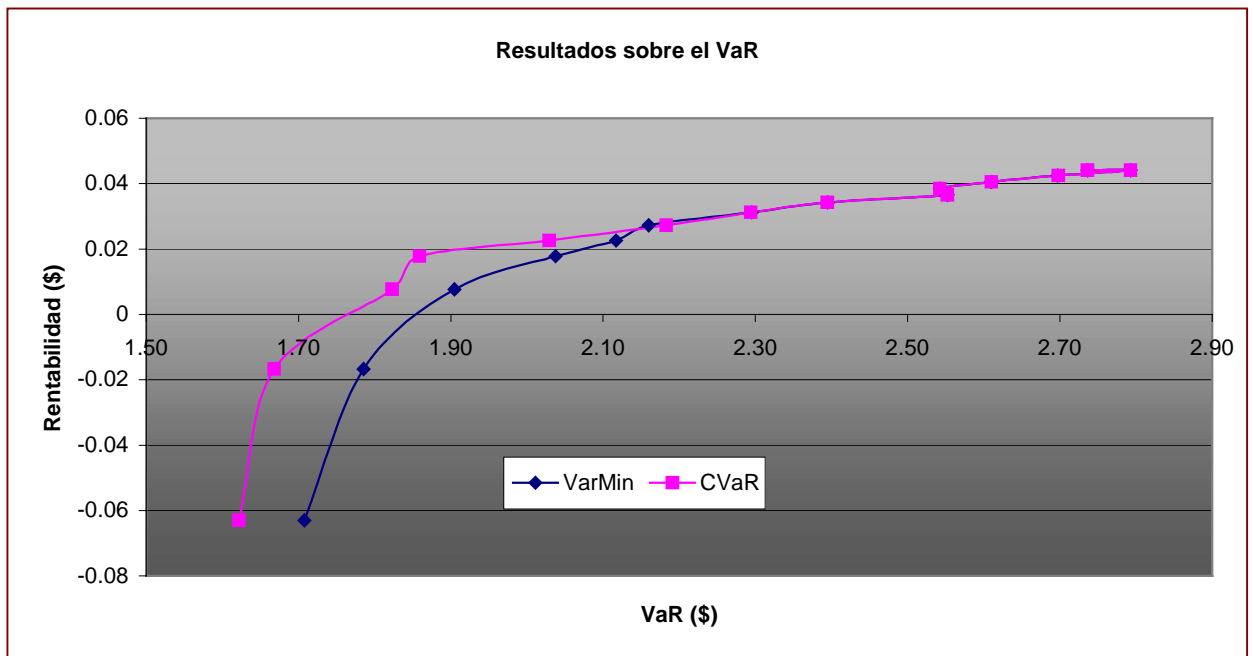
| <b>Rentabilidad</b> | 0.044 | 0.044  | 0.043  | 0.041  | 0.039  | 0.037  | 0.034  |
|---------------------|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| <b>VaR</b>          | 3.079 | 2.793  | 2.697  | 2.609  | 2.544  | 2.555  | 2.394  |
| <b>Desv. Est.</b>   | 1.166 | 1.166  | 1.129  | 1.086  | 1.047  | 1.009  | 0.967  |
| 18-Mar-03           | 0     | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      |
| 08-Oct-03           | 0     | 0.01%  | 4.77%  | 10.50% | 15.94% | 21.66% | 28.54% |
| 16-Abr-04           | 0     | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      |
| 06-May-04           | 0     | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      |
| 25-Jun-04           | 0     | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      |
| 04-Feb-05           | 100%  | 99.99% | 95.23% | 89.50% | 84.06% | 78.34% | 71.46% |
| 11-Mar-05           | 0     | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      |
| 03-May-06           | 0     | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      |
| 25-Jul-06           | 0     | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      |
| 14-Mar-07           | 0     | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      |
| 22-Ago-08           | 0     | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      |
| 25-Ene-12           | 0     | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      |

Tabla 3. Continuación

| <b>Rentabilidad</b> | 0.031  | 0.027  | 0.023  | 0.018  | 0.008  | -0.017 | -0.063 |
|---------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| <b>VaR</b>          | 2.296  | 2.160  | 2.117  | 2.037  | 2.145  | 1.918  | 1.747  |
| <b>Desv. Est.</b>   | 0.921  | 0.874  | 0.842  | 0.836  | 0.891  | 0.798  | 0.656  |
| 18-Mar-03           | 0      | 0      | 0      | 0      | 1.21%  | 20.36% | 56.69% |
| 08-Oct-03           | 37.13% | 48.58% | 61.75% | 75.49% | 98.79% | 79.64% | 43.31% |
| 16-Abr-04           | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      |
| 06-May-04           | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      |
| 25-Jun-04           | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      |
| 04-Feb-05           | 62.87% | 51.42% | 38.25% | 24.51% | 0      | 0      | 0      |
| 11-Mar-05           | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      |
| 03-May-06           | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      |
| 25-Jul-06           | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      |
| 14-Mar-07           | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      |
| 22-Ago-08           | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      |
| 25-Ene-12           | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      |

Los resultados obtenidos son bastante similares a los alcanzados por el método del CVaR para 1000 escenarios. En la figura 9 se muestran las dos fronteras eficientes, en términos del VaR.

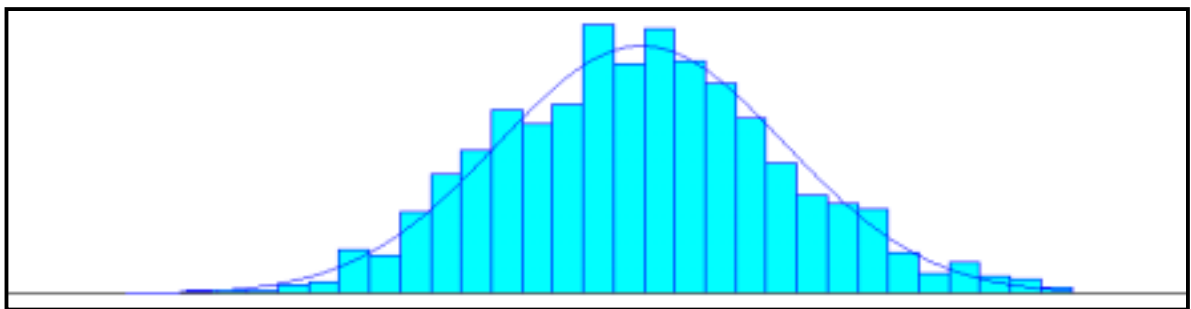
Figura 9. Fronteras eficientes en términos de VaR, para los métodos de Minimización de Varianza y Minimización de CVaR.



Se puede apreciar que la metodología de optimización basada en el CVaR es más efectiva minimizando el VaR para valores de esta variable inferiores a \$2.2. Sin embargo, los resultados de las dos metodologías cuando el VaR es mayor a 2.2 son casi exactos. Este comportamiento tan similar en las dos fronteras, se puede explicar en gran medida, en el hecho de que las distribuciones de las rentabilidades de los títulos poseen una forma bastante cercana a la de una distribución Normal, caso en el que los resultados de la minimización por los dos métodos deben ser aproximadamente iguales<sup>24</sup>.

En la figura 10, se muestra el histograma de la distribución de pérdidas para el portafolio óptimo encontrado por minimización de CVaR, que posee una rentabilidad de  $R = 0.0366$  y un Valor en Riesgo de  $VaR = 2.55$ . Se puede apreciar que la distribución se comporta como una Normal. La prueba Kolmogorov-Smirnov de bondad y ajuste arrojó un p-value de  $PV > 0.15$ , con lo cual existe evidencia estadística que corrobora la afirmación.

Figura 10. Distribución de pérdidas de portafolio óptimo con  $VaR = 2.55$ .

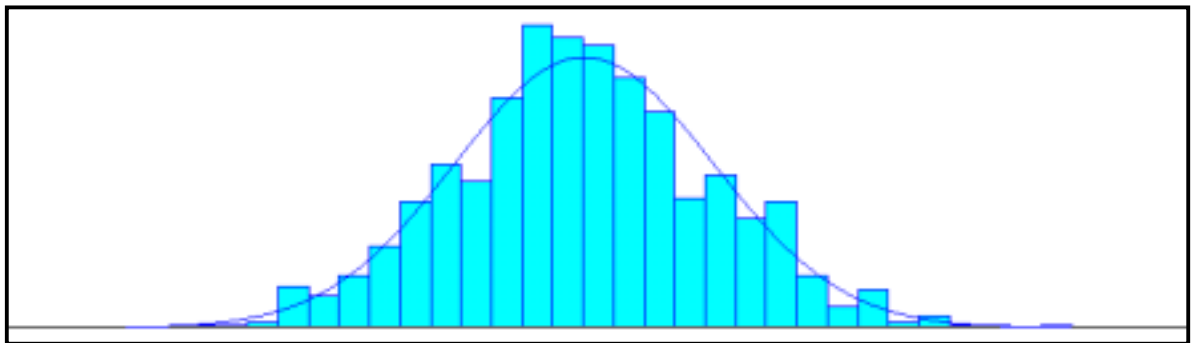


| Características de la Distribución |                     |
|------------------------------------|---------------------|
| Distribución:                      | Normal              |
| Expresión:                         | NORM(-0.0366, 1.01) |
| Error Cuadrado:                    | 0.00075             |
| Test Chi Cuadrado                  |                     |
| Numero de intervalos               | 22                  |
| Grados de libertad                 | 19                  |
| Estadístico de prueba              | 26.8                |
| Correspondiente p-value            | 0.114               |
| Test Kolmogorov-Smirnov            |                     |
| Estadístico de prueba              | 0.0184              |
| Correspondiente p-value            | > 0.15              |
| Información de los Datos           |                     |
| Numero de datos                    | 1000                |
| Min Valor                          | -3.07               |
| Max Valor                          | 2.95                |
| Media muestral                     | -0.0366             |
| Des. Est. Muestral                 | 1.01                |

<sup>24</sup> ROCKAFELLAR y URYASEV, Optimization of Conditional Value at Risk, Op. cit., p.10.

Para un portafolio con una rentabilidad  $R = 0.0178$  y un Valor en Riesgo de  $VaR = 1.86$ , para el que se aprecia una diferencia en el resultado arrojado por los dos métodos de minimización, la distribución de las pérdidas, que aparece en la figura 11, presenta una leve desviación de un comportamiento Normal; la prueba Kolmogorov-Smirnov de bondad y ajuste arrojó un p-value de  $PV > 0.15$  y la prueba Chi-cuadrado un p-value de  $PV = 0.037$ , con lo cual se debe ser conservador al momento de aceptar el supuesto de que la distribución es normal al 95% de confiabilidad.

Figura 11. Distribución de pérdidas de portafolio óptimo con  $VaR = 1.86$ .



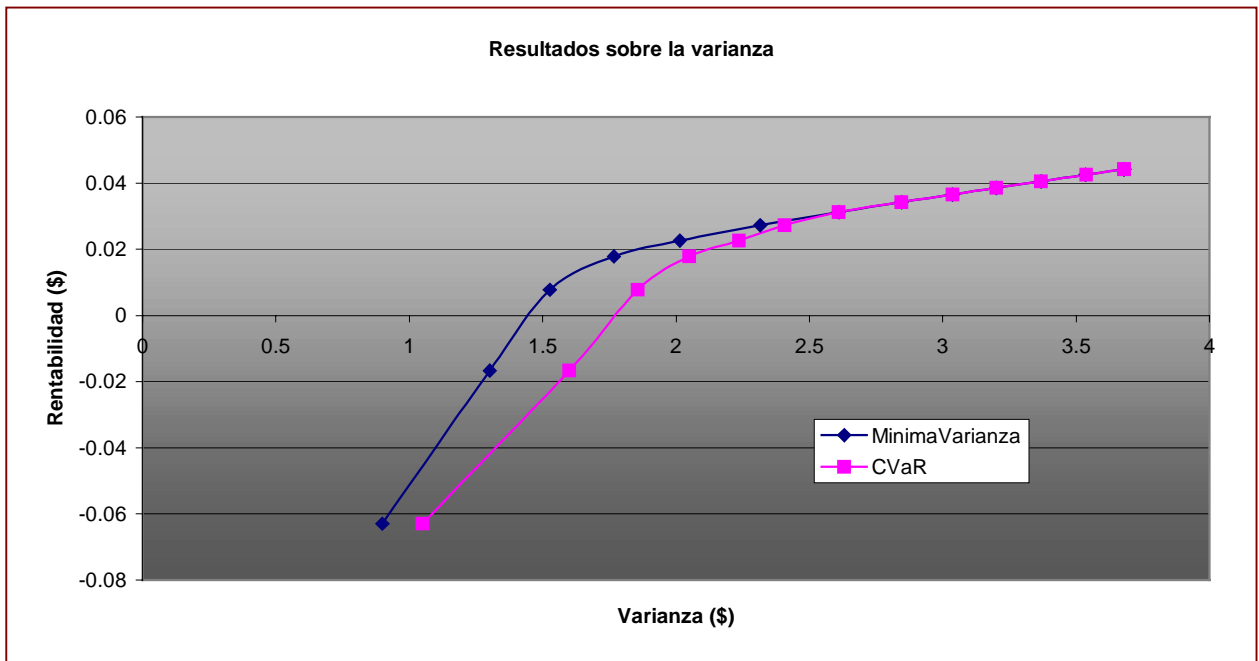
| Características de la Distribución |                      |
|------------------------------------|----------------------|
| Distribución:                      | Normal               |
| Expresión:                         | $NORM(-0.0178, 0.8)$ |
| Error Cuadrado:                    | 0.001497             |
| Test Chi Cuadrado                  |                      |
| Numero de intervalos               | 20                   |
| Grados de libertad                 | 17                   |
| Estadístico de prueba              | 29                   |
| Correspondiente p-value            | 0.0367               |
| Test Kolmogorov-Smirnov            |                      |
| Estadístico de prueba              | 0.0252               |
| Correspondiente p-value            | $> 0.15$             |
| Información de los Datos           |                      |
| Numero de datos                    | 1000                 |
| Min Valor                          | -2.33                |
| Max Valor                          | 2.84                 |
| Media muestral                     | -0.0178              |
| Des. Est. Muestral                 | 0.8                  |

Vale la pena aclarar, que en el caso de distribuciones no-normales, y en especial no simétricas, tal y como ocurre con las opciones y otros tipos de instrumentos derivados, las diferencias entre los dos modelos de optimización serán radicales,

colocando a la optimización con CVaR en un mejor lugar que la de Varianza Mínima<sup>25</sup>.

Finalmente, se muestra en la figura 12, la frontera eficiente para los dos métodos en términos de la varianza del portafolio. Como era de esperarse, en el rango en el cual la optimización con CVaR es mejor minimizando el VaR, la optimización con Varianza Mínima es mejor minimizando la varianza del portafolio. La diferencia es entonces una diferencia conceptual en la definición del riesgo. Como la definición de riesgo en términos de VaR es la más aceptada en el mundo financiero y es un estándar para los reguladores, entonces la minimización del CVaR, es más efectiva que la de la varianza.

Figura 12. Fronteras eficientes para los dos métodos en términos de Varianza



<sup>25</sup> KROKHMAL; PALMQUIST y URYASEV, Portfolio Optimization with Conditional Value at Risk Objective and Constrains, Op. Cit., p.18.



## 7. CONCLUSIONES

Del análisis de los resultados obtenidos, se puede afirmar que la metodología utilizada es un proceso efectivo en la cuantificación del Valor en Riesgo de portafolios expuestos a un gran número de factores de riesgo, en este caso los yields de cada título. Además, es una herramienta efectiva en la aproximación del cálculo de las proporciones óptimas a invertir en cada activo, lo cual se mantiene para cualquier tipo de activo financiero sin importar la forma de su distribución. Los TES objeto de este estudio, tan solo son un ejemplo del enorme potencial del método. Adicionalmente, permite explotar las grandes ventajas de los diferentes métodos de generación de escenarios, al poder considerar el efecto de las correlaciones, de no linealidades y particularidades en las distribuciones.

El modelo de optimización utilizado, se comporta de manera confiable en la generación de la frontera eficiente; es decir, siempre converge a una solución siendo esta efectivamente el resultado óptimo del problema. Igualmente, la forma en que se diseñó, le proporciona claridad en su entendimiento y en el análisis de la solución. El modelo es igualmente robusto manejando un gran número de activos pese a que en ocasiones sus cálculos pueden llegar a tomar una gran cantidad de tiempo.

La comparación de los resultados con el método de Mínima Varianza permite concluir que la optimización por CVaR es más efectiva en la minimización del Valor en Riesgo. Los resultados en términos generales son bastante similares, pero cuando se trabaja con distribuciones no simétricas los resultados definitivamente le darán una mayor ventaja al modelo de optimización por CVaR.

Con respecto a los TES, se observa que el comportamiento de sus rendimientos a lo largo del tiempo, no se ajusta a una distribución en particular, por lo tanto, para una mejor aproximación en la generación de los escenarios una mejor alternativa sería la de realizarlos por simulación histórica.

Del ejercicio, se encontró que existen TES eficientes en su relación riesgo rentabilidad y otros que, según las series históricas con las que se trabajó, parecen no serlo. En mercados eficientes, las fuerzas de la oferta y la demanda obligan a que todos los activos que pertenecen al mismo sean eficientes en este sentido. Con el desarrollo de programas de manejo de riesgo en las instituciones financieras colombianas, como el propuesto en este proyecto, se puede lograr llegar a un estado en el mercado financiero y de capitales, en el cual todos los

títulos sean títulos eficientes, lo cual ofrece mayores oportunidades a los inversionistas y en general, crea un mercado con mayor claridad y confianza.

Finalmente, se puede decir que el valor en Riesgo y el Valor en Riesgo Condicional, poseen características que las hacen muy atractivas para medir y controlar el riesgo financiero y de mercado. La opinión del autor es que para realizar un manejo integrado de riesgo, se debe interactuar conjuntamente con estos dos valores, debido a que sus particulares características no las hacen rivales, sino complementos.

## BIBLIOGRAFÍA

ARTZNER, Philippe et al. Coherent Measures of Risk. Washington: American Mathematical Society, 1999. 24 p.

BASEL COMMITTEE ON BANKING SUPERVISIÓN. An Internal Model-Based Approach to Market Risk capital Requirements. 1995. 156p.

HULL, John. Options, Futures and other Derivatives. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2000. 522p.

JORION, Philippe. Value at Risk. 2 ed. Nueva York: McGraw-Hill, 2001. 544p.

KROKHMAL, Pavlo; PALMQUIST, Jonas y URYASEV, Stanislav. Portfolio Optimization with Conditional Value at Risk Objective and Constrains. Gainesville: Universidad de la Florida, 2001. 20p.

J.P. MORGAN y REUTERS. Risk Metrics – Technical Document. 4ed. Nueva York: 1996. 225p.

J.P. MORGAN y REUTERS. Return to Risk Metrics: The Evolution of a Standard. Nueva York: 2001. 111p.

ROCKAFELLAR, Tyrrell y URYASEV, Stanislav. Conditional Value at Risk for General Loss Distributions. Gainesville: Universidad de la Florida, 2001. 30p.

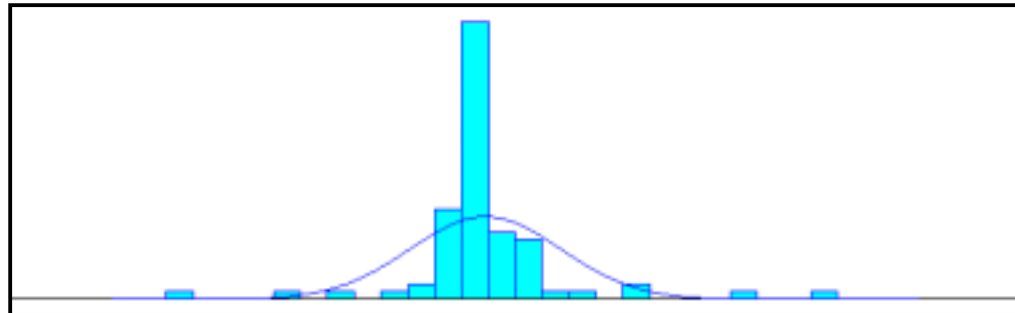
ROCKAFELLAR, Tyrrell y URYASEV, Stanislav. Optimization of Conditional Value at Risk. Gainesville: Universidad de la Florida, 1999. 26p.

SUPERINTENDENCIA BANCARIA DE COLOMBIA. Circular Externa 042 de 2001: Criterios y Procedimientos para Medición de Riesgos de Mercado. Bogotá: 2001. 15p.

## ANEXOS

### **Anexo 1: Distribuciones de las series de los logaritmos naturales de los rendimientos de los yields**

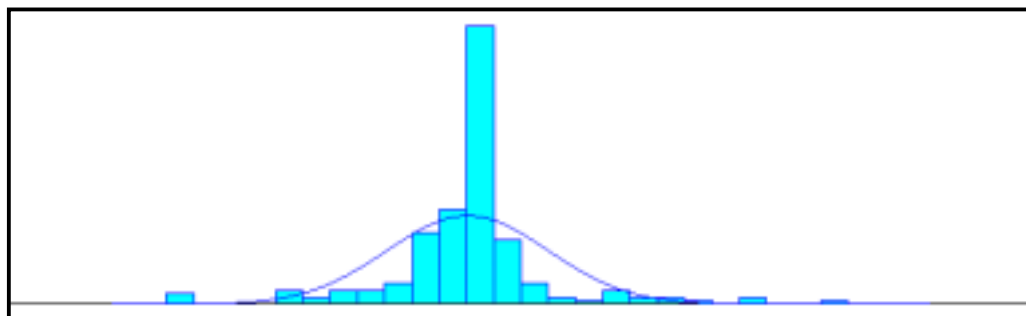
Marzo 18 de 2003



| Distribution Summary    |                      |
|-------------------------|----------------------|
| Distribution:           | Normal               |
| Expression:             | NORM(0.0017, 0.0328) |
| Square Error:           | 0.134824             |
| Chi Square Test         |                      |
| Number of intervals     | 6                    |
| Degrees of freedom      | 3                    |
| Test Statistic          | 84.8                 |
| Corresponding p-value   | < 0.005              |
| Kolmogorov-Smirnov Test |                      |
| Test Statistic          | 0.206                |
| Corresponding p-value   | < 0.01               |

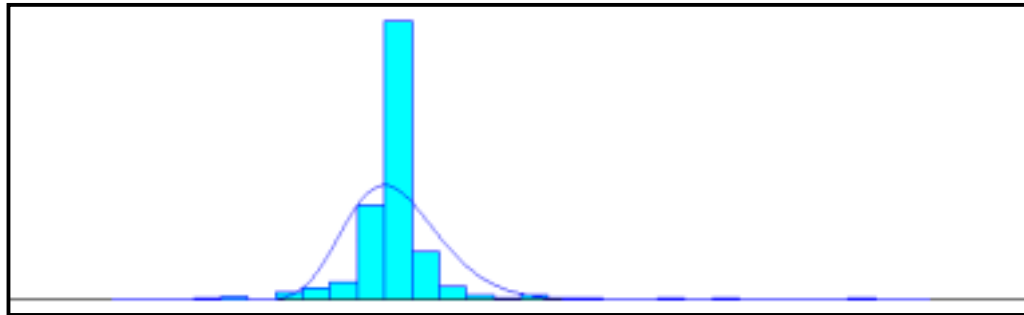
| Fit All Summary |          |
|-----------------|----------|
| Function        | Sq Error |
| Normal          | 0.171    |
| Beta            | 0.177    |
| Gamma           | 0.18     |
| Erlang          | 0.18     |
| Lognormal       | 0.197    |
| Weibull         | 0.216    |
| Triangular      | 0.296    |
| Uniform         | 0.379    |
| Exponential     | 0.407    |

Octubre 8 de 2003



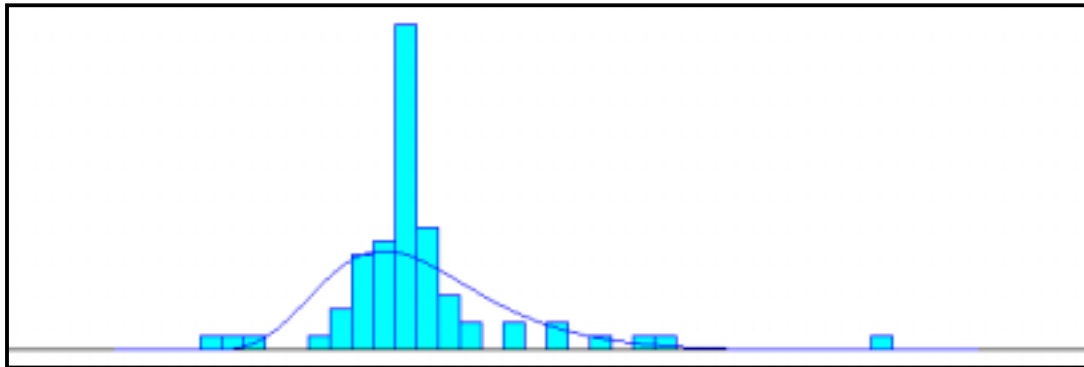
| Distribution Summary    |                         | Fit All Summary |          |
|-------------------------|-------------------------|-----------------|----------|
| Distribution:           | Normal                  | Function        | Sq Error |
| Expression:             | NORM(-0.000186, 0.0227) | Normal          | 0.101    |
| Square Error:           | 0.1009                  | Beta            | 0.104    |
| Chi Square Test         |                         | Erlang          | 0.112    |
| Number of intervals     | 10                      | Gamma           | 0.113    |
| Degrees of freedom      | 7                       | Weibull         | 0.114    |
| Test Statistic          | 163                     | Lognormal       | 0.123    |
| Corresponding p-value   | < 0.005                 | Triangular      | 0.166    |
| Kolmogorov-Smirnov Test |                         | Uniform         | 0.192    |
| Test Statistic          | 0.2                     | Exponential     | 0.206    |
| Corresponding p-value   | < 0.01                  |                 |          |

Abril 16 de 2004



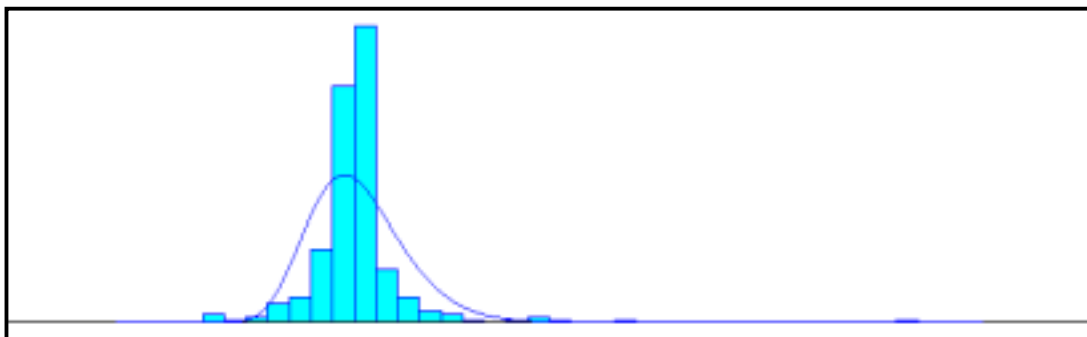
| Distribution Summary    |                              | Fit All Summary |          |
|-------------------------|------------------------------|-----------------|----------|
| Distribution:           | Lognormal                    | Function        | Sq Error |
| Expression:             | -0.08 + LOGN(0.0798, 0.0136) | Lognormal       | 0.123    |
| Square Error:           | 0.144129                     | Normal          | 0.125    |
| Chi Square Test         |                              | Beta            | 0.129    |
| Number of intervals     | 8                            | Erlang          | 0.151    |
| Degrees of freedom      | 5                            | Gamma           | 0.152    |
| Test Statistic          | 252                          | Weibull         | 0.209    |
| Corresponding p-value   | < 0.005                      | Triangular      | 0.332    |
| Kolmogorov-Smirnov Test |                              | Uniform         | 0.404    |
| Test Statistic          | 0.196                        | Exponential     | 0.421    |
| Corresponding p-value   | < 0.01                       |                 |          |

Mayo 6 de 2004



| Distribution Summary    |  | Fit All Summary |          |
|-------------------------|--|-----------------|----------|
| Distribution:           | Beta                                     | Function        | Sq Error |
| Expression:             | $-0.08 + 0.24 * \text{BETA}(10.6, 19.1)$ | Beta            | 0.073    |
| Square Error:           | 0.07302                                  | Lognormal       | .0766    |
| Chi Square Test         |  | Gamma           | .0773    |
| Number of intervals     | 8  | Erlang          | .0777    |
| Degrees of freedom      | 5  | Normal          | .0849    |
| Test Statistic          | 47.6                                     | Weibull         | .0948    |
| Corresponding p-value   | < 0.005                                  | Triangular      | 0.117    |
|                         |  | Uniform         | 0.146    |
| Kolmogorov-Smirnov Test |  | Exponential     | 0.152    |
| Test Statistic          | 0.247                                    |                 |          |
| Corresponding p-value   | < 0.01                                   |                 |          |

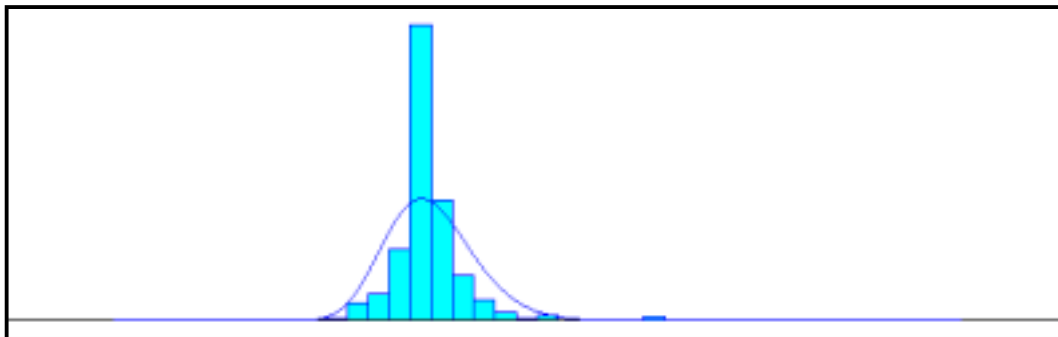
Junio 25 de 2004



| Distribution Summary    |                                       |
|-------------------------|---------------------------------------|
| Distribution:           | Lognormal                             |
| Expression:             | $-0.07 + \text{LOGN}(0.0697, 0.0139)$ |
| Square Error:           | 0.075198                              |
| Chi Square Test         |                                       |
| Number of intervals     | 9                                     |
| Degrees of freedom      | 6                                     |
| Test Statistic          | 145                                   |
| Corresponding p-value   | < 0.005                               |
| Kolmogorov-Smirnov Test |                                       |
| Test Statistic          | 0.179                                 |
| Corresponding p-value   | < 0.01                                |

| Fit All Summary |          |
|-----------------|----------|
| Function        | Sq Error |
| Lognormal       | .0752    |
| Erlang          | .0763    |
| Gamma           | .0765    |
| Normal          | .0892    |
| Beta            | .0912    |
| Weibull         | 0.128    |
| Triangular      | 0.192    |
| Uniform         | 0.224    |
| Exponential     | 0.226    |

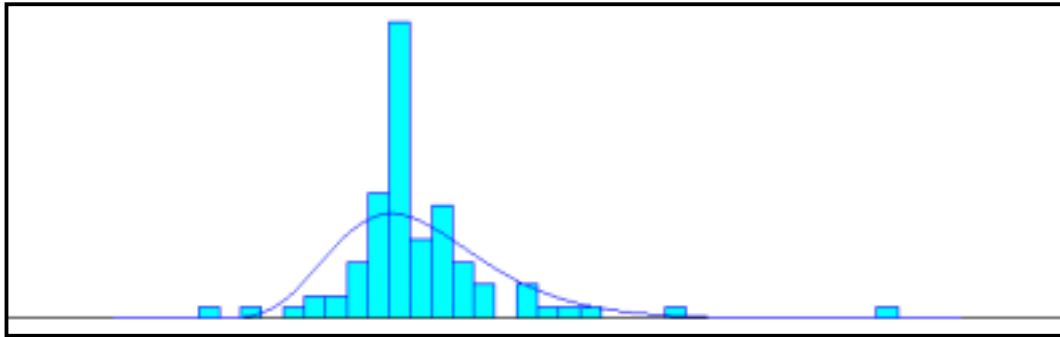
Febrero 4 de 2005



| Distribution Summary    |                                       |
|-------------------------|---------------------------------------|
| Distribution:           | Lognormal                             |
| Expression:             | $-0.09 + \text{LOGN}(0.0897, 0.0126)$ |
| Square Error:           | 0.092039                              |
| Chi Square Test         |                                       |
| Number of intervals     | 9                                     |
| Degrees of freedom      | 6                                     |
| Test Statistic          | 270                                   |
| Corresponding p-value   | < 0.005                               |
| Kolmogorov-Smirnov Test |                                       |
| Test Statistic          | 0.166                                 |
| Corresponding p-value   | < 0.01                                |

| Fit All Summary |          |
|-----------------|----------|
| Function        | Sq Error |
| Lognormal       | 0.092    |
| Normal          | .0985    |
| Beta            | .0991    |
| Erlang          | 0.133    |
| Gamma           | 0.134    |
| Weibull         | 0.151    |
| Triangular      | 0.219    |
| Uniform         | 0.254    |
| Exponential     | 0.263    |

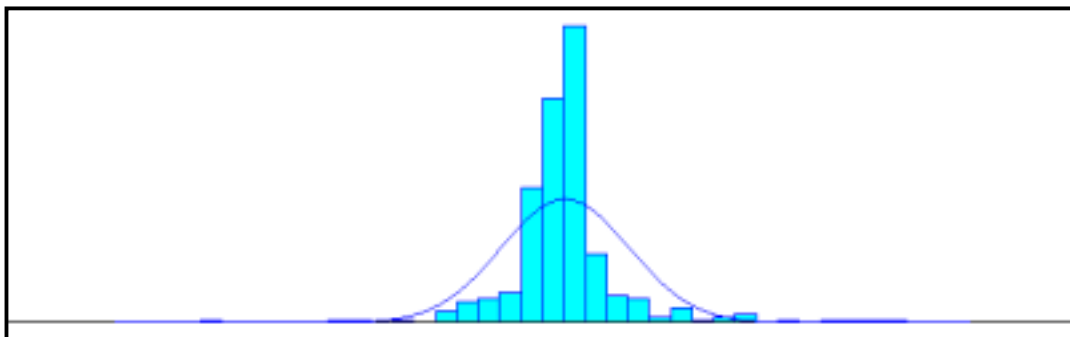
Marzo 11 de 2005



| Distribution Summary    |                                       |
|-------------------------|---------------------------------------|
| Distribution:           | Lognormal                             |
| Expression:             | $-0.08 + \text{LOGN}(0.0834, 0.0222)$ |
| Square Error:           | 0.053777                              |
| Chi Square Test         |                                       |
| Number of intervals     | 7                                     |
| Degrees of freedom      | 4                                     |
| Test Statistic          | 40.6                                  |
| Corresponding p-value   | < 0.005                               |
| Kolmogorov-Smirnov Test |                                       |
| Test Statistic          | 0.186                                 |
| Corresponding p-value   | < 0.01                                |

| Fit All Summary |          |
|-----------------|----------|
| Function        | Sq Error |
| Lognormal       | .0538    |
| Erlang          | .0543    |
| Normal          | .0612    |
| Beta            | .0615    |
| Weibull         | .0727    |
| Triangular      | .0981    |
| Uniform         | 0.128    |
| Exponential     | 0.135    |
| Gamma           | 0.274    |

Mayo 3 de 2006

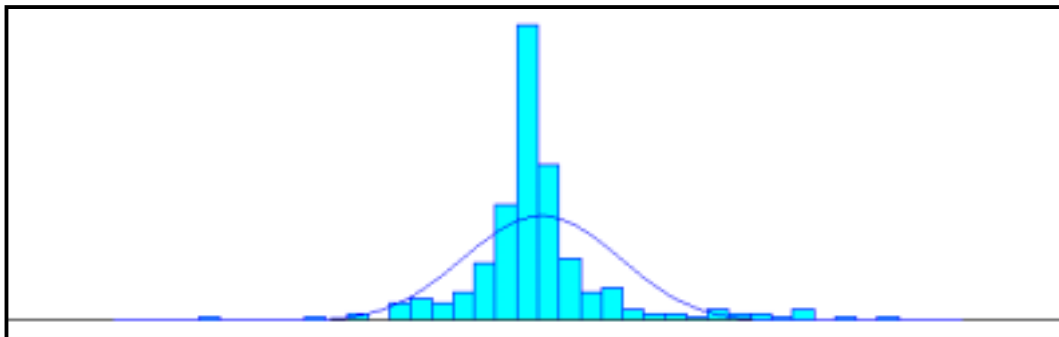




| Distribution Summary    |                        |
|-------------------------|------------------------|
| Distribution:           | Normal                 |
| Expression:             | NORM(-0.00012, 0.0142) |
| Square Error:           | 0.064449               |
| Chi Square Test         |                        |
| Number of intervals     | 12                     |
| Degrees of freedom      | 9                      |
| Test Statistic          | 181                    |
| Corresponding p-value   | < 0.005                |
| Kolmogorov-Smirnov Test |                        |
| Test Statistic          | 0.187                  |
| Corresponding p-value   | < 0.01                 |

| Fit All Summary |          |
|-----------------|----------|
| Function        | Sq Error |
| Normal          | .0644    |
| Beta            | 0.066    |
| Lognormal       | 0.073    |
| Weibull         | .0895    |
| Erlang          | .0911    |
| Gamma           | .0911    |
| Triangular      | 0.134    |
| Uniform         | 0.167    |
| Exponential     | 0.18     |

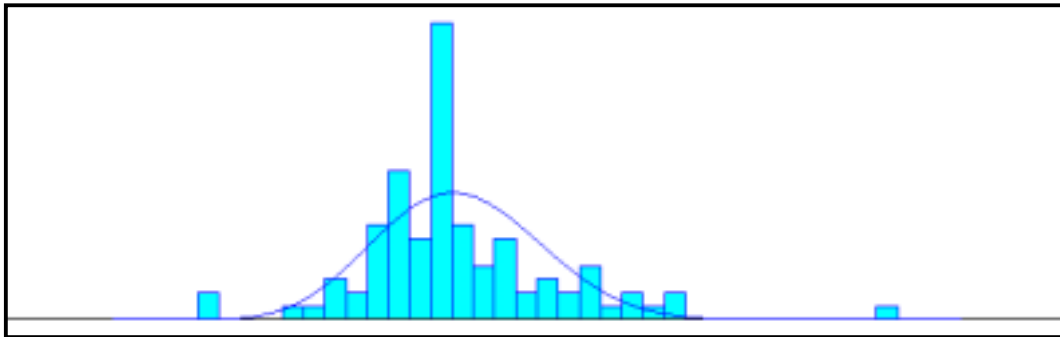
Julio 25 de 2006



| Distribution Summary    |                                 |
|-------------------------|---------------------------------|
| Distribution:           | Beta                            |
| Expression:             | -0.08 + 0.16 * BETA(15.9, 15.7) |
| Square Error:           | 0.05965                         |
| Chi Square Test         |                                 |
| Number of intervals     | 12                              |
| Degrees of freedom      | 9                               |
| Test Statistic          | 156                             |
| Corresponding p-value   | < 0.005                         |
| Kolmogorov-Smirnov Test |                                 |
| Test Statistic          | 0.188                           |
| Corresponding p-value   | < 0.01                          |

| Fit All Summary |          |
|-----------------|----------|
| Function        | Sq Error |
| Beta            | .0597    |
| Normal          | .0601    |
| Lognormal       | .0607    |
| Erlang          | .0638    |
| Gamma           | .0638    |
| Weibull         | 0.075    |
| Triangular      | 0.104    |
| Uniform         | 0.134    |
| Exponential     | 0.146    |

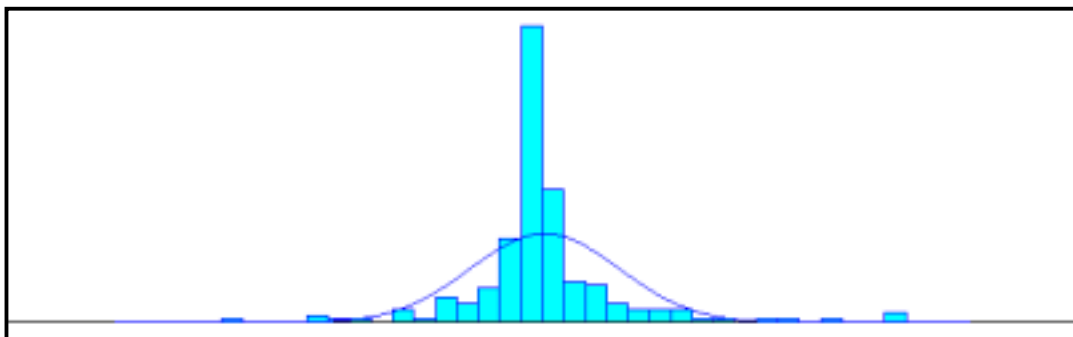
Marzo 14 de 2007



| Distribution Summary    |   |
|-------------------------|---|
| Distribution:           | Beta                                    |
| Expression:             | $-0.08 + 0.2 * \text{BETA}(10.6, 15.4)$ |
| Square Error:           | 0.032051                                |
| Chi Square Test         |   |
| Number of intervals     | 7                                       |
| Degrees of freedom      | 4                                       |
| Test Statistic          | 15                                      |
| Corresponding p-value   | < 0.005                                 |
| Kolmogorov-Smirnov Test |   |
| Test Statistic          | 0.117                                   |
| Corresponding p-value   | > 0.15                                  |

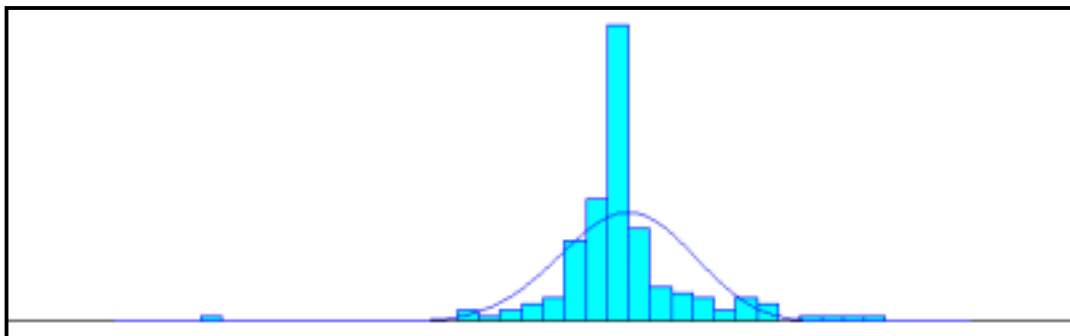
| Fit All Summary |          |
|-----------------|----------|
| Function        | Sq Error |
| Beta            | .0321    |
| Erlang          | .0332    |
| Gamma           | .0336    |
| Lognormal       | .0345    |
| Normal          | .0361    |
| Weibull         | .0398    |
| Triangular      | .0547    |
| Uniform         | .0804    |
| Exponential     | .0888    |

Agosto 22 de 2008



| Distribution Summary    |                        | Fit All Summary |          |
|-------------------------|------------------------|-----------------|----------|
| Distribution:           | Normal                 | Function        | Sq Error |
| Expression:             | NORM(0.000293, 0.0139) | Normal          | 0.089    |
| Square Error:           | 0.088992               | Lognormal       | .0901    |
| Chi Square Test         |                        | Beta            | .0907    |
| Number of intervals     | 12                     | Erlang          | .0971    |
| Degrees of freedom      | 9                      | Gamma           | .0972    |
| Test Statistic          | 216                    | Weibull         | 0.108    |
| Corresponding p-value   | < 0.005                | Triangular      | 0.14     |
| Kolmogorov-Smirnov Test |                        | Uniform         | 0.171    |
| Test Statistic          | 0.2                    | Exponential     | 0.183    |
| Corresponding p-value   | < 0.01                 |                 |          |

Enero 25 de 2012



| Distribution Summary    |                                 | Fit All Summary |          |
|-------------------------|---------------------------------|-----------------|----------|
| Distribution:           | Beta                            | Function        | Sq Error |
| Expression:             | -0.13 + 0.22 * BETA(24.4, 16.7) | Beta            | .0673    |
| Square Error:           | 0.067339                        | Normal          | .0709    |
| Chi Square Test         |                                 | Lognormal       | .0835    |
| Number of intervals     | 9                               | Weibull         | .0849    |
| Degrees of freedom      | 6                               | Erlang          | .0907    |
| Test Statistic          | 83.6                            | Gamma           | .0908    |
| Corresponding p-value   | < 0.005                         | Triangular      | 0.122    |
| Kolmogorov-Smirnov Test |                                 | Uniform         | 0.153    |
| Test Statistic          | 0.191                           | Exponential     | 0.167    |
| Corresponding p-value   | < 0.01                          |                 |          |

## **Anexo 2: Descomposición de Cholevsky**

En el presente Anexo se describe el método de la descomposición de Cholevsky, el cual es utilizado para la generación de variables aleatorias normales correlacionadas. Tomado del documento técnico de Risk Metrics.

Para generar variables aleatorias multivariadas de la matriz de covarianza  $\Sigma$ , se parte del principio de que  $\Sigma$  puede ser descompuesta de la siguiente manera:

$$\Sigma = A^T A$$

Siendo A una matriz triangular.

Si se simula un vector de variables aleatorias normales X, se puede crear un vector de variables aleatorias normales con matriz de covarianza  $\Sigma$  usando la transformación:

$$Y = A^T X$$

(Ver demostración en Risk Metrics - Technical Document)

Para encontrar los elementos de la matriz A, se debe utilizar el siguiente conjunto de ecuaciones, el cual se resuelve de manera iterativa para cada uno de los componentes de la matriz A:

$$a_{ii} = \left( s_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik}^2 \right)^{1/2}$$

$$a_{ij} = \frac{1}{a_{jj}} \left( s_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} a_{jk} a_{ik} \right)$$

### Anexo 3: Algoritmo en Matlab

En el presente Anexo se muestra el código en Matlab utilizado para crear las matrices del problema de optimización lineal, a partir de los escenarios de rentabilidades generados.

```
X0=[];
X0=X;

load Perdidas.txt -ascii;
load Promedios.txt -ascii;
load Parametros.txt -ascii;

Jota=Parametros(1,1);
Titulos=Parametros(2,1);
Alfa=Parametros(3,1);

%Valor que debe ser cambiado por el usuario:
CVaR=3.0;

a=zeros(Jota+2,Jota+Titulos+1);
b=zeros(Jota+2,1);
f=zeros(Titulos+Jota+1,1);
VLB=zeros(Titulos+Jota+1,1);
VUB=[];

%lleno la matriz a;
for i=1:Titulos;
    a(1,i)=1;
end;

a(Jota+2,Titulos+1)=1;
for i=Titulos+2:Jota+Titulos+1;
    a(Jota+2,i)=1/(Jota*(1-Alfa));
end;

for i=1:Jota;
    for j=1:Titulos;
        a(i+1,j)=Perdidas(i,j);
    end;
end;

for i=2:Jota+1;
    a(i,i+Titulos)=-1;
    a(i,Titulos+1)=-1;
end;

%lleno el vector b;
b(1,1)=1;
b(Jota+2,1)=CVaR;
```

```
%lleno el vector f;  
for i=1:Titulos;  
    f(i,1)=Promedios(i,1);  
end;  
  
N=1;  
VLB(Titulos+1)=-100000  
m=size(a)  
n=size(b)  
  
%se encuentra la solución;  
X=LP(f,a,b,VLB,VUB,X0,N);
```