

Comportamiento crítico de la pila de arena BTW en una red  
libre de escala

Andrés Gómez Liévano

Director: Alonso Botero Mejía

17 de mayo de 2007

Universidad de los Andes

Bogotá, Colombia

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Estado del Arte</b>	<b>3</b>
2.1. Pilas de arena y “Self-Organized Criticality” (SOC)	3
2.1.1. Modelos	3
2.1.2. Generalidades	8
2.2. Redes Complejas	9
2.2.1. Modelo ER	11
2.2.2. Modelo de “Pequeño Mundo”	12
2.2.3. Modelos de Redes Libres de Escala	13
<b>3. Modelo de la pila de arena sobre una red libre de escala</b>	<b>15</b>
3.1. La red libre de escala	15
3.1.1. Modelo de crecimiento de red	16
3.1.2. Ecuación maestra	17
3.1.3. Distribución estacionaria	19
3.2. La pila de arena	21
<b>4. Tratamiento analítico del modelo</b>	<b>24</b>
4.1. Probabilidades	26
4.2. Distribución de los tamaños de las avalanchas	29
4.3. Distribución de los tiempos de vida de las avalanchas	32

<b>5. Simulaciones y cálculo de exponentes</b>	<b>35</b>
5.1. Las redes libres de escala . . . . .	36
5.1.1. $A/m = constante = a$ . . . . .	37
5.1.2. $m = 1$ y $A = variable$ . . . . .	37
5.2. Las pilas de arena . . . . .	38
5.2.1. El periodo transiente . . . . .	38
5.2.2. Comparación con la teoría . . . . .	40
<b>Conclusiones</b>	<b>45</b>
<b>A. Código en Mathematica 5.2 de crecimiento de red basado en el artículo [13]</b>	<b>51</b>
<b>B. Código en Mathematica 5.2 de una pila de arena en una red basado en el artículo [23]</b>	<b>53</b>

# Índice de figuras

2.1.	Representación gráfica de una red aleatoria. . . . .	11
2.2.	a) Representación gráfica de una red regular con un número de vecinos fijo para cada nodo. b) Representación de la red de pequeño mundo, habiendo introducido en (a) unas conexiones entre algunos nodos al azar. . . . .	12
4.1.	Árbol generado por un proceso de ramificación. . . . .	25
5.1.	Representación gráfica de una red libre de escala de 5000 nodos, $m = 1$ y $A = 0.8$ . . . . .	37
5.2.	Gráficas log-log de Grado vs. Rango para dos redes libres de escala de 5000 nodos. La gráfica roja corresponde a $m = 1$ y $A = 1$ y la verde a $m = 5$ y $A = 5$ . Teóricamente, el exponente de estas distribuciones de potencia debe ser $\gamma = 2 + a = 2 + A/m = 3$ . . . . .	38
5.3.	Gráfica conjunta log-log de Grado vs. Rango para las dos redes libres de escala de 5000 nodos y $a = 1$ . Se muestran las curvas (rectas) con los exponentes (pendientes) estimados. Estas últimas han sido desplazadas verticalmente para facilidad visual. La recta horizontal en la distribución para $A = m = 5$ (verde), muestra el hecho de que en esa red el grado mínimo es $m = 5$ . . . . .	39
5.4.	Gráfica conjunta log-log de las distribuciones acumuladas para cinco redes libres de escala de 5000 nodos con $m = 1$ y parámetros $A = 0.1$ (azul oscuro), $A = 0.4$ (verde), $A = 0.7$ (azul claro), $A = 1$ (rojo) y $A = 3$ (violeta). . . . .	40

5.5.	Simulación de duración $t = 4000$ de la pila de arena con $\eta = 0.0$ en una red de 2000 nodos y $\gamma = 2.6$ . Las gráficas muestran la evolución temporal de los tamaños de las avalanchas, sus duraciones y la altura promedio de la pila.	41
5.6.	Distribuciones de potencia de los tamaños y los tiempos de vida de las avalanchas de la pila de arena en el estado estacionario con $\eta = 0.0$ en una red de 2000 nodos y $\gamma = 2.6$ . Lo estimado se muestra en azul y lo teórico en rojo. Los valores son respectivamente $\hat{\tau} = 1.78579$ y $\tau = 1.625$ para los tamaños y, $\hat{\delta} = 2.70053$ y $\delta = 2.667$ para las duraciones. . . . .	42
5.7.	Distribuciones de potencia de los tamaños y los tiempos de vida de las avalanchas de la pila de arena en el estado estacionario con $\eta = 0.4$ en una red de 2000 nodos y $\gamma = 2.2$ . Lo estimado se muestra en azul y lo teórico en rojo. Los valores son respectivamente $\hat{\tau} = 1.63444$ y $\tau = 1.75$ para los tamaños y, $\hat{\delta} = 1.9484$ y $\delta = 4$ para las duraciones. . . . .	44
5.8.	Distribuciones de potencia de los tamaños y los tiempos de vida de las avalanchas de la pila de arena en el estado estacionario con $\eta = 0.4$ en una red de 2000 nodos y $\gamma = 3.0$ . Lo estimado se muestra en azul y lo teórico en rojo. Los valores son respectivamente $\hat{\tau} = 1.54396$ y $\tau = 1.5$ para los tamaños y, $\hat{\delta} = 2.05744$ y $\delta = 2$ para las duraciones. . . . .	44

# Índice de cuadros

5.1. Tablas de estimaciones numéricas y teóricas para los exponentes $\tau$ y $\delta$ de las distribuciones de los tamaños y las duraciones de las avalanchas para diferentes valores de $\gamma$ y $\eta$ . . . . .	43
---	----

# Agradecimientos

Expreso mis sinceros agradecimientos a Jorge Villalobos, quien me guió pacientemente en muchos de los aspectos computacionales que este trabajo de grado exigió, especialmente por su abierta disposición a atender mis requerimientos que le demandaron tiempo, para formular valiosas críticas y sugerencias; pero, sobre todo, por el interés que manifestó generosamente en este estudio.

También, debo mencionar al doctor Gabriel Téllez, quien me orientó muy amablemente en algunos aspectos matemáticos.

Y, finalmente, a mi asesor del proyecto de grado, doctor Alonso Botero, por su tiempo, su consejo, su paciencia y por la motivación que me brindó.

## Resumen

En el mundo vemos que la dinámica de los sistemas está caracterizada por grandes fluctuaciones. Por momentos permanecen en estados de relativa quietud y en otros instantes observamos que una pequeña perturbación se desarrolla como una avalancha de actividad que puede afectar el sistema por completo. El paradigma reduccionista no es el adecuado para analizar estos sistemas, pues el agregado de todos los grados de libertad genera comportamientos colectivos difíciles de deducir a partir de las propiedades de las partes constituyentes.

En el presente trabajo estudio el comportamiento dinámico de avalanchas sobre una red libre de escala. Se encuentran analíticamente los exponentes críticos  $\gamma$  de la distribución de grados en la red,  $\tau$  de la distribución de los tamaños de las avalanchas y  $\delta$  de la distribución de las duraciones de éstas. Se hacen estimaciones numéricas en base a simulaciones y se contrasta con la teoría.



# Capítulo 1

## Introducción

Frecuentemente observamos que sistemas complejos, tanto naturales como sociales, sufren masivas avalanchas de actividad desencadenadas por una pequeña fracción de sus constituyentes [14, 23, 15]. Ejemplos de esto son la propagación de epidemias, las cascadas de información en Internet, la divulgación de ideas y las avalanchas de extinción de especies en biología, entre otros. La dinámica que presentan muchos de estos sistemas tiene un comportamiento crítico, similar al de los sistemas en transiciones de fase en mecánica estadística de equilibrio, manifestando fuertes correlaciones y leyes de potencia para sus observables más representativos [28].

En los últimos años el estudio de sistemas fuera de equilibrio ha cobrado gran interés. Muchos de los sistemas que encontramos en la naturaleza están conformados por una gran cantidad de partes básicas interactuantes, que generan comportamientos globales no triviales. Una explicación que se ha dado es que *procesos auto-organizativos* pueden estar jugando un papel importante en la dinámica macroscópica del sistema [35, 19]. El reconocimiento de que el comportamiento colectivo de los sistemas complejos no puede ser inferido solamente del entendimiento de sus componentes individuales, ha generado una explosión de nuevas investigaciones y estudios que intentan encontrar nuevas formulaciones conceptuales que conduzcan a nuevos formalismos teóricos para entenderlos como fenómenos emergentes que son. El estudio se ha centrado en la búsqueda de características comunes dentro de una gran variedad de sistemas, aparentemente, diferentes; más precisamente, en la búsqueda de principios generales subyacentes a la formación espontánea de

estructuras espaciales, temporales y funcionales.

Uno de los conceptos que ha alcanzado mayor popularidad es el de “Self-Organized Criticality” (SOC), cuya motivación original es la de explicar la presencia de estructuras fractales y del ruido  $1/f$ , ambos ampliamente observados en la naturaleza [4, 5].

De manera muy reciente, adicionalmente, ha crecido un gran interés en las llamadas Redes Aleatorias en el campo de los Grafos [29], para tratar de entender los diferentes sistemas reales, a partir de los nodos como sus partes constituyentes y de las conexiones como las interacciones entre ellas. De particular importancia son las llamadas “Redes Libres de Escala” (en inglés “Scale-Free Networks” [6]), que se ha observado son ubicuas en el mundo tanto social como natural. La característica principal de este tipo de redes es que la distribución<sup>1</sup> del número de conexiones de cada nodo sigue una ley de potencia.

En este trabajo pretendo analizar el comportamiento crítico de un modelo particular de avalanchas sobre redes. Para esto tomo el modelo de la pila de arena de Bak, Tang y Wiesenfeld (BTW) [4, 5] sobre una red libre de escala, creada a partir del algoritmo de crecimiento de Dorogovtsev et al. (2000) [13].

Para desarrollar, inicio el estudio en el capítulo 2, presentando un breve recorrido por los conceptos claves y el estado del arte en SOC y Redes Aleatorias. En seguida, introduzco en el capítulo 3 el modelo de la pila de arena sobre la red. En el capítulo 4 enseño el tratamiento analítico del modelo y luego, en el capítulo 5, muestro a continuación las simulaciones en Mathematica y sus resultados. Finalmente, presento unas conclusiones de todo el trabajo.

Al final del documento se muestran, adicionalmente, unos apéndices con los códigos en Mathematica (versión 5.2).

El presente estudio gira alrededor de lo que se está llamando la nueva ciencia de la Complejidad. Es un estudio novedoso y sugestivo, que invita a explorar una nueva fenomenología de los acontecimientos que nos rodean, con aplicaciones amplias e insospechadas. El estudio de la complejidad se desarrolla como toda una nueva perspectiva del mundo; un nuevo paradigma del pensamiento.

---

<sup>1</sup>En este escrito me referiré con distribuciones a las densidades de probabilidad.

## Capítulo 2

# Estado del Arte

### 2.1. Pilas de arena y “Self-Organized Criticality” (SOC)

En esta sección me limitaré a exponer brevemente y de manera general los conceptos claves y algunos modelos representativos de SOC de pilas de arena, aún cuando se han publicado un gran número de modelos diferentes a pilas de arena, como son los modelos de percolación, los modelos sobre procesos biológicos evolutivos, modelos de superconductores, y modelos de terremotos, entre otros [19, 35].

#### 2.1.1. Modelos

El término “Self-Organized Criticality” fue acuñado por Per Bak, Chao Tang y Kurt Wiesenfeld en 1987 [4, 5] como concepto útil para tratar de explicar dos fenómenos ampliamente observados en sistemas dinámicos con muchos grados de libertad: el ruido  $1/f$  y las estructuras invariantes de escala conocidas como fractales. La tesis principal del artículo era que sistemas dinámicos con grados de libertad espaciales extendidos evolucionan naturalmente hacia un estado estacionario, en el cual aparecen estructuras autosimilares, y un comportamiento temporal cuyo espectro de potencia<sup>1</sup> a bajas frecuencias exhibe una ley de potencia  $1/f^\beta$  (ruido  $1/f$ ) sobre varias escalas de tiempo.

El modelo conceptual que usaron para sustentar su tesis fue el de un montículo de arena.

---

<sup>1</sup>El espectro de potencia se define como el cuadrado de la transformada de Fourier de una señal temporal  $N(\tau)$ :  $S(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \left| \int_{-T}^T d\tau N(\tau) e^{i2\pi f\tau} \right|^2$ .

Así, arena es agregada a una rata constante muy baja sobre alguna superficie, y lentamente, independientemente de la condición inicial, la arena se acumula. A medida que el sistema crece se comienzan a observar avalanchas cada vez más grandes. Eventualmente, el sistema alcanza un estado estacionario, en el que el tamaño promedio de la pila no cambia más. (Para que se presente un estado estacionario, el sistema debe disipar parte de los granos de arena que entran, en las fronteras, por ejemplo). Al alcanzar el estado estacionario, la pila de arena presenta comportamiento crítico: es decir, una pequeña perturbación puede desencadenar una avalancha que puede afectar todo el sistema, o no hacer nada; el sistema deja de tener escalas características, tanto temporales como espaciales. Al perder las escalas características, y por lo tanto, carecer de “avalanchas promedio”, uno espera entonces la formación de estructuras invariantes de escala (fractales), y un comportamiento temporal que despliegue ruido  $1/f^2$ . Computacionalmente, el modelo es un autómata celular.

Para el modelo en una dimensión se define la pendiente en el sitio  $n$  como la diferencia de las alturas  $z_n \equiv h_n - h_{n+1}$ , con  $n = 0, 1, \dots, N$ , y se definen las siguientes reglas dinámicas:

- En cada paso de la iteración se agrega un grano de arena en un sitio aleatorio  $n$ :

$$h_n \rightarrow h_n + 1,$$

que se traduce para las pendientes en

$$z_n \rightarrow z_n + 1$$

$$z_{n-1} \rightarrow z_{n-1} - 1.$$

- Si  $z_n > z_c$  para algún sitio  $n$  (lo llamaremos sitio inestable), entonces se aplican las siguientes reglas de relajación:

$$z_n \rightarrow z_n - 2$$

$$z_{n\pm 1} \rightarrow z_{n\pm 1} + 1.$$

Se imponen unas condiciones de frontera, en las que la arena se acumula en un extremo, y sale del sistema por el otro:

---

<sup>2</sup>De hecho, se encontró en [20] que en realidad el comportamiento es de  $1/f^2$

- Extremo cerrado:

$$z(0) = 0$$

- Para el extremo abierto en  $N$ , si  $z_N > z_c$ :

$$\begin{aligned} z_N &\rightarrow z_N - 1 \\ z_{N-1} &\rightarrow z_{N-1} + 1. \end{aligned}$$

Si al relajar un sitio, sus vecinos más cercanos se vuelven a su vez inestables, estos últimos se relajan también. El proceso de relajación se lleva a cabo hasta que no hayan más sitios inestables, y durante este proceso la adición de granos cesa por completo. Este proceso es el que define una avalancha. Una vez se alcanza un estado en el que todos los sitios son estables, se inicia nuevamente la adición de arena.

Este modelo se generaliza fácilmente a otras dimensiones. Para un sistema de dimensión  $d$ , de tamaño lineal finito  $L$ , con  $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \dots, r_d)$  y  $\mathbf{e}_i$  los vectores base del espacio ( $i = 1, \dots, d$ ):

- Adición:

$$\begin{aligned} z(\mathbf{r}) &\rightarrow z(\mathbf{r}) + d \\ z(\mathbf{r} - \mathbf{e}_i) &\rightarrow z(\mathbf{r} - \mathbf{e}_i) - 1. \end{aligned}$$

- Si  $z(\mathbf{r}) > z_c$ , relajación:

$$\begin{aligned} z(\mathbf{r}) &\rightarrow z(\mathbf{r}) - 2d \\ z(\mathbf{r} \pm \mathbf{e}_i) &\rightarrow z(\mathbf{r} \pm \mathbf{e}_i) + 1. \end{aligned}$$

Condiciones de frontera:

- Fronteras cerradas (la variable dinámica  $z(\mathbf{r})$  se mantiene en zero a lo largo de las aristas del hipercubo, i.e., la arena no se sale por una esquina):

$$z(\mathbf{r}) = 0,$$

si una de las coordenadas  $r_i = 0$ .

- Si  $z(\mathbf{r}) > z_c$  en las fronteras abiertas:

$$z(\mathbf{r}) \rightarrow z(\mathbf{r}) - 2d + n_i$$

donde  $n_i$  es el número de coordenadas  $r_i = L$ ,

$$z(\mathbf{r} + \mathbf{e}_i) \rightarrow z(\mathbf{r} + \mathbf{e}_i) + 1$$

si  $r_i \neq L$  y

$$z(\mathbf{r} - \mathbf{e}_i) \rightarrow z(\mathbf{r} - \mathbf{e}_i) + 1$$

para  $i = 1, \dots, d$ .

En el modelo para dimensiones mayores a uno, la interpretación de  $z$  como una pendiente deja de tener sentido. En general, se interpreta como una variable dinámica que ciertas partes del sistema van acumulando, las cuales poseen un umbral  $z_c$  por encima del cual son inestables y liberan esa tensión a sus partes vecinas. Sobre esto, vale la pena anotar que la tensión que sufre un sitio es independiente de sus vecinos. Es por esto que, a veces, estos modelos de pilas de arena como el BTW se llaman “modelos de altura”, en contraposición a los “modelos de pendiente”.

Una anotación importante que hay que mencionar es el hecho de que el modelo considera dos escalas de tiempo, infinitamente separadas: una, es la escala de tiempo en la que adicionamos arena al sistema, la otra es en la cual el sistema se relaja. La razón para considerar esto es que normalmente observamos que los sistemas liberan las tensiones acumuladas mucho más rápidamente que la manera como la acumulan. Hay que pensar, por ejemplo, en una avalancha de nieve, en donde podemos despreciar la acumulación de nieve que cae mientras se produce la avalancha.

Los dos artículos de Bak, Tang y Wiesenfeld son la base de una cantidad enorme de artículos que han sido publicados posteriormente, que proponen modificaciones al modelo original, que presentan nuevos resultados, o nuevos cálculos sobre los diferentes exponentes críticos, y sugieren nuevos métodos matemáticos para encontrar soluciones exactas o aproximadas [26, 9, 11, 7, 32, 8, 10, 20, 18]. Hasta 1997, más de dos mil artículos habían sido publicados, y ninguno que encapsulara los avances hasta entonces [11]. No obstante, una mirada cercana a la literatura nos revela que la mayoría de los modelos son variaciones de unos pocos modelos prototipo:

- El modelo BTW.
- El modelo de Manna [24]: los granos que caen de un sitio inestable son transmitidos no a los cuatro vecinos más cercanos sino sólo a dos, aleatoriamente escogidos. La ventaja que tiene este modelo es que las correlaciones introducidas a priori por el modelo son destruidas. El modelo de Manna se conoce también como el modelo de los dos estados.
- La Pila Abeliana de arena: en 1989 Dhar publica con Ramaswamy [10] la primera solución exacta de un modelo de pila de arena. La pila abeliana es una simplificación del modelo BTW. En este, las reglas son las siguientes:

- Adición para un sitio aleatorio  $\mathbf{r}$ :

$$z(\mathbf{r}) \rightarrow z(\mathbf{r}) + 1.$$

- si  $z(\mathbf{r}) > z_c$ , relajar:

$$\begin{aligned} z(\mathbf{r}) &\rightarrow z(\mathbf{r}) - 2d \\ z(\mathbf{r} \pm \mathbf{e}_i) &\rightarrow z(\mathbf{r} \pm \mathbf{e}_i) + 1. \end{aligned}$$

- Y las condiciones de frontera son generalmente abiertas en todos los extremos.

Dhar hace el análisis por medio de algebra de operadores, usando el hecho de que las avalanchas conmutan (de ahí el término abeliano en el nombre). Se define  $a_i$  como el operador sobre la pila de arena que adiciona un grano de arena en el sitio  $i$  ( $i = 1, \dots, N$ ), relajando si es necesario. Entonces, los operadores  $a_i$  y  $a_j$  conmutan, para todos  $i$  y  $j$ . Lo que significa esto es que adicionar primero un grano en  $i$  y relajar, y luego adicionar un grano en  $j$  y relajar, deja la pila en el mismo estado final, que si se hubiera hecho de la manera inversa, primero en  $j$  y después en  $i$  [9].

- Unos modelos toman la variable dinámica  $z$  continua en vez de discreta. Otros, agregan direcciones preferidas en el sistema. Y otros más, incorporan en las ecuaciones de las reglas términos de disipación (pérdida de granos cada vez que hay relajación).

### 2.1.2. Generalidades

Hay, de todos modos, un consenso general sobre los conceptos claves, y las ecuaciones básicas que se deben considerar en todos estos modelos de SOC de pilas de arena [35]:

1. Son sistemas *fuera de equilibrio* hechos de *muchos componentes interactuantes*.
2. Los sistemas SOC despliegan un *comportamiento no trivial*, esencialmente bajo dinámicas de *umbral*.
3. Los sistemas tienen *estados globales estacionarios*, caracterizados por propiedades estadísticas estacionarias (e.g.  $z$  promedio constante).
4. Una avalancha es un conjunto de derrumbes (relajaciones) sucesivos en un número de sitios, creado por la adición de un grano de arena. La intensidad de una avalancha puede ser cuantificada de varias maneras. Las más comunes son:
  - *tamaño* ( $s$ ): el número total de derrumbamientos en una avalancha (un mismo sitio puede contarse varias veces),
  - *área* ( $a$ ): el número de sitios distintos afectados por una avalancha,
  - *tiempo de vida* ( $t$ ): la duración de la avalancha y
  - *radio de influencia* ( $r$ ): la distancia desde el origen de la avalancha hasta el sitio afectado más lejano.
5. Estas diferentes cantidades no son independientes entre sí y están relacionadas entre ellas por unas *leyes de escala*. Para encontrar estas leyes de escala se deben considerar valores esperados condicionales<sup>3</sup> [19]. Así, se puede obtener que

$$\langle y \rangle_{(x)} \sim x^{\gamma_{xy}},$$

con  $x$  y  $y$  dos medidas del conjunto  $\{s, a, t, r\}$ . Estos exponentes están entonces relacionados los unos a los otros:  $\gamma_{xz} = \gamma_{xy}\gamma_{yz}$ .

---

<sup>3</sup>La definición estándar de esperanzas condicionales es:  $\langle y \rangle_{(x)} \equiv E[Y | X = x] = \sum_y yP(Y = y | X = x)$ .



6. Se asume que la distribución de probabilidad para la medida  $x \in \{s, a, t, r\}$  tiene la forma [25] (con  $L^d$  el tamaño del sistema y  $d$  la dimensión del espacio)

$$P(x) \sim x^{-\tau_x} F_x(x/x_c). \quad (2.1)$$

$x_c \sim L^{\sigma_x}$  cuando  $L$  tiende a infinito (diverge) y  $F_x(x/x_c)$  es una función de escala que se ocupa de tener en cuenta el tamaño finito del sistema; determina típicamente un cruce entre una *ley de potencia* (para tamaños grandes del sistema y  $x \rightarrow 0$ ) y una exponencial ( $x \sim x_c$ ). A esta forma de distribución de la Ec. (2.1) se le da el nombre de FSS (sigla para su expresión en inglés “Finite Size Scaling”<sup>4</sup>). En general, los exponentes  $\tau_x$  y  $\sigma_x$  caracterizan la forma en que escala la variable  $x$ .

7. Hay una *dimensión crítica*  $d_c$  por encima de la cual los exponentes críticos tienen el mismo valor.

Los métodos analíticos de aproximación a estos modelos son muy variados: análisis de campo medio, renormalización y teoría de campos, entre otros [19].

Hoy por hoy no hay todavía consenso sobre el significado completo de SOC, ni una definición específica; no es claro incluso si el concepto es lo suficientemente útil como se pensó originalmente [19, 9, 7].

## 2.2. Redes Complejas

Redes sociales y biológicas de varios tipos, el Internet, y muchas más, han sido objeto de intensos estudios recientes. Los investigadores han encontrado que una gran variedad de sistemas en Física, Ciencias de la Computación, Biología, y Ciencias Sociales entre otros, pueden ser representados por redes.

De manera simple, una red es un conjunto discreto de elementos (vértices o nodos), y un conjunto de conexiones (dirigidas o no dirigidas) que unen los elementos, por pares de manera típica. Los elementos y sus conexiones pueden ser cualquier cosa: personas y

---

<sup>4</sup>En [36] afirman que la forma de la distribución de los tamaños  $s$  de las avalanchas en BTW tiene una forma multifractal y no FSS. Por multifractal se entiende que la distribución tiene todo un espectro de formas que cambia dependiendo de ciertos parámetros, como el sitio en que se origina la avalancha.

amistades, elementos químicos y reacciones, o computadores y líneas de comunicación, son algunos ejemplos.

Desde el problema de Los Puentes de Königsberg trabajado por Euler en 1736 hasta la primera mitad del siglo XX, la Teoría de los Grafos se desarrolló como una rama sólida de las matemáticas, que podía describir las redes en general [29]. Sin embargo, hoy en día se habla de la “Nueva Ciencia de las Redes”. Esto se debe a que, aunque elegante y poderosa, la teoría tradicional de los grafos en matemáticas, no describe la mayoría de las propiedades relevantes de las redes que vemos en la realidad. El estudio actualmente se ha desarrollado alrededor de las propiedades estadísticas de las redes que se observan en el mundo.

Los conceptos y cantidades más comunes con los que se describen las redes son los siguientes [27]:

- *Nodo*: también llamado vértice o sitio, es la unidad básica de una red. Éstos se conectan entre sí mediante conexiones, que pueden tener una dirección, o no.
- *Grado* de un nodo ( $k$ ): a veces llamado “conectividad” es el número de conexiones que tiene un solo vértice. La palabra “conectividad” no suele usarse, pues ésta ya tiene otro significado preciso en teoría de grafos. Hay que notar que el grado no es necesariamente igual al número de nodos adyacentes más cercanos, puesto que pueden haber múltiples conexiones conectando dos nodos. Cuando las conexiones tienen dirección, podemos dividir el grado de un nodo entre las *conexiones que salen* del nodo ( $k_o$ ), y las *conexiones que entran* ( $q$ ). Obviamente,  $k_o + q = k$ . De sumo interés en una red es conocer la función de distribución del grado  $k$  en una red.
- *Camino geodésico* ( $l_{ij}$ ): es el camino más corto que se puede trazar en la red entre dos vértices  $i$  y  $j$ . Puede haber varios geodésicos entre dos puntos.
- *Coefficiente de agupamiento local* ( $C_i$ ): del inglés “Clustering coefficient”, es la probabilidad de que dos nodos conectados a un tercer nodo  $i$ , estén conectados entre sí.

- *Coefficiente de agrupamiento* de la red ( $C$ ):

$$C = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n C_i,$$

donde  $n$  es el número total de vértices en la red. La cantidad  $C$  da una medida de la probabilidad de encontrar en la red nodos conectados cuando tienen otro nodo común.

De manera resumida y muy general, son tres los tipos de redes que se han trabajado en este nuevo enfoque de las redes complejas [12, 1, 21, 31]: el modelo ER, el modelo de mundo pequeño y el modelo de las redes libres de escala.

### 2.2.1. Modelo ER

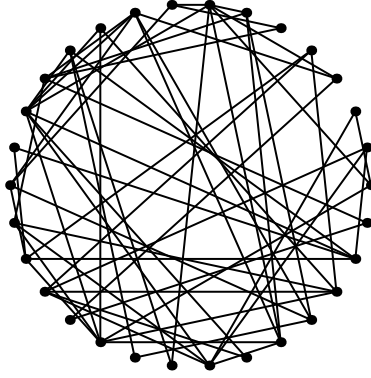


Figura 2.1: Representación gráfica de una red aleatoria.

El modelo de redes aleatorias que desarrollaron en 1960 Paul Erdős y Alfréd Rényi (“modelo ER”), considerados los padres de la teoría moderna de redes, en el cual una red con  $N$  nodos fijos evoluciona, conectando pares de nodos con una probabilidad  $p(N)$  fija. De esta manera, los grados de los nodos tienen una distribución Binomial, que para tamaños  $N$  grandes, se aproxima a una distribución de Poisson para el grado promedio  $z$  (estas redes se suelen llamar también redes aleatorias poissonianas). Así, la probabilidad de que un nodo tenga grado  $k$  es, para  $N$  grande:

$$p_k = \binom{N}{k} p(N)^k (1 - p(N))^{N-k} \simeq \frac{z^k e^{-z}}{k!}, \quad (2.2)$$

donde  $z = p(N)(N - 1)$  es el grado promedio en la red.

### 2.2.2. Modelo de “Pequeño Mundo”

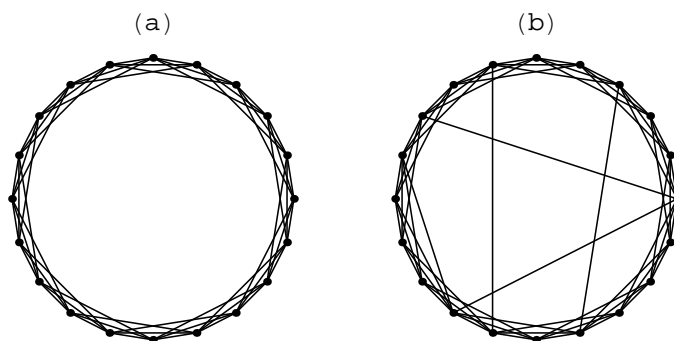


Figura 2.2: a) Representación gráfica de una red regular con un número de vecinos fijo para cada nodo. b) Representación de la red de pequeño mundo, habiendo introducido en (a) unas conexiones entre algunos nodos al azar.

Uno de los modelos de redes más populares es el de las “Redes de Pequeño Mundo” (“Small-World Networks”) de Duncan Watts y Steven Strogatz de 1998 (a veces llamado también “modelo Watts-Strogatz” o modelo WS), inspirado por los “experimentos de pequeño mundo” de Milgram en 1969. En estos últimos, se trataba de probar la vieja conjetura que dos personas cualesquiera se podían relacionar por medio de otras cinco (proviene de un cuento de Karinthy en 1929): A conoce a B, B conoce a C, C conoce a D, D conoce a E y E conoce a F. La conjetura dice entonces que esto se puede hacer para cualquier par de personas en el mundo A y F. Esto se conoce como el “efecto de pequeño mundo” (“small-world effect”), o de “seis grados de separación” (“six degrees of separation”).

En el modelo de Watts y Strogatz, la mayoría de los nodos de la red están inicialmente conectados a unos pocos vecinos cercanos, y unos pocos están conectados aleatoriamente entre sí. Esta última propiedad, es la que hace que la distancia entre nodos se acorte. En este modelo, los nodos tienen un número promedio de conexiones, y la distribución de los grados es casi uno para algún valor determinado (típicamente el número promedio de vecinos adyacentes.).

Algo que hay que mencionar es que el modelo WS no representa la mayoría de las propiedades de las redes reales, excepto básicamente dos:

1. Las geodésicas  $l$  promedio entre pares de nodos son muy cortas (aproximadamente entre 2 o 3, definiendo la longitud de una conexión entre dos nodos como 1).
2. El coeficiente  $C$  de agrupamiento es grande (típicamente mayor que 0.1).

### 2.2.3. Modelos de Redes Libres de Escala

Y finalmente, el modelo que nos interesa en el presente trabajo: el modelo de las redes libres de escala (“scale-free networks”). La importancia de este modelo es que refleja una de las propiedades más comunes de las redes reales: que hay muchos nodos con pocas conexiones, y otros pocos con un enorme número de conexiones. Más específicamente, la función de densidad que tiene el grado de los nodos sigue una ley de potencia:

$$p(k) \sim k^{-\gamma}. \quad (2.3)$$

El término fue propuesto por Albert-László Barabási y Réka Albert en 1999 (este modelo es llamado también “modelo BA”)<sup>5</sup>. El artículo hizo tres importantes contribuciones [29]:

1. El artículo propone que las leyes de potencia observadas en el mundo pueden ser una propiedad generalizada de muchas redes.
2. Propone que estas propiedades pueden ser explicadas, si se adoptan modelos en los cuales las redes crecen dinámicamente, en lugar de permanecer estáticas.
3. Y el artículo propone un modelo específico de crecimiento de una red, que exhibe leyes de potencia para la distribución de los grados, similar a los observados en las redes reales.

El modelo de crecimiento de la red consiste en empezar con un número inicial de nodos  $m_0$ . En cada unidad de tiempo, se agrega un nodo a la red, que se conecta con  $m$  nodos ya existentes. La probabilidad de que un nodo viejo  $s$  se conecte con el nuevo nodo, es proporcional a su grado  $k_s$  (lo que en la literatura se conoce como “conexión preferencial”,

---

<sup>5</sup>El término “libre de escala” hace referencia al hecho de que una ley de potencia  $f(x) = x^\alpha$  tiene la propiedad de que un escalamiento  $k$  de la variable, en términos relativos  $f(kx)/f(x) = k^\alpha$  es independiente de la variable  $x$ , y por lo tanto se dice que las leyes de potencia son libres de escalas características.

o “preferential attachment” en inglés):

$$\Pi_s = \frac{k_s}{\sum_j k_j}. \quad (2.4)$$

Así, entre más conexiones tiene un nodo, más probabilidad tiene de tener más; de esta forma se da el fenómeno de “éxito para el que tiene éxito”. Barabási y Albert usando un método aproximado de campo medio hallan que la densidad de probabilidad es

$$p(k) \cong \frac{2m^2t}{m_0 + t} k^{-3} \quad (2.5)$$

donde  $t$  es el tiempo, y encontramos una ley de potencia para la distribución del grado de los nodos, con exponente exacto  $\gamma = 3$ .

El modelo BA es muy básico y su análisis aproximado, y desde entonces se han propuesto otros modelos de crecimientos de redes con modificaciones al modelo original que tratan de imitar mejor aspectos de las redes reales (como por ejemplo el hecho de que el exponente de las distribuciones no es exactamente 3), y en que se muestran análisis más rigurosos del modelo.

## Capítulo 3

# Modelo de la pila de arena sobre una red libre de escala

Los modelos de pilas de arena presentados en el capítulo 2 eran todos sobre redes regulares (cuadrículas, más específicamente). Es decir, todos los sitios para los cuales se definía una altura, tenían un número de vecinos fijos (igual al doble de la dimensión del espacio). Así, por ejemplo, cada sitio en una pila BTW bidimensional tiene cuatro vecinos a los cuales les transfiere los granos de arena cuando es inestable. Sin embargo, puede ser interesante estudiar la dinámica de una pila de una manera más general, y permitir que la topología del espacio sea más complicada. En este capítulo, se definirá el modelo de la pila de arena BTW, ya no sobre una red regular, sino sobre una red libre de escala. Este trabajo está basado en el artículo [23] de Lee y colaboradores.

La motivación de este estudio es, nuevamente, mirar cómo es el comportamiento crítico de las avalanchas que conceptualiza el modelo BTW sobre las redes libres de escala, tan observadas en el mundo social y natural. El objetivo será averiguar qué tipo de comportamiento presentan estas avalanchas, y caracterizarlo, contrastando teoría y simulación.

### 3.1. La red libre de escala

Dado que quiero trabajar sobre una red libre de escala con exponente variable  $\gamma$  en la ecuación (2.3), uso el método de Dorogovtsev, Mendes y Samukhin [13], que es una genera-

lización al modelo original de Barabási y Albert (ver sección 2.2.3). Parte del tratamiento analítico aquí presentado es tomado del mismo artículo.

### 3.1.1. Modelo de crecimiento de red

En el artículo [13] que se va a trabajar para crear una red libre de escala se hace énfasis en los siguientes tres aspectos, diferentes con respecto al modelo BA:

1. La atención en el análisis se centra sobre las conexiones que *entran*. Es decir, sobre el grado  $q$  como se definió en la sección 2.2.
2. En cada unidad de tiempo, un vértice nuevo aparece, y  $m$  conexiones *dirigidas* son introducidas, *sin especificar los sitios de salida*. Se define  $q_s$  como el grado de conexiones entrantes del sitio  $s$  (sitio que nace en el tiempo  $t = s$ ). Aunque vemos más adelante en el desarrollo que el comportamiento final es independiente de las condiciones iniciales, puede ser conveniente pensar que en  $t = 1$  se tiene un nodo con  $q_1 = m$ .
3. La probabilidad de conexión preferencial (Ec. (2.4)) se modifica de manera que los sitios jóvenes, que tienen  $q = 0$ , tengan una probabilidad no nula de obtener conexiones. Para esto, se define lo que llaman la “atractividad inicial”  $A$  ( $A \geq 0$ ). Si  $A_s = A + q_s$  es la atractividad total del sitio  $s$  y  $A_\Sigma$  es la atractividad total de la red en el tiempo particular  $t$ , la probabilidad de conexión preferencial se modifica correspondientemente de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 \Pi_s &= \frac{A_s}{A_\Sigma} \\
 &= \frac{A + q_s}{\sum_{i=1}^t (A + q_i)} \\
 &= \frac{A + q_s}{At + mt} \\
 \Pi_s &= \frac{q_s + am}{(1 + a)mt}, \tag{3.1}
 \end{aligned}$$

con  $a = A/m$ .

Por conveniencia vamos a tomar que las  $m$  conexiones que se introducen en cada unidad de tiempo *salen* del nuevo nodo, de manera que todos los nodos en la red tienen grado de



salida  $k_o = m$ . De esta manera, el *grado total* de un nodo  $s$  es  $k_s = q_s + m$ . Se puede ver que el modelo BA es sólo un caso particular, cuando  $a = 1$ .

### 3.1.2. Ecuación maestra

Buscamos encontrar, bajo el modelo definido anteriormente, la probabilidad  $P_g(q)$  de escoger en la red un nodo, y que tenga grado igual a  $q$  (el subíndice  $g$  lo introduzco para especificar el hecho de que es la distribución de los *grados*). Comenzamos entonces el análisis escribiendo la ecuación maestra para la probabilidad de que el nodo  $s$  en particular tenga  $q$  conexiones en el tiempo  $t + 1$  (llamaremos nodo  $s$  al nodo que nació en el tiempo  $t = s$ ):

$$p(q, s, t + 1) = p(q, s, t) + \sum_{q'} (W_{(q \leftarrow q')} p(q', s, t) - W_{(q' \leftarrow q)} p(q, s, t)). \quad (3.2)$$

La fracción de nodos que cambian su grado de  $q'$  a  $q$  en una unidad de tiempo es  $W_{(q \leftarrow q')}$ ; de manera inversa la fracción de nodos que cambian su grado de  $q$  a  $q'$  es  $W_{(q' \leftarrow q)}$ . Puesto que en el modelo los nodos no pierden en ningún momento conexiones,  $W_{(q' \leftarrow q)} = 0$ .

Ahora bien, la probabilidad de que el nodo  $s$  obtenga exactamente  $l$  de las  $m$  conexiones que se introducen en una unidad de tiempo es una distribución binomial

$$\begin{aligned} W_{(q_s + l \leftarrow q_s)} &= \binom{m}{l} \Pi_s^l (1 - \Pi_s)^{m-l} \\ &= \binom{m}{l} \left[ \frac{q_s + am}{(1+a)mt} \right]^l \left[ 1 - \frac{q_s + am}{(1+a)mt} \right]^{m-l}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Con esto la ecuación maestra se puede escribir como

$$\begin{aligned} p(q, s, t + 1) &= \sum_{l=0}^m W_{(q \leftarrow q-l)} p(q-l, s, t) \\ &= \sum_{l=0}^m \binom{m}{l} \Pi_s^l (1 - \Pi_s)^{m-l} p(q-l, s, t) \\ &= \sum_{l=0}^m \binom{m}{l} \left[ \frac{(q-l) + am}{(1+a)mt} \right]^l \left[ 1 - \frac{(q-l) + am}{(1+a)mt} \right]^{m-l} p(q-l, s, t) \end{aligned} \quad (3.4)$$

La probabilidad  $P_g(q, t)$  de que un nodo cualquiera de la red tenga grado  $q$  en el tiempo  $t$ , es la la probabilidad  $U(u)$  de escoger un nodo  $u$  cualquiera de la red, por la probabilidad  $p(q, u, t)$  de que ese nodo tenga grado  $q$  en el tiempo  $t$ , sumado sobre todos los nodos  $u$ :

$$P_g(q, t) = \sum_{u=1}^t U(u) p(q, u, t) = \sum_{u=1}^t \left( \frac{1}{t} \right) p(q, u, t). \quad (3.5)$$

$U(u) = 1/t$  pues en el tiempo  $t$  hay exactamente  $t$  nodos en la red. Igualmente, para el tiempo  $t + 1$  se cumple que

$$\begin{aligned} P_g(q, t + 1) &= \sum_{u=1}^{t+1} \left( \frac{1}{t+1} \right) p(q, u, t + 1) \\ &= \frac{1}{t+1} \sum_{u=1}^t p(q, u, t + 1) + \frac{1}{t+1} p(q, t + 1, t + 1). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Sumando entonces la ecuación (3.4) para todos los  $t$  nodos de la red

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^t p(q, s, t + 1) &= \sum_{l=0}^m \binom{m}{l} \left[ \frac{(q-l) + am}{(1+a)mt} \right]^l \left[ 1 - \frac{(q-l) + am}{(1+a)mt} \right]^{m-l} \\ &\quad \times \left( \sum_{s=1}^t p(q-l, s, t) \right), \end{aligned} \quad (3.7)$$

y reemplazando las Ecs. (3.5) y (3.6) en esta última:

$$\begin{aligned} (t+1)P_g(q, t + 1) - p(q, t + 1, t + 1) &= \sum_{l=0}^m \binom{m}{l} \left[ \frac{(q-l) + am}{(1+a)mt} \right]^l \left[ 1 - \frac{(q-l) + am}{(1+a)mt} \right]^{m-l} \\ &\quad \times tP_g(q-l, t). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Expandiendo la sumatoria, y reemplazando la condición inicial  $p(q, j, j) = \delta_{q,0}$  de que los nodos nacen con cero conexiones entrantes

$$\begin{aligned} (t+1)P_g(q, t + 1) - \delta_{q,0} &= \left( 1 - \frac{q + am}{(1+a)mt} \right)^m tP_g(q, t) \\ &\quad + m \left( \frac{q-1 + am}{(1+a)mt} \right) \left( 1 - \frac{q-1 + am}{(1+a)mt} \right)^{m-1} tP_g(q-1, t) \\ &\quad + \dots + \left( \frac{q-m + am}{(1+a)mt} \right)^m tP_g(q-m, t) \end{aligned} \quad (3.9)$$

que como vamos a tomar los tiempos largos, se puede escribir, si se expanden los binomios, como:

$$\begin{aligned} (t+1)P_g(q, t + 1) - \delta_{q,0} &= \left( t - \frac{q + am}{1+a} \right) P_g(q, t) \\ &\quad + \left( \frac{q-1 + am}{a+1} \right) P_g(q-1, t) + O(P_g/t). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Reordenando algunos términos,

$$\begin{aligned} t(P_g(q, t + 1) - P_g(q, t)) + P_g(q, t + 1) &= \delta_{q,0} - \left( \frac{q + am}{1+a} \right) P_g(q, t) \\ &\quad + \left( \frac{q-1 + am}{1+a} \right) P_g(q-1, t) + O(P_g/t). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Asumiendo que para tiempos muy largos ( $t \rightarrow \infty$ ) el límite  $P_g(q, t) \approx P_g(q, t+1) \rightarrow P_g(q)$  existe, obtenemos finalmente la siguiente ecuación:

$$(1+a)P_g(q) + (q+ma)P_g(q) - (q-1+ma)P_g(q-1) = (1+a)\delta_{q,0}. \quad (3.12)$$

La suposición de que existe un estado estacionario para la probabilidad  $P_g(q)$  es razonable pues el número de nodos en la red crece linealmente con el tiempo, y por lo tanto, para una red con un número muy grande de vértices, la regla de adición de nodos y conexiones, en una unidad de tiempo, no modifica notablemente las propiedades estadísticas de la red.

### 3.1.3. Distribución estacionaria

Para hallar la función  $P_g(q)$  en la ecuación de recurrencia (3.12), la solucionamos para cada valor para el cual  $q$  está definido:

- Para  $q = 0$  ( $P_g(q) = 0$  para valores de  $q$  negativos):

$$(1+a+ma)P_g(0) = 1+a$$

$$P_g(0) = \frac{1+a}{1+(m+1)a}. \quad (3.13)$$

- Para  $q \geq 1$ :

$$(1+a+ma)P_g(q+1) + (q+1)P_g(q+1) - qP_g(q) - maP_g(q) = 0$$

$$P_g(q+1) = \left( \frac{q+ma}{q+(m+1)a+2} \right) P_g(q) \quad (3.14)$$

es decir,

$$P_g(q) = \left( \frac{q+ma-1}{q+(m+1)a+1} \right) P_g(q-1) \quad (3.15)$$

para  $q \geq 2$ .

Así, por ejemplo para  $P_g(1)$ :

$$P_g(1) = \left( \frac{ma}{2+(m+1)a} \right) P_g(0). \quad (3.16)$$

Si reemplazamos recursivamente en la Ec. (3.15)  $P_g(q-1)$ , entonces

$$\begin{aligned}
P_g(q) &= \left( \frac{q+ma-1}{q+(m+1)a+1} \right) \left( \frac{q+ma-2}{q+(m+1)a} \right) P_g(q-2) \\
&= \left( \frac{q+ma-1}{q+(m+1)a+1} \right) \left( \frac{q+ma-2}{q+(m+1)a} \right) \left( \frac{q+ma-3}{q+(m+1)a-1} \right) P_g(q-3) \\
&\vdots \\
&= \left( \frac{q+ma-1}{q+(m+1)a+1} \right) \left( \frac{q+ma-2}{q+(m+1)a} \right) \cdots \left( \frac{ma+1}{(m+1)a+3} \right) P_g(1) \\
&= \left( \frac{q+ma-1}{q+(m+1)a+1} \right) \left( \frac{q+ma-2}{q+(m+1)a} \right) \cdots \left( \frac{ma}{(m+1)a+2} \right) P_g(0), \quad (3.17)
\end{aligned}$$

donde en el último paso reemplazamos  $P_g(1)$  por la Ec.(3.16), obteniendo entonces una relación que es válida para todo  $q$  mayor o igual a cero. Esta ecuación (3.17) se puede escribir más claramente usando la *función Gamma*<sup>1</sup>, dos veces para el numerador, y para el denominador:

$$\begin{aligned}
P_g(q) &= \left( \frac{\Gamma(q+ma)}{\Gamma(ma)} \right) \left( \frac{\Gamma[(m+1)a+2]}{\Gamma[(m+1)a+q+2]} \right) P_g(0) \\
&= \left( \frac{\Gamma(q+ma)}{\Gamma(ma)} \right) \left( \frac{\Gamma[(m+1)a+2]}{\Gamma[(m+1)a+q+2]} \right) \frac{1+a}{1+(m+1)a}. \quad (3.18)
\end{aligned}$$

En la Ec.(3.18) podemos hacer una última simplificación, absorbiendo el término del denominador de  $P_g(0)$ , que se introdujo en el último paso, dentro de la función  $\Gamma[(m+1)a+2]$ . Haciendo esto, se obtiene el resultado final para la expresión de la densidad de probabilidad para el grado  $q$  de un nodo cualquiera de la red:

$$P_g(q) = (1+a) \frac{\Gamma[(m+1)a+1]}{\Gamma(ma)} \frac{\Gamma(q+ma)}{\Gamma[(m+1)a+q+2]}. \quad (3.19)$$

Usando la función *Beta de Legendre*

$$B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \quad (3.20)$$

la Ec.(3.19) se puede escribir también, en términos del grado total  $k = q + m$ , como

$$P_g(k) = \frac{B(k+m(a-1), 2+a)}{B(ma, 1+a)}. \quad (3.21)$$

La función beta se comporta como una ley de potencia cuando cualquiera de sus argumentos es muy grande. Para demostrarlo usamos la fórmula de Stirling, que dice que para

---

<sup>1</sup> $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$  y tiene la propiedad que  $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ .

$z$  grande

$$\ln \Gamma(z) \approx \left(z - \frac{1}{2}\right) \ln z - z + \frac{1}{2} \ln(2\pi), \quad (3.22)$$

o también

$$\Gamma(z) \approx \sqrt{\frac{2\pi}{z}} \left(\frac{z}{e}\right)^z. \quad (3.23)$$

Usando la Ec.(3.23) en la Ec.(3.20) para  $a$  muy grande y  $b$  fijo, tenemos que

$$\begin{aligned} B(a, b) &\approx \sqrt{\frac{2\pi}{a}} \left(\frac{a}{e}\right)^a \sqrt{\frac{a+b}{2\pi}} \left(\frac{e}{a+b}\right)^{a+b} \Gamma(b) \\ &= \Gamma(b) e^b \frac{a^{a-1/2}}{(a+b)^{(a-1/2)+b}} \\ B(a, b) &\sim a^{-b}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Así pues, para  $k$  muy grande la Ec.(3.21) va como una ley de potencia:

$$P_g(k) \sim k^{-\gamma}, \quad (3.25)$$

con  $\gamma = 2 + a$ .

Cuando  $a = 1$  se obtiene el caso particular del modelo BA

$$\begin{aligned} P(q) &= 2 \frac{\Gamma(q+m)}{\Gamma(m)} \frac{\Gamma[(m+2)]}{\Gamma[m+q+3]} \\ P(k) &= \frac{2m(m+1)}{k(k+1)(k+2)} \\ &\sim k^{-3}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$(3.27)$$

En el apéndice A se muestra el código en *Mathematica 5.2* que se implementó para crear redes libres de escala, basado en el modelo recién descrito en esta sección.

## 3.2. La pila de arena

Una vez creada la red libre de escala, definimos cómo serán las reglas dinámicas de la pila de arena. En éstas incluimos la propiedad de que la altura umbral de cada nodo depende de su grado, es decir, del número de vecinos que tiene. En el capítulo 4 veremos que esto último es clave en el comportamiento de las avalanchas.

Las reglas dinámicas del modelo son las siguientes:

1. En cada unidad de tiempo, un grano de arena es agregado a un nodo aleatorio  $i$ :

$$h_i \rightarrow h_i + 1.$$

2. Si la altura de un nodo excede o iguala su altura crítica  $z_i \equiv k_i^{1-\eta}$  (con  $0 \leq \eta < 1$ ), entonces el nodo se torna inestable y libera  $\lceil z_i \rceil^2$  granos a  $\lceil z_i \rceil$  de  $k_i$  vecinos adyacentes, aleatoriamente escogidos:

$$h_i \rightarrow h_i - \lceil z_i \rceil \quad (3.28)$$

$$h_j \rightarrow h_j + 1 \quad (3.29)$$

donde  $j$  indica sus  $\lceil z_i \rceil$  vecinos adyacentes escogidos.

3. Si esta transferencia causa nuevas inestabilidades para algunos de los nodos adyacentes que reciben los granos, éstos a su vez liberan sus granos en paralelo, y así sucesivamente, hasta que no haya ningún nodo inestable en la red. Este proceso define una avalancha.
4. Se repiten los pasos del 1 al 3.

En el modelo, debe existir alguna forma de que algunos granos salgan del sistema, pues de lo contrario el sistema nunca llegaría a un estado estacionario. Para esto, se escojen en el algoritmo unos nodos al azar por lo cuales los granos salen del sistema. Estos nodos por esta razón nunca se relajan.

En este trabajo me concentro en calcular, numérica y analíticamente, las funciones de densidad de:

- La distribución del número de nodos afectados por una avalancha  $s$  (número de nodos relajados en el proceso):

$$p(s) \sim s^{-\tau}. \quad (3.30)$$

- Y la distribución de duraciones  $t$  de las avalanchas. (Número de relajaciones en paralelo que se tuvieron que hacer en toda la avalancha. Es decir, si se relajan  $n$  nodos a la vez, todos en paralelo, se cuenta como una unidad de tiempo, y así sucesivamente):

$$l(t) \sim t^{-\delta}. \quad (3.31)$$

---

<sup>2</sup> $\lceil x \rceil$  significa el entero más cercano a  $x$  mayor que  $x$  y  $\lfloor x \rfloor$  el entero más cercano a  $x$  menor a  $x$ .

En el apéndice B se puede encontrar el programa en *Mathematica 5.2* que se escribió para simular la pila de arena en una red.

La finalidad de todos estos modelos de pilas de arena, generalmente, no es predecir eventos exactos, sino dar intuición y entendimiento. En el capítulo 2 se introdujo el hecho de que para una gran cantidad de sistemas en el mundo, que muestran comportamientos no triviales y eventos con grandes fluctuaciones, se ha encontrado un orden oculto: una distribución en la magnitud de sus eventos que sigue una ley de potencia. Dos fenómenos de este estilo, se ha visto, ocurren ampliamente en el mundo: las redes que representan muchos sistemas son libres de escala y el comportamiento de variables dinámicas en dichos sistemas (y otros más también) despliegan criticalidad. El interés en la mayoría de los estudios sobre sistemas complejos no es predecir, sino entender dicho orden emergente.

Este modelo de una pila de arena BTW en una red libre de escala nos podría ayudar a entender y a reproducir el comportamiento general, por ejemplo, de la propagación de enfermedades en las redes sociales; Así, cada elemento en la red, que podría representar personas, ciudades e incluso países, tiene una interacción con vecinos que mapea una red libre de escala. Podríamos asumir, por razones biológicas, que estos elementos tienen una resistencia máxima a la contagio, que depende de con cuántos nodos tiene interacción. Por encima de este umbral, se contagian y contagian a su vez sus vecinos más cercanos. Es de hecho así que vemos avalanchas de epidemias que se propagan y pueden afectar todo el sistema que se está considerando.

De manera general, este modelo presentado en este capítulo nos puede ayudar a comprender sistemas abiertos, representados por redes libres de escala, en los que hay una constante perturbación del sistema (adición de granos), en los que los constituyentes acumulan estrés, y cada uno tiene una resistencia (umbral) que depende de cuántos vecinos tiene, y estas tensiones acumuladas se disipan y distribuyen por el sistema.

## Capítulo 4

# Tratamiento analítico del modelo

Para analizar el modelo matemáticamente y reproducir los resultados encontrados en las simulaciones (presentados más adelante en el capítulo 5), se toma un enfoque desde la “Teoría de los Procesos de Ramificación” (en inglés “Theory of Branching Processes”) [17, 30], usando con frecuencia el método de las funciones generatrices [37].

La teoría más simple de procesos de ramificación persigue analizar el comportamiento de un mismo tipo objetos que tienen una probabilidad  $q(k)$  cada uno de convertirse en  $k$  objetos nuevos del mismo tipo. El proceso se le llama *crítico* cuando  $\sigma = \sum_k kq(k)$  es igual a 1. Cuando  $\sigma < 1$ , el árbol de ramificación del proceso siempre es finito, y cuando  $\sigma > 1$ , el proceso tiene una probabilidad no nula de ser infinito. Sólo cuando se tiene criticalidad es que el proceso de ramificación presenta distribuciones de los tamaños de los eventos que siguen leyes de potencia [17, 30].

Efectivamente, cuando el tamaño de la red es grande las avalanchas de la pila de arena se pueden tratar como procesos de ramificación. Cada avalancha en la red se puede mapear en un árbol que representa un proceso de ramificación. La condición para que la analogía entre avalanchas y procesos de ramificación sea válida, es que por un lado, la probabilidad de que un nodo se derrumbe sea independiente de los demás nodos, y por otro, que las avalanchas no presenten ‘loops’. Esto último lo que significa es que en una misma avalancha, dos subavalanchas diferentes no deben interferir. Se asumen ciertas estas condiciones cuando el tamaño de la red y de las avalanchas es grande.

Ahora bien, con el modelo de la pila de arena en la red libre de escala ya definido,



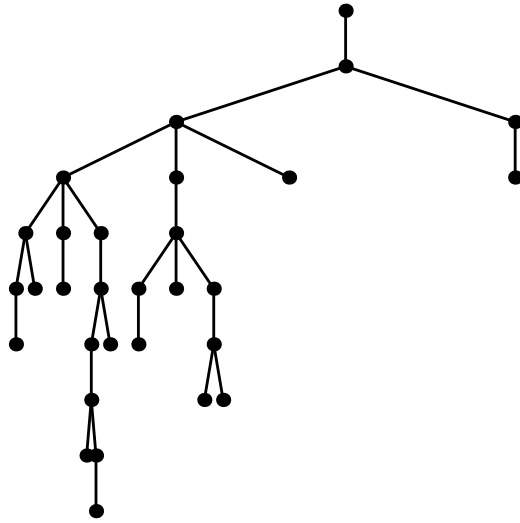


Figura 4.1: Árbol generado por un proceso de ramificación.

tenemos que el tamaño de una avalancha difiere del tamaño total del árbol por sus nodos de frontera. Lo que llamo nodos de frontera son aquellos nodos en el árbol que no tienen hijos. El tiempo de vida de un proceso de ramificación es igual al tiempo de vida de una avalancha. En [14] se muestra que para tamaños grandes de avalanchas, el tamaño de las avalanchas tiende a ser igual al tamaño del árbol de ramificación.

La aproximación analítica al problema de la pila de arena BTW mediante un proceso de ramificación aparece por primera vez en la literatura en un artículo de Preben Alstrom en 1988 [2]. En la solución que dio, los supuestos para la analogía entre avalanchas y procesos de ramificación sólo eran válidos para dimensiones mayores a tres (dimensión crítica  $d_c = 4$ ). Él halló los llamados “exponentes críticos de campo medio”  $\tau = 3/2$  y  $\delta = 2$ . En el tratamiento a continuación descubriremos que estos exponentes pueden cambiar dependiendo de los parámetros de la red sobre la cual la pila esté definida.

## 4.1. Probabilidades

Para calcular la probabilidad de que un árbol tenga exactamente  $s$  nodos, hay que contar todas las posibles combinaciones, de una manera recursiva:

$$p(s) = q(0)\delta_{s,1} + q(1)p(s_1)\delta_{s_1,s-1} + q(2) \sum_{s_1} \sum_{s_2} p(s_1)p(s_2)\delta_{s_1+s_2,s-1} + \dots \quad (4.1)$$

donde el primer término se refiere al caso en el que el nodo padre no tiene ningún hijo, el segundo término en el que el nodo padre tiene un hijo y ese hijo tiene  $s - 1$  hijos, el tercer término todas las posibles combinaciones en las que el nodo padre tiene dos hijos cuyos hijos suman en total  $s - 1$ , y así sucesivamente

$$p(s) = \sum_{k=0}^{\infty} q(k) \sum_{s_1=1}^{\infty} \sum_{s_2=1}^{\infty} \dots \sum_{s_k=1}^{\infty} p(s_1)p(s_2) \dots p(s_k) \delta_{\sum_{i=1}^k s_i, s-1}. \quad (4.2)$$

Definiendo las funciones generatrices de las probabilidades  $p(s)$  y  $q(k)$

$$F(y) = \sum_{s=1}^{\infty} p(s)y^s \quad (4.3)$$

$$G(w) = \sum_{k=0}^{\infty} q(k)w^k \quad (4.4)$$

la Ec.(4.2) se puede escribir de manera más compacta. Multiplicando ambos lados por  $y^s$  y sumando sobre todo  $s$

$$\sum_{s=1}^{\infty} p(s)y^s = \sum_{k=0}^{\infty} q(k) \sum_{s=1}^{\infty} \left( \sum_{s_1=1}^{\infty} \sum_{s_2=1}^{\infty} \dots \sum_{s_k=1}^{\infty} p(s_1)p(s_2) \dots p(s_k) \delta_{\sum_{i=1}^k s_i, s-1} \right) y^s. \quad (4.5)$$

Usando el hecho de que

$$\sum_n a_n^{(1)}x^n \sum_n a_n^{(2)}x^n \dots \sum_n a_n^{(r)}x^n = \sum_n b_n x^n \quad (4.6)$$

$$\text{donde } b_n = \sum_{k_1} \sum_{k_2} \dots \sum_{k_r} a_{k_1}^{(1)} a_{k_2}^{(2)} \dots a_{k_r}^{(r)} \delta_{\sum_{i=1}^r k_i, n} \quad (4.7)$$

la Ec.(4.5) se puede escribir de la siguiente manera:

$$\sum_{s=1}^{\infty} p(s)y^s = y \sum_{k=0}^{\infty} q(k) \left( \sum_{s=1}^{\infty} p(s)y^s \right)^k \quad (4.8)$$

la cual, en términos de Ec.(4.3) y Ec.(4.4), es

$$F(y) = yG(F(y)). \quad (4.9)$$

Por otro lado, y de manera similar, calculamos la probabilidad  $r(t)$  de que una avalancha dure un tiempo menor o igual a  $t$ :

$$r(t) = P(T \leq t) = P(T = 0) + \sum_{k=1}^{\infty} q(k)(r(t-1))^k \quad (4.10)$$

donde  $T$  es la variable aleatoria de la duración de las avalanchas. El primer término tiene en cuenta cuando el nodo no tiene hijos, y el segundo término los casos en los que se tienen  $k$  hijos, cada uno de los cuales tiene entonces una probabilidad  $r(t-1)$  de durar  $t-1$  o menos. Observemos en consecuencia que

$$\begin{aligned} r(t) &= q(0) + \sum_{k=1}^{\infty} q(k)(r(t-1))^k \\ r(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} q(k)(r(t-1))^k \end{aligned} \quad (4.11)$$

Esta última ecuación la podemos reescribir también en términos de la función generatriz  $G(w)$ :

$$r(t) = G(r(t-1)). \quad (4.12)$$

Calculemos ahora las probabilidades, dándonos cuenta de que la probabilidad  $q(k)$  de que un nodo  $i$  transfiera  $k$  granos a  $k$  vecinos se puede descomponer en dos partes:  $q_1(k)$  de que al llegar un grano a ese nodo, su umbral  $z_i$  se encuentre entre  $k-1$  y  $k$  (pues lo que se transfiere es  $\lceil z_i \rceil$ ), y  $q_2(k)$  de que la altura en el nodo antes de llegar el grano a él sea  $k-1$ . Estas probabilidades son independientes y de esta forma,  $q(k) = q_1(k)q_2(k)$ . En esto, hemos hecho la simplificación de que la probabilidad  $q(k)$  es la misma que la probabilidad  $q_0(k)$  de que el primer nodo de toda la avalancha (el que recibe el grano del exterior y no de otro nodo) tenga  $k$  ramificaciones.

La probabilidad  $q_1(k)$  es entonces

$$\begin{aligned} q_1(k) &= P(k-1 < z_i \leq k) \\ &= P((k-1)^{\frac{1}{1-\eta}} < k_i \leq k^{\frac{1}{1-\eta}}). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Puesto que el grano que llega al nodo  $i$  tiene  $k_i$  formas de llegar a él, tenemos una proba-

bilidad proporcional a  $k_i P_g(k_i)$  de llegar a él. Así,

$$\begin{aligned}
q_1(k) &= \frac{\sum_{k'=\left\lfloor (k-1)^{\frac{1}{1-\eta}} \right\rfloor}^{\left\lfloor k^{\frac{1}{1-\eta}} \right\rfloor} k' P_g(k')}{\sum_{n=0}^{\infty} n P_g(n)} \\
&= \frac{\sum_{k'=\left\lfloor (k-1)^{\frac{1}{1-\eta}} \right\rfloor + 1}^{\left\lfloor k^{\frac{1}{1-\eta}} \right\rfloor} k' P_g(k')}{\sum_{n=0}^{\infty} n P_g(n)} \tag{4.14}
\end{aligned}$$

y es importante para más adelante, notar que  $\sum_{k=0}^{\infty} q_1(k) = 1$ .

Sabiendo que para cualquier función  $f(x)$  con derivada continua se cumple que [3]

$$\sum_{n=N_i+1}^{N_f} f(n) = \int_{N_i}^{N_f} f(x) dx + \int_{N_i}^{N_f} (x - [x]) f'(x) dx \tag{4.15}$$

podemos aproximar la Ec.(4.14) a una integral para  $k \gg 1$ , despreciando el segundo término en la Ec.(4.15) que tiende a ser muy pequeño,

$$\begin{aligned}
\sum_{k'=\left\lfloor (k-1)^{\frac{1}{1-\eta}} \right\rfloor + 1}^{\left\lfloor k^{\frac{1}{1-\eta}} \right\rfloor} \frac{k' P_g(k')}{\langle k \rangle} &\approx \int_{(k-1)^{\frac{1}{1-\eta}}}^{k^{\frac{1}{1-\eta}}} \frac{k' P_g(k')}{\langle k \rangle} dk' \\
&= \frac{1}{\langle k \rangle} \int_{k_1}^{k_2} k^{-\gamma+1} dk \\
&= \frac{1}{\langle k \rangle (\gamma - 2)} (k_1^{2-\gamma} - k_2^{2-\gamma}) \\
&= \frac{1}{\langle k \rangle (\gamma - 2)} \left( (k-1)^{\frac{2-\gamma}{1-\eta}} - k^{\frac{2-\gamma}{1-\eta}} \right) \\
&= \frac{1}{\langle k \rangle (\gamma - 2)} k^{\frac{2-\gamma}{1-\eta}} \left[ \left( 1 - \frac{1}{k} \right)^{\frac{2-\gamma}{1-\eta}} - 1 \right] \\
&\approx \frac{1}{\langle k \rangle (\gamma - 2)} k^{\frac{2-\gamma}{1-\eta}} \left[ - \left( \frac{2-\gamma}{1-\eta} \right) \frac{1}{k} \right] \tag{4.16}
\end{aligned}$$

y por lo tanto, para  $k$  muy grande

$$q_1(k) \sim k^{\frac{1-\gamma+\eta}{1-\eta}}. \tag{4.17}$$

Por otra parte, se puede mostrar [19] que no existe una altura típica, y todas las alturas  $0, 1, \dots, k-1$  son equiprobables (en [14] lo prueban numéricamente). Por normalización

$$\sum_{k'=0}^{k-1} q_2(k') = 1 \tag{4.18}$$

y en consecuencia

$$q_2(k) = 1/k. \quad (4.19)$$

Como resultado, las probabilidades de ramificación  $q(k)$  están dadas para grandes  $k$  por

$$q(k) = \frac{1}{k}q_1(k) \sim k^{-\gamma'} \text{ donde } \gamma' = \frac{\gamma - 2\eta}{1 - \eta}. \quad (4.20)$$

## 4.2. Distribución de los tamaños de las avalanchas

Se puede observar que la probabilidad (4.20) cumple automáticamente la condición de criticalidad [17, 30] ya que

$$\sigma = \sum_{k=0}^{\infty} kq(k) = \sum_{k=0}^{\infty} q_1(k) = 1 \quad (4.21)$$

y el modelo de la pila de arena en la red libre de escala despliega SOC.

Sabiendo también que las probabilidades  $p(s)$  y  $q(k)$  están normalizadas sabemos que:

$$F(1) = 1 \quad (4.22a)$$

$$G(1) = 1 \quad (4.22b)$$

$$\sigma = G'(1) = 1 \quad (4.22c)$$

donde en la última igualdad se tiene la derivada de la función  $G(w)$  evaluada en  $w = 1$ .

De la Ec.(4.9) tenemos que  $w = F(y)$  y entonces

$$y = F^{-1}(w) = \frac{w}{G(w)}. \quad (4.23)$$

De esto, y usando las Ecs.(4.22b) y (4.22c)

$$\begin{aligned} \left. \frac{dF^{-1}(w)}{dw} \right|_{w=1} &= \left. \frac{G(w) - wG'(w)}{(G(w))^2} \right|_{w=1} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Es decir,  $F(y)$  tiene su primera derivada infinita en  $y = 1$ . Expandiendo alrededor de  $y = 1$ ,  $F(y)$  debe tener la siguiente forma:

$$F(y) \simeq 1 - B(1 - y)^\phi \quad (4.25)$$

con  $0 < \phi < 1$  de manera que la derivada de la función diverge en  $y = 1$ , y  $B$  una constante. Ahora bien, la expansión binomial del segundo término de la expresión es la siguiente:

$$(1 - y)^\phi = \sum_{s=0}^{\infty} a_s y^s \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{s=0}^{\infty} \binom{\phi}{s} (-1)^s y^s \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \left( \frac{\Gamma(\phi + 1)}{\Gamma(s + 1)\Gamma(\phi - s + 1)} \right) y^s. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Usando la identidad de la función Gamma [3]

$$\Gamma(z)\Gamma(-z) = \frac{\pi}{z \sin(\pi z)} \quad (4.28)$$

tenemos que el coeficiente  $a_s$  que multiplica a  $y^s$  en la Ec.(4.27)

$$\begin{aligned} &(-1)^s \left( \frac{\Gamma(\phi + 1)}{\Gamma(s + 1)\Gamma(\phi - s + 1)} \right) \\ &= (-1)^s \left( \frac{1}{\pi} \right) \sin(\pi(s - \phi - 1)) \left( \frac{\Gamma(\phi + 1)\Gamma(s - \phi - 1)(s - \phi - 1)}{\Gamma(s + 1)} \right). \end{aligned} \quad (4.29)$$

Expandiendo el seno y usando el hecho de que  $s$  es un número entero,

$$\begin{aligned} a_s &= (-1)^s \left( \frac{(-1)^{s+1}}{\pi} \right) B(s - \phi, \phi + 1) \sin(\pi\phi + \pi) \\ &= (-1)^s \left( \frac{(-1)^s \sin(\pi\phi)}{\pi} \right) B(s - \phi, \phi + 1) \\ &= \left( \frac{\sin(\pi\phi)}{\pi} \right) B(s - \phi, \phi + 1) \end{aligned} \quad (4.30)$$

Por lo tanto para  $s$  grande en (4.26) (usando la Ec.(3.24))

$$a_s \sim s^{-\phi-1}. \quad (4.31)$$

Este resultado es importante para calcular el comportamiento de  $p(s)$  en (4.3).

Como  $q(k)$  es una función que decae muy lentamente, algunas de las derivadas de  $G(w)$  pueden no existir. Para descubrir en qué casos se da esto, notamos que la derivada  $n$ -ésima de la función  $G(w)$  evaluada en  $w = 1$  está relacionada con la serie  $\sum_k k^n q(k)$ . Afirmamos que si la serie converge para  $n$ , la función  $G(w)$  tiene  $n$ -ésima derivada finita en  $w = 1$ . Los términos en la serie para  $k$  grandes van como  $k^{n-\gamma'}$ , y por lo tanto, para que la serie

converja, se tiene que cumplir que  $n - \gamma' < -1$ . Así, vemos que la expansión de  $G(w)$  alrededor de  $w = 1$  depende del valor de  $\gamma'$  (recordando que  $\gamma > 2$ ).

Veamos entonces qué condiciones se deben cumplir para que la  $n$ -ésima derivada exista:

$$\begin{aligned} n - \gamma' &< -1, \text{ donde } \gamma' = \frac{\gamma - 2\eta}{1 - \eta} \text{ y por lo tanto} \\ \gamma &> (n + 1) - (n - 1)\eta. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Concentrándonos en los términos dominantes de la expansión de  $G(w)$  alrededor de  $w = 1$ , y dado que ya sabemos que la primera derivada existe (Ec.(4.22c)), tomamos  $n = 2$ , para lo cual tenemos que

$$G(w) \simeq 1 - (1 - w) + \begin{cases} A_1(1 - w)^\beta, & 2 < \gamma < 3 - \eta, \\ -A_2(1 - w)^2 \ln(1 - w), & \gamma = 3 - \eta, \\ A_3(1 - w)^2, & \gamma > 3 - \eta, \end{cases} \quad (4.33)$$

donde las  $A_i$  son constantes.

La deducción de la corrección logarítmica para el caso  $\gamma = 3 - \eta$  se puede hallar en la Ref.[33]. La idea básica para la existencia de esta corrección es que en la expansión alrededor de  $w = 1$  la función puede o no converger. Es decir, que los términos en la serie correspondiente a la segunda derivada (evaluada en  $w = 1$ ) van como  $k^{-1}$  y por lo tanto evidencian un origen logarítmico. Aunque hacemos en este momento explícita esta corrección, no se tiene mucho en cuenta en los análisis que siguen ya que el logaritmo es una función que crece muy lentamente; para valores muy grandes podemos considerar que no afecta el comportamiento del exponente de la variable en cuestión.

Para la expansión alrededor de  $w = 1$  cuando  $\gamma < 3 - \eta$  sabemos que el exponente  $\beta$  tiene que ser un número entre 1 y 2, de manera que la segunda derivada evaluada en uno sea infinita. Pero

$$\begin{aligned} 2 &< \gamma < 3 - \eta \\ 2 - 2\eta &< \gamma - 2\eta < 3 - 3\eta \\ \frac{2 - 2\eta}{1 - \eta} &< \frac{\gamma - 2\eta}{1 - \eta} < \frac{3 - 3\eta}{1 - \eta} \\ 2 &< \gamma' < 3 \\ 1 &< \gamma' - 1 < 2 \end{aligned} \quad (4.34)$$

y obtenemos entonces que  $\beta = \gamma' - 1$ .

Ahora, de la Ec.(4.25), es fácil ver que

$$F^{-1}(w) = 1 - \left( \frac{1-w}{B} \right)^{1/\phi}. \quad (4.35)$$

Igualando la Ec.(4.35) a la Ec.(4.23), usando la Ec.(4.33), se obtiene que

$$1 - \left( \frac{1-w}{B} \right)^{1/\phi} = \frac{w}{w + A(1-w)^\alpha}, \quad (4.36)$$

donde  $\alpha$  es cualquiera de los exponentes en las expansiones (4.33), y  $A$  el coeficiente asociado ( $A_1$ ,  $-A_2 \ln(1-w)$  o  $A_3$ ). Con un poco de manipulación algebraica,

$$(1-w) = B \left( \frac{A(1-w)^\alpha}{w + A(1-w)^\alpha} \right)^\phi, \quad (4.37)$$

y comparando el orden de las expresiones en ambos lados de la ecuación (recordando que estas expresiones son válidas para expansiones alrededor de  $w = 1$  y que por lo tanto los términos  $(1-w)$  son muy pequeños), llegamos a una relación entre los exponentes  $\alpha\phi = 1$  para cada caso. Después, usando el resultado en (4.31) obtenemos lo siguiente:

$$p(s) \sim \begin{cases} s^{-(\gamma-2\eta)/(\gamma-1-\eta)}, & 2 < \gamma < 3 - \eta, \\ s^{-3/2} (\ln s)^{-1/2}, & \gamma = 3 - \eta, \\ s^{-3/2}, & \gamma > 3 - \eta. \end{cases} \quad (4.38)$$

Hemos podido calcular entonces el exponente  $\tau$  de (3.30):

$$\tau = \begin{cases} (\gamma - 2\eta)/(\gamma - 1 - \eta), & 2 < \gamma < \gamma_c, \\ 3/2, & \gamma \geq \gamma_c, \end{cases} \quad (4.39)$$

donde  $\gamma_c = 3 - \eta$ .

### 4.3. Distribución de los tiempos de vida de las avalanchas

Recordemos que  $r(t)$  es la probabilidad de que una avalancha dure un tiempo igual o menor a  $t$ . Sabiendo esto, la probabilidad de que una avalancha dure *exactamente* un tiempo  $t$  es  $l(t) = r(t) - r(t-1)$ . Ahora bien, cuando el promedio de hijos de las avalanchas



es  $m \leq 1$ ,  $r(t) \rightarrow 1$  para tiempos largos [17], y podemos aproximar  $l(t) \simeq dr(t)/dt$ . Usando la Ec.(4.12) y la Ec.(4.33), escribimos

$$r(t) = r(t-1) + A(1-r(t-1))^\alpha \quad (4.40)$$

y así, para tiempos largos,

$$l(t) \simeq A(1-r(t))^\alpha \simeq \frac{dr(t)}{dt}. \quad (4.41)$$

Solucionando la ecuación diferencial

$$r(t) \simeq 1 - [A(1-\alpha)]^{\frac{1}{1-\alpha}} t^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad (4.42)$$

y enseguida calculando su derivada para cada uno de los tres casos de  $A$  y  $\alpha$ , obtenemos  $\delta = \alpha/(\alpha-1)$  y en consecuencia

$$l(t) \sim \begin{cases} t^{-(\gamma-\eta-1)/(\gamma-2)}, & 2 < \gamma < 3-\eta, \\ t^{-2} (\ln t)^{-1}, & \gamma = 3-\eta, \\ t^{-2}, & \gamma > 3-\eta. \end{cases} \quad (4.43)$$

Tenemos finalmente el exponente  $\delta$  de (3.31):

$$\delta = \begin{cases} (\gamma-\eta-1)/(\gamma-2), & 2 < \gamma < \gamma_c, \\ 2, & \gamma \geq \gamma_c. \end{cases} \quad (4.44)$$

Lo primero interesante que hay que mencionar es que para  $\gamma \geq \gamma_c$  se recuperan los exponentes críticos de campo medio. Y lo segundo interesante, es que precisamente la red permite variar esos exponentes de campo medio de las avalanchas cuando  $\gamma < \gamma_c$ . Sería interesante estudiar también otras formas funcionales de dependencia entre la altura umbral y el grado de los nodos, para ver si los exponentes críticos se comportan de manera similar a la que acabamos de encontrar.

Algo relevante que se deduce del análisis, que no se hizo explícito en palabras, es que las avalanchas no tienen un tamaño promedio. Este es un resultado esperado, pues es uno de los resultados que reproduce en gran medida la realidad. Es precisamente esto lo que nos permite decir que el sistema no tiene escalas características en el estado crítico.

Aunque el enfoque desde la teoría de los procesos de ramificación es simple y poderosa, los resultados son, sin embargo, aproximados pues no tienen en cuenta las fronteras del sistema. Es por esto que debemos esperar en los resultados numéricos de las simulaciones fuertes efectos de borde, debido al tamaño finito de las redes empleadas.

## Capítulo 5

# Simulaciones y cálculo de exponentes

Puesto que en el presente trabajo se estudian comportamientos críticos y fenómenos que siguen leyes de potencia, es importante conocer los métodos gráficos y analíticos que se usan actualmente para caracterizar y estimar tales distribuciones. En el artículo [28] se puede encontrar una extensa explicación sobre esto.

Básicamente, los estimadores correspondientes al exponente de una distribución de potencia  $p(x) = Cx^{-\alpha}$  ( $C$  la constante de normalización) y su desviación estándar  $\sigma$  se encuentran por el método de máxima verosimilitud. Como normalmente son las colas de las distribuciones [35] las que se comportan como leyes de potencia, el cálculo de los estimadores se hace desde un valor mínimo por encima del cual se afirma que los datos se ajustan a la distribución estimada, bajo un nivel de confiabilidad determinado (esto último se especifica con una prueba Kolmogorov-Smirnov [16]):

$$\alpha = 1 + n \left[ \sum_{i=1}^n \ln \left( \frac{x_i}{x_{min}} \right) \right]^{-1} \quad (5.1)$$

$$\sigma = \sqrt{n} \left[ \sum_{i=1}^n \ln \left( \frac{x_i}{x_{min}} \right) \right]^{-1} = \frac{\alpha - 1}{\sqrt{n}}, \quad (5.2)$$

donde  $x_i$  es el  $i$ -ésimo dato de la variable aleatoria  $X$  de la distribución que se intenta estimar,  $x_{min}$  es el valor mínimo para el cual los datos se ajustan a la ley y  $n$  es el número de datos  $x_i$  que se usan para hacer la estimación (y de nuevo se hace énfasis en que  $n$  no

es necesariamente todo el conjunto de datos).

Gráficamente, las leyes de potencia se muestran en un plano en el que ambos ejes horizontal y vertical tienen una escala logarítmica (lo que se llaman gráficas *log-log*); una ley de potencia se muestra entonces como una línea recta con pendiente igual al exponente de la ley. Sin embargo, puesto que en las colas las distribuciones manifiestan grandes fluctuaciones, un simple histograma (en *log-log*) presenta mucho ruido, así que existen también formas de visualizar de una mejor manera distribuciones con comportamientos de potencia. Una forma buena y simple es por el método de “rank-ordering”, en el cual los datos se ordenan de mayor a menor, y se grafican, con lo cual la gráfica que sale es de hecho la distribución acumulada de los datos. Precisamente, una buena forma de graficar una ley de potencia es graficando su distribución acumulada,

$$P_{>}(x) = \int_x^{\infty} p(x)dx, \quad (5.3)$$

la cual se ve también como una línea recta con la pendiente igual al exponente  $\alpha$  de la ley menos uno. La ventaja de la distribución acumulada es que ésta suaviza las fluctuaciones que se presentan en la cola, haciendo más fácil la visualización del comportamiento de los datos. No obstante, una anotación importante es que una estimación gráfica o visual (e incluso lineal) de los parámetros de una ley de potencia en una gráfica *log-log* no pueden ser confiables, ya que la escala logarítmica desprecia gráficamente las fluctuaciones en la cola. Las gráficas en *log-log* sólo nos servirán entonces para darnos intuición sobre el fenómeno estudiado.

La función en *Mathematica 5.2* que uso para estimar los exponentes de las distribuciones fue creada por Jorge Villalobos.

## 5.1. Las redes libres de escala

Usando el algoritmo presentado en la sección (3.1), se crearon en *Mathematica 5.2* varias redes, de distintos tamaños y parámetros. Para mostrar cómo se vería una de las redes, muestro en la Fig.(5.1) un ejemplo gráfico de una red con 5000 nodos,  $m = 1$  y  $A = 0.8$ .

Ahora bien, continuamos a calcular el valor teórico y el valor estimado de los exponentes para algunas redes.

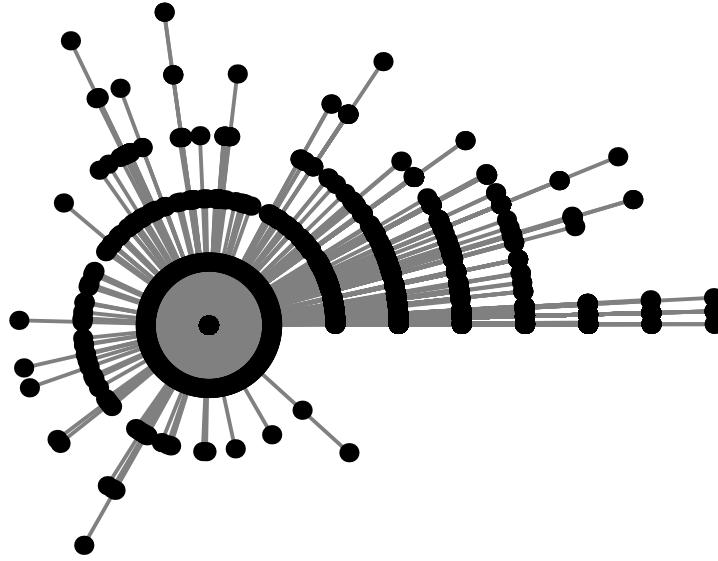


Figura 5.1: Representación gráfica de una red libre de escala de 5000 nodos,  $m = 1$  y  $A = 0.8$ .

### 5.1.1. $A/m = \text{constante} = a$

En la Fig.(5.2) se muestran las distribuciones de los grados para dos redes diferentes pero con el mismo número de nodos. Los parámetros son  $A = m = 1$  y  $A = m = 5$  respectivamente, y en consecuencia, el valor teórico del exponente en la distribución de potencia de los grados  $P_g(k) \sim k^{-\gamma}$  es el mismo para los dos:  $\gamma = 2 + a = 2 + (A/m) = 3$ . Los valores estimados para estas dos redes son

$$\hat{\gamma} = \begin{cases} 3.09175 \pm 0.244821, & A = m = 1, \\ 3.03813 \pm 0.15363, & A = m = 5, \end{cases} \quad (5.4)$$

y son considerablemente cercanos a su valor teórico.

Con esto se observa que el exponente  $\gamma$  se mantiene constante siempre y cuando la razón entre  $A$  y  $m$  permanezca la misma, como es esperado.

### 5.1.2. $m = 1$ y $A = \text{variable}$

Habiendo comprobado en la sección anterior que el exponente  $\gamma$  sí depende de  $A/m$  de la manera esperada, podemos variar el parámetro  $a$  fijando  $m = 1$  (y entonces  $a = A$ ) y variando  $A$  ( $A > 0$ ).

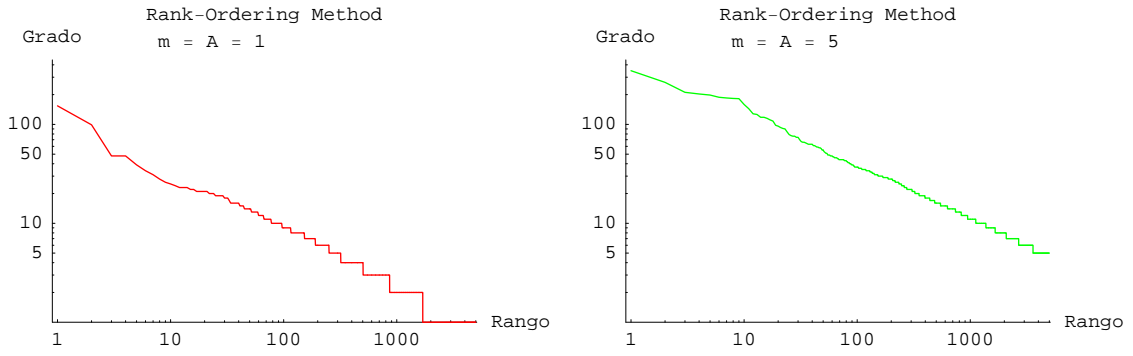


Figura 5.2: Gráficas log-log de Grado vs. Rango para dos redes libres de escala de 5000 nodos. La gráfica roja corresponde a  $m = 1$  y  $A = 1$  y la verde a  $m = 5$  y  $A = 5$ . Teóricamente, el exponente de estas distribuciones de potencia debe ser  $\gamma = 2 + a = 2 + A/m = 3$ .

En la Fig.(5.4) se muestran cinco diferentes valores  $\gamma = 2.1, 2.4, 2.7, 3, 5$  ( $a = 0.1, 0.4, 0.7, 1, 3$ ). La estimación del exponente para cada una de las redes es

$$\hat{\gamma} = \begin{cases} 2.13381 \pm 0.139562, & \gamma = 2.1, \\ 2.45962 \pm 0.183895, & \gamma = 2.4, \\ 2.69732 \pm 0.157592, & \gamma = 2.7, \\ 3.09175 \pm 0.244821, & \gamma = 3, \\ 4.23947 \pm 0.477634, & \gamma = 5, \end{cases} \quad (5.5)$$

y vemos que los valores estimados son muy cercanos a los teóricos.

## 5.2. Las pilas de arena

Para todas las simulaciones de la pila de arena se usaron siempre redes de 2000 nodos para facilidad computacional, y  $m = 2$ .

### 5.2.1. El periodo transiente

Las medidas sobre los tamaños y duraciones de las avalanchas se empiezan a tomar después de un periodo transiente en el cual se espera que el sistema alcance el estado estacionario (en el que el promedio de las alturas de los nodos se estabiliza alrededor de un valor). En la Fig.(5.5), se puede ver claramente un ejemplo de una simulación en la que

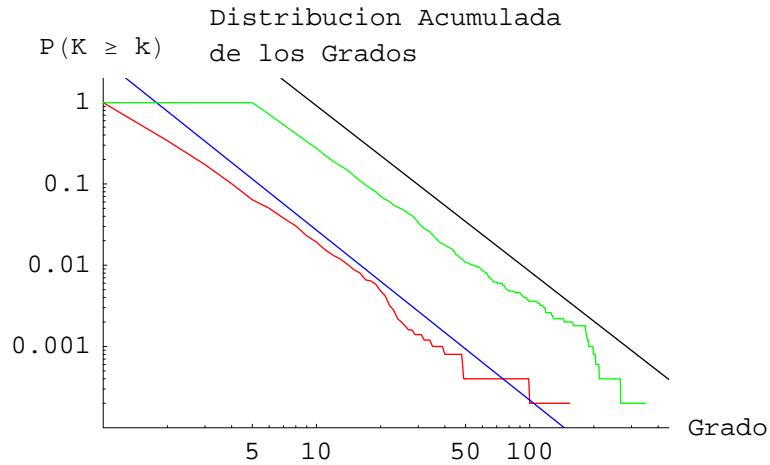


Figura 5.3: Gráfica conjunta log-log de Grado vs. Rango para las dos redes libres de escala de 5000 nodos y  $a = 1$ . Se muestran las curvas (rectas) con los exponentes (pendientes) estimados. Estas últimas han sido desplazadas verticalmente para facilidad visual. La recta horizontal en la distribución para  $A = m = 5$  (verde), muestra el hecho de que en esa red el grado mínimo es  $m = 5$ .

una pila llega a su estado estacionario después de 2500 iteraciones aproximadamente. Una vez el sistema llega a este estado, vemos en la dinámica temporal de las avalanchas un comportamiento no trivial con grandes fluctuaciones. Se espera que en el estado estacionario, el sistema tenga un comportamiento crítico.

Hay que resaltar nuevamente que en el modelo de la pila de arena existen dos escalas de tiempo. En la Fig.(5.5) se pueden contrastar estas dos escalas: una es la escala “grande” en la que se adiciona un grano de arena al sistema por vez, y que por lo tanto corresponde al tiempo de la simulación, y la otra es la escala en la que medimos las avalanchas. Hay que recordar que en el modelo, las avalanchas son instantáneas con respecto al tiempo “grande”, y que esto se justifica pensando que la acumulación de estrés en los sistemas reales es mucho más lenta que su liberación.

En la Fig.(5.6) se puede ver entonces que las distribuciones acumuladas de los tamaños y los tiempos de vida de las avalanchas en el estado estado estacionario escalan como leyes de potencia (con un corte o “cutoff” en la cola debido a efectos de frontera por el tamaño finito del sistema).

Es interesante observar cómo el principio de criticalidad auto-organizada (SOC) se mani-

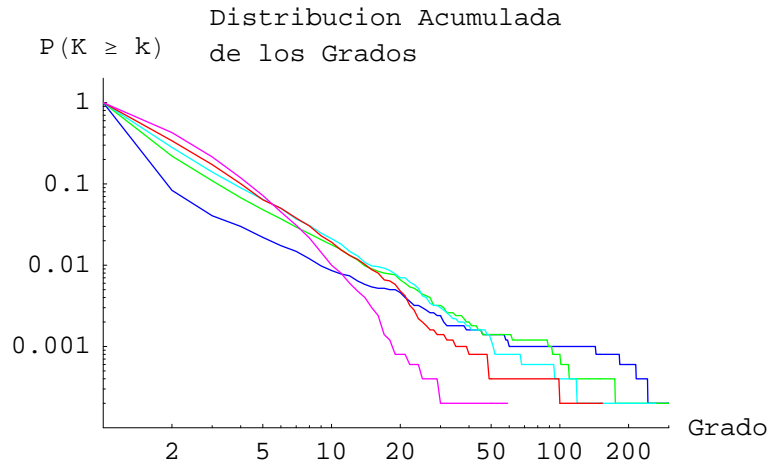


Figura 5.4: Gráfica conjunta log-log de las distribuciones acumuladas para cinco redes libres de escala de 5000 nodos con  $m = 1$  y parámetros  $A = 0.1$  (azul oscuro),  $A = 0.4$  (verde),  $A = 0.7$  (azul claro),  $A = 1$  (rojo) y  $A = 3$  (violeta).

fiesta en estas gráficas. La simple adición de un grano de arena a la vez, bajo las dinámicas de umbral que se imponen en el modelo, hace que el sistema eventualmente alcance, independientemente de las condiciones iniciales, un estado estacionario con un comportamiento no trivial que despliega criticalidad. Es decir, el sistema se auto-organiza para llegar a un estado crítico, a diferencia de los sistemas clásicos que se estudian en mecánica estadística de equilibrio, donde los parámetros del sistema (como la temperatura y la presión) se deben ajustar finamente para que el sistema llegue a ese punto.

### 5.2.2. Comparación con la teoría

En esta sección presento una comparación completa entre simulación y teoría. La intención es validar el análisis presentado en el capítulo 4, y dar sustento al presente trabajo.

El Cuadro 5.1 muestra las estimaciones teóricas y numéricas de los exponentes críticos  $\tau$  y  $\delta$  de las distribuciones de los tamaños y los tiempos de vida de las avalanchas, para algunos casos de los parámetros  $\gamma$  y  $\eta$  del modelo.

En el Cuadro 5.1 se tienen casos en los que los valores teóricos y numéricos difieren significativamente, y otros en los que no. Para mirar cómo se está comportando gráficamente la relación entre datos, estimación numérica y predicción teórica, miramos la Fig.(5.7). En ésta, se observa claramente esta discrepancia, que se asume se debe a dos factores



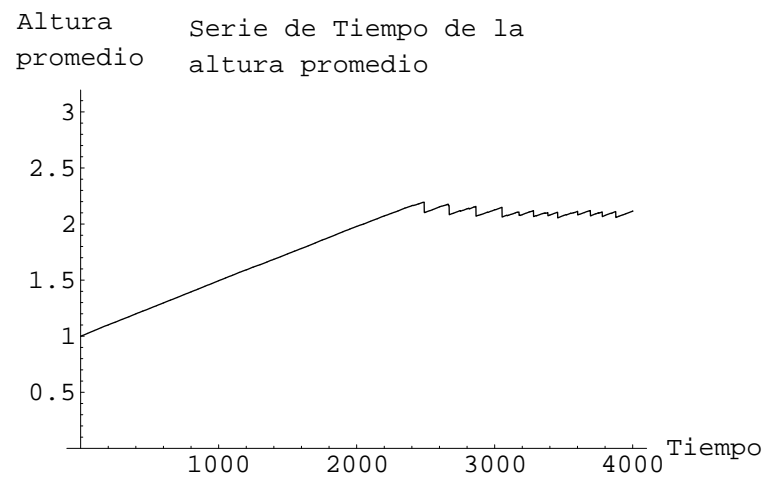
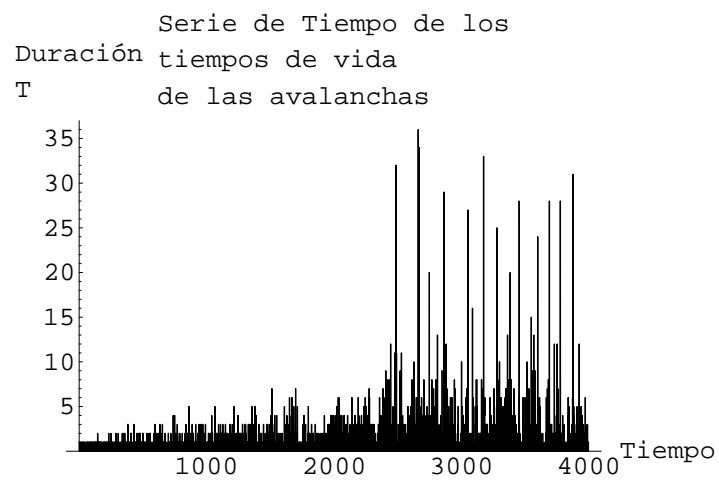
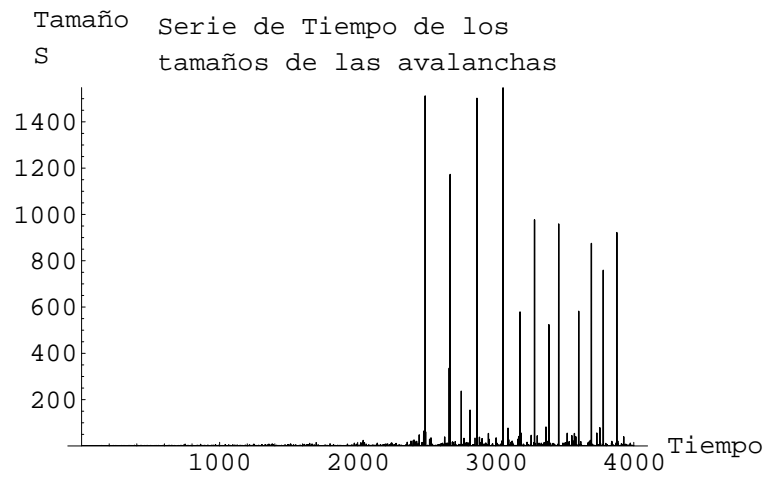


Figura 5.5: Simulación de duración  $t = 4000$  de la pila de arena con  $\eta = 0.0$  en una red de 2000 nodos y  $\gamma = 2.6$ . Las gráficas muestran la evolución temporal de los tamaños de las avalanchas, sus duraciones y la altura promedio de la pila.

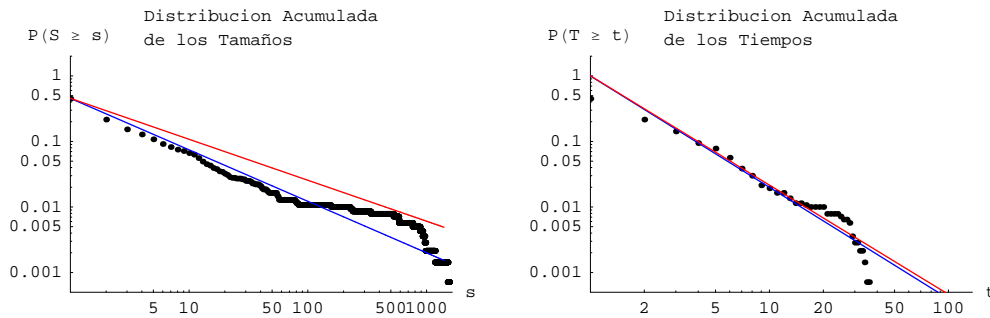


Figura 5.6: Distribuciones de potencia de los tamaños y los tiempos de vida de las avalanchas de la pila de arena en el estado estacionario con  $\eta = 0.0$  en una red de 2000 nodos y  $\gamma = 2.6$ . Lo estimado se muestra en azul y lo teórico en rojo. Los valores son respectivamente  $\hat{\tau} = 1.78579$  y  $\tau = 1.625$  para los tamaños y,  $\hat{\delta} = 2.70053$  y  $\delta = 2.667$  para las duraciones.

principales:

1. Los efectos finitos del sistema, que se vuelven significativos al no estar trabajando con redes muy grandes. Estos, no se tienen en cuenta en la derivación analítica del problema (Cap.4) mediante la teoría de procesos de ramificación. Es por esta razón que en la literatura se encuentra a veces la teoría de procesos de ramificación como una aproximación de “campo medio”.
2. Para algunos exponentes de las simulaciones los  $\gamma$  son muy pequeños. Al darse esto, sucede que la ley de potencia para la red genera muchos nodos con el grado mínimo (en nuestro caso  $m = 2$ ), y otros muy pocos con grados extremadamente grandes, y esto a su vez genera una dinámica en principio trivial: pues se puede decir que cada vez que un nodo recibe un grano, inmediatamente lo suelta (el umbral es para casi todos los nodos igual a uno). Esto último lo que genera es una distribución casi uniforme para los tamaños y los tiempos de vida. Una distribución uniforme acumulada se ve gráficamente en log-log como una línea horizontal con un fuerte corte vertical en la cola. Este efecto se puede ver en la Fig.(5.7), con una parte de la distribución que tiende a ser horizontal. Por el contrario, en la Fig.(5.8) se puede observar que para un valor de  $\gamma$  mayor, la concordancia es mucho mejor entre los datos, la estimación numérica y el valor teórico.

Nuevamente, se debe aclarar que estas simulaciones no son para predecir ningún evento

$\tau$	$\eta = 0.0$	$\gamma_c = 3$	$\eta = 0.4$	$\gamma_c = 2.6$	$\eta = 0.8$	$\gamma_c = 2.2$
Valor	Numérico	Teórico	Numérico	Teórico	Numérico	Teórico
$\gamma = 2.1$	1.39932	1.90910	1.81929	1.85714	1.67987	1.66667
$\gamma = 2.2$	1.44677	1.83333	1.63444	1.75	1.43562	1.5
$\gamma = 2.6$	1.50447	1.625	1.46692	1.5	1.50451	1.5
$\gamma = 3.0$	1.60799	1.5	1.54396	1.5	1.64244	1.5
$\gamma = 3.5$	1.58525	1.5	1.56558	1.5	1.58238	1.5

$\delta$	$\eta = 0.0$	$\gamma_c = 3$	$\eta = 0.4$	$\gamma_c = 2.6$	$\eta = 0.8$	$\gamma_c = 2.2$
Valor	Numérico	Teórico	Numérico	Teórico	Numérico	Teórico
$\gamma = 2.1$	3.15416	11	2.02255	7	2.03588	3
$\gamma = 2.2$	2.71114	6	1.9484	4	1.70655	2
$\gamma = 2.6$	2.04289	2.66667	1.86913	2	1.96491	2
$\gamma = 3.0$	2.30157	2	2.05744	2	2.32965	2
$\gamma = 3.5$	2.15738	2	2.03418	2	2.46448	2

Cuadro 5.1: Tablas de estimaciones numéricas y teóricas para los exponentes  $\tau$  y  $\delta$  de las distribuciones de los tamaños y las duraciones de las avalanchas para diferentes valores de  $\gamma$  y  $\eta$ .

en particular. El modelo simulado nos permite identificar patrones generales (como lo son los exponentes críticos); nos permite corroborar y darle sustento a la conceptualización que se hizo de la realidad. Efectivamente, este simple modelo de una pila de arena sobre una red libre de escala, reproduce dinámicas no triviales similares a las observadas en el mundo. Despliega SOC y nos da una buena intuición sobre los procesos auto-organizativos subyacentes que pueden estar funcionando en muchos sistemas reales.

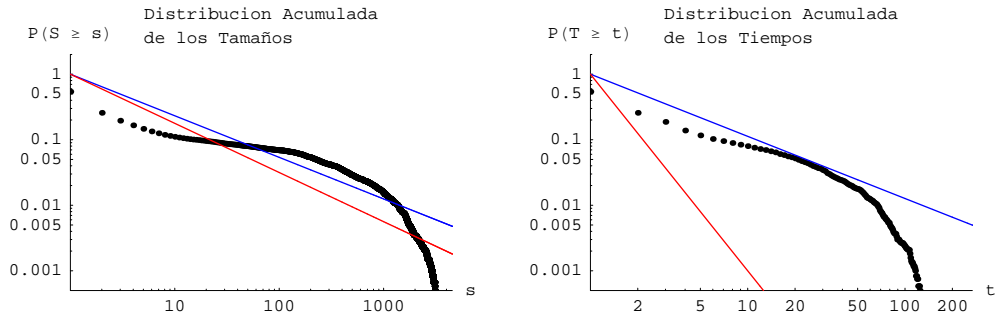


Figura 5.7: Distribuciones de potencia de los tamaños y los tiempos de vida de las avalanchas de la pila de arena en el estado estacionario con  $\eta = 0.4$  en una red de 2000 nodos y  $\gamma = 2.2$ . Lo estimado se muestra en azul y lo teórico en rojo. Los valores son respectivamente  $\hat{\tau} = 1.63444$  y  $\tau = 1.75$  para los tamaños y,  $\hat{\delta} = 1.9484$  y  $\delta = 4$  para las duraciones.

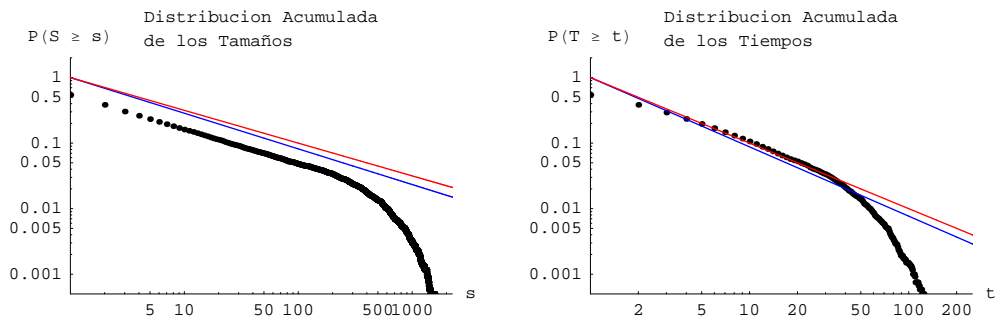


Figura 5.8: Distribuciones de potencia de los tamaños y los tiempos de vida de las avalanchas de la pila de arena en el estado estacionario con  $\eta = 0.4$  en una red de 2000 nodos y  $\gamma = 3.0$ . Lo estimado se muestra en azul y lo teórico en rojo. Los valores son respectivamente  $\hat{\tau} = 1.54396$  y  $\tau = 1.5$  para los tamaños y,  $\hat{\delta} = 2.05744$  y  $\delta = 2$  para las duraciones.

# Conclusiones

En este trabajo se estudió el comportamiento de las avalanchas de una pila de arena en una red libre de escala. La motivación del estudio [14, 15, 23] se basó en el hecho de que comportamientos no triviales y fuertemente fluctuantes son muy comunes en la naturaleza [28, 19, 22, 34, 35]. Muchos de estos fenómenos se suelen dar en sistemas que se pueden representar mediante redes que, se han encontrado, muestran una distribución de potencia para los grados. Adicionalmente, esta dinámica es particular, pues surge espontáneamente en los sistemas cuando se tienen en juego muchos grados de libertad acoplados. Se sugiere que estos sistemas se auto-organizan para llegar a un estado crítico, donde las fluctuaciones son propias de una ley de potencia. En el presente estudio, se corroboraron dichas ideas. En efecto, el modelo que se estudió presenta, de manera clara, un proceso de auto-organización hacia un estado estacionario, en el cual el sistema carece de escalas características y la magnitud de los eventos (avalanchas) sigue leyes de potencia con exponentes críticos bien determinados.

Resulta interesante, en este trabajo, el estudio que se realizó sobre dos importantes fenómenos emergentes: la creación natural de redes libres de escala y el comportamiento crítico auto-organizado de sistemas complejos. Ambos fenómenos van de la mano, y es de suma trascendencia entenderlos, tanto teórica como experimentalmente, pues lo que vemos en el mundo es el resultado de efectos colectivos.

Se llevó a cabo un análisis matemático del modelo de crecimiento de una red libre de escala y del modelo de una pila de arena sobre estas redes libres de escala, y enseguida se pasó a contrastar la teoría con simulaciones numéricas. La gran parte de la investigación giró en torno a los exponentes críticos que caracterizan la dinámica de estos sistemas. Los resultados, en su mayoría, dieron sustento y validez al modelo, y fueron satisfactorios para

afirmar que el estudio en conjunto puede dar intuiciones relevantes sobre el comportamiento de muchos sistemas complejos naturales.

# Bibliografía

- [1] Réka Albert and Albert-László Barabási. Statistical mechanics of complex networks. *arXiv:cond-mat/0106096 v1*, Jun 2001.
- [2] Preben Alstrom. Mean-field exponents for self-organized critical phenomena. *Phys. Rev. A*, 38(9):4905, November 1988.
- [3] George B. Arfken and Hans J. Weber. *Mathematical methods for physicists*. Academic Press, San Diego, 6th edition, 2005.
- [4] Per Bak, Chao Tang, and Kurt Wiesenfeld. Self-organized criticality: An explanation of  $1/f$  noise. *Phys. Rev. Lett.*, 59(4):381, July 1987.
- [5] Per Bak, Chao Tang, and Kurt Wiesenfeld. Self-organized criticality. *Phys. Rev. A*, 38(1):364, July 1988.
- [6] A.-L. Barabási and Réka Albert. Emergence of scaling in random networks. *Science*, 286:509, October 1999.
- [7] Asa Ben-Hur and Ofer Biham. Universality in sandpile models. *arXiv:cond-mat/9803236 v1*, May 1998.
- [8] Jörn Davidsen and Heinz Georg Schuster.  $1/f^\alpha$  noise from self-organized critical models with uniform driving. *Phys. Rev. E*, 62(5):6111, November 2000.
- [9] Deepak Dhar. Studying self-organized criticality with exactly solved models. *arXiv:cond-mat/9909009 v1*, September 1999.
- [10] Deepak Dhar and Ramakrishna Ramaswamy. Exactly solved model of self-organized critical phenomena. *Phys. Rev. Lett.*, 63(16):1659, October 1989.

- [11] Ronald Dickman, Miguel A. Muñoz, Alessandro Vespignani, and Stefano Zapperi. Paths to self-organized criticality. *arXiv:cond-mat/9910454 v2*, May 2000.
- [12] S.N. Dorogovtsev and J.F.F. Mendes. Evolution of networks. *arXiv:cond-mat/0106144 v2*, Sep 2001.
- [13] S.N. Dorogovtsev, J.F.F. Mendes, and A.N. Samukhin. Structure of growing networks with preferential linking. *Phys. Rev. Lett.*, 85(21):4633, November 2000.
- [14] K.-I. Goh, D.-S. Lee, B. Kahng, and D. Kim. Sandpile on scale-free networks. *Phys. Rev. Lett.*, 91(14):148701, October 2003.
- [15] K.-I. Goh, D.-S. Lee, B. Kahng, and D. Kim. Cascading toppling dynamics on scale-free networks. *Physica A*, 346:93–103, 2005.
- [16] Michel L. Goldstein, Steven A. Morris, and Gary G. Yen. Problems with fitting to the power-law distribution. *Eur. Phys. J. B*, 41(2):255–258, September 2004.
- [17] Theodore E. Harris. *The Theory of Branching Processes*. Springer-Verlag, Heidelberg, 1963.
- [18] Terence Hwa and Mehran Kardar. Avalanches, hydrodynamics, and discharge events in models of sandpiles. *Phys. Rev. A*, 45(10):7002, May 1992.
- [19] Henrik J. Jensen. *Self-Organized Criticality*. Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
- [20] Henrik Jeldtoft Jensen, Kim Christensen, and Hans C. Fogedby.  $1/f$  noise, distribution of lifetimes, and a pile of sand. *Phys. Rev. B*, 40(10):7425, October 1989.
- [21] Hawoong Jeong. Complex scale-free networks. *Physica A*, 321:226–237, 2003.
- [22] Stuart A. Kauffman. *Investigations*. Oxford University Press, New York, 2000.
- [23] D.-S. Lee, K.-I. Goh, B. Kahng, and D. Kim. Sandpile avalanche dynamics on scale-free networks. *Physica A*, 338:84–91, 2004.
- [24] S. S. Manna. Two-state model of self-organized criticality. *J. Phys.*, 24:L363, 1991.



- [25] S. S. Manna. Sandpile models of self-organized criticality. *arXiv:cond-mat/9908316 v1*, Aug 1999.
- [26] S. S. Manna, A. D. Chakrabarti, and R. Cafiero. Critical states in a dissipative sandpile model. *arXiv:cond-mat/9909065 v1*, September 1999.
- [27] M. E. J. Newman. The structure and function of complex networks. *arXiv:cond-mat/0303516 v1*, Mar 2003.
- [28] M. E. J. Newman. Power laws, pareto distributions and zipf's law. *arXiv:cond-mat/0412004 v3*, May 2006.
- [29] Mark E. J. Newman, Albert-László Barabási, and Duncan J. Watts. *The Structure and Dynamics of Networks*. Princeton Studies in Complexity. Princeton University Press, New Jersey, 2006.
- [30] Richard Otter. The multiplicative process. *Ann. Math. Stat.*, 20:206, June 1949.
- [31] Juyong Park and M. E. J. Newman. The statistical mechanics of networks. *arXiv:cond-mat/0405566 v1*, May 2004.
- [32] Paolo De Los Rios and Yi-Cheng Zhang. Universal  $1/f$  noise from dissipative self-organized criticality models. *Phys. Rev. Lett.*, 82(3):472, January 1999.
- [33] John E. Robinson. Note on the bose-einstein integral functions. *Phys. Rev.*, 83(3):678–679, Aug 1951.
- [34] Ricard V. Solé, Susanna C. Manrubia, Michael Benton, Stuart Kauffman, and Per Bak. Criticality and scaling in evolutionary ecology. *Elsevier Science*, 14(4):156, April 1999.
- [35] Didier Sornette. *Critical Phenomena in Natural Sciences*. Springer Series in Synergetics. Springer, Heidelberg, 2nd edition, 2003.
- [36] Claudio Tebaldi, Mario De Menech, and Attilio L. Stella. Multifractal scaling in the bak-tang-wiesenfeld sandpile and edge events. *Phys. Rev. Lett.*, 83(19):3952, November 1999.

- [37] Herbert S. Wilf. *Generatingfunctionology*. Academic Press, London, 2nd edition, 1994.

## Apéndice A

# Código en Mathematica 5.2 de crecimiento de red basado en el artículo [13]

```
AgrandarMatriz[Matriz.]:=
Module[{mat, ii}, mat = Transpose[Matriz];
AppendTo[mat, Table[0, {Length[Matriz]}]];
mat = Transpose[mat];
Return[Append[mat, Table[0, {1 + Length[Matriz]}]]];];
```

```
AgregarConexiones[Matriz_, ListaAtd_, m_]:=
Module[{RNDi, mat, i, ii}, mat = Matriz;
RNDi[L_]:=Random[Integer, {1, L - 1}];
For[ii = 1, Total[mat[[-1]]] < m, ii++, i = RNDi[Length[mat]];
If[Floor[Random[] + ListaAtd[[i]]] == 1, mat[[-1, i]] = 1];];
Return[mat];];
```

```
SFNetwork[n_, m_, A_]:=
Module[{mat, t, to}, mat = Table[0, {i, m + 1}, {j, m + 1}];
(*Inicializacion arbitraria de la matriz mat*)to = Length[mat];
```

```

For[t = to, t < n, t++, mat = AgrandarMatriz[mat];
AtractividadNodos = (Table[Count[mat[[All, i]], 1], {i, Length[mat]}] + A)/
(Total[Flatten[mat]] + A * Length[mat]);
mat = AgregarConexiones[mat, AtractividadNodos, m];];
Return[mat + Transpose[mat]];];

```

Se cargan las funciones, y se le dan valores a N el número de nodos, m el número de conexiones que entran cada vez y A la atractividad inicial. La función SFNetwork devuelve la matriz de adyacencia de la red.

```
A = SFNetwork[N, m, A];
```

## Apéndice B

# Código en Mathematica 5.2 de una pila de arena en una red basado en el artículo [23]

NodosDisipativos crea de una manera aleatoria la lista de nodos que disipan granos.

```
NodosDisipativos[T_]:=
Module[
{grados, lista, rnd},
grados = Table[Total[T[[i]]], {i, Length[T]}];
lista = Flatten[Position[grados, Min[grados]]];
rnd = Random[Integer, {6, 10}];
Return[Take[lista, {1, Length[lista], rnd}]];
];
```

Adiciona un grano a un nodo aleatoriamente escogido.

```
AdGrano[h_]:=
Module[
{ho, i},
ho = h;
i = Random[Integer, {1, Length[h]}];
ho[[i]]++;
```

```
Return[ho];
```

```
];
```

Inestabilidad recibe la lista de alturas  $h$ , la matriz de transferencia  $T$ , y la lista de nodos que disipan, y determina si hay nodos inestables o no.

```
Inestabilidad[h_, T_, nD_]:=
```

```
Module[
```

```
{ii},
```

```
For[ii = 1, ii ≤ Length[h], ii++,
```

```
If[h[[ii]] ≥ Abs[T[[ii, ii]]&&Count[nD - ii, _?(# == 0&)] == 0, Return[1]];
```

```
];
```

```
Return[0];
```

```
];
```

Esta función escoge los vecinos aleatorios del nodo que se relaja.

```
Nescogidos[veci_, i_]:=Module[
```

```
{pos, RND, rn, k, lista = {}},
```

```
pos = Flatten[Position[veci, 1]];
```

```
RND:=Random[Integer, {1, Length[pos]}];
```

```
For[k = 1, Length[lista] < Abs[veci[[i]]], k++,
```

```
rn = RND;
```

```
If[Count[lista - pos[[rn]], _?(# == 0&)] == 0,
```

```
lista = Append[lista, pos[[rn]]];
```

```
];
```

```
];
```

```
Return[lista];
```

```
];
```

Esta función relaja completamente la pila de arena, dejándola sin nodos inestables.

```
Relajar[h_, T_, nD_, s_, t_]:=
```

```
Module[
```

```
{ho, jj, RelajarNodo, so, datos},
```

```
ho = h;
```

```
so = s;
```

(\*Estafuncionsolocreauunoloderrumbe, deunnodojjhaciasusvecinoscercanosescogidos\*)

RelajarNodo[alturas\_, jj\_, MT\_] := Module[

{ho, ii, N},

ho = alturas;

NdsEsc = Nescogidos[MT[[jj]], jj];

For[ii = 1, ii ≤ Length[MT], ii++,

If[ii ≠ jj && Count[NdsEsc - ii, \_?(# == 0 &)] == 1,

ho[[ii]] = ho[[ii]] + MT[[jj, ii]];

];

If[ii == jj, ho[[ii]] = ho[[ii]] + MT[[jj, ii]];

];

Return[ho];

];

For[jj = 1, jj ≤ Length[T], jj++,

If[Count[nD - jj, \_?(# == 0 &)] == 0 && h[[jj]] ≥ Abs[T[[jj, jj]]], ho = RelajarNodo[ho, jj, T]; so++;

];

datos = {ho, so, t + 1};

If[Inestabilidad[ho, T, nD] == 1, datos = Relajar[ho, T, nD, so, t + 1];

Return[datos];

];

La función PilaEnRedLe recibe la matriz de Transferencia, la lista de nodos disipativos, la lista de las alturas de cada nodo, y el tiempo de corrida de la simulación.

PilaEnRedLE[T\_, NdsDisipativos\_, datos\_, tiempo\_] :=

Module[

{DuracionesT, TamañosS, Y},

Y = datos;

For[ii = 1, ii ≤ tiempo, ii++,

```

Y[[2]] = 0;
Y[[3]] = 0;
Y[[1]] = AdGrano[Y[[1]]];

If[Inestabilidad[Y[[1]], T, NdsDisipativos] == 1,
Y = Block[{$RecursionLimit = Infinity}, Relajar[Y[[1]], T, NdsDisipativos, Y[[2]], Y[[3]]];
];

Y[[2]] >>> PruebaTamaños.txt;
Y[[3]] >>> PruebaTamaños.txt;

];

];

```

Se carga en A el archivo que contiene la matriz de adyacencia de la red, o se crea directamente usando la función SFNetwork.

```

grados = Table[Total[A[[i]], {i, Length[A]}];
(* 0 ≤ η < 1 *)
η = 0.2;
umbrales = -Ceiling [grados1-η];
MatrizT = A + IdentityMatrix[Length[A]] * umbrales;

```

La matriz de Transferencia T es la misma que la de Adyacencia de la red, excepto que en las diagonales en vez de tener 0's tiene las alturas umbrales (negativas) de la pila de la red.

```

h = Table[1, {i, Length[MatrizT]}];
datos = {h, 0, 0};
ndsd = NodosDisipativos[A];
Clear[A, h, umbrales, grados];
PilaEnRedLE[MatrizT, ndsd, datos, 15000];

```