

Disertación sobre el gas Tonks–Girardeau:  
Descripción teórica y experimental.

Universidad de los Andes, Colombia

David Alejandro Cortés Gutiérrez  
Asesor: Gabriel Téllez Acosta

Mayo de 2014



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>5</b>
<b>2. Primeros pasos</b>	<b>7</b>
2.1. Gas de Tonks . . . . .	8
2.2. Gas de Girardeau . . . . .	9
<b>3. Modelo exacto</b>	<b>13</b>
3.1. Energía y función de onda en el estado base . . . . .	20
<b>4. Encontrando el gas</b>	<b>27</b>
4.1. Método experimental . . . . .	30
4.2. Descripción teórica . . . . .	31
4.2.1. Transformación Jordan-Wigner . . . . .	32
4.3. Resultados . . . . .	35
<b>5. Conclusión</b>	<b>39</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>41</b>



# Capítulo 1

## Introducción

¿Cómo se construye un modelo? ¿Qué papel juega el modelo teórico en el experimento? Es esto lo que uno podría pensar cuando se enfrenta con una rama de la física llamada física del estado sólido o materia condensada. Sorprende además que los modelos más difíciles de replicar en un laboratorio sean los que tengan que ver con una o dos dimensiones. No solamente la dimensión puede influir sino que si el problema tiene una solución analítica en 2D o 1D, no se puede de antemano suponer que tendrá las mismas características si se consideran tres dimensiones. Por poner varios ejemplos, está la densidad de estados de un gas electrones libres, la dependencia de la capacidad calorífica con respecto a los fonones en sólidos, las transiciones de fase en sólidos. En algunos casos, cuando se intentan solucionar estos problemas, se encuentra que la dimensión hará que la solución sea analítica o numérica.

Uno de esos problemas que tiene esas características es una cadena de bosones en una dimensión. La idea es poder resolver la ecuación de Schrödinger considerando que entre los bosones hay una interacción delta. No sólo es interesante este problema por el hecho de no involucrar interacciones entre espines o dependencia del tiempo sino que ha habido descripciones más completas y ha habido experimentos que han intentado encontrar esa cadena de bosones, ya sea en dos dimensiones o en una. Este problema es además la base para estudiar un tipo de gas especial llamado gas de Tonks–Girardeau, cuyo nombre se debe a Lewi Tonks y Marvin Girardeau, personas que comenzaron a describir la impenetrabilidad de bosones y fermiones en una dimensión.

Sin embargo, ninguno de ellos fue quien resolvió por completo y en general la cadena de partículas bosónicas que interactúan en una sola dimensión (no necesariamente una interacción muy fuerte entre ellas). Esta tesis se centrará

en explicar cómo solucionar este problema y cómo han sido los montajes experimentales para recrear el gas.

# Capítulo 2

## Primeros pasos

Antes de exponer el gas de Tonks–Girardeau, es necesario al menos entender cómo se llegó a la descripción completa de bosones interactuantes y qué tiene que ver este modelo con el gas ya mencionado. También es importante mencionar que se hablará de cadenas de átomos y de gases como si fuesen intercambiables. Por cadena de átomos entiéndase unos átomos que están dispuestos en una línea cuya interacción entre ellos definirá el modelo a estudiar, tal como sucede con los modelos de Girardeau y Lieb. Por gas entiéndase como el conjunto de átomos con interacciones en general débiles, ya sean interacciones gravitacionales o eléctricas. Por otro lado el gas Tonks–Girardeau se refiere a un régimen en el cual se encuentra ese conjunto de átomos, que por supuesto será explicado en capítulos posteriores. Por el momento, se expondrán las ideas originales de Lewi Tonks y Marvin Girardeau en la siguientes secciones.

Sobre Tonks, su artículo halla las ecuaciones de estado para un gas cuyos componentes (átomos) tienen esferas elásticas compactas. Primero, la motivación es que él estaba trabajando en el laboratorio con películas monoatómicas de cesio y wolframio, que para ese entonces requería tener una ecuación de estado para un gas de dos dimensiones. El análisis del gas estaba en el ámbito clásico, es decir, se trabajaba con una ecuación de estado modificada y se consideraba que los átomos se comportaban como esferas compactas que tenían un diámetro  $\sigma$ . Además, la ecuación era obtenida cuando la concentración del gas era baja y alta; todo esto utilizaba ideas del análisis para caso de una dimensión y que llevó a una extensión del análisis a tres dimensiones. A continuación, se mencionarán algunos elementos del artículo de Tonks [Ton36].

## 2.1. Gas de Tonks

La ecuación de estado modificada para un gas de tres dimensiones se escribe como

$$pv = Nk_B T + \frac{1}{3} \left\langle \sum_{i,j} r_{ij} \phi(r_{ij}) \right\rangle, \quad (2.1)$$

con  $\phi(r_{ij})$  la fuerza repulsiva entre dos átomos a una distancia  $r$ ,  $p$  presión,  $v$  volumen,  $N$  número de moles,  $k_B$  constante de Boltzmann,  $T$  temperatura y la suma se extiende sobre todos los pares de átomos. Una fórmula similar se encuentra para el caso de dos dimensiones<sup>1</sup>

$$\tau a = Nk_B T + \frac{1}{2} \left\langle \sum_{i,j} r_{ij} \phi(r_{ij}) \right\rangle, \quad (2.2)$$

con  $\tau$  la tensión superficial y  $a$  el área del gas.

Es a partir de aquí que la dimensión del átomo tiene importancia para los cálculos restantes. Se considera que el átomo tiene diámetro  $\sigma$  y que dos átomos no pueden acercarse entre sí más que  $\sigma$ . En dos dimensiones esa esfera excluyente es un círculo, y en una dimensión es una longitud. ¿Qué modelo  $\phi(r)$ ? Depende de la suposición de que  $\phi(r)$  sea cero más allá de una distancia  $\sigma + d\sigma$  y es tan grande en esta pequeñísima zona que ningún átomo se acerca dentro de una distancia  $\sigma$ . Un análisis más detallado muestra que  $\sum r \phi(r)$  puede ser expresado como varios términos independientes que dependerán de una probabilidad de colisión entre dos átomos. Por tanto, la expresión será diferente para cada dimensión. Para 2D, la ecuación de estado es, con valores aproximados

$$\tau a = Nk_B T(1 + 1.814\theta + 2.573\theta^2), \quad (2.3)$$

con  $\theta$  la razón entre la superficie cubierta por los átomos y el área total,  $a$ , donde están los átomos. Esta definición cambia con la dimensión del problema. En una dimensión es la fracción entre la longitud ocupada por los átomos y la longitud total en donde están los átomos.

---

<sup>1</sup>No demostradas por él. La demostración se encuentra en [Lan32].



Lo que se quiere modelar es un conjunto de átomos que tiene un volumen (o área si está en dos dimensiones) con ayuda de trabajos hechos anteriormente por Langmuir [Lan32], el cual considera las fuerzas de repulsión entre átomos con volumen para hallar la ecuación de estado con coeficientes viriales. No sobra decir que Tonks utiliza varias suposiciones para encontrar dicha ecuación en las tres dimensiones.

Aún no se ha dicho nada sobre la concentración (densidad) del gas, pero el resultado anterior es válido para bajas concentraciones de átomos. En el caso contrario, es necesario tener en cuenta la geometría que podrían adquirir los átomos cuando están muy aglutinados. La geometría propuesta por Tonks es una hexagonal regular, adicionalmente la probabilidad de colisión estará sujeta a que el átomo puede chocar con uno de sus seis vecinos (no con dos como en el caso de baja densidad).

No sólo se tiene en cuenta la geometría sino las fuerzas que los átomos ejercen entre sí y que de alguna forma debería depender de un factor que exhiba una cantidad de átomos en el gas, que en este caso es  $\theta$ . La expresión para la fuerza también depende de la dimensión que tratemos. Por ejemplo, si hablamos de una cadena de átomos (recuérdese que cada átomo tiene un tamaño) la fuerza está dada por

$$f = \frac{k_B T}{(1 - \theta)l}, \quad (2.4)$$

es decir, la fuerza que un átomo como gas ejerce es igual a  $k_B T$  dividida por la longitud del confinamiento,  $l$ , en donde se encuentre el átomo. En 2D será

$$\tau = \frac{\mu n k_B T}{1 - \theta^{1/2}}, \quad (2.5)$$

con  $n$  número de átomos por unidad de área, que quiere decir una fuerza por longitud de gas con un coeficiente  $\mu$  por determinar. Como ya se ha dicho es una ecuación de estado modificada con consideraciones y parámetros clásicos.

## 2.2. Gas de Girardeau

Girardeau consideró que el análisis para una cadena de partículas debía hacerse desde la mecánica cuántica, es decir, debía seguir la ecuación de

Schrödinger y que además tuviese una característica especial: que las partículas fuesen fermiones o bosones e impenetrables. La motivación para considerar este problema es que puede servir como una herramienta y una base para resolver casos más generales de interacción y que pueden permitir comparar métodos aproximados cuando se resuelven sistemas de fermiones y bosones<sup>2</sup>. A continuación se ilustrarán los detalles más importantes del artículo de Girardeau [Gir60].

Girardeau empieza por poner la condición principal del sistema de partículas: que éstas sean impenetrables, es decir, que tengan un núcleo compacto. Matemáticamente hablando, esta condición se escribe como

$$\psi(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad \text{si} \quad |x_j - x_l| \leq a, \quad 1 \leq j < l \leq n, \quad (2.6)$$

donde  $\psi$  es la función de onda total del conjunto de partículas,  $x_1, \dots, x_n$  son las coordenadas de las  $n$  partículas que componen el sistema y  $a$  es el diámetro. La ecuación de valores propios se escribe entonces como

$$(\hat{T} + \hat{V})\psi = E\psi, \quad (2.7)$$

donde  $\hat{V}$  incluye todas las interacciones exceptuando los núcleos compactos. Además se considera cualquier función de Fermi  $\psi^F$  que satisface (2.7), junto con el hecho de que  $\psi^F$  es antisimétrica y se define un función antisimétrica de la siguiente forma

$$A(x_1, \dots, x_n) = \prod_{j>l} \text{sgn}(x_j - x_l), \quad (2.8)$$

donde  $\text{sgn}(x)$  es el signo algebraico de  $x$ : 1 si  $x > 0$ ;  $-1$  si  $x < 0$  y 0 si  $x = 0$ . El signo de  $A$  depende del orden de  $p, q, \dots, r$  cuando cada  $x_j$  es puesto como  $x_p < x_q < \dots < x_r$  y cuando las permutaciones entre los  $x$  son pares o impares. El producto queda como

$$\psi^B = \psi^F A, \quad (2.9)$$

es decir, es simétrico y describe un sistema de Bose. Como  $A^2 = 1$ , esto

---

<sup>2</sup>En 1D es más “fácil” de ver esta relación entre fermiones y bosones que en mayores dimensiones.

significa que los valores propios de las energías de la función Fermi,  $\psi^F$ , y de la función Bose,  $\psi^B$ , son iguales. No sólo eso, sino que todas las distribuciones de probabilidad son iguales ya que sólo involucran el cuadrado de la función de onda. No se puede decir lo mismo de la distribución de momentum; una forma de ver la razón es que si se toma la transformada de Fourier a cada función de onda, ella dependerá del signo relativo de la función en algunas regiones del espacio de configuración.

El análisis anterior se reduce para el caso del estado base. Para un sistema unidimensional,  $\psi_0^F$  se anula solamente para aquellas configuraciones  $x_1, x_2, \dots, x_3$  donde los núcleos se solapan y además la función  $\psi_0^B$  es positiva<sup>3</sup>, excepto donde se anule por condiciones de frontera o por interacciones de repulsión infinita. Como resultado, la relación entre ambas funciones de onda es

$$\psi_0^B = |\psi_0^F|. \quad (2.10)$$

Por esta razón se dice que unos bosones que interactúan pueden ser imaginados como fermiones que no interactúan.

¿Cómo se ve matemáticamente el requisito de que sean partículas impenetrables? Girardeau utiliza la ecuación de valores propios para encontrar funciones,  $\psi^B$ , y energías propias así

$$H\psi^B = T\psi^B = \sum_{j=1}^n -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi^B}{\partial x_j^2} = E\psi^B, \quad (2.11)$$

con la ayuda de la ecuación (2.6), la condición se reduce a

$$\psi(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad \text{si } x_j = x_l, \quad 1 \leq j < l \leq n, \quad (2.12)$$

y debe tener condiciones de frontera periódicas con periodo  $L$ .

El salto cualitativo<sup>4</sup> para obtener las energías y funciones propias es considerar que las funciones de onda tipo Fermi,  $\psi^F$ , que satisfacen (2.12) son

---

<sup>3</sup>La demostración puede ser vista en el artículo de O. Penrose y L. Onsager [PO56], sección 5.

<sup>4</sup>Hay algo que hay que tener en cuenta y que se repetirá en los siguientes capítulos. En un sistema de fermiones, interacciones de partículas son equivalentes a ninguna interacción, ya que las funciones de Fermi se anulan cuando dos partículas se juntan.

las funciones propias de un gas libre de Fermi, así que las funciones  $\psi^B$  que satisfacen (2.12) y (2.11) están dadas en términos de las funciones propias del gas libre de Fermi,  $\psi^F$ .

Con estos datos, es posible encontrar el estado base  $\psi_0^F$  con su correspondiente energía  $E_0$ . El estado base es simplemente un determinante de Slater de  $n$  partículas libres con estados  $e^{ikx}$ , con  $k$  determinado por condiciones periódicas.

No es la intención poner aquí los resultados sino haber mostrados los pasos físicos para haber llegado a estos resultados. Los dos modelos, el de Tonks y Girardeau, sirvieron de molde para la solución exacta de una cadena de bosones que interactúan. Estos dos modelos también mostraron que faltaba mirar más factores en la interacción. ¿Era posible que traspasara una partícula si se relajaban las condiciones? ¿No habría que tener en cuenta un potencial que mostrase la interacción? Estos problemas fueron resueltos con la propuesta de Lieb y Liniger, quienes innovaron en la solución matemática.

El lector notará en las próximas páginas la importancia de la densidad en el modelo global, algo que no se nota en el modelo de Girardeau. Aunque suene como tautología, la densidad es siempre una característica notoria en todos los modelos de mecánica estadística, sin embargo, en Girardeau no se manifiesta, las esferas son totalmente compactas sin posibilidad de solaparse (o traspasarse) una en otra. Son necesarios además parámetros para medir el régimen en el cual está el gas y aquí no aparecen; el modelo no permite una caracterización más profunda. Por eso se puede llamar un modelo muy básico, un primer paso. La importancia de la densidad permite saber qué tan aglutinados están los átomos, cómo se puede caracterizar un régimen de un gas con un parámetro libre, si hay dependencia de la densidad en cantidades que involucren energía, por tanto la propuesta de Lieb y Liniger se puede considerar innovadora.

# Capítulo 3

## Modelo exacto

Los trabajos de Tonks y Girardeau mostraron que había elementos interesantes cuando se trataba de partículas compactas en una o dos dimensiones. Girardeau trató el problema de bosones impenetrables en una dimensión, pero si uno se da cuenta, el hamiltoniano utilizado no contiene un término potencial de interacción entre sí sino una condición en la función de onda.

Elliot Lieb y Werner Liniger presentaron un artículo [LL63] en el cual hablaban sobre esta dificultad y cómo fue superada al incluir varios componentes que generalizaban la descripción del gas de bosones. Según ellos, el modelo de Girardeau de bosones impenetrables es infortunado porque las partículas no pueden traspasarse y porque el modelo sólo puede ser pensado como un gas que está en una muy alta densidad y no como un gas que puede estar en baja densidad.

Asimismo, el modelo carece de parámetro alguno. Tal parámetro serviría para saber, por ejemplo, cómo es modificado el espectro de energías del gas al variar algún componente como la densidad o el radio  $a$  del núcleo compacto, pero esto no ocurre. Es por eso que el modelo de Lieb y Liniger supera estas dificultades mencionadas. Primero, consideran un gas de bosones en una dimensión con un potencial de repulsión delta. Segundo, introduce un nuevo parámetro,  $\gamma$ , que se define como  $\gamma = c/\rho$ , con  $2c$  la intensidad de la función delta y  $\rho$  la densidad.

En este capítulo se hablará sobre el modelo de Lieb y Liniger y de su solución, se explicará con detalles piezas importantes para llegar a la solución exacta del problema. El proceso será mostrado a continuación.

Se comienza entonces con una ecuación de valores propios para  $N$  partículas con un potencial delta:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} + 2c \sum_{\langle i,j \rangle} \delta(x_i - x_j)\right) \psi = E\psi, \quad (3.1)$$

donde  $\sum_{\langle i,j \rangle}$  es una suma sobre pares. La región de interés es  $R$ :  $0 \leq x_i \leq L$ . Además, la función de onda  $\psi$  debe satisfacer condiciones de frontera periódicas. Para lo que nos atañe, el caso de consideración será repulsivo, es decir,  $c \geq 0$ .

Como se trabaja con una función delta,  $\psi$  debe ser continua cuando dos partículas se tocan, pero hay un salto en la derivada

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_k}\right) \psi \Big|_{x_j=x_k^+} - \left(\frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_k}\right) \psi \Big|_{x_j=x_k^-} = 2c\psi|_{x_j=x_k}, \quad (3.2)$$

sin olvidar que buscamos funciones simétricas  $\psi$ .

Si consideramos una región  $R_1$  de la forma  $R_1: 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_N \leq L$ , la información sigue siendo equivalente a la región  $R$ . Las ecuaciones (3.1) y (3.2) se transforman en<sup>1</sup>

$$-\sum_i^N \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i^2} = E\psi \quad \text{dentro de } R_1, \quad (3.3)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_{j+1}} - \frac{\partial}{\partial x_j}\right) \psi \Big|_{x_{j+1}=x_j} = c\psi|_{x_{j+1}=x_j}. \quad (3.4)$$

Pero es necesario cambiar las condiciones de frontera para la región  $R_1$ , que quedan de esta forma

$$\psi(0, x_2, \dots, x_N) = \psi(x_2, \dots, x_N, L) \quad (3.5a)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \psi(x, x_2, \dots, x_N) \Big|_{x=0} = \frac{\partial}{\partial x} \psi(x_2, \dots, x_N, x) \Big|_{x=0}. \quad (3.5b)$$

La idea es resolver (3.3) con las condiciones (3.5) y (3.4). Para ello Lieb y Liniger proponen la siguiente solución. Sea  $\{k\} = \{k_1, \dots, k_N\}$  un conjunto ordenado de  $N$  números y

<sup>1</sup>Se pondrá a partir de aquí  $\hbar = 1$  y  $2m = 1$ .

$$\psi(x_1, \dots, x_N) = \sum_P a(P) P \exp\left(i \sum_{j=1}^N k_j x_j\right), \quad (3.6)$$

con  $P$  símbolo de permutación, la suma es sobre todas las permutaciones de  $\{k\} = \{k_1, \dots, k_N\}$  y  $a(P)$  son ciertos coeficientes que dependen de  $P$ . Nótese que la función de onda (3.6) es una generalización de la función de onda de Fermi, para la cual el término  $a(P)$  se cambiaría por  $(-1)^P$ . Se debe entender que  $\psi$  está definida en  $R_1$ .

Por tanto debe escogerse una fórmula para  $a(P)$  para que satisfaga la ecuación de valores propios (3.3). Primero, debe cumplir que  $E = \sum_j^N k_j^2$ . Para satisfacer (3.4), debemos ver qué pasa cuando  $x_1 = x_2$ . Sea  $P$  la permutación que lleva  $\{k\}$  a  $p, q, k_{\alpha_3}, \dots, k_{\alpha_n}$  y  $Q$  la permutación que lleva  $\{k\}$  a  $q, p, k_{\alpha_3}, \dots, k_{\alpha_n}$ , con  $q = k_{\alpha_1}$  y  $p = k_{\alpha_2}$ . Para que (3.4) sea satisfecha, debe haber una relación entre  $a(Q)$  y  $a(P)$  que dependan exclusivamente de  $p$  y  $q$  y no de otros términos. Si  $y = x_1 = x_2$ , se sustituyen estos valores en (3.4) y queda

$$\begin{aligned} & iq a(P) e^{\left(i(p+q)y + i \sum_{j=3}^N k_{\alpha_j} x_j\right)} + ip a(Q) e^{\left(i(p+q)y + i \sum_{j=3}^N k_{\alpha_j} x_j\right)} \\ & - iq a(Q) e^{\left(i(p+q)y + i \sum_{j=3}^N k_{\alpha_j} x_j\right)} - ip a(P) e^{\left(i(p+q)y + i \sum_{j=3}^N k_{\alpha_j} x_j\right)} = \quad (3.7) \\ & ce^{\left(i(p+q)y + i \sum_{j=3}^N k_{\alpha_j} x_j\right)} [a(P) + a(Q)], \end{aligned}$$

Para que se cumpla la igualdad, los coeficientes que acompañan a la exponencial deben tener una relación del siguiente forma

$$iq a(P) + ip a(Q) - iq a(Q) - ip a(P) = c(a(P) + a(Q)), \quad (3.8)$$

y despejando  $a(Q)$

$$a(Q) = -a(P) \frac{c - i(q - p)}{c + i(q - p)}. \quad (3.9)$$

La fracción del lado derecho de (3.9) es un número complejo, así que se puede poner de la forma  $z = re^{i\theta}$  y  $a(Q)$  se expresa como

$$a(Q) = -a(P) \exp\left(-2i \tan^{-1}\left(\frac{q-p}{c}\right)\right), \quad (3.10)$$

que también se puede expresar más elegantemente como

$$a(Q) = -a(P) \exp(i\theta_{\alpha_1\alpha_2}), \quad (3.11)$$

donde

$$\theta_{ij} = \theta(k_i - k_j), \quad (3.12a)$$

y

$$\theta(r) = -2 \tan^{-1}(r/c), \quad (3.12b)$$

asumiendo que  $r$  es real se tiene que

$$\pi \geq \theta(r) \geq -\pi \quad (3.12c)$$

Por supuesto que lo anterior sólo aplica para  $x_1 = x_2$  o para cada pareja que se escoja ( $x_3 = x_4$  o  $x_6 = x_7$ ). Si se quiere que las demás  $N - 1$  posibilidades,  $x_j = x_{j+1}$ , se verifiquen simultáneamente, entonces se debe escoger  $a(P)$  de la siguiente forma: Sea la permutación identidad

$$a(I) = 1. \quad (3.13)$$

Si  $P$  lleva el conjunto  $\{k\}$  a otro conjunto  $\{k\}'$ , entonces organice  $\{k\}'$  en  $\{k\}$  solamente transponiendo los  $k$  adyacentes. Por cada transposición, ponga un factor  $-\exp(i\theta_{st})$ . Para ilustrarlo, se pone como ejemplo

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

Escogiendo un camino cualquier como  $(2431) \rightarrow (2413) \rightarrow (2143) \rightarrow (1243) \rightarrow (1234)$ , se obtiene como resultado  $a(P) = -\exp(i(\theta_{31} + \theta_{41} +$



$\theta_{21} + \theta_{43}$ ). Esta expresión es independiente del camino tomado (hay diferentes formas de obtener (1234) a partir de (2431)) y no se anula a condición de que todos los  $k$  sean diferentes. Los valores permitidos de  $k$  están determinados por (3.5), así que habrá  $N$  ecuaciones que relacionan los  $\theta_{ij}$  para todos los  $j$ , a saber

$$(-1)^{N-1} e^{-ik_j L} = \exp\left(i \sum_{s=1}^N \theta_{sj}\right), \quad (3.15)$$

donde hemos definido  $\theta_{kk} = 0$ .

Las ecuaciones (3.15) tienen  $N$  ecuaciones con  $N$  incógnitas, pero tiene diversos conjuntos de soluciones porque hay diferentes formas de escoger  $\theta_{sj}$ . ¿Cómo hallar la solución correcta?

Para ello será necesario comprender primero el momentum de la función de onda y su relación con los  $k$ , y se hará lo siguiente: Ordenando los  $k$  de tal forma que  $k_1 < k_2 < \dots < k_N$  y teniendo en cuenta que  $\theta_{ij} = -\theta_{ji}$  y tomando el producto de todas las  $N$  ecuaciones de (3.15), encontramos que

$$\sum_j^N k_j = \frac{2\pi n}{L}, \quad (3.16)$$

con  $n$  entero. Además si  $\{k\}$  es solución de (3.15), entonces un conjunto de  $\{k'\}$  definido como  $k'_i = k_i + 2\pi n_0/L$  será solución con  $n_0$  entero, ya que  $2\pi n_0/L$  es simplemente una fase que se anula si se sustituye en (3.15). Como  $\psi$  está definido en  $R_1$ ,  $k$  no puede ser considerado como un vector de onda, pero la suma de  $k$  es un vector de onda

$$\hat{P}\psi = \sum_j -i \frac{\partial}{\partial x_j} \psi = \sum_j k_j \psi = p\psi, \quad \text{en } R \quad (3.17)$$

La ecuación (3.15) también dice que algún estado con momentum total  $p'$  también es solución y se escribe como  $p' = p + 2\pi n_0 \rho$ , con  $\rho = N/L$ . Si hay algún estado con momentum  $|p| \leq \pi \rho$ , entonces hay un estado con  $p$  en el intervalo

$$-\pi \rho < p \leq \pi \rho. \quad (3.18)$$

No hay que olvidar que  $n_0$  es uno de los números cuánticos que describen un

estado. La energía de ese nuevo estado es

$$\begin{aligned}
E' &= \sum_j (k'_j)^2 \\
E' &= \sum_j (k_j + 2\pi n_0/L)^2 \\
E' &= \sum_j \left( k_j^2 + 4\pi n_0 k_j/L + (2\pi n_0/L)^2 \right) \\
E' &= E + \frac{4\pi n_0 \rho p}{N} + \frac{1}{N} (2\pi n_0 \rho)^2
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Antes de seguir, Lieb y Liniger hacen notar varias cosas. La ecuación (3.15) es similar a un problema de dos cuerpos modificado. Ellos estudian este problema en el apéndice A del artículo [LL63] para el caso repulsivo y atractivo. Los resultados son los siguientes: (a) La propuesta de la solución (3.6) parece dar todos los valores propios del sistema; (b) para todo  $\gamma > 0$ , los  $k$  son reales; (c) para  $\gamma = 0$  se obtiene una solución en la cual no hay interacción, para  $\gamma = \infty$  se obtiene la solución de Girardeau con una transición continua entre ambos.

Antes de seguir con uno de los objetivos del artículo: La descripción de la energía y de la función de onda en el estado base, Lieb y Liniger ofrecen una solución única para las  $N$  ecuaciones (3.15) de la siguiente forma. Como los  $k$  son reales, se pueden ordenar y de paso dividir dos ecuaciones sucesivas de (3.15) para que resulte

$$\begin{aligned}
\frac{(-1)^{N-1} e^{-ik_j L}}{(-1)^{N-1} e^{-ik_{j+1} L}} &= \frac{\exp\left(i \sum_{s=1}^N \theta_{s,j}\right)}{\exp\left(i \sum_{s=1}^N \theta_{s,j+1}\right)} \\
\exp(-i(k_{j+1} - k_j)L) &= \exp\left(-i \sum_{s=1}^N \theta_{s,j} + i \sum_{s=1}^N \theta_{s,j+1}\right),
\end{aligned} \tag{3.20}$$

e igualando exponentes

$$\delta_j \equiv (k_{j+1} - k_j)L = \sum_{s=1}^N (\theta_{s,j} - \theta_{s,j+1}) + 2\pi n_j, \quad \text{con } j = 1, 2, \dots, N-1, \tag{3.21}$$

con  $n_j$  un entero que depende de  $j$ . Debido a que  $\theta_{k_j}$  es una función monótona creciente en  $j$  (función que depende de  $\tan^{-1}$ , que es monótona), la suma en (3.21) es negativa; es decir,  $n_j \geq 1$  para todo  $j$  si hay alguna solución. Tomando un  $k_j$  cualquiera de (3.21) y expresándolo en términos de  $\delta$  y  $k_1$

$$k_j = k_1 + \frac{1}{L} \sum_{s=1}^{j-1} \delta_s. \quad (3.22)$$

También hay una relación entre un  $k_\alpha$  y  $k_\beta$  que se escribe como

$$k_\alpha - k_\beta = \frac{1}{L} \sum_{s=\beta}^{\alpha-1} \delta_s \quad (\alpha > \beta). \quad (3.23)$$

De las tres ecuaciones anteriores se puede ver que  $\delta$  está involucrada al determinar un conjunto de soluciones  $\{n_j\}$ , que al menos debe satisfacer la condición  $n_j \geq 1$ , además  $\delta_j < 2\pi n_j$ .

Para determinar los restantes  $k$  que deben satisfacer (3.15) y que deben estar en el rango  $-\pi\rho < p \leq \pi\rho$ , se escoge primero  $k_1$  así

$$\begin{aligned} k_1 &= -\frac{1}{L} \sum_{k=1}^N \theta_{k_1} - \frac{2\pi m}{L} + \frac{\epsilon(N)}{L} \\ &= -\frac{1}{L} \sum_{k=1}^N \theta\left(\frac{1}{L} \sum_{j=1}^{k-1} \delta_j\right) - \frac{2\pi m}{L} + \frac{\epsilon(N)}{L}, \end{aligned} \quad (3.24)$$

con la función  $\epsilon(N)$  definida como

$$\epsilon(N) = \begin{cases} \pi & \text{para } N \text{ par,} \\ 0 & \text{para } N \text{ impar,} \end{cases} \quad (3.25)$$

con  $m$  algún entero y se utiliza (3.22) para hallar los otros  $k$ . Para fijar  $m$ , hay que tener en cuenta que  $p$ , el momentum total, es la suma total de los  $k$ , lo cual permite expresar  $p$  en función de  $m$  de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
p &= \sum_{k=1}^N k_j = Nk_1 + \frac{1}{L} \sum_{j=1}^{N-1} (N-j)\delta_j \\
&= \frac{1}{L} \sum_{j=1}^{N-1} (N-j)\delta_j - \rho \sum_{j=1}^N \theta_{j1} - 2\pi m\rho + \epsilon(N)\rho.
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Se ha utilizado la ecuación (3.24) y  $\rho = N/L$ .

### 3.1. Energía y función de onda en el estado base

Después del anterior análisis, la idea es poder aplicarlo en un caso “sencillo” y mirar cómo se comporta el gas cuando se pasa al límite de un gran sistema, es decir, la densidad se mantiene fija mientras  $N$  y  $L$  tienden a infinito. La energía en el estado base en este caso debe ser escrita como

$$E_0 \propto f(N, \rho, L, c), \tag{3.27}$$

una función que dependa de  $N$ , número de átomos;  $\rho$ , densidad del gas; además  $E_0$  debe ser extensiva, es decir, que si el número de partículas aumenta dos veces, la energía debe aumentar dos veces. Por consideraciones dimensionales, la energía puede escribirse como

$$E_0 = N\rho^2 l(N, cL), \tag{3.28}$$

con  $l$  una función adimensional. Para incluir el parámetro adimensional descrito al principio del capítulo,  $\gamma = c/\rho$ , la expresión (3.27) se escribe como

$$E_0 = N\rho^2 e(\gamma). \tag{3.29}$$

Si se mira la ecuación (3.21), la elección de  $K = 1$  da como resultado el estado base, ya que permite minimizar los valores de  $k$ . Además, la simetría de esa ecuación permite decir que si algún  $k$  que es solución y está en  $\{k\}$ ,

también  $-k$  será solución. El lado izquierdo de (3.26) será cero ya que  $n_j$  es constante,  $k_1$  se expresa como

$$-k_1 = \frac{1}{NL} \sum_1^{N-1} (N-j)\delta_j = k_N \equiv K(\gamma), \quad (3.30)$$

es decir, se ha puesto  $K$  como una función que eventualmente dependerá del parámetro  $\gamma$ . Esta función también debería comportarse monótonamente ya que sus valores límites son  $K(0) = 0$  y  $K(\infty) = \pi\rho$ , valores tomados de (3.18).

Se hará un salto para mostrar cómo se obtienen algunas propiedades del gas en el estado base. El objetivo es describirlo para un sistema grande, es decir, en donde la cantidad de  $k$  es mayor entre dos valores  $-K$  y  $K$  (valores límites). Los cálculos están hechos para un sistema grande, un sistema continuo con un intervalo pequeño entre  $k$  y  $k+dk$ . Se parte de una expansión de Taylor de (3.21) para llegar a

$$2c \int_{-K}^K \frac{f(p)}{c^2 + (p-k)^2} dp = 2\pi f(k) - 1, \quad (3.31)$$

el significado de  $f(k)$  es

$$L f(k) dk = \text{número de } k \text{ en } (k, k + dk), \quad (3.32)$$

con la condición de que el número de partículas por unidad de longitud sea

$$\int_{-K}^K f(k) dk = \rho, \quad (3.33)$$

mientras que la energía está dada por

$$E_0 = \frac{N}{\rho} \int_{-K}^K f(k) k^2 dk. \quad (3.34)$$

Una última condición es que  $f(k) \geq 0$ . Así que  $f(k)$  puede ser vista como una función de densidad de  $k$  en el intervalo  $-K$  y  $K$ .

Con un cambio de variables

$$k \equiv Kx; \quad c \equiv K\lambda; \quad f(Kx) \equiv g(x), \quad (3.35)$$

las ecuaciones se convierten en

$$2\lambda \int_{-1}^1 \frac{g(x)dx}{\lambda^2 + (x-y)^2} = 2\pi g(y) - 1, \quad (3.36)$$

$$e(\gamma) = \frac{\gamma^3}{\lambda^3} \int_{-1}^1 g(x)x^2 dx, \quad (3.37)$$

$$\gamma \int_{-1}^1 g(x)dx = \lambda. \quad (3.38)$$

La tercera ecuación es vista como una normalización de la función  $g(y)$ , la segunda como una definición de energía del estado base y la primera como la ecuación para hallar la densidad de  $k$ . A partir de estas tres ecuaciones se obtiene diferentes propiedades de esta cadena de bosones, así que las preguntas son: cuáles son esas propiedades y cómo se hallan.

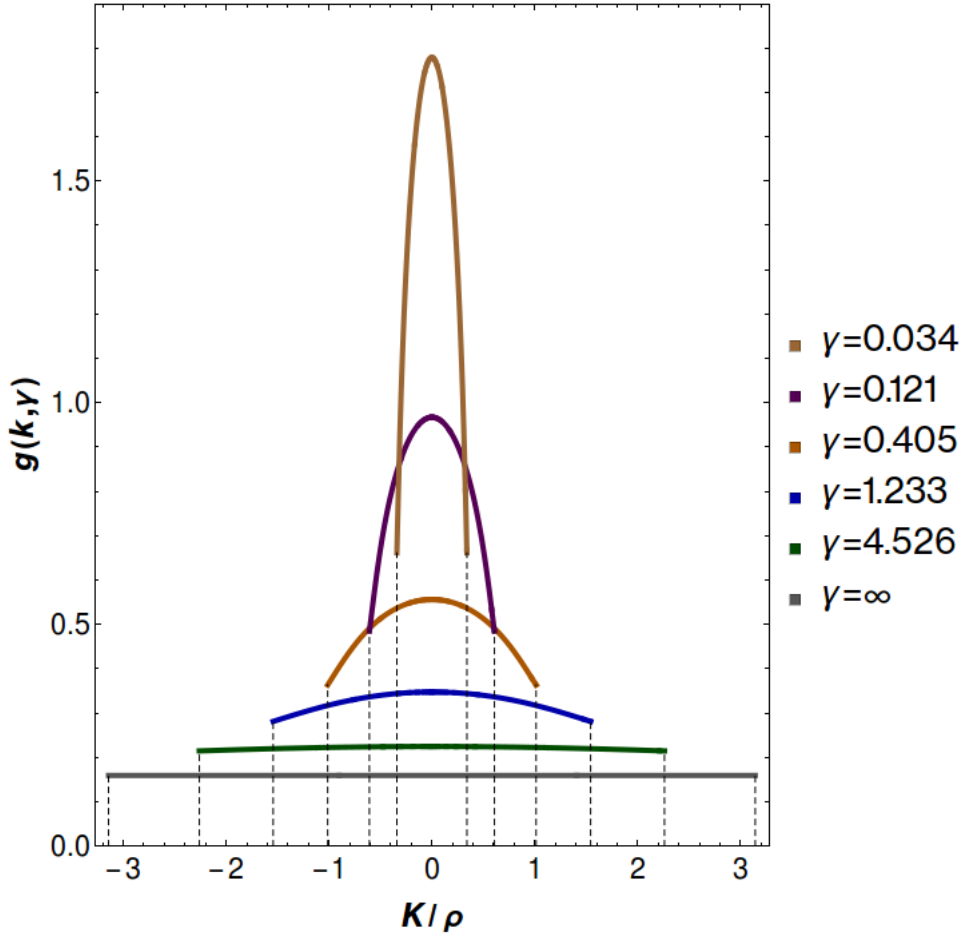
¿Cuál son los pasos a seguir? Se fija un  $\lambda$  en (3.36) y se resuelve la ecuación integral para  $g(y)$ , luego se utiliza (3.38) para hallar  $\gamma$  y después se utiliza (3.37) para hallar  $e(\gamma)$ . Nótese algo interesante en las últimas dos ecuaciones, si se reemplaza el valor  $\lambda$  en (3.37),  $e(\gamma)$  no depende directamente de  $\gamma$  y además las integrales de  $g(x)$  son en últimos números. ¿Qué pasa ahí? Para cada  $\lambda$  hay un  $g(y)$ , con ello hay un sólo valor de  $\gamma$  y por tanto un valor de  $e(y)$ , por eso se debe repetir el algoritmo descrito anteriormente. Para verlo mejor:

$$\lambda_i \longrightarrow g_i(y) \longrightarrow \gamma_i \longrightarrow e_i(\gamma). \quad (3.39)$$

La idea entonces es encontrar una función entre  $\lambda$  y  $\int_{-1}^1 g(x)x^2 dx$  (o en vez de  $\lambda$ ,  $\gamma$ ). Para ello, se ha utilizado un programa escrito en Mathematica, archivo que se puede encontrar aquí<sup>2</sup>. Explico brevemente de qué se trata: Parte del código resuelve la ecuación (3.36) (recuérdese que es una ecuación de Fredholm de segunda clase) para diferentes valores de  $\lambda$ , dando lugar a diferentes funciones  $g(y)$ . Con (3.37), se halla la relación entre  $\lambda$  y  $\gamma$ , luego se incluyen los valores de cada integral definida de esta forma

---

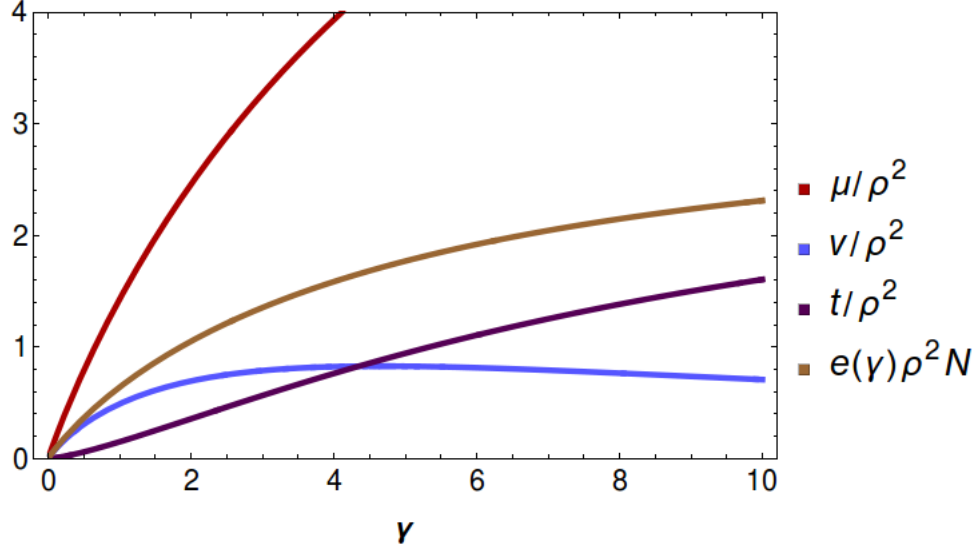
<sup>2</sup>Está en el siguiente enlace: [https://www.dropbox.com/s/uqxozwpn1c0qw16/Ecu\\_int.zip?dl=0](https://www.dropbox.com/s/uqxozwpn1c0qw16/Ecu_int.zip?dl=0)



**Figura 3.1:** La función distribución de  $k$  en el estado base para diferentes valores de  $\gamma$ . Las líneas verticales son los máximos valores de  $K$  para cada función. Cuando  $\gamma = \infty$ ,  $g = 1/2\pi$ .

$$e(\gamma) = \frac{\int_{-1}^1 g(x)x^2 dx}{\left(\int_{-1}^1 g(x) dx\right)^3}, \quad (3.40)$$

para hallar  $e(y)$ . Y con la energía es el estado base, se pueden encontrar otras cantidades del mismo estado base. Como resultado de todo lo anterior, las figuras (3.1) y (3.2) muestran la función distribución  $g(y)$  y algunas propiedades del estado base.



**Figura 3.2:** Gráfica de varias propiedades del estado base con respecto a  $\gamma = c/\rho$ : el potencial químico  $\mu$ , el potencial químico por partícula  $v$ , la energía cinética por partícula  $v$  y la energía del estado base  $e(\gamma)$ .

Antes de analizar las propiedades, quizás el lector puede tener una confusión entre los parámetros utilizados en las últimas ecuaciones. El parámetro principal es  $\gamma$ , el que define cómo se comporta la cadena de bosones; el subparámetro es  $\lambda$ , el cual permite resolver por pasos la ecuación integral; la función  $g(y)$  es una función de distribución “momentum” en el estado base, tal como se aprecia en (3.32).

Las propiedades de interés en el estado son el potencial químico  $\mu$ , o la energía necesaria para añadir una partícula al sistema; el potencial químico por partícula  $t$  y la energía cinética por partícula  $v$ , todas ellas con las siguientes expresiones

$$\mu = \frac{\partial E_0}{\partial N} = \rho^2 \left( 3e(\gamma) - \gamma \frac{de}{d\gamma} \right), \quad (3.41)$$

$$v = \frac{c}{N} \frac{\partial E_0}{\partial c} = \rho^2 \gamma \frac{de}{d\gamma}, \quad (3.42)$$

$$t = \frac{E_0}{t} - v = \rho^2 \left( e - \gamma \frac{de}{d\gamma} \right). \quad (3.43)$$



Estas tres cantidades, junto con la energía base, son mostradas en la figura (3.2). Cuando  $\gamma$  tiende a infinito, la energía potencial por partícula tiende a cero, mientras que la otras propiedades tienden a un valor finito, para  $K$  es  $\pi\rho$ , para  $\mu$  es  $\pi^2\rho^2$ , para  $t$  es  $\pi^2\rho^2/3$  y para  $e(\gamma)$  es  $\pi^2/3$ . Nótese la dependencia de propiedades energéticas con respecto a  $\rho$ , es cuadrática, ello influirá cuando  $\gamma$  sea muy grande. Lo contrario sucede si  $\gamma$  tiende a 0,  $g(y)$  no está definida en cero y el programa para encontrarla muestra error cuando  $\lambda$  es menor a  $10^{-3}$ , así que ni  $e(\gamma)$ , ni  $\mu$ , ni  $t$ , ni  $v$  están definidos en ese rango<sup>3</sup>, al menos teórica y numéricamente.

Esta descripción de la cadena de bosones sirve como principio para entender el régimen Tonks–Girardeau. Cuando el parámetro  $\gamma$  aumenta su valor bastante, la cadena intensifica algunas características que son propias de una cadena de fermiones. Éste es el famoso régimen Tonks–Girardeau. Las características principales son: hay un dominio de la energía cinética junto con una baja densidad del gas, ya que hay una fuerte interacción repulsiva entre los átomos (el término  $c$  de (3.1) es muy alto). En este régimen es difícil modelar los átomos ya que no necesariamente pueden comportarse de forma similar con otros átomos vecinos (el término  $\gamma$  es mucho menor que uno).

No es el objetivo de la tesis explicar de forma teórica muy detallada el régimen Tonks–Girardeau, sino hacer una pequeña presentación de lo que es este tipo de gas. No obstante, se describirá en el siguiente capítulo cómo se consigue experimentalmente dicho gas.

---

<sup>3</sup>La figura (3.2) puede ser mentirosa en ese sentido, es decir, muestra que todas las funciones empiezan desde cero. En el eje  $x$  y en el eje  $y$  se empieza aproximadamente desde 0.034.



# Capítulo 4

## Encontrando el gas

De acuerdo al análisis anterior, Lieb y Liniger mostraron una solución exacta la problema de un cadena de bosones con interacción delta. En la literatura, este modelo es llamado luego gas de Tonks–Girardeau. Con el advenimiento de nuevas técnica experimentales y nuevos avances tecnológicos, fue posible comprobar y realizar en experimentos modelos que anteriormente eran simplemente teóricos. Se puede decir que uno de esos momentos que revolucionó hacer física de estado sólido y óptica cuántica fue enfriar átomos a temperaturas muy bajas y que fue premiado con un premio Nobel en 1997. Sin lugar a duda manipular fluidos se hacía de una forma relativamente fácil, mezclar gases, hacerlos reaccionar era lo normal hace más de medio siglo, pero manipular pocos átomos nunca fue una tarea fácil; en algunos casos era necesario tecnología nueva o un nuevo aparato para crear una revolución.

Esa revolución empezó con la invención del láser. Luz unidireccional, de un solo color y coherente fue el principio para empezar a enfriar átomos. Varios años antes de la entrega del premio Nobel, diferentes físicos estaban buscando cómo estudiar propiedades atómicas en la cuales se viesen efectos cuánticos o fuesen explicados por la mecánica cuántica. Para ello, es necesario disminuir el movimiento de moléculas que están en los gases, ya que las velocidades medias de moléculas en, por el ejemplo, el aire son de 500 m/s. Una forma de interactuar con las moléculas es con la luz, pero la luz se compone de muchas frecuencias y se extiende por todas las direcciones; luz que se ve todos los días pero no hace ningún efecto en enfriar gases. Es aquí donde entra la función del láser.

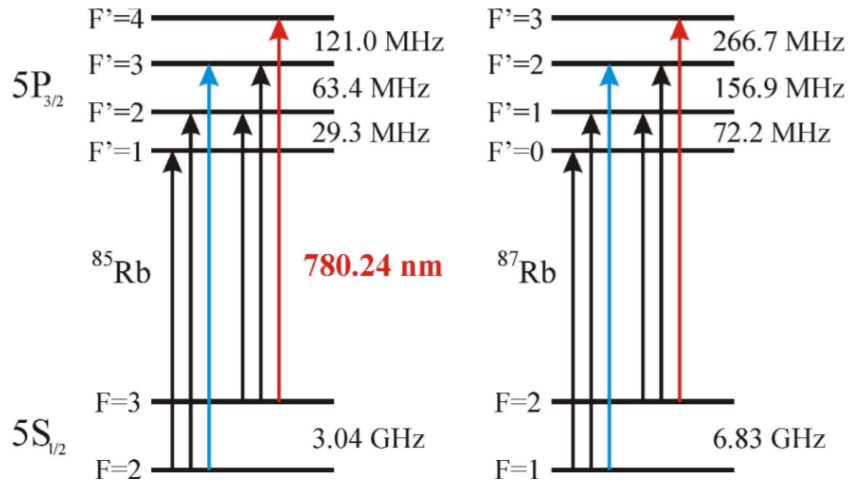
La idea se basa en el hecho de que cuando un átomo absorbe fotón, recibe un impulso del fotón absorbido. Si la velocidad del fotón está en dirección

contraria a la del átomo, entonces su movimiento disminuirá. Es posible ajustar la frecuencia del láser para que los fotones sean absorbidos por ciertos átomos que se mueven en dirección contraria al rayo del láser. La pregunta es ahora ¿cómo son atrapados? Hay diferentes formas de hacerlo. Una es utilizar una trampa magneto-óptica, una trampa en la cual se utilizan tres pares de rayos láser que van dirigidos hacia una nube de gas, además están dentro un campo magnético inhomogéneo. Los rayos actúan en los átomos para atraparlos en una nube. Otra forma de atrapar es utilizando el mismo mecanismo, es decir, tres pares de laser que son apuntados hacia la nube de gas, así que sin importar hacia dónde vaya, se encontrarán con una fuerza opuesta que retarda el movimiento. Este método tiene por nombre *optical molasses* (molasa óptica).

Hay por supuesto un límite para enfriar átomos, cuyo nombre es límite de Doppler, proveniente de la técnica de enfriamiento Doppler. Dicha técnica consiste en enviar luz cuya frecuencia está levemente por debajo de una transición entre orbitales en un átomo. Los átomos absorben mayor cantidad de fotones si se mueven hacia la fuente de luz, ello debido al efecto Doppler. Si otro rayo es apuntado en la dirección del movimiento de los átomos, los átomos tenderán a absorber más fotones debido a ese rayo. Además, en cada momento de absorción, el átomo pierde impulso, de valor igual al momentum de un fotón. Si el átomo está en un estado excitado, emite un fotón de forma espontánea, que también tendrá la misma cantidad de momentum. Este proceso, absorción y emisión, reduce la velocidad del átomo, lo cual implica que si se hace muchas veces, se reducirá la energía cinética de un gas de átomos. Puesto que la temperatura de un gas de átomos es una medida de la energía cinética interna, esto es equivalente al enfriamiento de tales átomos. Es obvio que esta forma de enfriar sea utilizada en la técnica *optical molasses*, así como también puede ser utilizada en una trampa magneto-óptica.

Una pregunta adicional a esta explicación sería: ¿Qué tipos de átomos son utilizados en esta clase de experimentos? La respuesta es átomos de rubidio, pero no cualquier átomo de rubidio sino dos isótopos:  $^{87}\text{Rb}$  y  $^{85}\text{Rb}$ . Y ¿por qué? Por sus propiedades ópticas y por sus valores de transición entre orbitales.

En presencia de un campo magnético, las líneas espectrales de unos átomos se dividen. Esto tiene como nombre el efecto Zeeman. En el caso del rubidio, esas líneas que se dividen pertenecen a los orbitales S y P en el nivel 5. Debido a las reglas de transición para ir de un nivel de energía a otro, el átomo necesita cierta longitud de onda proveniente de una fuente de



**Figura 4.1:** Distintas transiciones de niveles de energía<sup>2</sup> para el  $^{85}\text{Rb}$  y  $^{87}\text{Rb}$ . Se muestra además la longitud de onda necesaria para pasar de nivel  $S$  con  $F=3$  a nivel  $P$  con  $F=4$ .

luz (generalmente es un láser) para ir a estado excitado. Generalmente esas transiciones se expresan como  $5^2S_{1/2} \rightarrow 5^2P_{3/2}$ . Tal como se ve en la figura (4.1), solo importan dos de esas transiciones<sup>1</sup> para el experimento.

Por otra parte, en la literatura científica se habla de un parámetro que es empleado en saber si un gas está en estado Tonks–Girardeau o Thomas–Fermi, dado por

$$\gamma = \frac{mg}{2\hbar^2 n}, \quad (4.1)$$

con  $m$  masa del átomo,  $g$  factor de acoplamiento y  $n$  densidad del gas. Si  $\gamma \gg 1$ , el gas está en régimen Tonks–Girardeau, es decir, la energía cinética domina sobre otros factores, hay una menor densidad del gas y un acoplamiento bastante fuerte. Si  $\gamma \ll 1$ , el gas está en régimen Thomas–Fermi, es decir, hay una alta densidad y por tanto todos los átomos parecen comportarse de forma semejante, además el factor  $g$  es pequeño.

Con lo anterior, la pregunta es: ¿Cómo encontrar un gas que esté en el régimen de Tonks–Girardeau? Primero que todo debe haber un parámetro

<sup>1</sup>En la versión electrónica están en colores azul y rojo.

<sup>2</sup>Tomado de <http://massey.dur.ac.uk/resources/kjweatherill/chapter2.pdf>

que indique está en ese régimen. Inspirado por el artículo de Lieb y Liniger, se emplea el factor  $\gamma$ , que fue explicado anteriormente. Segundo, con ayuda de láseres se enfría un conjunto de átomos de rubidio para después ser manipulados mediante diversas configuraciones y alcanzar el estado deseado. Si se revisa la literatura científica, ha habido diversos artículos que han propuesto múltiples formas para hallar este gas, por ejemplo, [PWM<sup>+</sup>04, KWW04]. Para ilustrar cómo se hace, se escogerá el artículo de B. Paredes, *et al*, [PWM<sup>+</sup>04] que será explicado a continuación.

En el artículo, ellos proponen una interesante forma para lograr el régimen de Tonks–Girardeau (TG). El punto principal es incluir un láser adicional en el gas de una dimensión para incrementar  $\gamma$ . En el límite en el cual la primera banda de Bloch está ocupada, se tiene que  $I = U\nu$  y  $K = J\nu$ , donde  $\nu$  es el factor de llenado,  $U$  es la energía de interacción en un sitio de la red,  $I$  es la energía de interacción por partícula,  $J$  la amplitud de tunelamiento, así que  $\gamma$  se expresa como  $\gamma = U/J$ . También hay que notar que  $\nu$  debe ser pequeño para no haya átomos que ocupen mismos sitios.

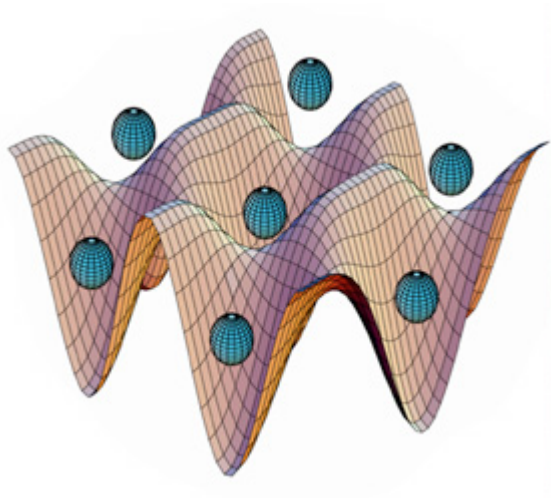
## 4.1. Método experimental

Al ser uno de los primeros artículo que describen experimentalmente el gas de TG, los métodos utilizados son relativamente novedosos. Utilizan átomos de rubidio, aproximadamente unos  $(3-4) \times 10^4$  para crear un condensado de Bose–Einstein en una trampa magnética. Este condensado es puesto en una red óptica 2D (a lo largo del ejes<sup>3</sup>  $y$  y  $z$ ) para después reducir la dimensión a uno. Esta red se logra al poner ondas estacionarias perpendiculares entre sí que provienen de un láser con longitud de onda de 823 nm. Para transferir átomos a diferentes zonas de la red, la profundidad es incrementada hasta un valor medio de  $27E_r$ , con  $E_r$  la energía de retroceso del láser, igual a  $\hbar^2 k^2 / 2m$ , con  $k$  el vector onda del rayo láser. Durante el aumento de la profundidad de la red, el tunelamiento entre sitios de la red disminuye exponencialmente. Esto significa que no habrá intercambio de átomos entre los diferentes “túneles” que se forman durante todo este proceso. Una representación gráfica de los átomo en una red óptica puede ser imaginada como la figura (4.2).

---

<sup>3</sup>Se considera que los ejes  $y$  y  $z$  están en un plano paralelo al de la tierra y que el eje  $x$  es perpendicular a este plano.

<sup>4</sup>Tomado de <http://www.physics.umd.edu/rgroups/amo/rolstonwebsite/bec.htm>



**Figura 4.2:** Una posibilidad de imaginar cómo los átomos son atrapados en una red óptica.<sup>4</sup>

Para alcanzar la máxima profundidad de la red, la forma gaussiana de rayo lleva al gas a un confinamiento en una dimensión, dicho láser tiene como una frecuencia de aproximadamente  $2\pi \times 60$  Hz. Después se añade otro rayo a lo largo del eje axial (eje  $x$ ) para incrementar  $\gamma$  con una longitud de onda de 854 nm, con lo cual la profundidad llega a  $18.5E_r$ . La distribución de momentum del gas es tanteada mediante la eliminación repentina de todas las trampas ópticas y magnéticas durante 16 ms. Para evitar una fuerte expansión a lo largo de unos de los ejes de propagación del rayo (eje  $z$ ), se reduce el confinamiento disminuyendo el potencial en el eje  $z$  a  $6E_r$  dentro de un periodo de  $100 \mu\text{s}$  antes de que empiece la expansión del gas. Asimismo, a lo largo de eje  $x$  se estrecha el perfil gaussiano del rayo para incrementar el número de átomos en el centro de la red. La idea es medir la distribución de momentum mediante este procedimiento y obtener un valor de  $\gamma$ .

## 4.2. Descripción teórica

Para realizar el experimento es necesario tener una base teórica, ya que se quiere comparar con el modelo Lieb y Liniger, ya expuesto anteriormente. Se empieza entonces con un hamiltoniano de  $N$  átomos bosónicos en la menor banda de una red de una dimensión y que experimentan un potencial

armónico. Se escribe como

$$H = H_B + V \quad (4.2)$$

donde cada término es

$$H_B = -J \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} (a_{\ell}^{\dagger} a_{\ell+1} + a_{\ell+1}^{\dagger} a_{\ell}) + b \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \ell^2 a_{\ell}^{\dagger} a_{\ell} \quad (4.3)$$

$$V = U \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} a_{\ell}^{\dagger 2} a_{\ell}^2. \quad (4.4)$$

El término  $H_B$  describe el movimiento de los átomos combinando el potencial armónico y la red; el término  $V$  explica las interacciones en un sitio de la red. El operador bosónico  $a_{\ell}$  aniquila un bosón en el sitio  $\ell$  y sigue las relaciones de conmutación  $[a_{\ell}, a_{\ell'}^{\dagger}] = \delta_{\ell, \ell'}$ . El parámetro  $b$  está relacionado con la frecuencia  $\omega$  del potencial armónico con  $b = m\omega^2 \lambda^2 / 8$ . El segundo término de la izquierda de (4.3) es la forma de modelar la inclusión del láser en la interacción de las partículas. Éste actúa como un potencial armónico que está inmerso

Como se está interesado en una fuerte interacción, en la cual dos átomos no pueden ocupar el mismo sitio en la red, es posible hacer una transformación llamada transformación de Jordan-Wigner que reexpresa el operador bosónico a un operador fermiónico. Por esta razón, una cadena de bosones con una fuerte interacción puede ser vista como una cadena de fermiones que no interactúan. Se ilustra a continuación por qué sucede esto.

### 4.2.1. Transformación Jordan-Wigner

Se consideran los operadores de espín 1/2 alineados a lo largo de una cadena en una dimensión. Primero se definen unos operadores nuevos que dependen de los operadores escalera multiplicados por una fase. Esta fase depende del sitio donde esté el espín. Se expresan de la siguiente forma

$$c_{\ell} = e^{i\phi_{\ell}} S_{\ell}^{+} \quad (4.5)$$

$$c_{\ell}^{\dagger} = e^{-i\phi_{\ell}} S_{\ell}^{-} \quad (4.6)$$

$$c_{\ell}^{\dagger} c_{\ell} = S_{\ell}^{+} S_{\ell}^{-} = S_{\ell} (S_{\ell} + 1) - S_{\ell}^{z 2} + S_{\ell}^z \quad (4.7)$$



donde  $\ell$  denota el sitio,  $\phi_\ell$  es la fase,  $S_\ell^\pm$  son los operadores escalera,  $S_\ell$  es el número cuántico del espín total. Antes de seguir, se ponen algunas definiciones para los operadores espines, a saber

$$S^x = \frac{1}{2}\sigma^x, \quad S^y = \frac{1}{2}\sigma^y, \quad S^z = \frac{1}{2}\sigma^z \quad (4.8)$$

con las matrices de Pauli definidas como

$$\sigma^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4.9)$$

Los conmutadores de operadores de espín para un mismo sitio  $\ell$  valen

$$[S_\ell^x, S_\ell^y] = iS_\ell^z, \quad (4.10)$$

aplican igual con permutaciones cíclicas  $xyz$ . Los operadores de espín actúan independientemente en cada sitio, así que conmutan si se refieren a sitios diferentes

$$[S_\ell^\alpha, S_{\ell'}^\beta] = 0, \quad \ell \neq \ell', \quad \alpha, \beta = x, y, z, +, -. \quad (4.11)$$

Es útil introducir los operadores escalera que se definen como

$$S_\ell^+ = S_\ell^x + iS_\ell^y, \quad S_\ell^- = S_\ell^x - iS_\ell^y. \quad (4.12)$$

Siguiendo con los operadores  $c_\ell$ , de acuerdo a la ecuación (4.7), se tiene que

$$c_\ell^\dagger c_\ell = \frac{1}{2} + S_\ell^z. \quad (4.13)$$

La fase  $\phi_\ell$  es escogida como  $\pi$  veces un operador que cuenta el número de operadores de espines hacia arriba a la derecha de un sitio  $\ell$  como

$$\phi_\ell = \pi \sum_{k=1}^{\ell-1} \left( \frac{1}{2} + S_k^z \right) = \pi \sum_{k=1}^{\ell-1} c_k^\dagger c_k, \quad \ell > 1, \quad (4.14)$$

y se pone  $\phi_1 = 0$ . Se enumera  $\ell = 1$  el extremo derecho de la cadena, con  $\ell = 2$ , el sitio a la derecha de  $\ell = 1$ , y así sucesivamente. Los operadores  $c_k^\dagger$  son interpretados como un operador fermiónico de creación y  $n_k = c_k^\dagger c_k$  como un operador fermiónico de número en un sitio  $\ell$ . Queda entonces como

$$\phi_\ell = \pi \sum_{k=1}^{\ell-1} n_k. \quad (4.15)$$

Si se asigna spin  $1/2$  a un sitio  $\ell$  que esté ocupado por un fermion (que es 1) y al spin  $-1/2$  se le asigna un sitio desocupado (que es 0), entonces  $n_k$  da el número de espines hacia a la derecha de  $\ell$ .

Asimismo, se tiene que

$$c_\ell = e^{i\phi_\ell} S_\ell^- = S_\ell^- e^{i\phi_\ell}, \quad (4.16)$$

porque  $\phi_\ell$  y  $S_\ell^-$  actúan en diferentes sitios y conmutan de acuerdo a (4.11). También se puede hallar la relación de anticonmutación de  $c_k$  y  $c_k^\dagger$  para un mismo sitio  $\ell$ , cuyo resultado es

$$\begin{aligned} \{c_\ell, c_\ell^\dagger\} &= c_\ell c_\ell^\dagger + c_\ell^\dagger c_\ell \\ &= S_\ell^- S_\ell^+ + S_\ell^+ S_\ell^- \\ &= (S_\ell^x + iS_\ell^y)(S_\ell^x - iS_\ell^y) + (S_\ell^x - iS_\ell^y)(S_\ell^x + iS_\ell^y) \\ &= 1/4 - i[S_\ell^x, S_\ell^y] + 1/4 + 1/4 + i[S_\ell^x, S_\ell^y] + 1/4 \\ &= 1. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Ahora la idea es probar que los operadores  $c$  y  $c^\dagger$  anticonmutan si están en diferentes sitios. Es relación se expresa como

$$\{c_\ell, c_m^\dagger\} = e^{i\phi_\ell} S_\ell^- e^{-i\phi_m} S_m^+ + e^{-i\phi_m} S_m^+ e^{i\phi_\ell} S_\ell^-. \quad (4.18)$$

Considerando el caso  $\ell > m$ , la fase se escribe como

$$\phi_\ell = \pi \left( \frac{1}{2} + S_m^z \right) + \pi \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq m}}^{\ell-1} \left( \frac{1}{2} + S_k^z \right), \quad (4.19)$$

y con el anticonmutador da como resultado

$$\{c_\ell, c_m^\dagger\} = e^{i(\phi_\ell - \phi_m)} \left( S_\ell^- S_m^+ + e^{-i\pi n_n} S_m^+ e^{i\pi n_m} S_\ell^- \right). \quad (4.20)$$

Para simplificar el término derecho entre paréntesis de la anterior ecuación, hay que notar que

$$e^{-i\pi\left(\frac{1}{2}+S^z\right)} S^+ e^{i\pi\left(\frac{1}{2}+S^z\right)} = e^{-i\pi} S^+ = -S^+, \quad (4.21)$$

por tanto el anticonmutador queda

$$\{c_\ell, c_m^\dagger\} = e^{i(\phi_\ell - \phi_m)} [S_\ell^-, S_m^+] = 0. \quad (4.22)$$

Lo anterior significa que es posible convertir operadores de espín a operadores de fermiones. Pero ¿qué tiene que ver operadores de espín con operadores de bosones? Tienen las mismas propiedades, ambos operadores conmutan cuando se trata de diferentes sitios (tal como lo expresa la ecuación (4.11)), pero no conmutan cuando es un mismo sitio. La transformación de Jordan-Wigner resuelve este pequeño problema. A continuación se hace un salto para mostrar algunos resultados experimentales.

### 4.3. Resultados

Hay que notar primero que los resultados teóricos predicen que para un gas uniforme a temperatura cero, la distribución se comporta<sup>5</sup> como  $1/p^{1/2}$  para valores bajos de  $p$ . En el caso del experimento, la distribución es relativamente plana para pequeños  $p$  y se convierte en lineal con una pendiente negativa para grandes  $p$ , tal como se aprecia en la figura (4.3).

Asimismo se obtiene que  $\gamma \gg 1$  en los perfiles de momentum del gas en una dimensión para diferentes profundidades de la red en la dirección axial, no mostrados aquí (la figura (4.3) no se refiere a ello). Como  $\gamma = U/J$ , ellos obtienen valores mayores a 1, tales como  $\gamma = 23.6$  o  $\gamma = 47.6$ .

<sup>5</sup>Este resultado ha sido tomado del segundo artículo de Lieb [Lie63].

<sup>6</sup>Ambas gráficas son extraídas de artículo [PWM<sup>+</sup>04].

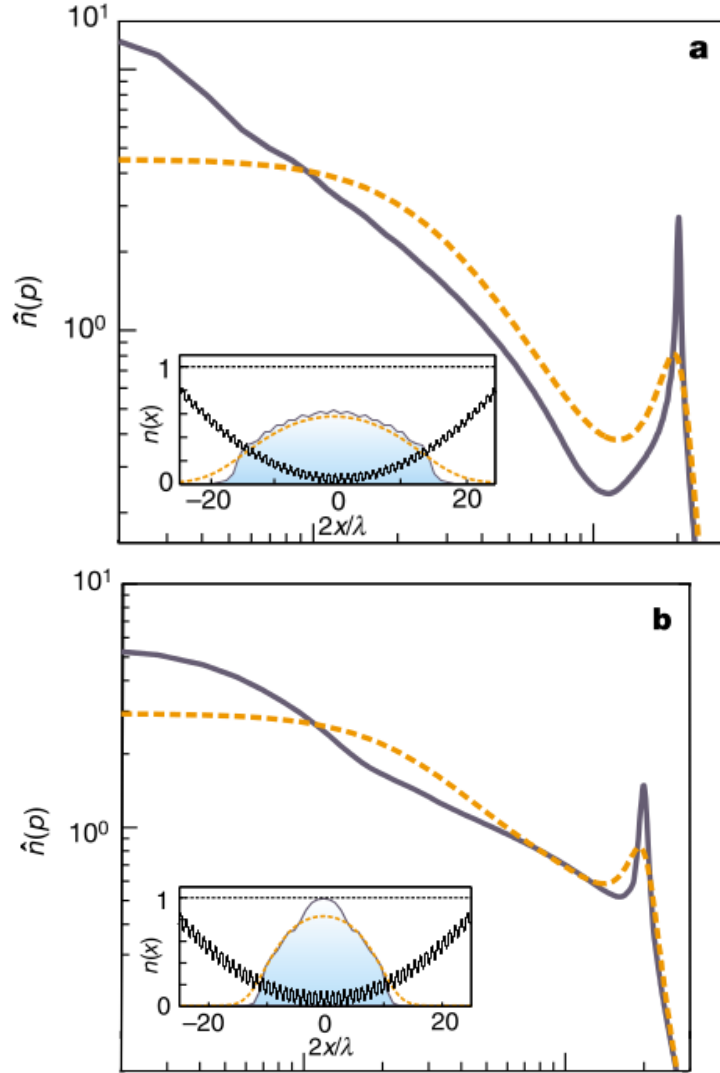
También hay algo interesante. El valor de la pendiente es teóricamente  $1/2$  para grandes  $p$ , pero los valores experimentales son mayores a  $0.5$  para  $\gamma$  altos, en algunos casos llega a  $1.90$ . Esto no quiere decir que el gas no esté en régimen de TG sino que ese gas es no uniforme, no ideal en el sentido de no registrar todas y cada una de las propiedades del régimen TG, sino que se comporta como tal.

La presencia del potencial armónico introduce unos cambios en el perfil del momentum. Incrementa el pico para grandes  $p$  en las gráficas **a** y **b** de la figura (4.3), la distribución no es totalmente plana para  $p$  pequeño y la pendiente se acerca al valor de  $1/2$  cuando el factor de llenado,  $\nu$ , no es pequeño. Esto, en otras palabras, quiere decir que al incrementar los sitios ocupados por el gas en la red y la profundidad de la red, es posible ver el comportamiento “normal” de un gas TG.

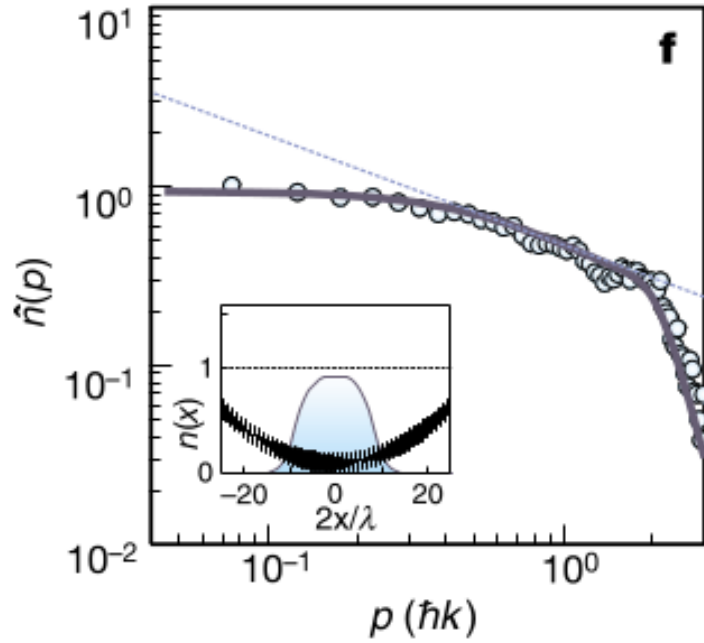
Por último, cuando algunos de los parámetros tenían valores exagerados, es decir, fuera del rango en el cual el gas actúa como TG, dicho gas parecía comportarse como un aislante de Mott<sup>7</sup> o tenía las característica de una transición a un aislante de Mott, en alguno casos (los parámetro no eran tan exagerados) el gas se comportaba como un gas de bosones ideal. Significa entonces que el gas precisa de condiciones muy específicas para alcanzar el régimen TG o de lo contrario se podría seguir comportando como un gas de bosones.

---

<sup>7</sup>Material que podría conducir electricidad, pero que es un aislante cuando está a bajas temperaturas, debido a la interacción electrón-electrón.



**Figura 4.3:** Dos perfiles distintos<sup>6</sup> de momentum para un tubo del gas con diferentes profundidades de la red: (a)  $9.6E_r$ , (b)  $12.0E_r$ . El eje  $x$  es momentum en unidades de  $\hbar k$  y ambos ejes están de forma logarítmica. El número de partículas es 15. El subrecuadro en cada gráfica significa el perfil del láser, es decir, el potencial armónico. La línea negra corresponde al perfil en  $k_B T/J = 0$  y la línea con rayas corresponde a un perfil  $k_B T/J = 1$ . Recuérdese que  $J$  es la amplitud de tunelamiento, así que la razón  $k_B T/J$  muestra qué tan fácil pueden saltar los átomos otros sitios de la red.



**Figura 4.4:** Perfil de momentum para un tubo del gas con una profundidad de la red de  $18.5 E_r$  y con un  $k_B T/J = 3.9$ . El eje  $x$  es momentum en unidades de  $\hbar k$  y ambos ejes están de forma logarítmica. El número de partículas es 18. El subrecuadro en cada gráfica significa el perfil del láser, es decir, el potencial armónico que el láser crea. Con estos valores, el factor  $\gamma$  tiene un valor de 204.5. Se ha escogido mostrar la figura con la pendiente más cercana al valor teórico, que en este caso es de 0.6.

# Capítulo 5

## Conclusión

Como cierre de esta tesis, a lo largo de ella se ha descrito el gas Tonks–Girardeau desde una perspectiva teórica y experimental, pasando por los primeros resultados de Lewi Tonks y Marvin Girardeau hasta llegar a la solución hallada por Lieb y Liniger. Asimismo, se ha explicado cómo se utilizan diversas técnicas para conseguir que el gas esté en el régimen Tonks–Girardeau, así como fue mostrado un ejemplo en el cual se modela el gas como un conjunto de átomos de rubidio que estaban atrapados en una red óptica, en otras palabras, una red creada por láseres.

Es claro que el estudio de este gas amerita más páginas, muchas más páginas; como se ha dicho anteriormente la finalidad de esta tesis es mostrar qué es, cómo se halla y de paso hablar de algunos aspectos teóricos y experimentales que aparecen cuando uno se enfrenta a un tema de la mecánica estadística cuántica. Una de las tantas cosas interesantes de tiene este campo es la evolución de las preguntas y respuestas que uno puede plantearse. Mírese por ejemplo esa evolución que existe con el artículo de Tonks, un sencillo artículo teórico de 1936 que explica esferas duras y sus propiedades termodinámicas hasta llegar a un artículo del 2004 que expone y encuentra experimentalmente un gas que no es bosónico ni fermiónico.

Quizás el lector estará interesado en saber que hay más temas relacionados con el gas Tonks–Girardeau, como ejemplo la existencia del supergas Tonks–Girardeau [BBGO05] (un gas de bosones en un régimen fuertemente atractivo, mucho más que el gas Tonks–Girardeau, pero las funciones de onda de cada partícula se repelen entre sí y este supergas indica que es un estado excitado cuántico), la transición de un condensado de Bose–Einstein a un gas Tonks–Girardeau [DBSP07], la transición de un gas Tonks–Girardeau

a un supergas Tonks–Girardeau teórica y experimentalmente [CGY<sup>+</sup>10], los efectos en un potencial local en un gas que está en una red óptica [FR06]. En fin, hay una serie de estudios que sin lugar a duda amplía el panorama.

Así que esta disertación es un abreboca a este tema fascinante. Espero que lector lo haya visto de esta forma y también le pique la curiosidad para explorar más de lo mostrado con este gas muy singular, el gas Tonks–Girardeau y de paso exhibir cuán interesante es la mecánica estadística.



# Bibliografía

- [BBGO05] M T Batchelor, M Bortz, X W Guan, and N Oelkers, *Evidence for the super Tonks–Girardeau gas*, Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment **2005** (2005), no. 10, L10001.
- [CGY<sup>+</sup>10] Shu Chen, Liming Guan, Xiangguo Yin, Yajiang Hao, and Xi-Wen Guan, *Transition from a tonks-girardeau gas to a super-Tonks–Girardeau gas as an exact many-body dynamics problem*, Phys. Rev. A **81** (2010), 031609.
- [DBSP07] Frank Deuretzbacher, Kai Bongs, Klaus Sengstock, and Daniela Pfannkuche, *Evolution from a Bose–Einstein condensate to a Tonks–Girardeau gas: An exact diagonalization study*, Phys. Rev. A **75** (2007), 013614.
- [FR06] Hao Fu and A. G. Rojo, *Tonks–Girardeau gas in an optical lattice: Effects of a local potential*, Phys. Rev. A **74** (2006), 013620.
- [Gir60] M. Girardeau, *Relationship between systems of impenetrable bosons and fermions in one dimension*, Journal of Mathematical Physics **1** (1960), no. 6, 516 – 523.
- [KWW04] Toshiya Kinoshita, Trevor Wenger, and David S. Weiss, *Observation of a one-dimensional Tonks–Girardeau gas.*, Science **305** (2004), no. 5687, 1125 – 1128.
- [Lan32] Irving Langmuir, *Vapor pressures, evaporation, condensation and adsorption*, J. Am. Chem. Soc **54** (1932), no. 7, 2798–2832.
- [Lie63] Elliott H. Lieb, *Exact analysis of an interacting Bose gas. II. The excitation spectrum*, Phys. Rev. **130** (1963), 1616 – 1624.

- [LL63] Elliott H. Lieb and Werner Liniger, *Exact analysis of an interacting Bose gas. I. The general solution and the ground state*, Phys. Rev. **130** (1963), 1605 – 1616.
- [PO56] Oliver Penrose and Lars Onsager, *Bose-Einstein condensation and liquid helium*, Phys. Rev. **104** (1956), 576–584.
- [PWM<sup>+</sup>04] Belén Paredes, Artur Widera, Valentin Murg, Olaf Mandel, Simon Fölling, Ignacio Cirac, Gora V. Shlyapnikov, Theodor W. Hänsch, and Immanuel Bloch, *Tonks–Girardeau gas of ultracold atoms in an optical lattice*, Nature **429** (2004), no. 6989, 277 – 281.
- [Ton36] Lewi Tonks, *The complete equation of state of one, two and three-dimensional gases of hard elastic spheres*, Phys. Rev. **50** (1936), 955 – 963.