Límites inversos de estructuras compactas

Santiago Iván Pinzón Palacios
Asesor: Xavier Caicedo Ferrer

13 de enero de 2015

Índice general

Capítulo 1

Introducción

En el presente documento se estudian los límites inversos de estructuras compactas, destacando sus propiedades de primer orden. Se comienza dando preliminares básicos. A continuación se definen las estructuras compactas y se demuestran algunas de sus características fundamentales, como el hecho de que son atómicamente compactas.

Seguidamente se estudian consecuencias de la noción de compacidad atómica y se demuestran resultados interesantes como el hecho de que esta compacidad también implica compacidad para fórmulas positivas y para cierto tipo de fórmulas infinitarias. También se dan caracterizaciones conocidas de las estructuras atómicamente compactas. Aquí se presenta la pregunta de Mycielski de si toda estructura atómicamente compactaes un retracto de una estructura compacta dando ejemplos de respuestas positivas y negativas para diferentes clases de estructuras.

Después se introducen los límites inversos como una forma de obtener estructuras compactas a partir de otras del mismo tipo. Se da una caracterización intrínseca de las estructuras que se obtienen como límite inverso de finitas. También se prueba que todo límite inverso de estructuras compactas de Hausdorff, se puede inyectar con un homomorfismo puro en un ultraproducto de las estructuras que participan en su construcción. Esto permite dar unageneralizacón de un resultado presentado en [MM2].

A continuación se describe la envolvente profinita como una aplicación importante de los límites inversos de estructuras finitas, que permite obtener un homomorfismo inyectivo canónico de una ciertas estructuras en una profinita. Se presentan en este punto ejemplos particularmente relevantes. Se introduce el concepto de productos subdirectos y estructuras subdirectamente irreducibles con el fin de dar ejemplos en los cuales se pueda garantizar la existencia de la envolvente profinita.

Finalmente se hace un pequeño estudio de las compactificaciones de una estructura. Se define la compactificación maximal y se muestra que si la pregunta de Mycielski es positiva para cierta estructura, existe un retracto desde dicha compactificación maximal.

Se asume que el lector tiene conocimientos básicos de topología (ver [Munkres]) y de ultrafiltros y extensiones elementales, basicamente las definiciones y teorema de Łos (ver [Marker]).

Capítulo 2

Preliminares

Sea L un lenguaje de primer orden fijo, para cada L estructura $\mathfrak{A}$ y cada símbolo $s \in L$ denotamos $s^{\mathfrak{A}}$ a la interpretación de s en $\mathfrak{A}$ usualmente se escribe simplemente s para referirse a $s^{\mathfrak{A}}$ si no hay ambigüedad. Para R un símbolo de relación n-aria, $R^{\mathfrak{A}}(a_1, ..., a_n)$ significa que $(a_1, ..., a_n) \in R^{\mathfrak{A}}$. Dadas $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ L-estructuras, usaremos A, B y C para referirnos a sus respectivos universos. Denotamos $L_{\mathfrak{A}}$ al lenguaje L extendido con un nuevo símbolo de constante c_a para cada $a \in A$.

Si $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son L-estructuras con $A \subseteq B$, $\mathfrak{A}$ se dice *subestructura* de $\mathfrak{B}$, notación $\mathfrak{A} \leq \mathfrak{B}$, si para cada f símbolo de función n aria $f^{\mathfrak{A}} = f^{\mathfrak{B}} \restriction A^n$ y para cada R símbolo de relación m-aria, $R^{\mathfrak{A}} = R^{\mathfrak{B}} \cap A^m$. Es fácil ver que si $\mathfrak{A}_\alpha$ con $\alpha \in I$ es una familia indexada de subestructuras de una estructura $\mathfrak{A}$ cuya intersección no es vacía, entonces $\bigcap_{\alpha \in I} \mathfrak{A}_\alpha \leq \mathfrak{A}$

Una función $\phi : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$ con $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ L estructuras, es un *homomorfismo* si: para todo $f \in L$ símbolo de función n-aria y elementos $a_1, ..., a_n$ de A (el universo de $\mathfrak{A}$) se tiene que $\phi(f^{\mathfrak{A}}(a_1, ...a_n)) = f^{\mathfrak{B}}(\phi(a_1), ..., \phi(a_n))$ y para toda $R \in L$ símbolo de relación m-aria y elementos $b_1, ..., b_m$ de $\mathfrak{A}$, $R^{\mathfrak{A}}(b_1, ..., b_n)$ implica $R^{\mathfrak{B}}(\phi(b_1), ..., \phi(b_n))$. Si además de eso ϕ cumple que para cualquier símbolo de relación n-aria R y cualquier colección $a_1, ..., a_n$ de elementos de $\mathfrak{A}$, $R^{\mathfrak{B}}(\phi(a_1), ..., \phi(a_n))$ implica la existencia de $b_1, ..., b_n$ elementos de $\mathfrak{A}$ tales que $R^{\mathfrak{A}}(b_1, ..., b_n)$ y para cada i $\phi(a_i) = \phi(b_i)$, ϕ se dice *homomorfismo fuerte.* Si ϕ es un homomorfismo tal que para cualquier símbolo de relación n-aria R (R puede ser la igualdad) y cualquier colección $a_1, ..., a_n$ de elementos de $\mathfrak{A}$, $R^{\mathfrak{B}}(\phi(a_1), ..., \phi(a_n))$ implica $R^{\mathfrak{A}}(a_1, ..., a_n)$, a ϕ se le llama un homomorfismo de subestructura. Note ϕ es homomorfismo de subestructura si y sólo si ϕ es un homomorfismo fuerte inyectivo. Un isomorfismo es un homomorfismo de subestructura sobreyectivo.

Una fórmula se dice *positiva existencial* (p.e) si es equivalente a una que se obtiene a partir de atómicas usando $\vee$, $\wedge$, y el cuantificador existencial $\exists$. ϕ se dice *positiva* si es equivalente a una obtenida a partir de atómicas usando $\vee$, $\wedge$, y los cuantificadores $\exists$ y $\forall$.

Lema 2.0.1. *Dadas dos L-estructuras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ y $h : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$ un homomorfismo entonces:*

(i) Para cada L-fórmula p.e. $\phi(x_1, ..., x_n)$ tal que $\mathfrak{A} \models \phi(a_1, ..., a_n)$ para ciertos $a_i \in \mathfrak{A}$, $\mathfrak{B} \models \phi(h(a_1), ..., h(a_n))$

(ii) Si h resulta ser sobreyectivo, entonces para cada fórmula positiva ϕ y elementos $a_1, ..., a_n$ de $\mathfrak{A}$ tales que $\mathfrak{A} \models \phi(a_1, ..., a_n)$, se tiene que $\mathfrak{B} \models \phi(h(a_1), ..., h(a_n))$

Demostración. La prueba se sigue facilmente por inducción en la complejidad de ϕ. $\square$

Si L no tiene símbolos de relación, a una L- estructura se le dice un álgebra. A una clase de álgebras axiomatizable por sentencias del tipo

$$\forall x_1, ..., \forall x_n(\phi)$$

con ϕ L-fórmula atómica, se le llama una variedad.

Dadas L-estructuras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$, una función $h : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$ se dice *elemental* si para toda L-fórmula $\phi(x_1, ..., x_n)$ y para toda n-tupla en $\mathfrak{A}$, $(a_1, ..., a_b)$ se tiene que $\mathfrak{A} \models \phi(a_1, ..., a_n)$ si y sólo si $\mathfrak{B} \models \phi(h(a_n), ..., h(a_n))$. Es claro que si h es elemental, es un homomorfsmo inyectivo. Si $\mathfrak{A} \leq \mathfrak{B}$ con $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ L-estructuras, la extensión se dice eleental si la inclusión de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$ es elemental.

Para cada L-estructura $\mathfrak{A}$ definimos $Diag(\mathfrak{A}) = \{\phi : \phi$ es $L_{\mathfrak{A}}$-sentencia atómica tal que $\mathfrak{A} \models \phi\}$, interpretando en $\mathfrak{A}$ cada constante c_a $(a \in A)$ como a. Y se define $Diag_{el}(\mathfrak{A}) = \{\phi : \phi$ es $L_{\mathfrak{A}}$-sentencia tal que $\mathfrak{A} \models \phi\}$. Es un hecho conocido que si $\mathfrak{C}$ es una $L_{\mathfrak{A}}$ estructura tal que $\mathfrak{C} \models Diag(\mathfrak{A})$, entonces $h : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{C}$ definida por $h(a) = c_a^{\mathfrak{C}}$ para cada $a \in \mathfrak{A}$, es un homomorfismo, y si $\mathfrak{C} \models Diag_{el}(\mathfrak{A})$, el mismo h es elemental. En particular si $Diag_{el}(\mathfrak{A}) \cup T$ tiene modelos, con T alguna teoría, entonces existe una extensión elemental de $\mathfrak{A}$ que modela T.

Dada una familia de L-estructuras $\{\mathfrak{A}_i\}_{i \in I}$ se usarÃ¡ la definición usual de la estructura producto $\prod \mathfrak{A}_i$.

Dada una L-estructura $\mathfrak{A}$, una *congruencia* en $\mathfrak{A}$ es una relación de equivalencia sobre $\mathfrak{A}$ que es a su vez una subestructura de $\mathfrak{A}^2$. El conjunto de todas las congruencias sobre $\mathfrak{A}$ se denota $Cong(\mathfrak{A})$. Dada $\theta \in Cong(\mathfrak{A})$ para cada $a \in \mathfrak{A}$, denotamos por a_θ a la clase de equivalencia de a respecto a θ. Sea A/θ el conjunto de clases de equivalencia de $\mathfrak{A}$ respecto a θ. Podemos ver a $\mathfrak{A}/\theta$ como una L-estructura de la siguiente manera: para cada $c \in L$ símbolo de constante definimos $c^{\mathfrak{A}/\theta} = c_\theta^{\mathfrak{A}}$, para cada R símbolo de relación n-aria definimos $R^{\mathfrak{A}/\theta} = \{(C_1, ..., C_n) \in \mathfrak{A}/\theta^n | \exists x_1 \in C_1, ..., x_n \in C_n, (x_1, ..., x_n) \in R^{\mathfrak{A}}\}$ y dado $h \in L$ símbolo de función m-aria y $a_1, ..., a_m$ elementos de $\mathfrak{A}$ definimos $h^{\mathfrak{A}/\theta}((a_1)_\theta, ..., (a_n)_\theta) := (h(a_1, ..., a_n))_\theta$, para ver que es una operación bien definida sobre las clases de equivalencia suponga $a'_1, ..., a'_n$ elementos de $\mathfrak{A}$ tales que $(a_i, a'_i) \in \theta$ para cada $i \in \{1, ..., n\}$, ahora como θ es una subestructura de $\mathfrak{A}^2$ se tiene que $h((a_1, a'_1), ..., (a_n, a'_n)) \in \theta$, es decir (por definición de la estructura producto) $(h(a_1, ..., a_n), h(a'_1, ..., a'_n)) \in \theta$ con lo cual $h^{\mathfrak{A}/\theta}$ está bien definida. Note que con esta definición la proyección natural $\pi : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{A}/\theta$ dada por $\pi(a) = a_\theta$ para cada $a \in \mathfrak{A}$ es un homomorfismo fuerte.

Ahora, si $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son L-estructuras y $\Phi : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$ es un homomorfismo podemos definir $ker(\Phi) = \{(a, b) \in \mathfrak{A}^2 : \Phi(a) = \Phi(b)\}$ que es claramente una relación de equivalencia sobre $\mathfrak{A}$ y además es una congruencia en $\mathfrak{A}$ ya que si h es un símbolo de función n-aria y $(a_1, b_1), ..., (a_n, b_n)$ están en $ker(\Phi)$ así

$$h^{\mathfrak{A}^2}((a_1, b_1), ..., (a_n, b_n)) = (h^{\mathfrak{A}}(a_1, ..., a_n), h^{\mathfrak{A}}(b_1, ..., b_n))$$

y además

$$(\Phi(h^{\mathfrak{A}}(a_1,...,a_n)),\Phi(h^{\mathfrak{A}}(b_1,...,b_n))) = (h^{\mathfrak{B}}(\Phi(a_1),...,\Phi(a_n)),h^{\mathfrak{B}}(\Phi(b_1),...,\Phi(b_n)))$$

y como para cada $i \in \{1,...,n\}$ $\Phi(a_i) = \Phi(b_i)$ entonces

$$h^{\mathfrak{A}^2}((a_1,b_1),...,(a_n,b_n)) \in ker(\Phi)$$

.

Lema 2.0.2. *Si* $\Phi : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$ *es un homomorfismo fuerte y sobreyectivo entonces existe un único isomorfismo* $\hat{\Phi} : \mathfrak{A}/ker(\Phi) \longrightarrow \mathfrak{B}$*. Tal que* $\Phi = \hat{\Phi} \circ \pi_{ker(\Phi)}$

Demostración. Sea $\hat{\Phi} : \mathfrak{A}/ker(\Phi) \longrightarrow \mathfrak{B}$ dado por $\hat{\Phi}(a_{ker(\Phi)}) = \Phi(a)$ que está bien definido de la definición de $ker(\phi)$ y que claramente es un homomorfismo al ser la proyección de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{A}/ker(\Phi)$ un homomorfismo fuerte y Φ un homomorfismo. Es claro que es sobre al ser Φ sobre, y la inyectividad se sigue directo de las definiciones. Para ver que es un homomorfismo de subestructura supongamos R es un símbolo de relacion n-aria y $a_1,...,a_n$ son elementos de $\mathfrak{A}$ tales que $R^{\mathfrak{B}}(\hat{\Phi}((a_1)_{ker(\Phi)}),...,\hat{\Phi}(a_n)_{ker(\Phi)})$ entonces $R^{\mathfrak{B}}(\Phi(a_1),...,\Phi(a_n))$ y al ser Φ fuerte, existe $b_1,...,b_n$ elementos de $\mathfrak{A}$ tales que $R^{\mathfrak{A}}(b_1,...,b_n)$ y para cada $i \in \{1,...,n\}$ $(a_i,b_i) \in ker(\Phi)$ con lo cual $((b_1)_{ker(\Phi)},...,(b_n)_{ker(\Phi)}) \in R^{\mathfrak{A}/\theta}$ es decir $((a_1)_{ker(\Phi)},...,(a_n)_{ker(\Phi)}) \in R^{\mathfrak{A}/\theta}$.

La unicidad se sigue directo de la condición $\Phi = \hat{\Phi} \circ \pi_{ker(\Phi)}$.

□

Sean $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ dos L-estructuras con $i : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$ un homomorfismo, $\mathfrak{A}$ se dice un retracto de $\mathfrak{B}$ si existe $h : \mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{A}$ homomorfismo tal que $h \circ i = id_{\mathfrak{A}}$, en este caso a h se le llama una retracción de $\mathfrak{B}$ en $\mathfrak{A}$ (o de i). Note que en esta situación, h es sobreyectiva al ser i su inversa drecha. Además h es fuerte porque si para R símblo de relación n-aria, si para ciertos $b_1,...,b_n$ elementos de $\mathfrak{B}$ se tiene que $(h(b_1),...,h(b_n)) \in R^{\mathfrak{A}}$, entonces $(i(h(b_1)),...,i(h(b_n))) \in R^{\mathfrak{B}}$ y como $h \circ i$ es la identidad en $\mathfrak{A}$, para cada $j \in \{1,...,n\}$, $h(i(h(b_j))) = h(b_j)$.

Note que i un homomorfismo de subestructura, pues si R es un símbolo de relación n-aria y $a_1,...,a_n$ son elementos de $\mathfrak{A}$ tales que $(i(a_1),...,i(a_n)) \in R^{\mathfrak{B}}$, entonces al ser h homomorfismo, $(h(i(a_1)),...,h(i(a_n))) \in R^{\mathfrak{A}}$ y como $h \circ i$ es la identidad en $\mathfrak{A}$, $(a_1,...,a_n) \in R^{\mathfrak{A}}$.

Capítulo 3

Estructuras Topológicas Compactas

3.1. Compacidad y Compacidad atómica

Una estructura $\mathfrak{A}$ es una *estructura topológica* si está dotada con una topología en la cual las operaciones son continuas y las interpretaciones de los símbolos de relación n-arios, son conjuntos cerrados de A^n, (para cualquier n natural mayor o igual a 1, consideramos a $\mathfrak{A}^n$ con la topología producto), generalmente se considera a la igualdad como una relación con lo cual las estructuras topológicas son de Hausdorff.

Es fácil ver, por inducción, que si $\mathfrak{A}$ es una estructura topológica, entonces para cada $\phi(x)$, $L_{\mathfrak{A}}$-fórmula positiva, se tiene que $\{x \in \mathfrak{A} : \mathfrak{A} \models \phi(x)\}$ es un cerrado en $\mathfrak{A}$.

Una estructura $\mathfrak{A}$ se dice *atómicamente compacta* si todo conjunto de $L_{\mathfrak{A}}$ fórmulas atómicas, tal que todos sus subconjuntos finitos se satisfacen en $\mathfrak{A}$, es satisfactible en $\mathfrak{A}$. A las álgebras atómicamente compactas se les dice *ecuacionalmente compactas*. Esta noción de compacidad es implicada, como lo muiestra el siguiente resultado conocido, por la compacidad topológica.

Lema 3.1.1. *Si $\mathfrak{A}$ es una L-estructura topológica compacta de Hausdorff entonces $\mathfrak{A}$ es atómicamente compacta.*

Demostración. Sea Δ un conjunto de fórmulas atómicas con constantes en $\mathfrak{A}$ finitamente satisfactible en $\mathfrak{A}$, supongamos que Δ tiene todas sus variables entre $X := \{x_\alpha\}_{\alpha\in\beta}$ con β algún cardinal. si tomamos $\psi(X) \in \Delta$ entonces ψ es de la forma $R(t_1(X), ..., t_n(X))$ para algún símbolo de relación n-aria R y $t_i(X)$ término con constantes en $\mathfrak{A}$ para cada $i \in \{1, .., n\}$, note que R puede ser $=$, y como $\mathfrak{A}$ es de Hausdorff en todo caso R es un subconjunto cerrado de $\mathfrak{A}^n$. Cada término $t(X)$ se puede ver como una función de $P := \mathfrak{A}^\beta$ en $\mathfrak{A}$ dada por $t(Y) = t^{\mathfrak{A}}(Y)$ para cualquier $Y \in P$. Si dotamos a P con la topología producto, cada una de estas funciones está dada por proyectar y aplicar finitas veces funciones continuas (interpretaciones de símbolos funcionales de L), con elementos de $\mathfrak{A}$, lo cual es claramente continuo al ser $\mathfrak{A}$ álgebra topológica. Ahora considere $f_\psi : P \longrightarrow \mathfrak{A}^n$ dada por $f\psi(Y) = (t_1(Y), ..., t_n(Y))$ una función continua. Sea $S_\psi := \{Y \in P : \mathfrak{A} \models \psi(Y)\}$ es decir, el conjunto de tuplas que satisfacen ψ en $\mathfrak{A}$. Note que como $S_\psi = f_\psi^{-1}(R)$ y R es cerrado, cada S_ψ es un subconjunto cerrado de P. Ahora, el hecho de que Δ sea finitamente satisfactible en $\mathfrak{A}$ nos dice que $S := \{S_\psi | \psi \in \Delta\}$ tiene la propiedad de intersecciones finitas, además es un conjunto de cerrados. Dado que $\mathfrak{A}$ es compacto y por Tychonoff P también, existe $Y \in \bigcap S$ es decir, Δ es satisfactible en $\mathfrak{A}$. □

Este lema también es conocido y no muy difícil de probar.

Lema 3.1.2. *Sean $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ L-estructuras con $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$ una sub-estructura. Suponga que $\mathfrak{A}$ es atómicamente compacta y que existe $h : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$ homomorfismo que extiende a la identidad de $\mathfrak{B}$, entonces $\mathfrak{B}$ es atómicamente compacta. Es decir, retractos de ecuacionalmente compactos son ecuacionalmente compactos.*

Demostración. Sea Δ un conjunto de fórmulas atómicas con constantes en $\mathfrak{B}$ finitamente satisfactible en $\mathfrak{B}$. Como $\mathfrak{B}$ es sub estructura de $\mathfrak{A}$, Δ también es un conjunto de fórmulas con constantes en $\mathfrak{A}$ y al ser finitamente satisfactible en $\mathfrak{B}$ también lo es en $\mathfrak{A}$: Si $\psi(\vec{x}, \vec{b})$ (con $\vec{x}$ vector de variables y $\vec{b}$ vector de constantes de $\mathfrak{B}$) es de la forma $R(t_1(\vec{x}, \vec{b}), ..., t_k(\vec{x}, \vec{b}))$ con R símbolo de relacion n-aria y cada t_i un término. Si para ciertos $\vec{y} \in \mathfrak{B}$, $(t_1^{\mathfrak{B}}(\vec{y}, \vec{b}), ..., t_n^{\mathfrak{B}}(\vec{y}, \vec{b}) \in R^{\mathfrak{B}}$ como $\mathfrak{B}$ es subestructura de $\mathfrak{A}$, cada $t_1^{\mathfrak{A}}(\vec{y}, \vec{b}) = t_1^{\mathfrak{B}}(\vec{y}, \vec{b})$ y por tanto $(t_1^{\mathfrak{A}}(\vec{y}, \vec{b}), ..., t_n^{\mathfrak{A}}(\vec{y}, \vec{b}) \in R^{\mathfrak{A}}$ es decir $\mathfrak{A} \models \psi(\vec{y}, \vec{b})$. De aquí se tiene que si $J \subseteq \Delta$ finito y J es satisfactible en $\mathfrak{B}$ tambén lo es en $\mathfrak{A}$. Luego al ser $\mathfrak{A}$ ecuacionalmente compacto, existe $\vec{a} = \{a_\beta\}_{\beta\in\kappa}$ un vector en $\mathfrak{A}$ que satisface cada fórmula en Δ. Es decir para cada $\psi(\vec{x},\vec{b}) \in \Delta$, $\mathfrak{A} \models \psi(\vec{a},\vec{b})$ y como h es homomorfismo y ψ es atómica, $\mathfrak{B} \models \psi(h(\vec{a}), h(\vec{b}))$ donde $h(\vec{a}) := \{h(a_\beta)\}_{\beta\in\kappa}$. Como h es la identidad en $\mathfrak{B}$ esto significa que $\mathfrak{B} \models \psi(h(\vec{a}),\vec{b})$. Lo que significa que $h(\vec{a})$ satisface Δ en $\mathfrak{B}$. $\square$

Los dos lemas anteriores muestran que toda estructura que sea retracto de una estructura topológica compacta es ecuacionalmente compacta. Mycielski se preguntó si el recíproco es cierto, y esta pregunta ha tenido un gran impacto especialmente en el campo del álgebra universal. Ver por ejemplo el apéndice de compacidad atómica en [Grätzer].

En [Grätzer] (apéndice de compacidad atómica) se muestra que no es cierto en general, por ejemplo hay semigrupos ecuacionalmente compactos que no son retracto de ningún semigrupo topológico compacto. Existen también grafos que no son subgrafo de ningun grafo compacto, ver por ejemplo [Taylor]. Pero se sabe que es cierto para ciertas clases de álgebras como las álgebras booleanas, los módulos sobre un anillo y los semiretículos (para el caso de los semiretículos, ver [BF]). Y para otras álgebras como los retículos distributivos y los grupos no abelianos la pregunta aún está abierta.

Vale la pena en este punto estudiar algunas de las propiedades de las estructuras atómicamente compactas. Para esto primero daremos una caracterización extrínseca de las estructuras atómicamente compactas.

3.2. Inyectividad Pura

Una L-fórmula ψ se dice positiva primitiva (p.p.) si es equivalente a una del tipo $\exists\vec{x}\phi(\vec{x})$ donde $\phi(\vec{x})$ es una conjunción de atómicas.

Si $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son L-estructuras, un homomorfismo $f : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$ se dice *puro* si para cualquier $\psi(\vec{x})$ fórmula p.e. y para toda tupla $\vec{a}$ de elementos de $\mathfrak{A}$, se tiene que $\mathfrak{B} \models \psi(f(\vec{a}))$ implica $\mathfrak{A} \models \psi(\vec{a})$. Dado que f es homomorfismo siempre se tiene que $\mathfrak{A} \models \psi(\vec{a})$ implica $\mathfrak{B} \models \psi(f(\vec{a}))$. Note que cualquier homomorfismo puro es inyectivo pues si $\mathfrak{B} \models f(a) = f(b)$ para ciertos a y b en $\mathfrak{A}$ se tiene que $\mathfrak{A} \models a = b$.

Es útil observar que cierto homomorfismo $f : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$ es puro si y sólo si, dados $\phi(\vec{x}, \vec{y})$ positiva libre de cuantificadores y $\vec{a}$ una tupla de elementos de $\mathfrak{A}$ tales que $\mathfrak{B} \models \exists\vec{x}\phi(\vec{x}, f(\vec{a}))$ entonces $\mathfrak{A} \models \exists\vec{x}\phi(\vec{x}, \vec{a})$. Y como ϕ es libre de cuantificadores, podemos tomar forma normal disyuntiva y supongamos que $\phi(\vec{x}, f(\vec{a}))$ es equivalente a

$$\bigvee_{j=1}^{j=m} (\bigwedge_{i=0}^{i=n_j} \phi_{ij}(\vec{x}, f(\vec{a})))$$

para ciertas ϕ_{ij} atómicas. Entonces $\mathfrak{B} \models \exists\vec{x}\phi(\vec{x}, f(\vec{a}))$ si y sólo si

$$\mathfrak{B} \models \exists\vec{x} \bigwedge_{i=1}^{n_j} \phi_{ij}(\vec{x}, f(\vec{a}))$$

para cierto $j \in \{1, ..., m\}$. Y dado que ϕ_{ij} es (p.p.) para que f sea puro, basta con que refleje fórmulas p.p.

Dadas $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ L-estructuras, un homomorfismo $i : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$ es una *sección* si existe $g : \mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{A}$, una retracción de i. Es claro que toda inyección elemental y toda sección son homomorfismos puros.

Ejemplo 1: Considere a $\mathbb{Z}$ como grupo abeliano, entonces la inclusión diagonal i de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, dada por $i(z) = (z, z)$ para todo $z \in \mathbb{Z}$. Es una sección ya que la proyección p en cualquier componente es un homomorfismo de $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}$, tal que $p \circ i = id_{\mathbb{Z}}$. Pero no es elemental pues $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ni siquiera son elementalmente equivalentes ya que $\mathbb{Z} \models \exists x\forall y\exists z(z + z = y \vee z + z + x = y)$ tomando $x = 1$. Pero dicha fórmula no vale en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Ejemplo 2: Cualquier inclusión de un campo algebraicamente cerrado en un dominio de integridad es pura. Sea $(F, +, \dot{;} 0, 1)$ un campo algebraicamente cerrado contenido en un dominio D. Sea $\phi(\vec{x}, \vec{y})$ una fórmula libre de cuantificadores. Sea $\vec{a}$ una tupla en F y suponga que $D \models \exists\vec{x}\phi(\vec{x}, \vec{a})$. Como D es dominio de integridad, existe el campo de fracciones de D digamos K_D y podemos tomar su clausura algebráica $\overline{K}_D$. Ahora como D es un subanillo de $\overline{K}_D$, ϕ es libre de cuantificadores y $D \models \phi(\vec{x}, \vec{a})$, para alguna tupla $\vec{x}$ de elementos de D. Con lo cual $\overline{K}_D \models \exists\vec{x}\phi(\vec{x}, \vec{a})$. Y como la teoria de campos algebraicamente cerrados tiene eliminación de cuantificadores, $\exists\vec{x}\phi(\vec{x}, \vec{a})$ es equivalente en dicha teoría a una fórmula ψ libre de cuantificadores y como F es un subcampo de $\overline{K}_D$ algebraicamente cerrado, y las fórmulas libres de cuantificadores bajan, se tiene entonces que $F \models \exists \vec{x} \phi(\vec{x}, \vec{a})$ como se quería.

Una noción que en el caso de las L-estructuras es equivalente a la de ecuacionalmente compactas es la de inyectivas puras. Para esto es natural definir primero la noción de objetos inyectivos respecto a una categoría $\mathscr{C}$. Un objeto de $\mathscr{C}$, $\mathfrak{A}$ se dice *inyectivo* si para todo par de objetos $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}'$ y morfismos $h : \mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{A}$, $i : \mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{B}'$ con i monomorfsmo, se tiene que existe $g : \mathfrak{B}' \longrightarrow \mathfrak{A}$ morfismo tal que $g \circ i = h$.

El estudio de la inyectividad ha tenido particular relevancia en el caso de los módulos sobre un anillo R. Dado un R-módulo M, este es inyectivo si todo homomorfismo que llegue a él desde un R-módulo N se puede extender a cualquier módulo que sea extensión de N. Un hecho que ayuda entender los R-módulos inyectivos es el siguiente.

Lema 3.2.1. *Dado un R-módulo M, M es inyectivo (en la categoría de R-módulos con los homomorfismos de R-módulos) si y sólo si M es sumando directo de cualquier extensión. Es decir si N es un R-módulo del cual M es submódulo, existe K submódulo de N tal que $N = M \oplus K$.*

Demostración. Supongamos primero que M es inyectivo y sea N un R-módulo que extiende a M. Luego tomando la identidad de M en M como homomorfismo y la inclusión de M en N como homomorfismo inyectivo en la definición de inyectivo, existe $h : N \longrightarrow M$ homomorfismo tal que $h \restriction M = id_M$. Veamos que $N = M \oplus ker(h)$. Sea $m \in M \cap ker(h)$, por estar m en M, se tiene que $h(m) = m$ pero como $m \in \ker(h)$ se concluye que $m = 0$. Ahora para cada $n \in N$ se tiene que $n = f(n) + (n - f(n))$ donde claramente $f(n) \in M$ y como $f(n - f(n)) = f(n) - f(f(n)) = f(n) - f(n) = 0$, tenemos que M es sumando directo de N. Note que esto es equivalente a que cualquier módulo inyectvo es retracto de cualquier extensión, ya que si M es un submódulo de N, y $h : N \longrightarrow M$ es una retracción, entonces $N = M \oplus ker(h)$.

Si suponemos que M es sumando de cualquier extensión. Suponga N y N' R-módulos con $N \subseteq N'$ y $h : N \longrightarrow M$ un homomorfismo. Sea $L := N' \oplus M/I$. Donde I es el ideal generado por $\{(n, -h(n)) : n \in N\}$ que es un conjunto cerrado bajo multiplicación por elementos de R ya que h es homomorfismo. Considere $f : N' \longrightarrow L$ dado por $f(n') = (n', 0) + I$ para cada $n' \in N'$ y $g : M \longrightarrow I$ definido por $g(m) = (0, m) + I$ para todo $m \in M$. Claramente f y g son homomorfismos al ser composición . Por la definición de I se tiene que para cada $n \in N$, $f(n) = g(h(n))$. Veamos ahora que g es inyectiva. Supongamos que para cierto $m \in M$, $(0, m) + I = I$, es decir, existen $n_1, ..., n_k$ elementos de N tales que $(0, m) = (n_1, -h(n_1)) + ... + (n_k, -h(n_k))$ con lo que $n_1 + ... + n_k = 0$ y $h(n_1) + ... + h(n_k) = -m$ y por lo tanto al ser h homomorfismo, $0 = h(0) = -m$ es decir, $m = 0$. Por esto existe K sub módulo de L tal que $L = K \oplus g(M)$ pues $g(M)$ es isomorfo a M vía g. Considere $j : N' \longrightarrow M$ dada por $j = g^{-1} \circ \pi_{g(M)} \circ f$ dónde $\pi_{g(M)}$ es la proyección sobre $g(M)$ a lo largo de K. Es claro que j es homomorfismo y $j \restriction N = h$ pues si $n \in N$, $j(n) = g^{-1}(\pi_{g(M)}((n, 0) + I))$ lo cual implica que $(n, -j(n)) \in I$ y esto claramente muestra que $j(n) = h(n)$. $\square$

En el caso de los $\mathbb{Z}$ módulos, i.e. los grupos abelianos se tiene una caracterización intrínseca de los elementos inyectivos. Es necesario enunciar un Lema conocido cuya prueba es fácil y omitiremos.

Lema 3.2.2. ***(Lema del pegamento)*** *Si G y C son grupos abelianos (usamos notación aditiva) y A, B subgrupos de G. Entonces para cualquier par de homomorfismos $f : A \longrightarrow C$, $h : B \longrightarrow C$ que coincidan en $A \cap B$, existe un único homomorfismo $f + h : A + B \longrightarrow C$ dado por $f + h(a + b) = f(a) + h(b)$ para todo $a \in A$ y $b \in B$*

Un grupo abeliano G se dice divisible si para cada $n \in \mathbb{Z}$ diferente de 0, y $g \in G$ se tiene que existe $g' \in G$ tal que $ng' = g$.

Lema 3.2.3. *Un grupo abeliano G es inyectivo (en la categoría de los Grupos abelianos con los homomorfismos de grupo) si y sólo si es divisible.*

Demostración. Supongamos primero que G es divisible. Sean H y H' grupos abelianos con $H \subseteq H'$ y sea $f : H \longrightarrow G$ homomorfismo. Considere $P = \{(K, g) | K$ es un subgrupo de H' que contiene a H, y $g : K \longrightarrow H$ un homomorfismo que extiende a $f\}$. Parcialmente ordenado por $(K_1, g_1) \leq (K_2, g_2)$ si y sólo si $K_1 \subseteq K_2$ y $g_2 \restriction K_1 = g_1$.

Para probar que toda cadena está acotada basta notar que la unión de una cadena de subgrupos de un grupo es subgrupo y que la unión de una cadena de homomorfismos es de nuevo homomorfismo. Luego por lema de

Zorn existe un (M, g) maximal en P. Veamos que $H' = M$. Si suponemos que no, existe $x \in H' \setminus M$. Luego $M \subsetneq M \cup < x >$. Podemos extender g a un homomorgismo g' en $M+ < x >$ de la siguiente manera. Si $M \cap < x >= \{0\}$, entonces la suma $M+ < x >$ es directa y podemos definir $g'(x)$ como un elemento arbitrario de G y $g' \upharpoonright M = g$ y extendemos linealmente. Si existe un elemento diferente de cero en $M+ < x >$ entonces para algún entero n diferente de 0 se tene que $nx \in M$ entonces $g(nx)$ está bien definida y como G es divisible existe un único $y \in G$ tal que $g(nx) = ny$. Podemos definir $g'(x) = y$ y extender usando el lema del pegamento a $g + g' : M+ < x > \longrightarrow G$ lo cual contradice la maximalidad de (M, g) entonces $M = H'$.

Ahora si G es un grupo abeliano inyectivo, sea n un natural diferente de 0 y x un elemento de G. Considere el homomorfismo $f : n\mathbb{Z} \longrightarrow G$ dado por $f(nz) = ng$ para todo $z \in \mathbb{Z}$ entonces f se extiende a un homomorfismo $\hat{f} : \mathbb{Z} \longrightarrow G$ con lo que $n\hat{f}(1) = f(n) = g$ y por lo tanto G es divisible. $\square$

Una L-estructura $\mathfrak{A}$ se dice inyectiva pura si para cualquier par de L-estructuras $\mathfrak{B}$ y $\mathfrak{B}'$ tales que hay $h : \mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{A}$ homomorfismo y $j : \mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{B}'$ puro, existe $h' : \mathfrak{B}' \longrightarrow \mathfrak{A}$ tal que $h' \circ j = h$. Claramente las L-estructuras inyectivas son inyectivas puras.

Diremos que una L-estructura es un retracto puro si es retracto de toda extensión pura. Claramente una L-estructura $\mathfrak{A}$ inyectiva pura es un retracto puro pues si $\mathfrak{A} \leq \mathfrak{B}'$ y la extensón es pura podemos tomar en la definición de inyectiva pura h como la identidad en $\mathfrak{A}$ y j la inclusıón de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$ con lo cual h' sería una retracción de $\mathfrak{B}$ en $\mathfrak{A}$.

El siguiente lema ayuda a comprender mejor las L-estructuras atómicamente compactas.

Lema 3.2.4. *Dada una L-estructura $\mathfrak{A}$ son equivalentes:*

(i) $\mathfrak{A}$ *es atómicamente compacta.*

(ii) $\mathfrak{A}$ *es inyectiva pura.*

(iii) $\mathfrak{A}$ *es retracto puro.*

(iv) $\mathfrak{A}$ *es retracto de toda extensión elemental.*

Demostración. :

"$(i) \Rightarrow (ii)$"

Supongamos $\mathfrak{A}$ atómicamente compacta, sean $\mathfrak{B} \leq \mathfrak{B}'$ L-estructuras tales que la extensión es pura y sea $h : \mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{A}$ un homomorfismo. Sea

$$Diag_{(+)}(\mathfrak{B}') := \{\phi(\vec{b}) \text{ fórmula atómica con } \vec{b} \text{ una tupla en } \mathfrak{B}' : \mathfrak{B}' \models \phi(\vec{b})\}$$

el diagrama positivo de $\mathfrak{B}'$, note que este conjuto de fórmulas está en el lenguaje $L_{\mathfrak{B}'}$. Ahora cada $\phi(\vec{b'})$ en este conjunto será vista como $\phi(\vec{b}, \vec{a})$ donde $\vec{b}$ es una tupla en $\mathfrak{B}$ y $\vec{a}$ una en $\mathfrak{B}' \setminus \mathfrak{B}$. Considere ahora el conjunto Δ de fórmulas atómicas con constantes en $\mathfrak{A}$ obtenido a partir de las de $Diag_{(+)}(\mathfrak{B}')$ cambiando las constantes de $\mathfrak{B}$ por las de su imagen bajo h y viendo las constantes de $\mathfrak{B}' \setminus \mathfrak{B}$ como variables.

$$\Delta = \{\phi(h(\vec{b}), \vec{a})) : \phi(\vec{b}, \vec{a}) \in Diag_{(+)}(\mathfrak{B}')\}$$

Veamos que Δ es finitamente satisfactible en $\mathfrak{A}$.

Si $\phi_1(h(\vec{b}_1), \vec{a}_1), ..., \phi_n(h(\vec{b}_n), \vec{a}_n)$ son fórmulas en Δ, entonces

$$\mathfrak{B}' \models \exists \vec{a} \bigwedge_{i=1}^{i=n} \phi(\vec{b}_i, \vec{a})$$

donde $\vec{a}$ es el vector de todas las variables que ocurren entre $\vec{a}_1, ..., \vec{a}_n$. Al ser la inclusión de $\mathfrak{B}$ en $\mathfrak{B}'$ pura,

$$\mathfrak{B} \models \exists \vec{a} \bigwedge_{i=1}^{i=n} \phi(\vec{b}_i, \vec{a})$$

sean $\vec{y}$ los testigos respectivos. Luego por ser h homomorfismo y cada ϕ atómica se tiene que

$$\mathfrak{A} \models \bigwedge_{i=1}^{i=n} \phi(h(\vec{b}_i), h(\vec{y}))$$

con lo cual $\phi_1, ..., \phi_n$ son simultaneamente satisfactibles en $\mathfrak{A}$. Esto sumado al hecho de que $\mathfrak{A}$ es atómicamente compacta nos dice que Δ es satisfactible en $\mathfrak{A}$ y como cada $b \in \mathfrak{B}$ aparece en almenos una fórmula atómica, por ejemplo

$b = b$, existe una interpretación en $\mathfrak{A}$ para cada b símbolo de constante de $\mathfrak{B}' \setminus \mathfrak{B}$.

Así pues, podemos definir $h' : \mathfrak{B}' \longrightarrow \mathfrak{A}$ tal que h' coincide con h en $\mathfrak{B}$ y para cada $b \in \mathfrak{B}'$ $h'(b) = b^{\mathfrak{A}}$. Claramente h' extiende a h y se tiene que para cada fórmula atómica $\phi(\vec{b})$ del diagrama atómico de $\mathfrak{B}'$, con $\vec{b}$ una tupla en $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{A} \models \phi(h'(\vec{b}))$. Esto muestra que h' es un homomorfismo, pues si $f \in L$ es un símbolo de función n-aria y $a_1, ..., a_n, a_{n+1}$ son elementos de $\mathfrak{B}'$ tales que $f^{\mathfrak{A}}(a_1, ...a_n) = a_{n+1}$, entonces $f(a_1, ...a_n) = a_{n+1}$ está en el diagrama positivo de $\mathfrak{B}'$. Por lo tanto $\mathfrak{A} \models f(h'(a_1), ..., h'(a_n)) = h'(a_{n+1})$. Del mismo modo si R es un símbolo de función m-aria y $(b_1, ..., b_m) \in R^{\mathfrak{B}'}$, entonces $R(b_1, ..., b_m)$ está en el diagrama positivo de $\mathfrak{B}'$ con lo cual $(h'(b_1), ..., , h'(b_m)) \in R^{\mathfrak{A}}$.

"$(ii) \Rightarrow (iii)$"

Fue una observación previa.

"$(iii) \Rightarrow (iv)$"

Se sigue de que las extensiones elementales son puras.

"$(iv) \Rightarrow (i)$"

Sea Σ un conjunto de fórmulas atómicas finitamente satisfactible con constantes en $\mathfrak{A}$ cuyas variables ocurren entre $\vec{x} := \{x_\alpha\}_{\alpha \in \beta}$ para β algún ordinal, veamos que Σ es satisfactible en $\mathfrak{A}$.

Sea $J := \{S \subseteq \Sigma : S \text{ finito}\}$. Para cada $S \in J$ sea $\vec{a}_S$ la tupla de todas las constantes de $\mathfrak{A}$ que aparecen en fórmulas de S. Ahora, dado $S \in J$, existe una tupla $\vec{x}_S := \{x_{S_\alpha}\}_{\alpha \in \beta}$ de elementos en $\mathfrak{A}$ tal que para toda $\phi(\vec{a}_S, \vec{x})$. Ahora para cada $\phi \in \Sigma$ sea $A_\phi := \{S \in J : \phi \in S\}$. Veamos que $\{A_\phi\}_{\phi \in \Sigma}$ tiene la propiedad de intersecciones finitas. Sean $\phi_1, ..., \phi_n$ fórmulas en Σ. Entonces $\{\phi_1, ..., \phi_n\} \in \bigcap_{i=1}^{i=n} A_{\phi_i}$. Luego usando lema de Zorn existe un ultrafiltro U sobre J tal que para cada $\phi \in \Sigma$, $A_\phi \in U$. Considere el ultraproducto $\mathfrak{P} := \prod_{S \in J} (\mathfrak{A}, \vec{x}_S)/U$ viendo a $\vec{x}$ como un vector de constantes del cual $\vec{x}_S$ es la interpretación en $(\mathfrak{A}, \vec{x}_S)$. El universo de dicho ultraproducto es claramente la ultrapotencia $\mathfrak{A}^J/U$. Para cada $p \in \mathfrak{A}^J$ sea p/U su clase de equivalencia respecto a U. Sea $\Phi : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{P}$ la inclusión diagonal, es decir, para cada $a \in \mathfrak{A}$ $\Phi(a)$ es la clase respecto a U de la función constante a. Por el teorema de Łos, la inclusión es elemental y por tanto existe $\Psi : \mathfrak{P} \longrightarrow \mathfrak{A}$ homomorfismo tal que $\Psi \circ \Phi = id_{\mathfrak{A}}$, la identidad en $\mathfrak{A}$.

Ahora, para cada $\alpha \in \beta$ considere $y_\alpha \in \prod_{S \in J}(\mathfrak{A}, \vec{x}_S)$ dado por $y_\alpha(S) = x_{S_\alpha}$. Ahora sea $\vec{y} := \{y_\alpha/U\}_{\alpha\in\beta}$. Veamos que para toda $\phi(\vec{a}, \vec{x}) \in \Sigma$ (donde $\vec{a}$ es la tupla de constantes de $\mathfrak{A}$ que aparecen en ϕ) se tiene que $\mathfrak{P} \models \phi(\Phi(\vec{a}), \vec{y})$. Para esto, por el teorema de Łos, basta ver que $B_\phi := \{S \in J : \mathfrak{A} \models \phi(\Phi\vec{a}, \vec{x}_S)\} \in U$, lo cual es claro ya que por nuestra elección de $\vec{x}_S$ se tiene que $A_\phi \subseteq B_\phi$ y por la elección de U, que cada $A_\phi \in U$. Es fácil mostrar ahora que $\Psi(\vec{y})$, la β-tupla conformada por las imágenes bajo Ψ de los elementos de $\vec{y}$, satisface Σ en $\mathfrak{A}$. $\square$

Una estructura $\mathfrak{A}$ se dice *positivamenete compacta* si para cualquier P, conjunto de de fórmulas positivas con constantes en $\mathfrak{A}$, el hecho de que P sea finitamente satisfactible en $\mathfrak{A}$ implica que es satisfactible en $\mathfrak{A}$.

El lema anterior permite caracterizar las estructuras atómicamente compactas como las positivamente compactas:

Lema 3.2.5. *Si $\mathfrak{A}$ es una estructura atómicamente compacta, entonces es positivamente compacta.*

Demostración. Suponga $\mathfrak{A}$ atómicamente compactay P un conjunto de fórmulas positivas con constantes en $\mathfrak{A}$. Digamos que las variables libres que ocurren en P están entre $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\kappa}$ para κ un cardinal. Sea P' igual a P cambiando las ocurrencias de cada variable x_α por un nuevo símbolo de constante c_α. Del hecho de que P es finitamente satisfactible en $\mathfrak{A}$ se sigue de que para cada $J \subseteq P$ finito, se puede hacer a $\mathfrak{A}$ modelo de $J \cup Diag_{el}(\mathfrak{A})$. Interpretando a cada constante nueva como el valor de la variable respectiva en una solución de J en $\mathfrak{A}$.

Esto, por el teorema de compacidad nos dice que existe un modelo de $J \cup Diag_{el}(\mathfrak{A})$, por lo cual hay una extesión elemental $\mathfrak{A}'$ de $\mathfrak{A}$ tal que para toda $\phi(\vec{a}, x_{\alpha_1}, ..., x_{\alpha_n}) \in P$ ($\vec{a}$ es el vector de las constantes de A usadas)

$$\mathfrak{A}' \models \phi(\vec{a}, c_{\alpha_1}, ..., c_{\alpha-n})$$

Como la extensión es elemental y $\mathfrak{A}$ es atómicamente compacta, existe un retracto,$h : \mathfrak{A}' \longrightarrow \mathfrak{A}$ que por ser sobre cumple

$$\mathfrak{A} \models \phi(h(\vec{a}), h(c_{\alpha_1}), ..., h(c_{\alpha_n}))$$

y al ser retracto, es la identidad en $\mathfrak{A}$, entonces

$$\mathfrak{A} \models \phi(\vec{a}, h(c_{\alpha_1}), ..., h(c_{\alpha_n}))$$

.

□

3.3. Una topología compacta para estructuras atómicamente compactas

Uno puede darle a cada potencia de una estructura atómicamente compacta $\mathfrak{A}$, una topología compacta que en general no es de Hausdorff, y la compacidad de este espacio implica la compacidad bajo fórmulas que sean conjunciones infinitarias de disyunciones finitas de fórmulas atómicas.

Sea $\mathfrak{A}$ una L-estructura y κ un cardinal cualquiera. se puede definir una topología $\tau_{\mathfrak{A}^\kappa}$ en $\mathfrak{A}^\kappa$ de la siguiente manera. Fijamos un vector de variables $\vec{x} = \{x_i\}_{i\in\kappa}$ y para cada ϕ fórmula atómica con constantes en $\mathfrak{A}$, si sus variables libres estén entre las entradas de $\vec{x}$, definimos $V_\phi := \{\vec{a} \in \mathfrak{A}^\kappa : \mathfrak{A} \models \phi(\vec{a})\}$ y se tiene que $\{V_\phi : \phi$ es atómica con constantes en $\mathfrak{A}\}$, es una sub base de cerrados para una topología. Para mostrar esto, basta ver por ejemplo que para cada $\vec{a} \in \mathfrak{A}^\kappa$ se tiene que $\mathfrak{A} \not\models \phi(\vec{a})$ con $\phi := x_0 = a$ donde $a \in \mathfrak{A}$ es cualquier elemento diferente de $\vec{a}_0$. Definimos $\tau_{\mathfrak{A}^\kappa}$ como el generado por dicha sub base de cerrados.

Para cada $\alpha \in \kappa$ sea $\pi_\alpha : \mathfrak{A}^\kappa \longrightarrow \mathfrak{A}$ la proyección en la α-ésima coordenada. Para ver que es continua basta ver que la pre imagen de un subásico cerrado es cerrada. Sea $\phi(x)$ una fórmula en una variable libre (si ϕ es una sentencia entonces su conjunto de verdad es todo $\mathfrak{A}$ o es vacío y en todo caso claramente la preimagen bajo π_α es un cerrado). Entonces $\pi_\alpha^{-1}(V_\phi)$ es el conjunto de verdad en $\mathfrak{A}^\kappa$ de $\phi(x_\alpha)$, es decir de la fórmula ϕ pero construida con la variable x_α en vez de x. Esto muestra que si dotamos $\mathfrak{A}^\kappa$ con la topología producto de $\tau_{\mathfrak{A}}$, esta es mas fina que $\tau_{\mathfrak{A}^\kappa}$ y en general es estrictamente mas fina.

Si exigimos que $\mathfrak{A}$ sea atómicamente compacta, usando la versión para cerrados del teorema de la sub base de Alexander, se tiene por definición de atómicamente compacta que cada κ cardinal, $(\mathfrak{A}^\kappa, \tau_{\mathfrak{A}^\kappa})$ es un espacio compacto. Este espacio, sin embargo no es Hausdorff en general pero si es T_1 ya que para cada $a \in \mathfrak{A}$ se tiene que $\{a\} = V_{x_0=a}$. Con lo cual los puntos son cerrados. Note que la topología de cerrados de este espacio es el conjunto de intersecciones infinitas de uniones finitas conjuntos de verdad de fórmulas atómicas, lo cual implica que conjunto de verdad de una fórmulas infinitaria de la forma

$$\bigwedge_{i\in I} \bigvee_{j=1}^{j=n} \phi_{ij}$$

donde cada ϕ_{ij} es una fórmula atómica, es un cerrado de $\tau_{\mathfrak{A}^\kappa}$.

De lo cual se sigue inmediatamente el siguiente lema.

Lema 3.3.1. *Si $\mathfrak{A}$ es atómicamente compactaentonces dado un conjunto de disyunciones infinitarias de conjunciones finitas de $L_{\mathfrak{A}}$ fórmulas atómicas es finitamente satisfactible en $\mathfrak{A}$, entonces es satisfactible en $\mathfrak{A}$.*

Es fácil ver por ejemplo que la diagonal de $\mathfrak{A}$ como subconjunto de $\mathfrak{A}^2$ es un cerrado de hecho sub-básico en $\tau_{\mathfrak{A}^2}$ pero dado que en general $\tau_{\mathfrak{A}}$ no es Hausdorff, la diagonal no es un cerrado en $\mathfrak{A}^2$ con la topología producto. Y esto mismo pasa para todas las relaciones, si R es un símbolo de relacion n-aria, entonces $R^{\mathfrak{A}}$ es un cerrado de $\tau_{\mathfrak{A}^n}$, pero generalmente no lo es en $\mathfrak{A}^n$ con la topología producto de $\tau_{\mathfrak{A}}$.

Estos hechos muestran que la noción de compacidad atómica es mucho mas fuerte de lo que uno en principio creería.

Capítulo 4

Límites Inversos y Estructuras Profinitas

4.1. Límites inversos

Un conjunto parcialmente ordenado $(P, \leq)$ se dice dirigido si para cualquier par de elementos i, j en P existe $k \in P$ tal que $i \leq k$ y $j \leq k$. Es fácil ver por inducción que si $(P, \leq)$ es dirigido y $J \subseteq P$ es finito, etonces existe $i \in P$ tal que $j \leq i$ para todo $j \in J$.

Dado un orden parcial dirigido $(P, \leq)$ y una categoría $\mathscr{C}$, un sistema inverso de $\mathscr{C}$ sobre P es un conjunto de objetos de $\mathscr{C}$ indexados por P, $\{M_i : i \in P\}$ junto con un momorfismo $f_{ij} : M_i \longrightarrow M_j$ para cada $j \leq i$ en P, de tal manera que si $j \leq i \leq k$, f_{kj} es la composición de f_{ki} con f_{ij} y para todo $i \in P$, $f_{ii} = id_{M_i}$. Un sistema de este tipo se nota así: $\mathcal{M} =< M_i, \{f_{ji}, i \leq j\} >_{i \in P}$.

Un co-cono sobre $\mathcal{M}$ es un objeto de $\mathscr{C}$ M junto con morfismos $p_i : M \longrightarrow M_i$ para cada $i \in P$ de tal forma que si $i \leq j$, $f_{ji} \circ p_j = p_i$.

Un co-cono $(M, \{p_i\}_{i \in P})$ es (isomorfo a) el límite inverso de $\mathcal{M}$ (notación $M = \varprojlim \mathcal{M}$) si para cualquier co-cono sobre $\mathcal{M}$ $(M', \{p'_i\}_{i \in P})$ existe un único morfismo $\rho : M' \longrightarrow M$ tal que para todo $i \in P$, $p_i \circ \rho = p'_i$.

Es fácil ver que cualquier par de límites inversos sobre $\mathcal{M}$ son isomorfos.

Si $(M, \{p_i\}_{i\in P})$ y $(M', \{p'_i\}_{i\in P})$ son límites inversos de $\mathcal{M}$ existe una única $\rho : M' \longrightarrow M$ tal que para cada $i \in P$, $p_i \circ \rho = p'_i$ y exste $\pi : M \longrightarrow M'$ tal que $p'_i \circ \pi = p_i$. Luego se tiene que $\rho \circ \pi \circ p_i = p_i$ para cada $i \in P$ pero la identidad en M cumple también que para cada $i \in P$ $id_M \circ p_i = p_i$ y como M es un cono y es el límite inverso usando la unicidad de id_M en la definición de límite inverso se tiene que $\rho \circ \pi = id_M$. Similarmente se muestra que $\pi \circ \rho = id'_M$. Con lo cual ρ y π son homomorfismos mutuamente inversos y por lo tanto M y M' son isomorfas.

Si K es una clase de L-estructuras cerrada bajo productos y subestructuras. Y considereamos la categoría de K junto con los L-homomorfismos, se tiene que

$$\lim_{\leftarrow} \mathcal{M} = \mathcal{L} := \{X \in \prod_{i\in P} M_i : \forall i \leq j, f_{ji}(X(j)) = X(i)\}$$

con las operaciones y relaciones heredadas de $\prod_{i\in P} M_i$ y junto con los morfismos ρ_i dados por la composición de la inclusión en $\prod_{i\in P} M_i$ con la proyección en cada M_i, a estas proyecciones se les llama π_i, es decir si llamamos i a la inclusión de $\mathcal{L}$ en el producto, $\rho_i := \pi_i \circ i$.

Para probar esta última afirmación notemos primero que $(\mathcal{L}, \{\rho_i\}_{i\in P})$ es un co-cono sobre $\mathcal{M}$ dada la definición de $\mathcal{L}$. Para probar que $\mathcal{L}$ cumple la propiedad universal, si suponemos que $(M, \{p_i\}_{i\in P})$ es un co-cono sobre $\mathcal{M}$, podemos definir $\Phi : M \longrightarrow \prod_{i\in P} M_i$ dada por $\Phi(m)(i) = p_i(m)$ para cada $m \in M$ y cada $i \in P$. Que Φ es homomorfismo es claro a partir de la definición de la estructura producto y de que cada p_i es homomorfismo. Veamos ahora que $\Phi(M) \subseteq \mathcal{L}$. Es decir que para todo $m \in M$, $\Phi(m) \in \mathcal{L}$. Esto significa que para cualquier par de elementos de P, i, j si $i \leq j$, $f_{ji}(\Phi(m)(j)) = \Phi(m)(i)$. Lo cual es equivalente a $f_{ij}(p_j(m)) = p_i(m)$ y esto claramente se sigue del hecho de que $(M, \{p_i\}_{i\in P})$ es un co-cono sobre $\mathcal{M}$. Además es claro de la definición de Φ que para cada $i \in P$, se tiene que $p_i \circ \Phi = \rho_i$. La unicidad de dicha Φ es clara, Supongamos $\Phi' : M \longrightarrow \mathcal{L}$ homomorfismo tal que para cada $i \in P$, $\rho \circ \Phi' = p_i$ esto es, para cada $m \in M$, $\Phi'(m)(i) = p_i(m)$, es decir $\Phi = \Phi'$.

Note que $\mathcal{L}$ es una subestructura del producto de las M_i porque si $h \in L$ es un símbolo de función n-aria $(n > 0)$, y tomamos $X_1, ..., X_n$ elementos de $\mathcal{L}$ y $j \leq i$ en P. Se tiene que $f_{ij}(h(X_1, .., X_n)(i)) = f_{ij}(h(X_1(i), ..., X_n(i)) =$

$h(f_{ij}(X_1(i)),...,f_{ij}(X_n(i))) = h(X_1(j),...,X_n(j)) = h(X_1,...,X_n)(j)$ donde la primera y la última gualdad se dan por la definición del producto, la segunda porque f_{ij} es homomorfismo y la tercera porque los X_i están en $\mathcal{L}$. Y si $c \in L$ es un símbolo de constante, como para todo par $i \leq j$ en P, $f_{ji}(c^{M_j}) = c^{M_i}$ se tiene que $(c^{M_i})_{i \in P} \in \mathcal{L}$.

Esta construcción tambień funciona en el para espacios topológicos, tomando como morfismos las funciones continuas. En este caso si I es un conjunto parcialmente ordenado $\langle X_i, \{f_{ji} : i \leq j\}\rangle$ es un sistema inverso sobre I, es decir, cada $f_{ji} : X_j \longrightarrow X_i$ es una función continua. Se define $\mathcal{L} = \varprojlim\langle X_i, \{f_{ji} : i \leq j\}\rangle$ como el subespacio del producto de las tuplas coherentes, tal cual como en L-estructuras. Note que la topología en $\mathcal{L}$ tiene como sub-base $\{\pi_i^{-1}(U) : i \in I \text{ y } U \text{ es abierto en } X_i\}$. Dónde π_i es la proyección en la i-ésima coordenada.

Ahora, si tenemos que cada M_i es una L-estructura compacta de Hausdorff y exigimos que todos los homomorfismos considerados en el sistema inverso sean continuos, se le puede dar a $\prod_{i \in P} M_i$ la topología producto. Con esta topología, es una estructura topológica de Haudorff ya que las operaciones son continuas dado que una base para $\prod_{i \in P} M_i$ son los abiertos de la forma $U = \prod_{i \in P} U_i$ donde cada U_i es un abierto que está contenido en M_i y sólo para fnitos $i's$, digamos $i_0,...,i_n$, la contentencia es propia. Ahora $\prod_{i \in P} M_i \setminus U = \bigcup_{k=0}^{k=n}(M_{i_k} \setminus U_{i_k} \times \prod_{j \neq i_k} M_j)$ un abierto en $\prod_{i \in P} M_i$. Si $h \in L$ es símbolo de función n-aria y tomamos la preimagen de un básico, $h^{-1}(\prod_{i \in P} U_i) = \prod_{i \in P}(h^{M_i})^{-1}(U_i)$ pues dado $(X_1,...,X_n) \in \prod_{i \in P} M_i^n$, $(X_1,...,X_n) \in h^{-1}(\prod_{i \in P} U_i)$ si y sólo si para todo $i \in P$, $h(X_1,...,X_n)(i) = h(X_1(i),...,X_n(i))$ pertenece a U_i lo es equivalente a que para cada $i \in P$, $(X_1(i),...,X_n(i)) \in (h^{M_i})^{-1}$ como se quería. Para ver que las relaciones son cerradas,se tiene que $=$ es un cerrado de $\mathcal{L}^2$ al ser $\ll$ Hausdorff , sea $R \in L$ una relación n-aria, entonces para $X = (X_1,...,EX_n)$ un elemento de $\mathcal{L}^n$, se tiene que $X \in R^{\mathcal{L}}$ si y sólo si $(\pi_i(X_1),...,\pi_i(X_n)) \in R^{M_i}$, es decir, si para cada $i \in P$ definimos $\pi_i' : \mathcal{L}^n \longrightarrow M_i^n$ dada por $\pi_i'(X_1,...,X_n) = (\pi_i(X_1),...,\pi_i(X_n))$ una función continua, tenemos que $R^{\mathcal{L}} = \bigcap_{i \in P} \pi_i'^{-1}(R^{M_i})$ que es cerrado al ser intersección de cerrados.

Es un sub espacio cerrado de $\prod_{i\in P} M_i$ ya que

$$\mathcal{L} = \bigcap_{i\leq j} C_{ji}$$

Dónde para cada $k \leq j$ elementos de P,

$$C_{jk} = \{X \in \prod_{i\in P} M_i : f_{jk}(X(j)) = X(k)\}$$

pero a su vez

$$\{X \in \prod_{i\in P} M_i : f_{jk}(X(j)) = X(k)\} = \{X \in \prod_{i\in P} M_i : f_{jk} \circ \pi_j(X) = \pi_i(X)\}$$

es decir el conjunto donde se igualan dos funciones continuas, y dado que $\prod_{i\in P} M_i$ es Hausdorff al ser producto de Hausdorff, cada C_{jk} es cerrado con lo que $\mathcal{L}$ es cerrado y por tanto compacto al ser $\prod_{i\in P} M_i$ compacto (esto último se tiene por Tychonoff).

Por todo esto tenemos que $\mathcal{L}$ es una L-estrcutura compacta de Hausdorff.

En esta situación, si cada M_i es no vacía, entonces $\lim\limits_{\leftarrow} \mathcal{M} \neq \emptyset$. Para ver esto, como el producto de las M_i es compacto, basta notar que $C := \{C_{ji} : i \leq j\}$ tiene la propiedad de las intersecciones finitas ya que es un conjunto de cerrados en un compacto tal que $\lim\limits_{\leftarrow} \mathcal{M} = \bigcap C$. Supongamos $C_{j_1 i_1}, ..., C_{j_n, i_n}$ finitos elementos en C. Como P es dirigido, existe $j \in P$ tal que es mayor o igual a cada j_k, para $k \in \{1, ..., n\}$. Ahora sea $x \in M_j$, entonces considere una tupla

$$Y \in \prod_{i\in P} M_i$$

tal que $Y(j) = x$ y para cada $k \in \{1, ..., n\}$, $Y(i_k) = f_{ji_k}(x)$ y $Y(j_k) = f_{jj_k}(x)$. Evidentemente dicha tupla existe, y pertenece a

$$\bigcap_{k=1}^{n} C_{j_k i_k}$$

Esto sumado a que C es un conjunto de cerrados en un compacto, implica $\bigcap C \neq \emptyset$.

Ahora probaremos dos hechos que nos serán últies.

Lema 4.1.1. *Sea* $(P, \leq)$ *un orden parcial dirigido y*

$$\mathcal{M} =< M_i, \{f_{ji} : i \leq J\} >_{i \in P}$$

un sistema inverso de L-estructuras compactas de Hausdorff donde cada f_{ji} *es un homomorfismo continuo. Entonces si llamamos* $(M, \{\pi_i : i \in P\})$ *al límite inverso de* $\mathcal{M}$*, tenemos que Si cada* f_{ij}*, para* $j \leq i$ *es sobre* M_j*, entonces para todo* $k \in P$*,* π_k *es sobre* M_k*.*

Demostración. Fijemos $k \in P$, para ver que π_k es sobre, basta ver que para cada $x \in M_k$, existe $X \in M$ tal que $X(k) = x$. Note que un X es tal, si y sólo si

$$X \in \pi_k^{-1}(x) \cap M$$

Pero es claro que

$$M = \bigcap_{I \in [P]^{<\omega}} D_I$$

Donde $[P]^{<\omega}$ denota el conjunto de los subconjuntos finitos de P. Y para cada $I \in [P]^{<\omega}$ D_I es el conjunto de los X, elementos de $\prod M_i$ tales que para todos $i \leq j \in I$, $f_{ji}(X(j)) = X(i)$.

Además es fácil de ver que cada D_I es cerrado al ser intersección de los C_{ji} con $i \leq j$ elementos de I. Esto implica que $\pi_k^{-1}(x) \cap D_I$ es cerrado para cada $I \subseteq P$ finito. Pues $\{x\}$ es cerrado y π_k continua.

Con lo cual, dada la compacidad de $\prod M_i$, basta ver que para cada $J \subseteq [P]^{<\omega}$ finito, existe

$$Y \in \bigcap_{I \in J} \pi_k^{-1}(x) \cap D_I$$

Lo cual es claramente equivalente a que exista $Y \in \pi_k^{-1}(x) \cap D_I$ para todo $I \subseteq P$ finito. Tomando $I = \bigcup J$.

Para ver esto, sea $I \in [P]^{<\omega}$ y sea $i \in P$ mayor o igual a cada elemento de $I \cap \{k\}$. Tome una preimagen de x bajo f_{ik} digamos y, y considere $Y \in \prod M_i$ tal que para cada $j \in I \cap \{k\}$, $Y(i) = f_{ij}(y)$. Claramente existe una Y así y pertenece a

$$\pi_k^{-1}(x) \cap D_I$$

.

$\square$

Lema 4.1.2. *Sean $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ L-estructuras y $\mathfrak{B}$ topológica. Si $f : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$ es un homomorfismo de imagen densa, para toda ϕ L-fórmula positiva y $a_1, ..., a_n$ elementos de $\mathfrak{A}$ tales que $\mathfrak{A} \models \phi(a_1, ..., a_n)$, se tiene que $\mathfrak{B} \models \phi(f(a_1), ..., f(a_n))$*

Demostración. Por inducción en la complejidad de ϕ. Los pasos $\vee$, $\wedge$ y $\exists$ son triviales. Para ver el $\forall$, suponga $\phi(a_1, ..., a_n)$ de la forma $\forall x(\psi(x, a_1, ..., a_n))$ donde para ψ se tiene el resultado, ahora como se notó,

$$\{y \in \mathfrak{B} : \mathfrak{B} \models \psi(y, f(a_1), ..., f(a_n))\}$$

es un cerrado en $\mathfrak{B}$. Además es denso pues claramente contiene a la imagen de f. $\square$

4.2. Estructuras Profinitas y límites inversos de estructuras compactas

A una estructura que es (isomorfa a) un límite inverso de estructuras finitas, con los homomorfismos de L-estructuras, se le llama *profinita*.

Para cada L-estructura topológica $(\mathfrak{A}, \tau)$ sea

$$Cong_\tau(\mathfrak{A}) = \{\theta \in Cong(\mathfrak{A}) : \forall a \in \mathfrak{A}, a_\theta \in \tau\}$$

Veamos que si $\mathcal{L} = \varprojlim \mathcal{M}$, dónde $\mathcal{M}$ es un sistema inversamente dirigido de estructuras finitas, entonces para cada $Y \in \mathcal{L}$, $\{Y_\theta : \theta \in Cong_\tau(\mathcal{L})\}$ es una base para local de Y. Supongamos $X \in \mathcal{L}$ y U una vecindad básica de X en $\prod_{i \in P} M_i$ digamos $U = m_{i_0} \times ... \times m_{i_n} \times \prod_{i \notin \{i_0, ..., i_n\}} M_i$ dónde $m_{i_j} \in M_{i_j}$ para todo $j \in \{0, ..., n\}$,.

Considere $h : \mathcal{L} \longrightarrow \prod_{j=0}^{j=n} M_{i_j}$ dado por $h(Y) = (Y(i_0), ..., Y(i_n))$ para cada $Y \in \mathcal{L}$ que claramente es un homomorfismo de L-estructuras. Sea $ker(h) := \{(Y, Z) \in \mathcal{L}^2 | h(Y) = h(Z)\}$ que es una congruencia.

Veamos ahora que $ker(h) \in Cong_\tau(\mathcal{L})$. Sea $Y \in \mathcal{L}$ entonces

$$Y_{ker(h)} = \{Z \in \mathcal{L} : Z(i_j) = Y(i_j) \forall j \in \{0, ..., n\}\}$$

pero a su vez

$$\{Z \in \mathcal{L} : Z(i_j) = Y(i_j) \forall j \in \{0, ..., n\}\} = Y(i_0) \times ... \times Y(i_n) \times \prod_{i \notin \{i_0, ..., i_n\}} M_i \cap \mathcal{L}$$

que es un abierto en $\mathcal{L}$. Ahora claramente $X \in X_{ker(h)}$ y también es evidente que $X_{ker(h)} \subseteq U \cap \mathcal{L}$.

Estas propiedades topológicas de las estrucutras profinitas premiten caracterizarlas completamente como lo muestra el siguiente lema, una versión equivalente que usa uniformidades es presentada por Mariano y Miraglia en [MM].

Teorema 4.2.1. *Sea* $(\mathfrak{A}, \tau)$ *una estructura topológica, entonces* $\mathfrak{A}$ *es profinita si y sólo si* $\mathfrak{A}$ *es compacta de Hausdorff y para todo* $a \in \mathfrak{A}$, $\{a_\theta : \theta \in Cong_\tau(\mathfrak{A})\}$ *es una base local para* a *en* $\mathfrak{A}$.

Demostración. Acabamos de probar el "sólo si"del lema.

Veamos el "si", sea $\mathfrak{A}$ una estructura topológica compacta de Hausdorff tal que para todo $a \in \mathfrak{A}$, $\Delta^a := \{a_\theta | \theta \in Cong_\tau(\mathfrak{A})\}$ es una base local para a. Note que si $\theta \in Cong_\tau(\mathfrak{A})$ entonces $\mathfrak{A}/\theta$ es un recubrimiento de $\mathfrak{A}$ por abiertos disjuntos, por lo cual no tiene sub recubrimientos propios y como $\mathfrak{A}$ es compacta forzosamente $\mathfrak{A}/\theta$ es finito. Podemos considerar a $Cong_\tau(\mathfrak{A})$ parcialmente ordenado con la contentencia inversa. Es dirgido pues si θ_1 y θ_2 son elementos de $Cong_\tau(\mathfrak{A})$ entonces $\theta_1 \cap \theta_2 \in Cong_\tau(\mathfrak{A})$, pues para cada $a \in \mathfrak{A}$, $a/\theta_1 \cap \theta_2 = a/\theta_1 \cap /\theta_2$ que es un abierto al ser intersección de dos abiertos. Por inducción se sigue inmediatamente que $Cong_\tau(\mathfrak{A})$ es cerrado bajo intersecciones finitas.

Ahora, si θ_1 y θ_2 son elementos de $Cong_\tau(\mathfrak{A})$ con $\theta_1 \subseteq \theta_2$ podemos definir $f_{\theta_1\theta_2} : \mathfrak{A}/\theta_1 \longrightarrow \mathfrak{A}/\theta_2$ dada por $f_{\theta_1\theta_2}(a/\theta_1) = a/\theta_2$ que está bien definido porque si dos elementos se relacionan según θ_1 tambén se relacionan según θ_2. Además es un homomorfismo ya que las relaciones y las operaciones en la estructura cociente se definen por representantes.

Con esto tenemos que $\mathcal{M} :=< \mathfrak{A}/\theta >_{\theta \in Cong_\tau(\mathfrak{A})}$ es un sistema inverso sobre $Cong_\tau(\mathfrak{A})$. Sea $(\hat{\mathfrak{A}}, \{p_\theta\}_{\theta \in \Delta_{\mathfrak{A}}}) = \varprojlim \mathfrak{A}/\theta$ que es una estructura profinita. Veamos que $\mathfrak{A}$ y $\hat{\mathfrak{A}}$ son isomorfas como estrucuras y homeomorfos como espacios topológicos. Es claro que $\mathfrak{A}$ junto con las proyecciones naturales en cada cociente p_θ es un co-cono sobre $\mathcal{M}$. Sea $\phi : \mathfrak{A} \longrightarrow \hat{\mathfrak{A}}$ el homomorfismo dado por la propiedad universal de los límites inversos. Es fácil ver que

$\phi(a) = (a_\theta)_{\theta \in\ Cong_\tau(\mathfrak{A})}$ ya que claramente para todos $\theta_1 \subseteq \theta_2$ elementos de $Cong_\tau(\mathfrak{A})$ se tiene que $f_{\theta_1\theta_2} \circ p_{\theta_1} = p_{\theta_2}$, y además ϕ es un homomorfismo pues si f y R son elementos de L que son respectivamente un símbolo de función n-aria y símbolo de relación m-aria y $a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_m$ son elementos de $\mathfrak{A}$, $\phi(h^{\mathfrak{A}}(a_1, ..., a_n)) = (h^{\mathfrak{A}}(a_1, ..., 1_n)_\theta)_{\theta \in Cong_\tau(\mathfrak{A})} = (h^{\mathfrak{A}/\theta}((a_1)_\theta, ..., (a_n)_\theta)_{\theta \in \Delta_{\mathfrak{A}}} = h^{\hat{\mathfrak{A}}}(\phi(a_1), ..., \phi(a_n))$. Además si $(b_1, ..., b_m) \in R^{\mathfrak{A}}$, entonces para todo $\theta \in Cong_\tau(\mathfrak{A})$, $((b_1)_\theta, ..., (b_m)_\theta) \in R^{\mathfrak{A}/\theta}$ con lo cual $(((b_1)_\theta)_{\theta \in \Delta_{\mathfrak{A}}}, ..., ((b_m)_\theta)_{\theta \in \Delta_{\mathfrak{A}}}) \in R^{\hat{\mathfrak{A}}}$.

Veamos ahora que ϕ es un isomorfismo de L-estructuras y un homeomorfismo de espacios topológicos. Para ver que es sobreyectivo sea $((a^\theta)_\theta)_{\theta \in Cong_\tau(\mathfrak{A})} \in \hat{\mathfrak{A}}$ dónde cada a^θ es un elemento de $\mathfrak{A}$. Es claro que si $\theta \in Cong_\tau(\mathfrak{A})$ como para cada $a \in \mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} \setminus a_\theta = \bigcup_{x \in A \setminus a_\theta}$ que es una unión de abiertos. Es decir cada $(a^\theta)_\theta$ es un cerrado en $\mathfrak{A}$. Ahora si $\theta_1, ..., \theta_n$ son elementos de $Cong_\tau(\mathfrak{A})$ sea $\theta := \bigcap_{i=1}^{i=n} \theta_i$. Como $((a^\theta)_\theta)_{\theta \in \Delta_{\mathfrak{A}}} \in \hat{\mathfrak{A}}$ se tiene que para todo $i \in \{1, ..., n\}$, $f_{\theta\theta_i}(((a^\theta)_\theta)_{\theta \in Cong_\tau(\mathfrak{A})}) = a_{\theta_i}^{\theta_i}$, es decir $a^\theta \in a_{\theta_i}^{\theta_i}$ con lo cual se muestra que $A := \{(a^\theta)_\theta | \theta \in \Delta_{\mathfrak{A}}\}$ es un conjunto de cerrados con la propiedad de intersecciones finitas, y dado que $\mathfrak{A}$ es compacto se tiene que existe $a \in \bigcap A$ y ahora de las definiciones de A y de ϕ es inmediato concluir que

$$\phi(a) = (a_\theta)_{\theta \in Cong_\tau(\mathfrak{A})} = ((a^\theta)_\theta)_{\theta \in Cong_\tau(\mathfrak{A})}$$

lo que muestra la sobreyectividad de ϕ. Para ver la inyectividad suponga a y b elementos diferentes en $\mathfrak{A}$, como $\mathfrak{A}$ es Hausdorff existen U y V vecindades abiertas de a y b respectivamente, con $U \cap V = \emptyset$. Por la condición de que para cada $x \in \mathfrak{A}$, $\{x_\theta | \theta \in Cong_\tau(\mathfrak{A})\}$ es una base local para x, se tiene que existen θ_1 y θ_2 elementos de $Cong_\tau(\mathfrak{A})$ tales que $a_{\theta_1} \subseteq U$ y $b_{\theta_2} \subseteq V$, esto implica en particular que $b \notin a_{\theta_1}$ y como $a \in a_{\theta_1}$, esto muestra que $\phi(a) \neq \phi(b)$ como se quería. Por esto, ϕ es un isomorfismo. Ahora, dado que $\mathfrak{A}$ es compacta y $\hat{\mathfrak{A}}$ es Hausdorff, para ver que ϕ es un homeomorfismo basta ver que es una función continua.

Veamos para esto que es continua en cada $a \in \mathfrak{A}$. Sea $B_a = \{\prod\{\mathfrak{A}/\tau : \tau \in Cong_\tau(\mathfrak{A}), \theta \nsubseteq \tau\} \times \prod\{\{a_\tau\} : \tau \in Cong_\tau(\mathfrak{A}), \theta \subseteq \tau\} \cap \hat{\mathfrak{A}} : \theta \in Cong_\tau(\mathfrak{A})\}$.

Note B_a es un conjunto de abiertos en $\hat{\mathfrak{A}}$ ya que sólo finitas congruencias pueden extender a una de índice finito pues si para $\theta \in Cong(\mathfrak{A})$ se tiene que $\mathfrak{A}/\theta$ es finito y $\theta \subseteq \tau$, para cierta congruencia τ, entonces $|\mathfrak{A}/\tau| \leq |\mathfrak{A}/\theta|$

y ya habíamos visto que las congruencias en $Cong_{\tau}(\mathfrak{A})$ son de índice finito. Además calramente $\phi(a) \in U$ para todo $u \in B_a$. Veamos que B_a es base local de $\phi(a)$. Es claro que una base local en $\phi(a)$ es $D_a := \{\prod\{\mathfrak{A}/\tau : \tau \notin J\} \times \prod\{\{a_\tau\} : \tau \in J\} \cap \hat{\mathfrak{A}} : J \subseteq Cong_{\tau}(\mathfrak{A}) \text{ finito}\}$. Pero $B_a = D_a$ dónde " $\subseteq$ " se tiene porque sólo hay finitas congruencias que extiendan a una en $Cong_{\tau}(\mathfrak{A})$ y " $\supseteq$ " se da ya que si J es un subconjunto finito de $Cong_{\tau}(\mathfrak{A})$ entonces $\theta := \bigcap J \in Cong_{\tau}(\mathfrak{A})$ con lo cual $\prod\{\mathfrak{A}/\tau : \tau \in Cong_{\tau}(\mathfrak{A}) \text{ y } \theta \nsubseteq \tau\} \times \prod\{\{a_\tau\} : \tau \in Cong_{\tau}(\mathfrak{A}) \text{ y } \theta \subseteq \tau\} \cap \hat{\mathfrak{A}} = \prod\{\mathfrak{A}/\tau : \tau \notin J\} \times \prod\{\{a_\tau\} : \tau \in J\} \cap \hat{\mathfrak{A}}$. Lo que muestra la igualdad entre D_a y B_a y por tanto tenemos que B_a es base local de $\phi(a)$. Por lo tanto para mostrar la continuidad de ϕ basta notar que si $\theta \in Cong_{\tau}(\mathfrak{A})$ entonces $\phi^{-1}(\prod\{\mathfrak{A}/\tau : \tau \in Cong_{\tau}(\mathfrak{A}) \text{ y } \theta \nsubseteq \tau\} \times \prod\{\{a_\tau\} : \tau \in Cong_{\tau}(\mathfrak{A}) \text{ y } \theta \subseteq \tau\} \cap \hat{\mathfrak{A}}) = \{x \in \mathfrak{A} : \forall \tau \in Cong_{\tau}(\mathfrak{A}),$ si $\theta \subseteq \tau$ entonces $(x, a) \in \tau\} = a_\theta$ que es un abierto en $\mathfrak{A}$ lo cual termina la prueba.

$\square$

Este teorema generaliza un resultado presentado en por ejemplo en [JL]. Aquí se prueba que un grupo topológico es profinito si y sólo si el conjunto de sus subgrupos normales que son abiertos, forma una base local de la identidad.

Note que el teorema anterior, junto con el **Lema 3.2.4.** muestra que las estructuras profinitas son inyectivas puras. Esto es demostrado en [MM] usando el teorema enunciado a continuación, probado por Mariano y Miraglia en [MM2], y el hecho de que las estructuras finitas son inyectivas, lo cual se tiene inmediatamente de de que cualquier estructura finita es atómicamente compacta.

Es fácil ver que si P es un orden parcial dirigido, entonces existe un ultrafiltro U sobre P tal que para cada $j \in P$, $[j) = \{i \in P : j \leq i\}$ pertenece a U. A un ultrafiltro así se le llama un ultrafiltro dirigido sobre P. El siguiente es un resultado de Mariano y Miraglia probado en [MM2].

Teorema 4.2.2. *Sea P un orden parcial dirigido,*

$$\mathcal{M} = \langle \mathfrak{A}_i, \{f_{ji} : i \leq j\} \rangle$$

un sistema inversamente dirigido de L-estructuras finitas y U un ultrafiltro *dirigido sobre P. Entonces si definimos*

$$h : \lim_{\leftarrow} \mathcal{M} \longrightarrow \prod_{i \in P} \mathfrak{A}_i/U$$

dado por la restricción de la proyección natural del producto de las $\mathfrak{A}_i$ en el ultraproducto, existe una retracción de h.

Demostración. En [Mariano M.2] se prueba dando una retracción explícita. Para una prueba alterna, dado que las profinitas son en particular atómicamente compactas, basta ver que h es puro. Este último hecho es garantizado por el siguiente teorema. □

Teorema 4.2.3. *Sea P un orden parcial dirigido,*

$$\mathcal{M} = \langle \mathfrak{A}_i, \{f_{ji} : i \leq j\} \rangle$$

un sistema inversamente dirigido de L-estructuras compactas de Hausdorff, (se asume cada f_{ji} continuo) y U un ultrafiltro dirigido sobre P. Entonces si definimos

$$h : \lim_{\leftarrow} \mathcal{M} \longrightarrow \prod_{i \in P} \mathfrak{A}_i/U$$

dado por la restricción de la proyección natural del producto de las $\mathfrak{A}_i$ en el ultraproducto, es decir $h(Y) = Y/U$, este h es puro.

Demostración. Primero miremos que h es inyectivo. Suponga dos elementos de $\mathcal{M}$, digamos Y y Y' tales que $Y/U = Y'/U$. Como U es dirigido, para cada $j \in P$ existe $i \geq j$ tal que $Y(i) = Y'(i)$. Es decir un j en la intersección de $[j)$ con $\{i : Y(i) = Y'(i)\}$. Ahora,

$$Y(j) = f_{ij}(Y(i)) = f_{ij}(Y'(i)) = Y'(j)$$

Donde la primera y la última igualdad se dan por la coherencia en las coordenadas de Y y de Y'. Con lo cual $Y = Y'$.

Además es un homomorfismo de subestructura pues si ϕ es L-fórmula atómica tal que

$$\lim_{\leftarrow} \mathcal{M} \models \phi(Y_1, ..., Y_n)$$

con Y_i elementos de $\lim\limits_{\leftarrow} \mathcal{M}$. Entonces para cada $i \in P$

$$M_i \models \phi(Y_1(i), ..., Y_n(i))$$

lo cual por Łos implica que

$$\prod M_i/U \models \phi(Y_1/U, ..., Y_n/U)$$

Ahora si

$$\lim_{\leftarrow} \mathcal{M} \not\models \phi(Y_1, ..., Y_n)$$

entonces existe un $j \in P$ tal que $M_j \models \neg\phi(Y_1(j), ..., Y_n(j))$ con lo cual para todo $i \in P$ mayor o igual a j se tiene que $M_i \models \neg\phi(Y_1(i), ..., Y_n(i))$ y como U es dirigido, esto implica

$$\prod M_i/U \models \neg\phi(Y_1, ..., Y_n)$$

Ahora veamos que h es puro. Para cada $I \subseteq P$ finito, sea D_I como en la demostración del **Lema 4.1.1.** Suponga ϕ positiva tal que

$$\prod M_i/U \models \phi(Y_1/U, ..., Y_n/U, X)$$

con cada $Y_i \in \lim\limits_{\leftarrow} \mathcal{M}$. Para cualquier $J \subseteq P$ finito, sea

$$E_J := \{X \in D_J : \forall j \in J(M_j \models \phi(Y_1(j), ..., Y_n(j), X(j))\}$$

es un cerrado en $\prod M_i$. Ya que el conjunto de verdad de una $L_{\mathfrak{A}}$-f'ormula positiva es cerrado. Y por otro lado no es vacío, ya que

$$S = \{i \geq J : P \models \phi((Y_1(i), ..., Y_n(i), X(i)))\} \in U$$

Aquí $i \geq J$ significa que i es mayor o igual que todo elemento de J. Luego tomando $i \in S$ y para cada k entre 1 y m, $X'_k(j) = f_{ij}(X(i))$ para $j \in J$ y de resto arbitrario se tiene $X' \in E_J$. Además la familia de E_J tal que $J \subseteq_{fin} P$ tiene propiedad de intersecciones finitas pues $E_{J_1} \cap ... \cap E_{J_n} = E_{\bigcup J_i}$. Por compacidad del producto de los M_i tenemos que

$$\{X \in \lim_{\leftarrow} \mathcal{M} : \lim_{\leftarrow} \mathcal{M} \models \phi(Y_1, ..., Y_n, X)\} = \bigcap_{I \subseteq_{fin} P} E_I \neq \emptyset$$

Es decir, h es puro.

$\square$

Corolario 4.2.4. *Si $\phi(\vec{x})$ y $\theta(\vec{x})$ son libres de cuantificadores y*

$$\mathcal{M} =< \mathfrak{A}_i, \{f_{ji} : i \leq j\} >$$

un sistema inversamente dirigido de L-estructuras compactas de Hausdorff, tal que cada f_{ji} es continuo y sobreyectivo, entonces si para cada $i \in P$, $\mathfrak{A}_i \models \forall\vec{x}(\phi(\vec{x}) \to \theta(\vec{x}))$, entonces

$$\lim_{\leftarrow} M \models \forall\vec{x}(\phi(\vec{x}) \to \theta(\vec{x}))$$

Demostración. Supongamos por facilidad en la notación que $\vec{x}$ es un vector de una sola variable. En caso de que sean más, la prueba es idéntica. Si para cierta tupla $Y \in \lim_{\leftarrow} \mathcal{M}$ se tiene que $\lim_{\leftarrow} \mathcal{M} \models \phi(Y)$, entonces para cada $i \in P$, $\mathfrak{A}_i \models \phi(Y(i))$, ya que las proyecciones son homomorfismos sobreyectivos por el **Lema 4.2.0.**, $\mathfrak{A}_i \models \theta(a_i)$. Ahora por el teorema de Łos,

$$\prod_{i\in P} A_i/U \models \theta((a_i)_{i\in P}/U).$$

Pero como h es retraible, esto implica que $\lim_{\leftarrow} \mathcal{M} \models \theta((a_i)_{i\in P})$ □

El teorema anterior tiene otro corolario que generaliza el resultado de Mariano y Miraglia.

Corolario 4.2.5. *Sea*

$$\mathcal{M} = \langle \mathfrak{A}_i, \{f_{ji} : i \leq j\} \rangle$$

un sistema inversamente dirigido de L-estructuras compactas de Hausdorff(cada f_{ij} contino), entonces $\lim_{\leftarrow} \mathcal{M}$ es un retracto de un ultraproducto de las $\mathfrak{A}_i$.

Demostración. Ya se mostró que los límites inversos de estructuras compactas de Hausdorff son compactos de Hausdorff y por tanto son atómicamente compactos. Esto implica que son retractos de cualquier inyección pura. Esto sumado al **Teorema 4.2.3.** termina la prueba. □

Capítulo 5

Envolvente profinita

5.1. Definición y propiedades de la Envolvente Profinita

A continuación presentaremos una aplicación de los límites inversos de estructuras finitas, la envolvente profinita. Esta construcción proviene originalmente del Álgebra Universal, pero se puede generalizar facilmente para cualquier tipo de estructuras.

Para este capítulo trabajaremos con una clase de L-estructuras K que sea cerrada bajo productos, subestructuras y bajo imágenes de homomorfismos fuertes.

Dada $\mathfrak{A} \in K$ una L-estructura, definimos

$$D_{\mathfrak{A}} := \{\theta \in Cong(\theta) : |\mathfrak{A}/\theta| < \omega\}.$$

Es decir, el conjunto de todas las congruencias de $\mathfrak{A}$ de índice finito. Por la condición de clausura de K, cada $\mathfrak{A}/\theta$ pertenece a K. Podemos considerear a $D_{\mathfrak{A}}$ parcialmente ordenado por inclusión inversa. Con este orden es un orden dirigido ya que si θ_1 y θ_2 son elementos de $D_{\mathfrak{A}}$ entonces $\theta_1 \cap \theta_2 \in D_{\mathfrak{A}}$. Ya que la intersección claramente es una congruencia al ser la intersección de dos subestructuras de $\mathfrak{A}^2$, y es claro que la intersección de dos relaciones de equivalencia es relación de equivalencia. Para ver que $\theta_1 \cap \theta_2$ es de índice finito note de

$$g : A/\theta_1 \cap \theta_2 \longrightarrow A/\theta_1 \times A/\theta_2$$

definido por

$$g(a_{\theta_1\cap\theta_2}) = (a_{\theta_1}, a_{\theta_2})$$

es una función bien definida que además es una inyección.

Ahora definimos el sistema inverso sobre $D_{\mathfrak{A}}$ dado por

$$\langle \mathfrak{A}/\theta, \{f_{\tau\theta} : \theta \subseteq \tau\}\rangle.$$

Donde si $\theta \subseteq \tau$ son elementos de $D_{\mathfrak{A}}$ definimos $f_{\theta\tau} : A/\theta \longrightarrow A/\tau$ dado por $f_{\theta\tau}(a_\theta) = a_\tau$. El cual está bien definido pues $\theta \subseteq \tau$. Además por la definición de la estructura cociente se tiene que es un homomorfismo fuerte.

Sea $(\hat{\mathfrak{A}}, \{p_\theta : \theta \in D_{\mathfrak{A}}\})$ el límite inverso de $\langle \mathfrak{A}/\theta, \{f_{\tau\theta} : \theta \subseteq \tau\}\rangle_{\theta\in D_{\mathfrak{A}}}$ junto con los homomorfismos que lo hacen un co-cono sobre dicho sistema. Es claro que $\mathfrak{A}$ junto con las proyecciones naturales π_θ en cada $\mathfrak{A}/\theta$ es un co-cono sobre el sistema inverso descrito. Por lo cual de la propiedad universal de los límites inversos, existe un único homomorfismo $\Phi : \mathfrak{A} \longrightarrow \hat{\mathfrak{A}}$ tal que para todo $\theta \in D_{\mathfrak{A}}$ $p_\theta \circ \Phi = \pi_\theta$. Es fácil ver que Φ está dado por $\Phi(a)(\theta) = a_\theta$ para cada $a \in \mathfrak{A}$ y cada $\theta \in D_{\mathfrak{A}}$.

Además se tiene que Φ es fuerte ya que si R es un símbolo de relación n-aria y $a_1, ..., a_n$ son elementos de $\mathfrak{A}$ tales que $(\Phi(a_1), ..., \Phi(a_n)) \in R^{\mathfrak{B}}$ lo cual implica en particular que $((a_1)_{\mathfrak{A}^2}, ..., (a_n)_{\mathfrak{A}^2}) \in (R)^{\mathfrak{A}/\mathfrak{A}^2}$ ya que $\mathfrak{A}^2$ es una congruenca de índice finito y cómo por defnición la proyección natural de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{A}/\mathfrak{A}^2$ es fuerte, existen $b_1, ..., b_n$ elementos de $\mathfrak{A}$ tales que $(b_1, ...b_n) \in R^{\mathfrak{A}}$.

Es conveniente notar también que $\Phi(A)$ es denso en $\hat{\mathfrak{A}}$. Para esto sea $\vec{a} = ((a^\theta)_\theta)_{\theta\in D_{\mathfrak{A}}}$ un elemento de $\hat{\mathfrak{A}}$ (dónde cada a^θ pertenece a $\mathfrak{A}$) y U un abierto básico a su alrededor. Digamos que $U = \prod_{\theta\in J}\{(a^\theta)_\theta\} \times \prod_{\theta\notin J} \mathfrak{A}/\theta$. Con $J \subseteq D_{\mathfrak{A}}$ finito. Entonces $\tau := \bigcap J$ pertenece a $D_{\mathfrak{A}}$, con lo cual al pertenecer $\vec{a}$ a $\hat{\mathfrak{A}}$, se tiene que para todo $\theta \in J$, $(a^\tau)_\theta = (a^\theta)_\theta$, por lo que $\Phi(a^\tau) \in U$. Ya habíamos notado que el límite inverso de estructuras topológicas compactas es un cerrado en la topología producto. Esto muestra entonces que $\hat{\mathfrak{A}} = \overline{\Phi(A)}$. Esto implica en particular que las fórmulas positivas se preservan bajo Φ.

Note que debido a las condiciones de K, para cada $\mathfrak{A} \in K$, $\hat{\mathfrak{A}} \in K$.

Teorema 5.1.1. *El par* $(\hat{\mathfrak{A}}, \Phi)$ *cumple la siguiente propiedad universal respecto a estructuras finitas de* K *(dotadas con la topología discreta): si* $\mathfrak{B} \in K$ *es una* L*-estructura finita, y* $\phi : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$ *es un homomorfismo, entonces existe un único* $\psi : \hat{\mathfrak{A}} \longrightarrow \mathfrak{B}$ *homomorfismo continuo tal que* $\phi = \psi \circ \Phi$.

Esto implica que cumple esta más general respecto a estructuras profinitas. Si $\mathfrak{B} \in K$ *es profinita (obtenida como límite inverso de estructuras finitas en* K*) y* $\phi : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$ *es un homomorfismo, existe un único* $\psi : \hat{\mathfrak{A}} \longrightarrow \mathfrak{B}$ *homomorfismo continuo, tal que* $\phi = \psi \circ \Phi$.

Demostración. Para probar la existencia, sea $\mathfrak{B}'$ la L-estructura cuyo universo es el mismo de $\mathfrak{B}$ (B) y en la cual los símbolos de función se interpretan como en $\mathfrak{B}$ y para cada R símbolo de relación n-aria se define $R^{\mathfrak{B}'} = \{(\phi(a_1), ..., \phi(a_n)) \in B^n : \exists (b_1, ..., b_n) \in A^n, (b_1, ..., b_n) \in R^{\mathfrak{A}} \wedge \forall i (\phi(a_i) = \phi(b_i))\}$.

Luego, por definición de $\mathfrak{B}'$, ϕ es un homomorfismo fuerte de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}'$. Ahora, si vemos la imagen de ϕ, $im(\phi)$, como una sub-estructura finita de $\mathfrak{B}'$, esta pertenece a K pues la clase es cerrada bajo imágenes por homomorfismos fuertes, y por el **Lema 2.0.2.**, existe un único isomorfismo $\iota : \mathfrak{A}/ker(\phi) \longrightarrow im(\phi)$ tal que $\iota \circ \pi = \phi$, donde π es la proyección natural de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{A}/ker(\phi)$.

En particular, esto implica que $ker(\phi)$ es de índice finito, con lo cual se puede tomar $\psi := \iota \circ p_{ker(\phi)}$ que cumple la propiedad pues si $a \in \mathfrak{A}$ es un elemento cualquiera, entonces $\psi(\Phi(a)) = \iota(a_{ker(\phi)}) = \iota(\pi(a))$ que por la propiedad de conmutatividad de ι, es igual a $\phi(a)$.

Para la unicidad si $\psi' : \hat{\mathfrak{A}} \longrightarrow \mathfrak{B}$ homomorfismo continuo tal que $\phi = \psi' \circ \Phi$, entonces ψ y ψ' coinciden en $\Phi(\mathfrak{A})$ que es un subconjunto denso de $\hat{\mathfrak{A}}$. Esto sumado al hecho de que ψ y ψ' son continuos y $\mathfrak{B}$ es Hausdorff, muestra que $\psi = \psi'$.

Para ver que cumple la propiedad universal respecto a profinitas. Supongamos en esta situación que

$$(\mathfrak{B}, \{\rho_i : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}_i : i \in I\}) = \lim_{\leftarrow} \mathcal{M}$$

donde $\mathcal{M}$ es un sistema inversamente dirigido de estructuras finitas, digamos

$$\mathcal{M} = \langle \mathfrak{B}_i, \{f_{ji} : i \leq j\} \rangle_{i \in I}$$

con I un orden parcial dirigido y cada ρ_i es un homomorfismo. Entonces para cada homomorfismo $\phi : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$, $(\mathfrak{A}, \{\rho_i \circ \phi : i \in I\})$ es un co-cono sobre $\mathcal{M}$, pues si $i \leq j$ son elementos de I, entonces

$$f_{ji} \circ (\rho_j \circ \phi) = (f_{ji} \circ \rho_j) \circ \phi = (f_{ji} \circ \rho_j) \circ \phi = \rho_i \circ \phi$$

dado que $(\mathfrak{B}, \{\rho_i : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}_i : i \in I\})$ es un co-cono sobre $\mathcal{M}$. Esta es una propiedad universal en la categoría de las estructuras profinitas en el sentido de que si $(\mathfrak{A}', \Phi')$ la cumple, entonces existe $\pi : \hat{\mathfrak{A}} \longrightarrow \mathfrak{A}'$ isomorfismo y homeomorfismo, el cual es un hecho fácil de ver usando la propedad universal de $\mathfrak{A}'$ para $\hat{\mathfrak{A}}$ y viceversa, se obtienen homomorfismos continuos $\pi : \hat{\mathfrak{A}} \longrightarrow \mathfrak{A}'$ y $\pi : \mathfrak{A}' \longrightarrow \hat{\mathfrak{A}}$ que, debido a la unicidad de la identidad en $\mathfrak{A}'$ y en $\hat{\mathfrak{A}}$ dada por la propiedad universal, son mutuamente inversos. $\square$

A $\hat{\mathfrak{A}}$ se le llama la envolvente profinita de $\mathfrak{A}$ si Φ es inyectiva, lo cual pasa si y sólo si para cualquier par a, b de elementos de $\mathfrak{A}$ diferentes, existe $\theta \in D_{\mathfrak{A}}$ tal que $(a, b) \notin \theta$.

En algunas clases de estructuras esta última condición se puede garantizar como se verá en los siguientes capítulos.

5.2. Ejemplos

Ejemplo Un caso importante en el que se usa la envolvente profinita, es en la teoría de Galois infinita. Sea $F \leq L$ una extensión algebraica de campos de dimensión infinita, entonces el grupo de Galois $G(L/F)$ se define como el límite inverso de los grupos $G(K/F)$, y $F \leq K \leq L$ con $[K : F]$ finita. Considerando para cada $K \subseteq K'$ extensiones finitas de F contenidas en L, el morfismo $\eta_{K',K} : G(K'/F) \longrightarrow G(K/F)$ dado por la restricción. De esta manera se obtiene un sistema inversamente dirigido pues si K, K' son extensiones finitas de F contenidas en L, entonces se puede generar la extensión mínima que contiene a K y a K' llamada $K \vee K'$ que es claramente finita sobre K.

Es fácil ver que $G(K/F) \cong \frac{Aut(L/F)}{G(L/K)}$ de manera que $G(L/F)$ es precisamente la envolvente profinita de $Aut(L/F)$ (los automorfismos de L que fijan

F). Para ver que se tiene una inyección hay que verificar que los morfismo naturales $Aut(L/F) \xrightarrow{\eta_K} G(K/F)$ dados por las restricciones, separan puntos. Esto se tiene ya que si f, g son elementos diferentes de $Aut(L/F)$ entonces existe $x \in L \setminus F$ tal que $f(x) \neq g(x)$ con lo cual $\eta_{F(x)}(f) \neq \eta_{F(x)}(g)$.

Ahora presentaremos otro ejemplo en el que la envolvente profinita existe y es conocida.

Ejemplo (Tomado de [Guram]). Si F es un campo finito, los espacios vectoriales sobre F se pueden ver como una L-estructura tomando $L = \{+, -, 0\} \cup \{h_a : a \in F\}$ dónde $+$ y $-$ son símbolos de funciones binario y unario respectivamente, y para cada $a \in F$, h_a es un símbolo de función unario. Dado un espacio vectorial V sobre F, podemos verlo como una L estructura interpretando $+$ y $-$ como las operaciones suma e inverso de V como grupo abeliano. Para cada $a \in V$ definimos $h_a^V(v) = av$ para todo $v \in V$. Con este lenguaje, se puede axiomatizar la clase de espacios vectoriales sobre F, con ecuaciones. Para decir por ejemplo que para todos a, b en el campo y para todo vector x $a(bx) = (ab)x$, se usa para cada $a, b \in F$ la sentencia $\forall x(h_a(h_b(x)) = h_{ab}(x))$. Ahora bien dado un espacio vectorial V sobre F, llamamos V^{**} a su doble dual es decir V^{**} es el espacio vectorial de transformaciones lineales de V^* en F donde a su vez V^* es el conjunto de transformaciones lineales de V en F. Note que hay una función canónica de V en V^{**}, que es la evaluación, llamada ev, dada por $ev(x)(f) = f(x)$ para todo $x \in V$ y todo $f \in V^*$. Claramente ev es inyectiva pues si v y v' son elementos de V diferentes, hay dos opciones. Si son linealmente idependientes se puede extender $\{v, v'\}$ a una base para V y definir $f : V \longrightarrow F$ como la extensión lineal de la función que envía v a 0 y todos los demás elementos de la base a 1, claramente $ev(v)(f) \neq ev(v')(f)$. Si v y v' son linealmente dependientes, considere $g : V \longrightarrow F$ que envía v a 1. Es obvio entonces que $g(v) \neq g(v')$ si v y v' son diferentes.

Es un hecho conocido que si V tiene dimensión finita sobre F, entonces ev es un isomorfismo de F-espacios vectoriales. Veamos que V^{**} es isomorfo a $\hat{V}$. Sea I el conjunto de todos los subespacios W de V tales que V/W es finito, y considere a I ordenado por inclusión inversa $\subseteq^*$, claramente $(I, \subseteq^*)$ es dirigido, y dado que en los espacios vectoriales las congruencias coinciden con los núcleos de homomorfismos en cocientes, se tiene que

$$\hat{V} = \varprojlim \langle V/W, \{f_{U,W} : U \subseteq W\}\rangle_{W\in I}$$

Tomando para cada $U \subseteq W$ elementos de I, $f_{U,W} : V/U \longrightarrow V/W$ dado por $f_{U,W}(v+U) = v+W$ que está bien deinido porque $U \subseteq W$ y que es lineal por la definición de espacio cociente.

Ahora, para cada $W \in I$ sea $\pi_W : V \longrightarrow V/W$ la proyección natural. Esta induce $\pi_W^{**} : V^{**} \longrightarrow (V/W)^{**}$ dada por $\pi_W^{**}(f)(h) = f(h \circ \pi_W)$ para toda $f \in V^{**}$ y toda $h \in (V/W)^*$. Claramente es F-lineal. Note que al ser V/W finito, es de dimensión finita por lo tanto $ev_{V/W} : V/W \longrightarrow (V/W)^{**}$ es isomorfismo. Ahora considere $\rho_W : V^{**} \longrightarrow V/W$ dado por $\rho_W = ev_{V/W}^{-1} \circ \pi_W^{**}$.

Es fácil ver que $(V^{**}, \{\rho_W : W \in I\})$ es un co-cono sobre

$$\langle V/W, \{f_{U,W} : U \subseteq W\}\rangle_{W\in I}$$

Es decir, si $U \subseteq W$ elementos de I el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\pi_W^{**}"] \arrow[dr, "\pi_U^{**}"'] & (V/W)^{**} \arrow[r, "ev_{V/W}^{-1}"] & V/W \\
& (V/U)^{**} \arrow[r, "ev_{V/U}^{-1}"] & V/U \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Dónde el mapa considerado de V/U a V/W es $f_{U,W}$. La conmutatividad del diagrama se tiene se tiene ya que es conocido que la operación ** es funtorial en la categoría de F-espacios vectoriales lo cual implica que

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\pi_W^{**}"] \arrow[dr, "\pi_U^{**}"'] & (V/W)^{**} \\
& (V/U)^{**} \arrow[u, "f_{U,V}^{**}"]
\end{tikzcd}$$

conmuta, y es inmediato

$$\begin{tikzcd}
V/W \arrow[r, "ev_{V/W}"] & (V/W)^{**} \\
V/U \arrow[u, "f_{U,W}"] \arrow[r, "ev_{V/U}"] & (V/U)^{**} \arrow[u, "f_{U,V}^{**}"']
\end{tikzcd}$$

conmuta, con lo cual $\rho_W = f_{U,W} \circ \rho_U$.

Veamos que $(V^{**}, \{\rho_W : W \in I\})$ cumple la propiedad universal del límite inverso. Sea Z un F-espacio vectorial y sea $(Z, \{g_W : W \in I\})$ un co-cono sobre el sistema de los cocientes finitos de V.

Note que para cada $h \in V^*$ existe una única $\hat{h} : V/ker(h) \longrightarrow F$ tal que $h = \hat{h} \circ \pi_{ker(h)}$, por teorema del isomorfismo. Además es claro que $ker(h) \in I$ ya que $V/ker(h)$ es de dimensión finita (al ser isomorfo a un subespacio de F) y F finito. Definimos entonces $\Psi : Z \longrightarrow V^{**}$ de la siguiente manera. Dados $z \in Z$ y $h \in V^*$ decimos que $\Psi(z)(h) = \hat{h}(g_{ker(h)}(z))$. Es claro que es F-lineal pues $\hat{h}$ y $g_{ker(h)}$ también lo son. Para acabar basta ver que si $W \in I$, entonces $g_W = \rho_W \circ \Psi$. Sea $z \in Z$ entonces debemos probar que

$$ev_{V/W}(g_W(z)) = \pi_W^{**}(\Psi(z))$$

es decir, que para todo $h \in V/W$, $\pi_W^{**}(\Phi(z))(h) = h(g_W)(z)$. Sea $h^* = \pi_W^*(h)$. Basta ver entonces que $\Phi(z)(h^*) = h(g_W)(z)$. Pero

$$\Phi(z)(h^*) = \hat{h^*}(g_{ker(h^*)}(z) = \hat{h^*}(Xz + Ker(h^*))$$

para algún $Xz \in V$. Y además $\hat{h^*}(Xz) = h(Xz + W)$.

Ahora, $W \subseteq ker(h^*)$ pues si $w \in W$ entonces $h^*(w) = h(w + W) = 0$ al ser h lineal. Luego $g_{ker(h^*)} = f_{W,ker(h^*)} \circ g_W$ con lo cual $Xz + W = g_W(z)$

A continuación se mostrará que en general no es cierto que toda álgebra profinita sea la envolvente profinita de un álgebra.

Ejemplo (tomado de [Guram]). Dado un campo finito F considere F^ω como espacio vectorial sobre F. Veamos que es profinito en los F-espacios vectoriales.

Sea para cada $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,

$$X_n = \{\vec{x} \in F^\omega : \forall i \leq n(\vec{x}(i) = 0)\}$$

Es claro que $X_{n+1} \subseteq X_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ y que $F^\omega / X_n \cong F^n$ pues$\iota : F^\omega \longrightarrow F^n$ dado por $\{(\vec{x}) = (\vec{x}(1), ..., \vec{x}(n)\}$ es un homomorfismo sobre el núcleo X_n. Luego cada X_n es finito.

Ahora para cada $n \leq m$ sea $\pi_{mn} : F^\omega/X_m \longrightarrow F^\omega/X_n$ entonces el límite inverso de dicho sistema es isomorfo a $\{F^\omega, \{\pi_m : m \in \mathbb{N}\}\}$. Donde para cada $m \in \mathbb{N}$ $\pi_m : F^\omega \longrightarrow F^\omega/X_m$ es la proyección natural.

Para ver que es un co-cono límite, sea Z un F-espacio vectorial y $\eta_n : Z \longrightarrow F^\omega/x_n$ un morfismo para cada $n \in \mathbb{N}$ tal que $\{Z, \{\eta_n : n \in \mathbb{N}\}\}$ es otro co-cono, definimos

$$\Phi : Z \longrightarrow F^\omega$$

dado por $\Phi(z)(i) = X_{i,z}(i)$ para cada $z \in Z$ y cada i natural. Aquí $X_{i,z}$ es un representante de $\eta_i(z)$. Note que está bien definido ya que si X, X' son elementos de $\eta_i(z)$, entonces $X - X' \in X_i$ luego, $(X - X')(i) = 0$. Por tanto, $X(i) = X'(i)$. Además Φ es un homomorfismo pues si $z_1, z_2 \in Z$ y $k \in F$, para cada $n \in \mathbb{N}$ η_n es un homomorfismo. Con lo cual $\eta_n(z_1 + kz_2) = \eta_n(z_1) + k\eta_n(z_2)$. Entonces,

$$X_{n,z_1+kz_2} = X_{n,z_1} + kX_{n,z_2}$$

y de aquí se sigue fácilmente que Φ es homomorfismo. Es claro de la definición que para cada $n \in \mathbb{N}$, $\eta_n = \pi_n \circ \Phi$.

Así pues F^ω es profinito, pero sin embargo no es la envolvente profinita de ningún espacio vectorial V. Para esto note que $V^{**} \cong \hat{V}$ y si V tiene dimensión finita es finito y V^{**} también. Con lo anterior $\hat{V} \ncong F^\omega$

Ahora si V es un espacio vectorial sobre F de dimensión infinita. Sea B una base, luego hay tantas transformaciones de V en F como funciones de B en F (extendiendo linealmente). Entonces $|V^*| = |F^B|$ y además $|V| = |B|$ al ser F finito y B infinita.

Considere C una base de V^*, entonces $|C| = |V^*| = |F^B|$. Luego, $|V^{**}| = |F^C| = |F^{|C|}|$ y como B es infinito y $|F| \geq 2$, $|F^B| > \omega$. Es así como $|V^{**}| > |F^\omega|$ con lo cual $V^{**} \ncong F^\omega$.

En el siguiente capítulo introduciremos el concepto de estructuras subdirectamente irreducibles respecto a alguna clase y daremos una condición necesaria y suficiente para que cada L estructura de cierta clase tenga una envolvente profinita.

Capítulo 6

Productos Subdirectos y Estructuras Subdirectamente Irreducibles

Considere una familia $\{\mathfrak{A}_i : i \in I\}$ de L-estructuras indexada por I. Una L-estructura $\mathfrak{A}$ se dice un producto subdirecto de dicha familia si es isomorfa a una subálgebra $\mathfrak{A}'$ del producto de la familia tal que para cada $i \in I$ se tiene que $\pi_i \restriction \mathfrak{A}' : \mathfrak{A}' \longrightarrow \mathfrak{A}_i$ es sobreyectiva, donde para cada $i \in I$, π_i es la proyección natural del producto en $\mathfrak{A}_i$. Al homomorfismo de sub estructura $\Phi : \mathfrak{A} \longrightarrow \prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i$ se le llama una descomposición subdirecta de $\mathfrak{A}$.

Uno puede obtener descomposiciones subdirectas triviales de cualquier estructura $\mathfrak{A}$ de la siguiente forma: Considere un conjunto de homomorfismos sobreyectivos $\{f_i : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}_i : i \in I\}$ tales que para algún $t \in I$ f_t es un isomorfismo. Considere entonces $\Phi : \mathfrak{A} \longrightarrow \prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i$ dado por $\Phi(a)(i) = f_i(a)$ para todo $a \in \mathfrak{A}$ y todo $i \in I$. Es un homomorfismo ya que cada f_i lo es. Es inyectiva ya que f_t lo es. Si R es un símbolo de relación n-aria y $(\Phi(a_1), ..., \Phi(a_n)) \in R^{\prod \mathfrak{A}_i}$ entonces $(f_r(a_1), ..., f_r(a_n)) \in R^{\mathfrak{A}_r}$ ya que la proyección en $\mathfrak{A}_r$ un homomorfismo y al ser f_r isomorfismo se tiene que $(a_1, ..., a_n) \in R^{\mathfrak{A}}$. Además para $i \in I$ $\pi_i \circ \Phi = f_i$ que es es sobreyectiva.

En adelante cuando se hable de una clase de L-estructuras se asumirá que es cerrada bajo isomorfismos.

Una estructura $\mathfrak{A}$ se dice subdirectamente irreducible en una clase de estructuras K si para cualquier descomposición subdirecta $\Phi : \mathfrak{A} \longrightarrow \prod_{i\in I} \mathfrak{B}_i$, con cada $\mathfrak{B}_i$ elemento de K, se tiene que para algún $t \in I$, $\pi_t \circ \Phi$ es un isomorfismo.

Birkhoff mostró que en una variedad de álgebras K, las álgebras subdirectamente irreducibles son aquellas en las que la intersección de sus congruencias que contienen propiamente a la identidad es una congruencia diferente de la identidad. También mostró que cualquier álgebra $\mathfrak{A} \in K$ es un producto subdirecto de álgebras subdirectamente irreducibles en K.

En [XC] se generaliza este último resultado y se muestra que si K es una clase de estructuras cerrada bajo límites directos entonces cada estructura en K es producto subdirecto de subdirectamente irreducibles en K. Tamién se muestra que una clase axiomatizable por sentencias del tipo

$$\forall x_1 ... \forall x_n (\phi \rightarrow \exists y_1 ... \exists y_m \psi)$$

dónde ϕ y ψ positivas libres de cuantificadores, es cerrada bajo límites directos, con lo cual para este tipo de clases de estructuras también se tiene un teorema de Birkhoff.

Lema 6.0.1. *Sea K una clase de L-estructuras, tal que toda estructura de K es isomorfa a una subestructura de un producto de estructuras finitas, entonces para cada $\mathfrak{A}$ en K existe la envolvente profinita.*

Demostración. Como se observó, basta notar que si a y b son elementos diferentes de $\mathfrak{A}$, existe $\theta \in Cong(\mathfrak{A})$ de índice finito tal que $(a, b) \notin \theta$. Si K es como en las hipótesis entonces existe $\Phi : \mathfrak{A} \longrightarrow \prod_{i\in I} \mathfrak{B}_i$ un homomorfismo de sub estructura, para ciertas $\mathfrak{B}_i$ finitas como Φ es inyectivo existe algún $i \in I$ tal que si definimos $\Psi := \pi_i \circ \Phi$ se tiene que $\Psi(a) \neq \Psi(b)$, es decir $(\Psi(a), \Psi(b)) \notin ker(\Psi)$. Como Ψ fuerte al ser composición de dos homomorfismos fuertes, se tiene que $\mathfrak{A}/ker(\Psi)$ es isomorfo a $\Phi(A)$, una subestructura de $\mathfrak{B}$, con lo cual $ker(\Psi)$ es una congruencia de índice finito.

$\square$

En particular si K es una clase de L-estructuras tal que toda estructura de K es un producto subdirecto de subdirectamente irreducibles en K y los subdirectamente irreducibles de K son todos finitos, entonces para cada $\mathfrak{A}$ en K existe la envolvente profnita de $\mathfrak{A}$ (aunque no necesariamente en K).

En [Guram] se prueba que una variedad de álgebras V es residualmente finita (sólo hay subdirectamente irreducibles finitos) si y sólo si para cada $\mathfrak{A} \in V$ existe la envolvente profinita. Es decir el mapa canónico $\Phi : \mathfrak{A} \longrightarrow \hat{\mathfrak{A}}$ es inyectivo.

Este hecho se puede generalizar de la siguiente manera:

Lema 6.0.2. *Sea K es una clase de L-estructuras cerrada bajo imágenes por homomorfismos fuertes, en la cual cada $\mathfrak{A} \in K$ es producto subdirecto de estructuras subdirectamente irreducibles en K. Entonces todos los irreducibles de K son finitos, si y sólo si para cada $\mathfrak{A} \in K$ existe la envolvente profinita de $\mathfrak{A}$.*

Demostración. El anterior lema garantiza el "sólo si". Para ver el "si", note que si K es como en las hipótesis, para cada $\mathfrak{A} \in K$, $\Phi : \mathfrak{A} \longrightarrow \hat{\mathfrak{A}}$ es una representación subdirecta en $\mathfrak{A}$ con respecto a los cocientes finitos de $\mathfrak{A}$ pues para cada $\theta \in Cong(\mathfrak{A})$ de índice finito $\pi_\theta : \Phi(\mathfrak{A}) \longrightarrow \mathfrak{A}/\theta$ es sobreyectivo. Ya que dado $a_\theta \in \mathfrak{A}/\theta$, entonces $a_\theta = \pi_\theta(\Phi(\mathfrak{A}))$, además por la condición de clausura de K, cada $\mathfrak{A}/\theta \in K$. Esto implica que cada estructura en K es producto subdirecto de estructuras finitas de K. Por esta razón si $\mathfrak{A}$ es una estructura subdirectamente irreducible de K también se puede expresar como producto subdirecto de estructuras finitas en K, lo cual por la definición de subdirectamente irreducible implica que $\mathfrak{B}$ es isomorfo a alguna estructura finita. □

Ejemplo En [XC2] se muestra que para cada n natural, la clase de los grafos n-coloreables es axiomatizable por sentencias del tipo

$$\forall x_1 ... \forall x_n (\phi \rightarrow \exists y_1 ... \exists y_m \psi)$$

como las descritas. Además se calculan los subdirectamente irreducibles y se muestra que todos son finitos. Esto muestra que en esta clase existe la compactificación maximal de cada grafo.

Ejemplo Es claro que la clase de los grupos abelianos en el lenguaje $\{0, +, -\}$ es axiomatizable por ecuaciones. Esto implica que vale el teorema de Birkhoff. Es un hecho conocido (y no muy difícil de probar) que los grupos abelianos subdirectamente irreducibles son $\mathbb{Z}_p$ y $\mathbb{Z}_{p^\infty}$. Esto junto al lema anterior implica que hay grupos abelianos que no tienen envolvente profinita. Dado que $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ es infinito.

Note que si en el lema anterior exigimos además que K sea cerrada bajo límites inversos, la envolvente profinita se puede obtener en K. En particular, si la clase es cerrada bajo productos y subestructuras.

Capítulo 7

Compactificaciones de estructuras

Para una L-estructura, una compactficación de $\mathfrak{A}$ es un par $(\mathfrak{B}, \phi)$ donde $\mathfrak{B}$ es una L-estructura topológica compacta de Hausdorff y ϕ es un homomorfismo de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$ con imagen densa en $\mathfrak{B}$. Note que esta definición no exige que ϕ sea inyectvo.

Si definimos $\hat{\mathfrak{A}}$ y $\Phi : \mathfrak{A} \longrightarrow \hat{\mathfrak{A}}$ como la envolvente profinita de $\mathfrak{A}$, se tiene que $(\hat{\mathfrak{A}}, \Phi)$ es una compactficación de $\mathfrak{A}$.

Dadas dos compactificaciones de $\mathfrak{A}$, $(\mathfrak{B}_1, \phi_1)$ y $(\mathfrak{B}_2, \phi_2)$ se dice que $(\mathfrak{B}_1, \phi_1) \leq (\mathfrak{B}_2, \phi_2)$ si existe $\Gamma : \mathfrak{B}_1 \longrightarrow \mathfrak{B}_2$ homomorfismo contino tal que $\phi_2 = \Gamma \circ \phi_1$. Estas dos compactificaciones se dicen equivalentes si $(\mathfrak{B}_1, \phi_1) \leq (\mathfrak{B}_2, \phi_2)$ y $(\mathfrak{B}_1, \phi_1) \geq (\mathfrak{B}_2, \phi_2)$, en este caso existe $\Gamma : \mathfrak{B}_1 \longrightarrow \mathfrak{B}_2$ homeomorfismo que es tambén isomorfismo, tal que $\Gamma \circ \phi_1 = \phi_2$.

Para cada L-estructura $\mathfrak{A}$ cada una de sus compactificaciones tiene a lo sumo $2^{2^{|\mathfrak{A}|}}$ elementos, dónde $|\mathfrak{A}|$ denota la cardialidad del universo de $\mathfrak{A}$. Ya que si $\mathfrak{A}$ se sumerge en una estructura compacta de Hausdorff, cada punto en $\overline{\mathfrak{A}}$ se puede representar univocamente como el límite de un ultrafiltro sobre $\mathfrak{A}$ y obviamente no hay mas que $2^{2^{|\mathfrak{A}|}}$ ultrafiltros sobre $\mathfrak{A}$.

Por lo cual, si tomamos la clase de todas las compactificaciones de $\mathfrak{A}$ y elegimos una clase de representantes por equivalenca, esa clase es de hecho un conjunto.

Sea ahora K una clase de L estructuras es cerrada bajo productos y sub estructuras, y que contenga para cada $\mathfrak{A} \in K$ al menos una compactificación de $\mathfrak{A}$.

Dada $\mathfrak{A} \in K$, una *compactificación maximal* de $\mathfrak{A}$ en K, es una estructura topológica compacta de Hausdorff $b\mathfrak{A} \in K$ y un homomorfismo ψ tal que que $(b\mathfrak{A}, \psi)$ cumple la siguiente propiedad universal: Si $(\mathfrak{B}, \phi)$ es una compactificación de $\mathfrak{A}$, con $\mathfrak{B} \in K$, existe un único homomorfismo continuo $\pi : b\mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$ tal que $\phi = \pi \circ \psi$.

Bajo estas condiciones de clausura de K, para cada $\mathfrak{A} \in K$ se puede encontrar $b\mathfrak{A}$ maximal en K.

Note que si $(b\mathfrak{A}, \psi)$ y $(\mathfrak{C}, \rho)$ cumplen esta propiedad de maximalidad entonces, son equivalentes por una prueba similar a la realizada en la propiedad universal de $\hat{\mathfrak{A}}$.

Sea $\mathcal{C}(\mathfrak{A})$ un conjunto de representantes por equivalencia de las compactificaciones de $\mathfrak{A}$ que están en K, (que por hipótesis no es vacío) digamos que $\mathcal{C}(\mathfrak{A}) = \{(\mathfrak{A}_i, \phi_i) : i \in I\}$ con I un conjunto de índices. Sea $\psi : \mathfrak{A} \longrightarrow \prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i$ el homomorfismo inducido por las ϕ_i, es decir, para cada $a \in \mathfrak{A}$ y cada $i \in I$, $\psi(a)(i) = \phi_i(a)$. Luego si definimos $b\mathfrak{A}$ como la clausura de $\psi(\mathfrak{A})$ en el producto, se tiene que $(b\mathfrak{A}, \psi)$ es una compactificación al ser $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i$ compacto por Tychonoff y por lo tanto $b\mathfrak{A}$ también al ser cerrado en un compacto, y por definición la imagen de ψ es densa en $b\mathfrak{A}$. Note que dicha compactificación siempre existe ya que hay al menos una compactificación de $\mathfrak{A}$ en K.

Debemos mostrar que $b\mathfrak{A} \in K$ para lo cual es suficiente demostrar que $b\mathfrak{A} \leq \prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i$. Para esto sea $f \in L$ un símbolo de funcón n-ario y sean $x_1, ..., x_n$ elementos de $b\mathfrak{A}$. Debemos ver que $x := f^{\prod \mathfrak{A}_i}(x_1, ..., x_n)$ es punto límite de $\psi(\mathfrak{A})$. Sea U un abierto del producto tal que $x \in U$ luego $V := (f^{\prod \mathfrak{A}_i})^{-1}(U)$ es un abierto en $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i^n$ que contiene a $(x_1, ..., x_n)$ luego podemos intercalar un básico, digamos $\prod_{k=1}^n U_k \subseteq V$ donde cada U_k es una vecindad abierta de x_k en $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i$. Por lo tanto para cada $k \in \{1, ..., n\}$ existe $a_k \in \mathfrak{A}$ tal que $\psi(a_k) \in U_k$, luego $f^{\prod \mathfrak{A}_i}(\psi(a_1), ..., \psi(a_i)) \in U$ pero como ψ es homomorfismo $\psi(f^{\mathfrak{A}}(a_1, ..., a_n)) \in U$. Note que esto en realidad muestra que la clausura de la imagen de cualquier homomorfismo en una estructura topológica, es una sub estructura. Note que esto de hecho prueba que la clausura de la imagen de cualquier homomorfismo en una estructura topológica, es una subestructura.

Veamos ahora que $(b\mathfrak{A}, \psi)$ cumple la propiedad universal mencionada. Sea $(\mathfrak{B}, \phi)$ una compactificación de $\mathfrak{A}$.

Para ver la existencia, como $\mathfrak{B} \in K$, entonces existe $i \in I$ tal que $(\mathfrak{A}_i, \phi_i)$ es equivalente a $(\mathfrak{B}, \phi)$. Sea $\Phi : \mathfrak{A}_i \longrightarrow \mathfrak{B}$ tal que $\phi = \Phi \circ \phi_i$ tome entonces $\pi : b\mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$ dado por $\pi(\vec{x}) = \Phi(\vec{x}(i))$. Que claramente es un homomorfismo continuo al ser composición de dos homomorfismos continuos, la proyección en la i-ésima componente y Φ. Además por la definición de π, si $a \in \mathfrak{A}$, $\pi(\psi(a)) = \Phi(\phi_i(a)) = \phi(a)$, es decir $\phi = \pi \circ \psi$.

Este ψ es fuerte ya que si R es un símbolo de relación n-aria y $a_1, ..., a_n$ son elementos de $\mathfrak{A}$ tales que $(\psi(a_1), ..., \psi(a_n)) \in R^{b\mathfrak{A}}$, entonces para todo $i \in I$, $(\psi_i(a_1), ..., \psi_i(a_n)) \in R^{\mathfrak{A}_i}$ y si $(a_1, ..., a_n) \notin R^{\mathfrak{A}}$ por la condición **2** existiría $\mathfrak{B}$ estructura compacta de Hausdorff y $\rho : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$ tal que $(\rho(a_1), ..., \rho(a_n)) \notin R^{\mathfrak{B}}$ pero entonces $(\overline{\rho(\mathfrak{A})}, \rho)$ sería una compactificación de $\mathfrak{A}$ y por ende equivalente a digamos $(\mathfrak{A}_j, \psi_j)$ lo cual es una contradicción.

La unicidad se sigue de que por a conidción de conmutatividad de los homomorfismos, $\pi : b\mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$ está determinada en $\psi(\mathfrak{A})$ (pues para cada $a \in \mathfrak{A}$ $\pi(\psi(a)) = \phi(a)$) que es un subconjunto denso de $b\mathfrak{A}$ y como $\mathfrak{B}$ es Hausdorff, cualquier par de funciones continuas de $b\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$ que coincidan en $\psi(\mathfrak{A})$ son iguales.

Note que si algún ϕ_i es inyectivo, entonces ψ también. Por lo cual si la envolvente profinita existe en K, es decir la función canónica de $\mathfrak{A}$ en $\hat{\mathfrak{A}}$ es inyectiva y $\hat{\mathfrak{A}} \in K$ (estoúltimo se puede asegurar pidiendo que K sea cerrada bajo límites inversos), entonces ψ es inyectiva. Y si ψ llega a ser inyevtiva, al ser $(b\mathfrak{A}, \psi)$ equivalente a algún $(\mathfrak{A}_t, \phi_t)$, phi_t es inyectiva. Es decir ψ es inyectiva si y sólo si aguna ϕ_i lo es.

En particular si tomamos K cerrada bajo homomorfismos fuertes, si en $\mathfrak{A}$ hay suficientes congruencias de índice finito como para separar cualquier par de puntos, ψ es inyectiva. Este hecho hace que sea natural preguntarse bajo que condiciones la envolvente profinita coincida con la maximal, si es que ambas existen. No se presenta aquí ninguna respuesta.

El hecho de que $(b\mathfrak{A},\psi)$ cumpla dicha propiedad universal implca que cumple esta más general: para toda $\mathfrak{C}\in K$ estructura topológica compacta de Hausdorff, y $\phi:\mathfrak{A}\longrightarrow\mathfrak{C}$ homomorfismo, existe un único homomorfismo continuo $\pi:b\mathfrak{A}\longrightarrow\mathfrak{C}$ tal que $\phi=\pi\circ\psi$.

Para demostrar la existencia, como $(\overline{\phi(\mathfrak{A})},\phi)$ es una compactificaci on de $\mathfrak{A}$, con la topología de sub espacio, sabemos que existe $\pi:b\mathfrak{A}\longrightarrow\phi(\mathfrak{A})$ homomorfismo continuo, tal que $\phi=\pi\circ\psi$ pero π se puede ver como un homomorfismo cuntinuo con codomnio $\mathfrak{C}$ ya que $\phi(\mathfrak{A})\subseteq\mathfrak{C}$. La unicidad se sigue de que π está determinada en $\psi(\mathfrak{A})$ que es un subconjunto denso de $\beta\mathfrak{A}$.

$(b\mathfrak{A},\psi)$ se puede definir también en términos de límites inversos. Tomando como conjunto de índices el orden parcial

$$(\mathcal{C}(\mathfrak{A}),\leq *)=(\{(\mathfrak{A}_i,\psi_i):i\in I\},\leq^*)$$

dónde $\leq *$ es el inverso $(\geq)$ del definido sobre todas las compactificaciones de $\mathfrak{A}$ $(\leq)$. Este orden es dirigido pues dados dos elementos de $\mathcal{C}$, $(\mathfrak{A}_j,\phi_j)$, $(\mathfrak{A}_i,\phi_i)$ definimos $h:\mathfrak{A}\longrightarrow\mathfrak{A}_i\times\mathfrak{A}_j$ dado por $h(a)=(\phi_i(a),\phi_j(a))$ para cuaquier $a\in\mathfrak{A}$, se tiene $(\overline{h(A)},h)$ es equivalente a algún $(\mathfrak{A}_k,\phi_k)$ ya que K es cerrado bajo productos y bajo subestructuras. Entonces claramente $(\mathfrak{A}_k,\phi_k)\geq(\mathfrak{A}_i,\phi_i)$ y $(\mathfrak{A}_k,\phi_k)\geq(\mathfrak{A}_j,\phi_j)$. Ahora, para cada $(\mathfrak{A}_j,\phi_j)$, $(\mathfrak{A}_i,\phi_i)$ elementos de $\mathcal{C}(\mathfrak{A})$, si $(\mathfrak{A}_j,\phi_j)\leq(\mathfrak{A}_i,\phi_i)$, sea f_{ji} el $\Gamma:\mathfrak{A}_j\longrightarrow\mathfrak{A}_i$ dado por la definción de $\leq$. Note que si tal Γ existe es único al coincidir cualquier otro en $\phi_j(\mathfrak{A})$, un subconjunto denso de $\mathfrak{A}_j$. Además Γ es sobreyectivo pues $\Gamma(\mathfrak{A}_j)$ contiene a $\Gamma(\phi_j(\mathfrak{A}))$ que es igual a $\phi_i(\mathfrak{A})$, un denso en $\mathfrak{A}_i$. y como $\mathfrak{A}_j$ es compacto, $\mathfrak{A}_i$ Hausdorff y Γ continua, la imagen de Γ es un cerrado que contiene a un denso y por lo tanto $\Gamma(\mathfrak{A}_j)=\mathfrak{A}_i$.

Con estas definiciones podemos poner

$$\mathcal{L}:=\lim_{\leftarrow}<\mathfrak{A}_i,\{f_{ji}:(\mathfrak{A}_j,\phi_j)\leq(\mathfrak{A}_i,\phi_i)\}>_{i\in I}$$

Note que $(\mathfrak{A},\{\phi_i\})$ es también un co-cono sobre el anterior sistema, sea $\psi':\mathfrak{A}\longrightarrow\mathcal{L}$ el homomorfismo canónico dado por la propiedad universal de $\mathcal{L}$. Es obvio que $\psi=\psi'$, pues ψ hace conmutar los diagramas que definen univocamente a ψ' en la propiedad universal.

Además se tiene que $b\mathfrak{A} = \mathcal{L}$. Al ser $\mathcal{L}$ cerrado en $\prod_{i\in I}\mathfrak{A}_i$ y $b\mathfrak{A} = \overline{\psi(\mathfrak{A})}$, para ver que $b\mathfrak{A} \subseteq \mathcal{L}$ basta mostrar que $\psi(\mathfrak{A}) \subseteq \mathcal{L}$ lo cual se tiene ya que si $(\mathfrak{A}_i, \phi_i) \leq (\mathfrak{A}_j, \phi_j)$ son elementos de $\mathcal{C}(\mathfrak{A})$ y $a \in \mathfrak{A}$, entonces $f_{ij}(\psi(a)(i)) = f_{ij}(\phi_i(a))$ por la condición de conmutatividad de f_{ij} respecto a ϕ_i y a ϕ_j,

$$f_{ij}(\psi(a)(i)) = \phi_j(a) = \psi(a)(j)$$

Para ver la otra otra contenencia, suponga $(b_i)_{i\in I}$ un elemento de $\mathcal{L}$. Y considere una vecindad abierta básica de $(b_i)_{i\in I}$,

$$V = \prod_{i\in\{i_1,...,i_n\}} U_i \times \prod_{i\notin\{i_1,...,i_n\}} \mathfrak{A}_i$$

para ciertos $i_1, ..., i_n$ elementos de I y U_i abierto en $\mathfrak{A}_i$. Debemos ver que existe $a \in \mathfrak{A}$ tal que $\phi_{i_j}(a) \in U_{i_j}$ para cada $j \in \{1, ..., n\}$. Sea $t \in I$ tal que para todo $j \in \{1, ..., n\}$, $(\mathfrak{A}_t, \phi_t) \leq (\mathfrak{A}_{i_j}, \phi_{i_j})$. Es fácil ver que

$$b_t \in \bigcap_{i\in\{i_1,...,i_n\}} f_{ti}^{-1}(U_i)$$

ya que $(b_i) \in \mathcal{L}$ (es decir, es una tupla coherente). Es claro que esta intersección es un abierto en $\mathfrak{A}_t$ al ser cada f_{ti} continua. Ahora, por la densidad de la imagen de ϕ_t, existe $a \in \mathfrak{A}$ tal que

$$\phi_t(a) \in \bigcap_{i\in\{i_1,...,i_n\}} f_{ti}^{-1}(U_i)$$

Esto implica que para cada $i \in \{i_1, ..., i_n\}$, $\phi_i(a) \in U_i$ como se querá.

La pregunta de Mycielski generalmente se plantea relativa a una clase de estructuras K. Preguntando que si cada L-estructura atómicamente compacta $\mathfrak{A} \in K$, existe un álgebra topológica compacta de Hausdorff $\mathfrak{C} \in K$ y $h : \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{A}$ un retracto.

Note que si la respuesta para la pregunta de Mycielski es positiva para $\mathfrak{A}$ respecto a K, entonces $\psi : \mathfrak{A} \longrightarrow b\mathfrak{A}$, el morfismo canónico, es inyectivo (ya que existe alguna compactificación de $\mathfrak{A}$, $(\mathfrak{A}_i, \phi_i)$ en K tal que ϕ_i es inyectiva) y existe $h : b\mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{A}$ tal que $h \circ \psi = id_{\mathfrak{A}}$. Es decir, si existe una retracción en $\mathfrak{A}$ desde un compacto de Hausdorff, la existe desde $b\mathfrak{A}$. Pues si $\mathfrak{B} \in \mathscr{C}$ es compacta de Hausdorff y $j : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$ es un homomorfismo tal que existe $h : \mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{A}$ retracción. Entonces por la propiedad universal de $b\mathfrak{A}$, existe $\pi : b\mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$ tal que $j = \pi \circ \psi$, con lo cual $h \circ \pi$ es una retracción de ψ.

Ejemplo En la variedad de los grupos abelianos, es bien conocido que existe su clausura compacta. Para cada par de grupos abelianos A, B, $Hom(A, B)$ denota el grupo abeliano de los homomorfismos de A en B con la operación componente a componente. Para cada G se tiene que

$$(bG, \psi) = (((Hom(Hom(G, S_1), S_1)), \psi)$$

donde S_1 es el círculo unitario visto como un subgrupo compacto del plano complejo con la multimplicación. Y $\psi(g)(f) = f(g)$ para cada $g \in G$ y cada $f \in Hom(G, S_1)$. Ver por ejemplo [B].Esto muestra que la existencia de la clausura compacta no implica la de la clausura profinita.

Bibliografía

[Guram] Bezhanishvili, Guram, and Patrick J. Morandi. "Profinite Heyting algebras and Profinite completions of Heyting algebras."Georgian Mathematical Journal 16.1 (2009): 29-47.

[BF] Bulman-Fleming, Sydney. "On equationally compact semilattices..Algebra Universalis 2.1 (1972): 146-151.

[XC] Caicedo, Xavier. "The subdirect decomposition theorem for classes of structures closed under direct limits."Journal of the Australian Mathematical Society (Series A) 30.02 (1980): 171-179.

[XC2] Caicedo, Xavier. "Subdirect decomposition of n-chromatic graphs."Journal of Algebraic Combinatorics 8.2 (1998): 157-168.

[Grätzer] Grätzer, G. A. (2008). Universal algebra. Springer.

[JL] Lécureux, J. (2006). An introduction to profinite groups.

[MM] Mariano, Hugo Luiz, and Francisco Miraglia. "On Profinite Structures."The Many Sides of Logics, Studies in Logic 21 (2009): 201-224.

[MM2] Mariano, Hugo Luiz. "Profinite structures are retracts of ultraproducts of finite structures."(2004).

[Marker] Marker, D. (2002). Model Theory: An Introduction. Springer

[Munkres] Munkres, J. R. (1975). Topology: a first course.

[Taylor] Taylor, Walter. "Atomic compactness and graph theory."Fundamenta Mathematicae 65.2 (1969): 139-145.

[We] Weglorz, B. (1966). Equationally compact algebras (I). Fundamenta Mathematicae, 59(3), 289-298.