

Proyecto de Grado

**Análisis Empírico del Modelo
de Heston en Opciones sobre el
Índice S&P500**

Andrés Camilo Gaviria
Código 200110992

Director: René Meziat

Departamento de Matemáticas
Universidad de los Andes
Bogotá D.C.

2007

Índice general

1. Introducción	1
2. Preliminares	3
2.1. Teoría de la Probabilidad	3
2.1.1. Probabilidad	3
2.1.2. Variables Aleatorias, Valor Esperado y Procesos Es- tocásticos	5
2.1.3. Esperanza Condicional y Martingalas	6
2.2. Procesos de Itô	7
2.2.1. Movimiento Browniano	7
2.2.2. La Integral de Itô	8
2.2.3. Procesos de Itô y Resultados Importantes	9
2.3. Fundamentos de Derivados Financieros	12
2.3.1. Supuestos Básicos	12
2.3.2. La Inclusión de Dividendos Continuos	13
2.3.3. Derivados Financieros	14
2.4. El Modelo de Black-Scholes	16
2.5. Valoración de Riesgo Neutral	21

2.5.1. Modelo General de Mercado	21
2.5.2. Medidas Equivalentes de Martingala	23
2.5.3. Valoración de Riesgo Neutral	24
3. El Modelo de Heston	27
3.1. El Modelo y el Proceso de la Varianza	28
3.2. El Proceso de Riesgo Neutral	31
3.3. La Función Característica del log-spot	33
4. La Fórmula de Valoración	39
4.1. La Fórmula de Valoración de Carr y Madan	40
4.2. Transformación del Intervalo de Integración	43
4.3. La Escogencia Óptima de α	46
4.4. El Cálculo del Logaritmo Complejo	54
5. Análisis Empírico del Modelo de Heston	57
5.1. Volatilidad Implícita	57
5.2. Volatilidad Implícita y el Modelo de Heston	61
5.3. La Calibración del Modelo	65
5.4. El Modelo de Heston en el Índice S&P500	68
A. Códigos en MatLab	75
A.1. Códigos de La Fórmula de Valoración	75
A.2. Simulación Montearlo y Distribuciones Estadísticas	81
A.3. Cálculo de la volatilidad implícita	83

Capítulo 1

Introducción

La valoración de derivados financieros es un problema complicado: las herramientas matemáticas para su planteamiento, por no decir el desarrollo de un marco teórico robusto que permitiera una solución apropiada, no fue obtenido sino hasta la segunda mitad del siglo XX. En efecto, antes de la publicación de los revolucionarios resultados de Fisher Black y Myron Scholes en el año de 1973, el problema de la valoración carecía de un marco conceptual apropiado, y los esfuerzos por resolverlo eran, en gran medida incipientes. Aún hoy, la manera como deben valorarse ciertos instrumentos financieros un poco más complicados que las simples opciones CALL y PUT europeas es incierta. La carencia de soluciones cerradas para la mayoría de instrumentos financieros (tómese por ejemplo el caso de las opciones americanas), junto con la progresiva y rápida complicación en el diseño de derivados, hacen urgente la dedicación de grandes esfuerzos en investigación, en aras de cerrar la brecha entre la teoría y la práctica.

Aunque es indiscutible el avance abismal que el Modelo de Black-Scholes representó, también son innegables sus limitaciones. En particular, es evidente que la suposición de un comportamiento constante o determinístico de la volatilidad, es inconsistente con los datos del mercado, en donde los activos presentan periodos impredecibles de aparente quietud, y periodos de amplias oscilaciones. Luego de una serie de intentos más o menos afortunados, iniciados en la década de los ochenta por parte de varios autores, Steven Heston propone, en 1993, un modelo de precios que incorpora un comportamiento

estocástico de la volatilidad, y más importante aún, logra ofrecer una fórmula semi-cerrada para la valoración de la opción CALL europea. El objetivo de esta disertación es investigar el modelo propuesto por Heston.

En términos generales, el texto puede dividirse en dos partes de igual importancia: la primera consiste en la profundización de los detalles técnicos de la implementación computacional del modelo de Heston, mientras que la segunda pretende exponer las ventajas que supone adoptar un modelo con volatilidad estocástica, en lugar del Modelo de Black-Scholes. Espero que ambos objetivos se hayan alcanzado a cabalidad. Quedaría agradecido y satisfecho, si mi esfuerzo logra que el lector se lleve una idea general de las implicaciones prácticas que supone la introducción de un comportamiento estocástico de la volatilidad, o que los resultados técnicos de la primera parte, le faciliten la implementación de un modelo de tales características.

El Capítulo 2 es un poco extenso, pero expone los resultados básicos y las herramientas matemáticas que permiten una correcta formulación del problema de la valoración. Contiene además una introducción sumaria de los conceptos financieros y de las suposiciones básicas acerca del comportamiento de los mercados, sobre las cuales se construye toda la teoría posterior. Contiene además, una breve exposición del Modelo de Black-Scholes, y desarrolla resultados importantes para la comparación empírica de tal modelo, con respecto al modelo de Heston.

El Capítulo 3 introduce el Modelo de Heston y deriva resultados que son necesarios para profundizar en los detalles técnicos de la implementación computacional.

El Capítulo 4 es un poco denso, pues se sumerge en los detalles de la implementación de la fórmula de valoración desarrollada por los autores Carr y Madan, que es aplicable al modelo de precios desarrollado por Heston.

Finalmente, en el Capítulo 5 se efectúa un análisis del desempeño empírico del Modelo de Heston, y se pretende explicar la pertinencia de introducir un comportamiento estocástico de la volatilidad. Presentamos un breve ejemplo del desempeño del Modelo, en el caso de opciones CALL europeas sobre el Índice S&P500.

El Apéndice contiene los códigos de la implementación computacional, elaborados en Matlab.

Capítulo 2

Preeliminarios

La información contenida en las Secciones 2.1 y 2.2, se encuentra en el texto de Oksendal, [Oks]. Las Secciones 2.3 y 2.5 están expuestas, casi en su totalidad, en el texto de Bingham y Kiesel [BK]. La Sección 2.4, y algunos apartes de la Sección 2.3, son tomados de [Hull].

2.1. Teoría de la Probabilidad

2.1.1. Probabilidad

Definición 2.1. Sea Ω un conjunto, una σ -álgebra sobre Ω es una familia \mathcal{F} , de subconjuntos de Ω con las siguientes propiedades:

- (i) $\mathcal{F} \neq \emptyset$.
- (ii) $F \in \mathcal{F} \Rightarrow F^C \in \mathcal{F}$.
- (iii) $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Al par (Ω, \mathcal{F}) se le denomina espacio medible.

Definición 2.2. Sea (Ω, \mathcal{F}) espacio medible. Una medida de probabilidad \mathbb{P} sobre (Ω, \mathcal{F}) , es una función $\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$, tal que:

- (i) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
- (ii) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
- (iii) $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{F}$ y $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ disyuntos, entonces, $\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$.

A la tripleta $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, se le conoce como espacio de probabilidad.

Definición 2.3. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ se denomina completo, si \mathcal{F} contiene todos los subconjuntos μ -nulos de Ω . O lo que es lo mismo, los subconjuntos G de Ω que cumplen:

$$\inf\{\mathbb{P}(F) \mid F \in \mathcal{F}, G \subset F\} = 0.$$

Nótese que todo espacio de probabilidad puede completarse, añadiendo los subconjuntos μ -nulos de Ω y extendiendo \mathbb{P} de manera apropiada. De ahora en adelante consideraremos a todos los espacios de probabilidad de ésta manera.

Definición 2.4. Definimos sobre \mathbb{R}^n con el espacio topológico usual la σ -álgebra de Borel \mathcal{B} , como el conjunto de todos sus abiertos. Dado un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y una función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, decimos que f es \mathcal{F} -medible cuando:

$$f^{-1}(U) \in \mathcal{F}, \forall U \in \mathcal{B}.$$

Definición 2.5. Sean \mathbb{P} y \mathbb{Q} , medidas de probabilidad sobre un espacio medible (Ω, \mathcal{F}) . Decimos que \mathbb{Q} es absolutamente continua con respecto a \mathbb{P} , cuando se cumple:

$$\mathbb{P}(F) = 0 \Rightarrow \mathbb{Q}(F) = 0, \forall F \in \mathcal{F}.$$

La anterior relación la denotamos mediante $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$. Cuando se cumple $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$ y $\mathbb{P} \ll \mathbb{Q}$, decimos que \mathbb{P} y \mathbb{Q} son equivalentes.

Teorema 2.1 (Radon-Nikodým). Sean \mathbb{P} y \mathbb{Q} , medidas de probabilidad sobre un espacio medible (Ω, \mathcal{F}) . Tenemos que $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$, ssi existe f , \mathcal{F} -medible, tal que:

$$\mathbb{Q}(F) = \int_F f d\mathbb{P}, \forall F \in \mathcal{F}.$$

Decimos que f es la derivada de Radon-Nikodým de \mathbb{Q} con respecto a \mathbb{P} , e introducimos la notación:

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = f.$$

2.1.2. Variables Aleatorias, Valor Esperado y Procesos Estocásticos

Definición 2.6. Dado un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, decimos que X es una variable aleatoria en \mathbb{R}^n , si $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ y X es \mathcal{F} -medible. Definimos la distribución de X como la medida de probabilidad μ_X , inducida sobre el espacio medible $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B})$ definida por:

$$\mu_X(B) = \mathbb{P}(X^{-1}(B)), \quad \forall B \in \mathcal{B}.$$

Nótese que para toda variable aleatoria $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, podemos definir una σ -álgebra en Ω , generada por X , que denotamos $\sigma(X)$, y que se caracteriza por ser la menor σ -álgebra que contiene a los conjuntos de la forma:

$$\{X^{-1}(B) | B \in \mathcal{B}\}.$$

Definición 2.7. Sea X una variable aleatoria en \mathbb{R} . Si existe $f_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\mu_X(B) = \int_B f_X(x) dx, \forall B \in \mathcal{B}$, decimos que f_X es la función de densidad de probabilidad (fdp) de X .

Definición 2.8. Sean una variable aleatoria X en \mathbb{R}^n y una función g con dominio en \mathbb{R}^n y Borel-medible, donde se cumple $\int_{\Omega} |g(X)| d\mathbb{P} < \infty$. Definimos el valor esperado de $g(X)$ como:

$$E[g(X)] = \int_{\Omega} g(X) d\mathbb{P} = \int_{\mathbb{R}^n} g(x) d\mu_X.$$

Definición 2.9. Definimos la función característica Φ_X de una variable aleatoria X en \mathbb{R}^n , como:

$$\Phi_X(u) = E[e^{iu \cdot X}].$$

Donde u es un vector en \mathbb{R}^n .

Definición 2.10. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. Dos conjuntos $A, B \in \mathcal{F}$ se denominan independientes, si se cumple:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

Una colección $\mathcal{A} = \{\mathcal{H}_i\}_{i \in I}$ donde $\mathcal{H}_i \subset \mathcal{F}$, se denomina independiente si:

$$\mathbb{P}(H_{i_1} \cap \cdots \cap H_{i_k}) = \mathbb{P}(H_{i_1}) \cdots \mathbb{P}(H_{i_k}).$$

Para cualquier elección, $H_{i_1} \in \mathcal{H}_{i_1}, \dots, H_{i_k} \in \mathcal{H}_{i_k}$ con índices diferentes i_1, \dots, i_k .

Una colección de variables aleatorias $\{X_i\}_{i \in I}$ es independiente, si la colección de σ -álgebras $\{\sigma(X_i)\}_{i \in I}$ es independiente.

Definición 2.11. Un proceso estocástico es una colección parametrizada de variables aleatorias $\{X_t\}_{t \in T}$, definidas sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, donde $X_t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$.

El espacio del parámetro T , usualmente es la semirecta $[0, \infty)$, que puede ser interpretado como el tiempo.

Definición 2.12. Sea un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Se define una filtración como un conjunto parametrizado de σ -álgebras, $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in T}$, tal que $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in T}$ es creciente y $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$, $\forall t$. Al conjunto $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in T})$, se le denomina espacio filtrado.

Nótese que todo proceso estocástico X_t en $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, induce una filtración natural, determinada de la siguiente manera: \mathcal{F}_t es la menor σ -álgebra que contiene a $\bigcup_{s \leq t} \sigma(X_s)$.

2.1.3. Esperanza Condicional y Martingalas

Definición 2.13. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y X una variable aleatoria tal que $E[X] < \infty$. Si $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}$ es una σ -álgebra, definimos la esperanza condicional de X dada \mathcal{H} , $E[X|\mathcal{H}]$, como una función de Ω en el rango de X que cumple lo siguiente:

(i) $E[X|\mathcal{H}]$ es \mathcal{H} -medible.

(ii) $\int_H E[X|\mathcal{H}] d\mathbb{P} = \int_H X d\mathbb{P}$, $\forall H \in \mathcal{H}$.

La esperanza condicional es única *casi siempre*, lo que quiere decir que si dos funciones cumplen las condiciones anteriores, el conjunto de puntos en donde toman valores diferentes tiene medida 0, bajo la medida de probabilidad \mathbb{P} .

Definición 2.14. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in T})$ un espacio filtrado. Decimos que un proceso estocástico X_t es \mathcal{F}_t -adaptado si X_t es \mathcal{F}_t -medible, $\forall t \geq 0$.

Definición 2.15. Sea un proceso estocástico $\{M_t\}_{t \in T}$ sobre un espacio filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in T})$. Se dice que $\{M_t\}_{t \in T}$ es una (\mathcal{F}_t) -martingala si se cumple:

- (i) $E[|M_t|] < \infty, \forall t$.
- (ii) M_t es \mathcal{F}_t -adaptado.
- (iii) $E[M_s | \mathcal{F}_t] = M_t, \forall s \geq t$.

En el caso en que en que se tiene:

$$E[M_s | \mathcal{F}_t] \geq M_t \text{ o } E[M_s | \mathcal{F}_t] \leq M_t$$

El proceso M_t será denominado, supermartingala y submartingala, respectivamente.

2.2. Procesos de Itô

2.2.1. Movimiento Browniano

Definición 2.16. Sea un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Un proceso estocástico Z_t , con $Z_t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, es un movimiento browniano unidimensional estándar, si se cumplen las siguientes condiciones:

- (i) $Z_0 = 0$.
- (ii) $Z_{t+u} - Z_t$ es independiente de $Z_s, \forall s \leq t, \forall u \geq 0$.
- (iii) La distribución de $Z_{t+u} - Z_t$ depende únicamente de u .
- (iv) $Z_{t+u} - Z_t \sim N(0, u)$.
- (v) Z_t es una función continua de t .

Un movimiento browniano multidimensional, se construye tomando copias independientes del movimiento browniano unidimensional, en cada una

de las coordenadas. La demostración de la existencia del movimiento browniano se encuentra en [BK] y [Oks].

2.2.2. La Integral de Itô

En lo sucesivo trataremos de darle sentido a las integrales del tipo:

$$\int_S^T X_t dZ_t,$$

donde X_t es una variable aleatoria en \mathbb{R} y Z_t es un movimiento browniano unidimensional.

De manera análoga a como se construye la integral de Lebesgue, primero definimos la integral de Itô sobre las funciones elementales de cierto conjunto que especificaremos más adelante, y luego extenderemos la definición a todo el conjunto, tomando el límite sobre las funciones elementales apropiadas.

Definición 2.17. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in T})$ un espacio filtrado, con la filtración inducida por el movimiento browniano Z_t . Sea $\mathcal{V} = \mathcal{V}(S, T)$, el conjunto de procesos estocásticos $\{f_t\}$, que cumplen las siguientes propiedades:

- (i) $f_t : T \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, es $\mathcal{B} \times \mathcal{F}$ – medible, donde \mathcal{B} es la σ – algebra de Borel de $[0, \infty)$.
- (ii) f_t es \mathcal{F}_t – adaptado.
- (iii) $E[\int_S^T f_t dt] < \infty$.

Definición 2.18. Una función $\phi_t \in \mathcal{V}$ se denomina elemental, si tiene la forma:

$$\phi_t(\omega) = \sum_{i=0}^n c_i(\omega) 1_{[t_i, t_{i+1})}.$$

Donde $c_i(\omega)$ son variables aleatorias \mathcal{F}_{t_i} – medibles y uniformemente acotadas, 1 es la función indicador y se tiene además $S = t_0 < t_1 \dots < t_n = T$.

Para funciones elementales definimos la integral de Itô de manera natural mediante la siguiente ecuación:

$$\int_S^T \phi_t(\omega) dZ_t(\omega) := \sum_{i=0}^n c_i(\omega) (Z_{t_{i+1}} - Z_{t_i})(\omega).$$

Los detalles de la construcción posterior se encuentran en [Oks]. El resultado final, luego de relajar progresivamente ciertas restricciones sobre las funciones en \mathcal{V} , es el siguiente.

Proposición 2.1. *Sea $f_t \in \mathcal{V}$. Existe una sucesión de funciones elementales $\{\phi_t^n\}_n$, tales que se cumple:*

$$E \left[\int_S^T (f_t - \phi_t^n)^2 dt \right] \rightarrow 0, \text{ cuando } n \rightarrow \infty.$$

De la proposición anterior se obtiene una definición consistente de la integral de Itô:

$$\int_S^T f_t dZ_t := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_S^T \phi_t^n dZ_t, \quad (\text{limite en } L^2(\mathbb{P})).$$

Donde la sucesión $\{\phi_t^n\}_n$ cumple la condición de la proposición anterior.

Para integrales sobre movimientos brownianos multidimensionales, la anterior construcción se extiende de la siguiente manera:

Definición 2.19. *Sea $Z = (Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$ movimiento browniano n -dimensional. Sea $\mathcal{V}^{m \times n}$ las matrices de $m \times n$ $v = [v_{ij}(t, w)]$ donde $v_{ij} \in \mathcal{V}(S, T)$. Usando notación matricial definimos:*

$$\int_S^T v dZ := \int_S^T \begin{pmatrix} v_{11} & \cdots & v_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{m1} & \cdots & v_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dZ_1 \\ \vdots \\ dZ_n \end{pmatrix}$$

Como nota final es importante observar que las condiciones (ii) y (iii) de la definición de $\mathcal{V}(S, T)$ (consecuentemente las de $\mathcal{V}^{m \times n}(S, T)$) pueden relajarse aún más para abarcar un rango mayor de variables aleatorias sobre las cuales se puede definir la integral de Itô. Los detalles se encuentran en [Oks].

2.2.3. Procesos de Itô y Resultados Importantes

Habiendo obtenido una definición consistente de la integral sobre movimientos brownianos, estamos en disposición de darle sentido a las ecuaciones diferenciales estocásticas, que son la herramienta fundamental para el modelaje del comportamiento de los precios de un activo en el tiempo.

Definición 2.20 (Procesos de Itô). *Un proceso de Itô es un proceso estocástico X_t en \mathbb{R}^n que cumple la siguiente ecuación:*

$$X_t = X_0 + \int_0^t u(s, \omega) ds + \int_0^t v(s, \omega) dZ.$$

Donde $Z_t = (Z_{t_1}, \dots, Z_{t_m})$ es un movimiento browniano m -dimensional, $u(s, \omega)$ es un proceso estocástico en \mathbb{R}^n , y $v(s, \omega) \in \mathcal{V}^{n \times m}$.

Podemos simplificar la notación de los procesos de Itô y escribirlos en notación diferencial, con lo cual el proceso de Itô descrito anteriormente toma la siguiente forma desplegada en un sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} dX_1 &= u_1 dt + v_{11} dZ_1 + \cdots + v_{1m} dZ_m \\ &\vdots \\ dX_n &= u_n dt + v_{n1} dZ_1 + \cdots + v_{nm} dZ_m \end{aligned}$$

O simplemente en notación matricial:

$$dX = u dt + v dZ$$

A continuación enunciaremos ciertos resultados pertinentes.

Teorema 2.2 (La Fórmula de Itô). *Sea $dX = u dt + v dZ$ un proceso de Itô como el descrito anteriormente y $g : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, con $g(t, x) = (g_1(t, x), \dots, g_p(t, x)) \in C^2$. Entonces el proceso estocástico*

$$Y(t, \omega) = g(t, X_t)$$

es también un proceso de Itô, donde Y_k está determinado por la ecuación:

$$dY_k = \frac{\partial g_k}{\partial t}(t, X) dt + \sum_i \frac{\partial g_k}{\partial x_i}(t, X) dX_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 g_k}{\partial x_i \partial x_j}(t, X) dX_i dX_j.$$

Donde $dZ_i dZ_j = \delta_{ij} dt$, $dZ_i dt = dt dZ_i = dt dt = 0$.

Teorema 2.3 (Teorema de Representación de Martingalas). *Sea Z_t movimiento browniano n -dimensional, Y M_t martingala sobre la filtración natural de Z_t , tal que $M_t \in L^2(\mathbb{P})$. Entonces existe un proceso estocástico único $g(s, \omega) \in \mathcal{V}^n$, tal que M_t sigue el siguiente proceso de Itô:*

$$M_t = E[M_0] + \int_0^t g(s, \omega) dZ.$$

La igualdad expresada anteriormente se da *casi siempre*, lo que quiere decir que el conjunto de puntos donde no se da la igualdad tiene medida cero bajo la medida de probabilidad \mathbb{P} .

Teorema 2.4 (Teorema de Girsanov). *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in T})$ un espacio filtrado con la filtración inducida por Z , movimiento browniano m -dimensional. Sea Y_t un proceso de Itô de la forma:*

$$dY = \beta(t, \omega)dt + \theta(t, \omega)dZ_t, \quad t \leq T.$$

Donde $\beta(t, \omega) \in \mathbb{R}^n$ y $\theta(t, \omega) \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Suponga que existen procesos $u(t, \omega) \in \mathcal{V}^m$, $\alpha(t, \omega) \in \mathcal{V}^n$, tales que se cumple:

$$\theta(t, \omega)u(t, \omega) = \beta(t, \omega) - \alpha(t, \omega).$$

Donde u satisface:

$$E \left[e^{\frac{1}{2} \int_0^T u^2(s, \omega) ds} \right] < \infty.$$

Tome una nueva medida de probabilidad \mathbb{Q} sobre la σ -álgebra \mathcal{F}_T , tal que se cumple:

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \exp \left(- \int_0^t u(s, \omega) dZ - \frac{1}{2} \int_0^t u^2(s, \omega) ds \right).$$

Obtenemos entonces los siguientes resultados:

$$Z_t^{\mathbb{Q}} := \int_0^t u(s, \omega) ds + Z_t, \quad t \leq T.$$

Donde $Z_t^{\mathbb{Q}}$ es movimiento browniano y el proceso original es un proceso de Itô (ambos sobre la probabilidad \mathbb{Q}), con la forma:

$$dY^{\mathbb{Q}} = \alpha(t, \omega)dt + \theta(t, \omega)dZ^{\mathbb{Q}}$$

El teorema de Girsanov es de crucial relevancia en la valoración de derivados financieros, pues como veremos a más adelante, en todo mercado libre de arbitraje podemos encontrar una medida de probabilidad equivalente a la medida de probabilidad real, bajo la cual, todos los procesos pertinentes (descontados) se convierten en martingalas. El teorema de Girsanov nos dice el comportamiento de los procesos de Itô bajo tal cambio de medida. La idea general expresada aquí, será correctamente explorada en la Sección 2.5.

2.3. Fundamentos de Derivados Financieros

2.3.1. Supuestos Básicos

A lo largo de la exposición asumiremos que el mercado está condicionado por las siguientes restricciones:

- (i) No hay fricción.
- (ii) Las tasas de interés para el préstamo y el ahorro son iguales.
- (iii) El mercado es competitivo.
- (iv) Los agentes son racionales.
- (v) No hay arbitraje.

La condición (i) es la suposición de que no existen costos de transacción, ni impuestos. Tampoco se requieren márgenes mínimos, los agentes pueden comprar y vender activos en cantidades continuas e incluso, pueden vender activos que no poseen (vender corto).

La condición (iii) es la suposición de que los precios del mercado son independientes de las actividades de los agentes. Ningún agente está en la capacidad de modificar los precios del mercado, mediante las transacciones que efectúe, no importa que tan abundantes sean.

La condición (iv) supone que todos los agentes prefieren más que menos, pero no hace referencia explícita a las preferencias de los agentes frente al riesgo.

La condición (v) supone que el mercado no ofrece oportunidades de obtener ganancias seguras, sin inversión de capital.

Finalmente se asume que existe en el mercado un activo sin riesgo, que denominaremos de ahora en adelante como la cuenta en el mercado de dinero (en inglés *money market account*). Asumimos que el comportamiento de la cuenta en el mercado de dinero obedece la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$dB_t = rB_t dt, \quad B_0 = 1 \tag{2.1}$$

Donde asumimos por facilidad que r es constante. Esta restricción puede relajarse involucrando un comportamiento de r determinístico, o incluso es-

tocástico (consultar [Lee05], por ejemplo). La EDO anterior tiene solución:

$$B_t = e^{rt}, \quad B_0 = 1 \quad (2.2)$$

Al valor r , se le denominará, de ahora en adelante, como la tasa libre de riesgo.

2.3.2. La Inclusión de Dividendos Continuos

Antes de continuar hacemos un breve excursio para explicar el comportamiento de los activos cuando se considera el pago de dividendos continuos. El siguiente análisis se encuentra en [Hull]. Cuando el activo a analizar recibe dividendos en múltiples ocasiones, como es el caso del índice S&P500, ya que cada uno de los activos que componen el índice recibe dividendos en momentos diferentes, podemos tratar el pago de dividendos de manera continua, para facilitar los cálculos.

Consideremos, para simplificar, un activo que paga dividendos en una fecha determinada. Si el valor del activo permaneciera igual luego del pago de dividendos, se presentarían oportunidades de arbitraje, pues se abriría la posibilidad de que alguien comprara el activo justo antes del pago de dividendos, y lo vendiera justo después de recibirlos a un precio igual al precio de compra, obteniendo una ganancia neta sin riesgo, de igual magnitud al dividendo pagado.

En el caso continuo, de manera similar, el retorno de un activo que paga dividendos se ve disminuído de manera continua en proporción al monto de los dividendos. De lo anterior, podemos inferir una regla de fácil aplicación, para incluir activos con dividendos continuos y que exponemos a continuación.

Considérese un activo que paga dividendos continuos a una tasa q , y que de un precio original de S_0 evoluciona a un precio S_T , en el tiempo T . El mismo activo sin dividendos, evolucionaría, según el análisis anterior, de S_0 a un valor de $S_T e^{qT}$ en el tiempo T . De manera análoga, evolucionaría de un valor original de $S_0 e^{-qT}$, a un valor de S_T en el tiempo T . En el caso de opciones con tiempo de maduración T , obtenemos que la distribución del valor del activo en T es la misma, si la consideramos de las dos maneras siguientes:

1). El precio en el tiempo 0 es S_0 y el activo paga dividendos continuos a una

tasa q .

2). El precio en el tiempo 0 es S_0e^{-qT} y el activo no paga dividendos.

Nótese además, que el análisis anterior es independiente del modelo de precios que supongamos, y se basa únicamente en el supuesto de no arbitraje. Por lo tanto, los resultados son aplicables en particular, tanto al modelo de Black-Scholes, que expondremos más adelante, como al modelo de Heston, que es objeto de esta dicertación.

2.3.3. Derivados Financieros

Definición 2.21. *Un pago contingente (en inglés *contingent claim*) es un contrato financiero, cuyo valor en el tiempo de expiración T , está completamente determinado por el valor de otros activos en el lapso $[0, T]$.*

Definición 2.22. *Una opción es un tipo de pago contingente que da el derecho, más no la obligación de efectuar cierta transacción durante un intervalo de tiempo determinado $[0, T]$.*

El tema central de ésta investigación es la valoración de cierto tipo de opciones, que definimos a continuación, suponiendo que el precio de los activos sigue el modelo propuesto por Steven Heston en [Hes93].

Definición 2.23. *La opción CALL europea, es un contrato en el cual el comprador de la opción tiene el derecho de comprar cierto activo S , a un precio pactado de antemano, K , exáctamente en un tiempo futuro T . Al activo subyacente S se le denominará de ahora en adelante el **Spot**, al precio pactado K se le denominará de ahora en adelante el **Strike**, y al tiempo T se le denominará de ahora en adelante **tiempo de maduración**.*

Nótese que el valor de la opción CALL europea en el tiempo de maduración T está completamente determinado por el valor del Spot mediante la ecuación:

$$C_T(S_T, K) = (S_T - K)^+.$$

Donde $(S_T - K)^+$ denota el máximo entre $(S_T - K)$ y 0. Para entender lo anterior basta notar que en el caso en que $S_T > K$, la opción se ejerce y el activo, comprado en un valor K , puede venderse inmediatamente en el

mercado a un precio S_T , obteniendo una ganancia de $(S_T - K)$. En el caso en que $S_T \leq K$, simplemente la opción no es ejercida y su valor es 0.

Definición 2.24. *La opción PUT europea, sobre los mismos parámetros S , K , T , ofrece al comprador el derecho, más no la obligación, de vender el activo S al precio pactado K .*

El valor de la opción PUT europea, en el tiempo de maduración T está determinado por la ecuación:

$$P_T(S_T, K) = (K - S_T)^+.$$

Definición 2.25. *Los términos: 'at the money' **ATM**, 'in the money' **ITM** y 'out of the money' **OTM**, se refieren a la relación que existe entre el Spot y el Strike de las opciones europeas. En particular, una opción **ATM** (tanto CALL como PUT) es aquella en donde $S \approx K$. Una opción **ITM**, es una opción con alta probabilidad de ejercicio ($S \gg K$ para CALLS, $K \gg S$ para PUTS). Finalmente una opción **OTM**, es una opción con baja probabilidad de ejercicio ($S \ll K$ para CALLS, $K \ll S$ para PUTS).*

A continuación exponemos una relación de suma importancia entre el valor de las opciones CALL y PUT europeas.

Proposición 2.2 (Paridad de CALL-PUT). *El valor de las opciones CALL (C) y PUT (P), sobre los mismos parámetros S_0 , K , T y donde el activo S no paga dividendos, cumple la siguiente ecuación:*

$$C + Ke^{-rT} = P + S_0$$

Demostración. Considere dos portafolios cuyo valor inicial está dado por:

$$\Pi_1 = C + Ke^{-rT}$$

$$\Pi_2 = P + S_0$$

El primer portafolio consiste en una opción CALL y una cantidad Ke^{-rT} invertida en el mercado de dinero. El segundo portafolio consiste en una opción PUT y una acción del subyacente S . En el tiempo de maduración T , ambos portafolios valen $\max(S_T, K)$. Como las opciones solo pueden ser ejercidas en $t = T$, tenemos que el valor de ambos portafolios en $t = 0$ debe ser el mismo para evitar oportunidades de arbitraje. \square

En el caso en que el activo subyacente S pague dividendos continuos a una tasa q , podemos incorporar los resultados obtenidos en la sección inmediatamente anterior, con lo que la relación de paridad se expresa de la siguiente manera:

$$C + Ke^{-rT} = P + S_0e^{-qT}$$

2.4. El Modelo de Black-Scholes

El modelo de Black-Scholes supone que el comportamiento del precio de los activos sigue una ecuación diferencial estocástica de la forma:

$$dS = \mu Sdt + S\sigma dZ$$

Donde μ y σ son constantes, y Z es un movimiento browniano estándar unidimensional. A la constante μ se le denomina el *drift* del activo, y es el monto esperado del retorno del activo. La constante σ se denomina la *volatilidad*, y es una medida de la variabilidad en el precio del activo.

A continuación exponemos un resultado de suma importancia a la hora de evaluar la corrección del modelo de Black-Scholes frente al comportamiento real de los mercados.

Proposición 2.3. *La distribución de S_t satisface:*

$$\ln(S_t) - \ln(S_0) \sim N\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t, \sigma^2t\right), \forall t \geq 0.$$

Donde $N(a, b)$ es una distribución normal con media a y varianza b .

Demostración. Expondremos la demostración detallada como ejemplo de la aplicación de la fórmula de Itô. Tome $g(S) = \ln(S)$. Tenemos entonces:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial t} &= 0 \\ \frac{\partial g}{\partial S} &= \frac{1}{S} \\ \frac{\partial^2 g}{\partial S^2} &= -\frac{1}{S^2} \end{aligned}$$

Según la fórmula de Itô, tenemos:

$$d \ln S = \frac{1}{S} dS - \frac{1}{2} \frac{1}{S^2} (dS)^2$$

Ahora bien:

$$(dS)^2 = \mu^2 S^2 (dt)^2 + 2\mu\sigma S^2 dt dZ + \sigma^2 S^2 (dZ)^2 = \sigma^2 S^2 dt$$

Reemplazando en la ecuación anterior obtenemos:

$$d \ln S = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt + \sigma dZ$$

Reescribiendo en notación integral obtenemos:

$$\ln(S_t) = \ln(S_0) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) \int_0^t ds + \sigma \int_0^t dZ = \ln(S_0) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma(Z_t - Z_0)$$

El resultado se sigue de las propiedades del movimiento browniano Z_t . \square

Según el resultado anterior, diremos que el Spot es log-normal, o equivalentemente que el log-spot es normal. A lo largo de esta dicertación se usarán ambas expresiones, para referirnos a la distribución normal del logaritmo natural del activo S , implicada en el modelo de Black-Scholes.

A continuación expondremos la fórmula de valoración para las opciones CALL y PUT, derivadas del modelo de precios de Black-Scholes. El análisis fue originalmente propuesto por Fischer Black y Myron Scholes en [BS]. Exponemos la parte fundamental de la demostración, por dos razones principales: primero, porque el análisis de Black y Scholes fue todo un hito en la incipiente teoría de la valoración de derivados financieros en el momento de su publicación. En segundo lugar, como ilustración de la solución del problema de valoración, a través de ecuaciones diferenciales parciales. Como veremos en la siguiente sección, existe otra manera de resolver el mismo problema, mediante un cambio de medida de probabilidad, que hace que el valor descontado de todos los activos involucrados en un mercado particular (incluidos los pagos contingentes sobre los activos básicos) sean martingalas. A esta última se le denomina valoración de riesgo neutral, pues bajo la nueva medida de probabilidad, todos los activos comparten la misma tasa esperada de retorno (la tasa de retorno de la cuenta en el mercado de dinero), independientemente del riesgo involucrado en cada uno de ellos.

En términos generales los dos métodos mencionados anteriormente: la reducción del problema a la solución de una EDP, y la valoración de riesgo neutral, son los métodos de preferencia (muy probablemente los únicos que se han desarrollado) para la solución del problema de valoración de derivados. El artículo original de Heston hace uso del primer método, mientras que la solución general al problema de valoración, que expondremos en ésta dicertación, hace uso del segundo.

Teorema 2.5 (Valoración de Black-Scholes). *El valor de las opciones CALL y PUT europeas, sobre un activo S que no paga dividendos, está determinado, según el modelo de Black-Scholes, por las siguientes ecuaciones:*

$$BS_C(S_0, K, T, r, \sigma) = S_0 N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2) \quad (2.3)$$

$$BS_P(S_0, K, T, r, \sigma) = Ke^{-rT} N(-d_2) - S_0 N(-d_1) \quad (2.4)$$

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad (2.5)$$

$$d_2 = \frac{\ln(S_0/K) + (r - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T} \quad (2.6)$$

Donde $N(\cdot)$ es la función de distribución acumulada para la normal estándar.

Demostración. Sea $V(S, t)$ el valor de un pago contingente cualquiera sobre el activo S . Según la fórmula de Itô, obtenemos:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial S} dS + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} (dS)^2 \quad (2.7)$$

Considere a continuación un portafolio constituido por una unidad corta del pago contingente y la posesión de $\frac{\partial V}{\partial S}$ unidades del activo S . El valor del portafolio está determinado entonces por las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \Pi &= -V + \frac{\partial V}{\partial S} S \\ d\Pi &= -dV + \frac{\partial V}{\partial S} dS \end{aligned} \quad (2.8)$$

Sustituyendo la ecuación (2.7) en (2.8), y teniendo en cuenta que $(dS)^2 =$

$\sigma^2 S^2 dt$, obtenemos:

$$\begin{aligned} d\Pi &= - \left(\frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial S} dS + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 dt \right) + \frac{\partial V}{\partial S} dS = \\ &= - \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt \end{aligned} \quad (2.9)$$

Nótese que hemos eliminado el riesgo involucrado en el parámetro estocástico dZ construyendo un portafolio de la manera apropiada. Como el cambio en el valor del portafolio es entéramente determinístico, para evitar posibilidades de arbitraje, el cambio en el valor del portafolio debe ser igual al cambio en el valor de la cuenta sin riesgo en el mercado de dinero(ecuación (2.1)):

$$d\Pi = r\Pi dt$$

Sustituyendo (2.8) y (2.9) en la ecuación anterior obtenemos:

$$\begin{aligned} - \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt &= r \left(-V + \frac{\partial V}{\partial S} S \right) dt \\ rV &= \frac{\partial V}{\partial t} + r \frac{\partial V}{\partial S} S + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \end{aligned} \quad (2.10)$$

Nótese que la ecuación (2.10) es válida para cualquier pago contingente sobre S , y que además es una ecuación diferencial parcial sin componente estocástico. En el caso particular de las opciones CALL y PUT, la ecuación (2.10) debe ser resuelta sujeta a las condiciones de frontera respectivas:

$$\begin{aligned} V_C(S_T, T) &= (S_T - K)^+ \\ V_P(S_T, T) &= (K - S_T)^+ \end{aligned}$$

Los pasos siguientes son tediosos y no los expondremos detalladamente. Bajo ciertos cambios de variable, más o menos mecánicos, la ecuación diferencial parcial (2.10) puede ser transformada en la ecuación de calor, y resuelta sobre las nuevas condiciones de frontera, que resultan de aplicar los mismos cambios de variable sobre las condiciones de frontera originales. La solución de la ecuación obtiene los resultados enunciados en el teorema. \square

En el caso en que consideremos un activo que paga dividendos continuos a una tasa q , bastará reemplazar S_0 por $S_0 e^{-qT}$ en el conjunto de ecuaciones enunciado en el teorema anterior.

En general, la posibilidad de eliminar completamente el riesgo es una característica de los mercados completos. Dado que el origen del riesgo involucrado en la opción es el mismo que el del activo, podemos eliminarlo completamente construyendo un portafolio de la manera adecuada. En general, los inversionistas requieren una prima sobre la tasa libre de riesgo, denominada comunmente el *precio de mercado del riesgo* (en inglés *market price of risk*) que depende del nivel de riesgo involucrado en un portafolio particular. En el caso del modelo de Black-Scholes, hemos eliminado completamente el riesgo involucrado en el portafolio $\Pi = -V + \frac{\partial V}{\partial S}S$, y por lo tanto la expresión para el *precio de mercado del riesgo* no necesita aparecer en la fórmula de valoración.

Como veremos más adelante, al modelar la volatilidad como un proceso estocástico diferente al proceso mismo del activo, se pierde la capacidad para eliminar completamente el riesgo construyendo un portafolio únicamente sobre el activo subyacente, la cuenta en el mercado de dinero y la opción, puesto que el riesgo involucrado en la volatilidad estocástica estaría aún presente. Por lo tanto, el riesgo de la volatilidad está presente en cualquier portafolio construido únicamente sobre los tres activos mencionados anteriormente. Lo anterior trae como consecuencia, que el *precio de mercado del riesgo (de la volatilidad)*, aparece de hecho en la fórmula de valoración, y por lo tanto es necesario adoptar ciertos supuestos, acerca de las preferencias frente al riesgo de los agentes dentro del mercado particular. La idea general, expresada aquí, será correctamente explorada en el Capítulo 3.

A continuación exponemos dos últimos resultados acerca del modelo de Black-Scholes, que serán útiles en el Capítulo 5.

Proposición 2.4. *La valoración según el modelo de Black-Scholes cumple la relación de paridad entre opciones CALL y PUT. Tenemos:*

$$BS_C(S_0, K, T, r, q, \sigma) + Ke^{-rT} = BS_P(S_0, K, T, r, q, \sigma) + S_0e^{-qT} \quad (2.11)$$

Proposición 2.5. *Tanto $BS_C(S_0, K, T, r, q, \sigma)$, como $BS_P(S_0, K, T, r, q, \sigma)$ son estrictamente crecientes en σ , para parámetros fijos S_0, K, T, r, q .*

2.5. Valoración de Riesgo Neutral

El propósito de esta sección es doble. Por un lado se formalizarán ciertos conceptos que hemos definido de manera vaga: *pagos contingentes*, *mercados sin arbitraje* y *mercados completos*. Por otro lado desarrollaremos la teoría concerniente al método denominado anteriormente como *valoración de riesgo neutral* y su conexión con los conceptos anteriores.

2.5.1. Modelo General de Mercado

Partimos de un modelo general que cumple las condiciones estipuladas en la sección 2.3, y asumimos que los agentes pueden efectuar transacciones de manera continua dentro de un horizonte de tiempo determinado $(0, T)$. Partimos de un espacio filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \leq T})$, donde \mathcal{F}_0 es trivial (i.e. $\mathbb{P}(F) = 0$, o, $\mathbb{P}(F) = 1, \forall F \in \mathcal{F}_0$), y además $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$. Añadimos además, un proceso estocástico adaptado $S = (S_0, S_1, \dots, S_d)$, de dimensión $d + 1$, que representa el precio de los $d + 1$ activos básicos del mercado. Asumimos que S es, continuo, estrictamente positivo, y además es supermartingala en $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \leq T})$.

Definición 2.26. *Un numéraire es un proceso de precios X_t , casi siempre estrictamente positivo en $(0, T)$.*

Asumimos que S_0 es la cuenta en el mercado de dinero, $S_0(t) = B_t$, y lo tomaremos como numéraire. El papel del numéraire dentro del modelo, es el de unidad básica de medida: el proceso de precios indica la equivalencia de los activos con respecto a unidades del numéraire (por ejemplo, en el instante t el k -ésimo activo vale lo mismo que $S_k(t)$ unidades del numeráire).

Definición 2.27. *Un pago contingente es una variable aleatoria \mathcal{F}_T -medible.*

Como aceptamos que los agentes pueden efectuar transacciones de manera continua, necesitamos modelar de manera apropiada los portafolios de inversión. La siguiente definición se encarga de esto.

Definición 2.28. *Un portafolio dinámico es un proceso localmente acotado*

$$\varphi(t) = (\varphi_0(t), \dots, \varphi_d(t))$$

Que cumple con las siguientes restricciones:

- (i) $\int_0^T E[\varphi_0(t)]dt < \infty$
(ii) $\sum_{i=0}^d \int_0^T E[\varphi^2(t)]dt < \infty$

$\varphi_i(t)$ denota entonces el número de acciones del activo S_i que un agente posee en el tiempo t .

Definición 2.29. *Definimos de manera natural el valor de un portafolio $\varphi(t)$ en el tiempo t , mediante la siguiente ecuación:*

$$V_\varphi(t) = \sum_{i=0}^d \varphi_i(t)S_i(t), \quad \forall t \leq T.$$

Definimos además el proceso de ganancias según la ecuación:

$$G_\varphi(t) = \sum_{i=0}^d \int_0^t \varphi_i(s)dS_i \quad \forall t \leq T.$$

Finalmente, decimos que un portafolio $\varphi(t)$ es autofinanciado, si el proceso de ganancias cumple:

$$V_\varphi(t) = V_\varphi(0) + G_\varphi(t), \quad \forall t \leq T.$$

En palabras, un portafolio es autofinanciado, si las pérdidas o ganancias en las que se incurre al mantener tal estrategia de inversión, corresponden únicamente a la valorización o desvalorización de los activos, y no, a inyección o sustracción de capital externo.

Definición 2.30. *Definimos el proceso de precios descontado, mediante la siguiente ecuación:*

$$\tilde{S}(t) := \frac{S(t)}{S_0(t)} = (1, \tilde{S}_1(t), \dots, \tilde{S}_d(t))$$

Además, definimos el valor descontado de un portafolio mediante:

$$\tilde{V}_\varphi(t) := \frac{V_\varphi(t)}{S_0(t)} = \varphi_0(t) + \sum_{i=1}^d \varphi_i(t)\tilde{S}_i$$

Finalmente, definimos el proceso de ganancias descontado mediante:

$$\tilde{G}_\varphi(t) := \sum_{i=1}^d \int_0^t \varphi_i(s) d\tilde{S}_i$$

Nótese que en el proceso de ganancias no aparece el numéraire, puesto que el valor de aquel a través del tiempo es evidentemente constante con respecto a sí mismo. Por lo tanto, las ganancias descontadas de una inversión en el numéraire únicamente, son siempre iguales a 0.

2.5.2. Medidas Equivalentes de Martingala

Definición 2.31. Un portafolio autofinanciado φ se denomina una oportunidad de arbitraje, si su proceso de valor cumple:

- (i) $V_\varphi(0) = 0$.
- (ii) $\mathbb{P}(V_\varphi(T) \geq 0) = 1$.
- (iii) $\mathbb{P}(V_\varphi(T) > 0) > 0$.

Definición 2.32. Decimos que una medida de probabilidad \mathbb{Q} definida sobre (Ω, \mathcal{F}) es una medida equivalente de martingala fuerte (en inglés, strong equivalent martingale measure), si se cumple:

- (i) $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$ (ver Sección 2.1).
- (ii) \tilde{S} es una \mathbb{Q} – martingala.

Se denota \mathcal{P} , al conjunto de medidas equivalentes de martingala.

Proposición 2.6. $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$ es una medida de martingala, ssi, el proceso de precios bajo \mathbb{Q} puede escribirse de la forma:

$$dS_i = rS_i dt + dM_i$$

Definición 2.33. Un portafolio autofinanciado se denomina dominado (en relación al numéraire S_0) si $\tilde{V}_\varphi(t) \geq 0, \forall t \leq T$.

Se denota Φ al conjunto de portafolios dominados

Teorema 2.6. Si $\mathcal{P} \neq \emptyset$, entonces el modelo de mercado no tiene oportunidades de arbitraje en Φ .

Si estamos interesados en la valoración de pagos contingentes, el converso del teorema anterior sería de particular utilidad, pues podríamos utilizar el valor esperado sobre la medida equivalente de martingala como herramienta de valoración. Sin embargo, la condición de no arbitraje no es suficientemente fuerte para garantizar la existencia de las medidas de martingala. Expone-mos a continuación las condiciones suficientes para garantizar su existencia, así como el denominado 'Teorema Fundamental de la Valoración de Activos'.

Definición 2.34. *Un proceso de precios satisface NFLVR (siglas en ingles para 'no free lunch with vanishing risk'), si para cualquier sucesión $\{\varphi_n\}$ de portafolios tales que existe una sucesión $\{\delta_n\}$ que cumple:*

- (i) $V_{\varphi_n}(t) \geq -\delta_n$
- (ii) $\delta_n \rightarrow 0$, cuando $n \rightarrow \infty$

Se tiene que:

$V_{\varphi_n} \rightarrow 0$, cuando $n \rightarrow \infty$, en probabilidad.

Teorema 2.7 (Teorema Fundamental de la Valoración de Activos). *Para un modelo de mercado con precios acotados, existen medidas equivalentes de martingala, si y solo si, se cumple la condición NFLVN.*

2.5.3. Valoración de Riesgo Neutral

Según los resultados anteriores, suponemos que el Modelo de Mercado posee una medida equivalente de martingala fuerte \mathbb{Q} (lo que implica en particular, que el Modelo de Mercado no tiene oportunidades de arbitraje sobre los portafolios dominados).

Definición 2.35. *Un portafolio autofinanciado φ se denomina \mathbb{Q} -admisibile si su proceso descontado de ganancias,*

$$\tilde{G}_\varphi(t) = \int_0^t \varphi(s) \cdot d\tilde{S}$$

Es \mathbb{Q} - martingala.

Al conjunto de portafolios \mathbb{Q} - admisibles lo denotamos $\Phi(\mathbb{Q})$.

Similarmente al teorema (2.6), tenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.8. *El Modelo de Mercado no tiene oportunidades de arbitraje en $\Phi(\mathbb{Q})$.*

Definición 2.36.

(i) *Un pago contingente X se denomina alcanzable, si existe al menos un portafolio admisible φ , tal que $V_\varphi(T) = X$. Al portafolio φ lo denominamos un portafolio replicante.*

(ii) *Un Modelo de Mercado se denomina completo, si todo pago contingente es alcanzable.*

Nótese que si tenemos un mercado completo, la introducción de nuevos pagos sobre el modelo es superflua, pues cualquier pago contingente puede replicarse usando tan solo, los activos básicos que componían el modelo original. En cierta medida podría pensarse que los activos básicos *generan* (en el sentido de portafolios replicantes) cualquier pago contingente que se haya introducido posteriormente al modelo. Evidentemente, la valoración de cualquier pago contingente dentro de un modelo completo puede llevarse a cabo de manera directa, una vez se ha encontrado su portafolio replicante.

La existencia de portafolios replicantes en los mercados completos, junto con la existencia de una medida equivalente de martingala nos permite enunciar el siguiente teorema.

Teorema 2.9 (Fórmula de Valoración de Riesgo Neutral). *El proceso del precio de un pago contingente alcanzable está dado por:*

$$\Pi_X(t) = S_0(t)E_{\mathbb{Q}} \left[\frac{X}{S_0(T)} \middle| \mathcal{F}_t \right].$$

Corolario 2.1. *El valor de una opción CALL, sobre un activo A_t está determinado por:*

$$C_t(A_t, K) = S_0(t)E_{\mathbb{Q}} \left[\frac{(A_T - K)^+}{S_0(T)} \middle| \mathcal{F}_t \right].$$

Nótese que el corolario anterior no depende de la completitud del mercado, sino del hecho de que conocemos de manera determinística la función de pago de la opción CALL en el tiempo de maduración T , con respecto al valor de A_T .

Teorema 2.10. *Si la medida equivalente de martingala es única para el Modelo de Mercado, entonces el Modelo es completo.*

Según el teorema anterior, la fórmula de valoración tiene todavía un inconveniente: en el caso en que el Modelo de Mercado sea incompleto, existe más de una medida equivalente de martingala, y por lo tanto, no hay una única fórmula de valoración. Evidentemente la valoración mediante una u otra medida no tiene por qué coincidir, y por lo tanto necesitamos escoger una, introduciendo ciertas restricciones sobre el modelo. Como veremos en el capítulo siguiente, el modelo de Heston no es completo, y expondremos la solución de Heston al problema.

Capítulo 3

El Modelo de Heston

Una gran cantidad de modelos de precios diferentes al modelo de Black-Scholes, ha surgido en respuesta a sus múltiples limitaciones. Recordemos que según la proposición (2.3), el modelo de precios de Black-Scholes supone implícitamente que la distribución de precios es log-normal. Tal suposición es inconsistente con los datos reales del mercado, como se verá en el Capítulo 5, en donde se contrasta este supuesto con la distribución estadística del índice SP500. En general, el supuesto de log-normalidad de los precios no se cumple en ningún mercado; en la práctica, la distribución del logaritmo de los precios difiere de una distribución normal en dos aspectos fundamentales. En primer lugar, exhibe un pico mucho mayor que el pico de una distribución normal y sus colas son más anchas que las de dicha distribución. En segundo lugar, la distribución real puede exhibir cierta inclinación del pico hacia un lado, haciendo a una de las colas, aún más ancha que las de una distribución normal. Evidentemente, la especificación errónea de la distribución de precios acarrea errores en la valoración de derivados financieros. La relación explícita entre ambos fenómenos será explorada en el Capítulo 5.

En respuesta a lo anterior, desde finales de los años ochenta, se han llevado a cabo diversos intentos por producir un modelo de precios que se ajuste al comportamiento real, y más importante aún, se han desarrollado una serie de maneras de valorar derivados financieros sobre tales modelos. En especial se ha descartado la suposición de un comportamiento constante o determinístico de la volatilidad del activo, y se ha propuesto que la varianza se comporta

de manera estocástica, al igual que éste.

En 1987, Hull y White [HW87] proponen un modelo con tales características, pero su fórmula de valoración resulta poco práctica ya que no está dada en forma cerrada y requiere el uso extenso de métodos numéricos. En 1991 [SS91], Stein y Stein proponen un nuevo modelo con volatilidad estocástica e incorporan dos novedades: primero introducen un proceso reversivo para el comportamiento de la varianza, que es más acorde con el comportamiento real, y en segundo lugar ofrecen una solución analítica de la fórmula de valoración.

Sin embargo, la introducción del comportamiento estocástico de la volatilidad aún no es suficiente para explicar el comportamiento de los precios bajo ciertas circunstancias. En particular, aunque la volatilidad estocástica logra dar cuenta del primer fenómeno mencionado al comienzo del capítulo, la inclinación de la distribución del logaritmo de los precios, presente en algunos mercados, no es correctamente modelada si no se incluye un factor de correlación entre el proceso de la varianza y el proceso mismo del activo. Desafortunadamente, los modelos de Hull y White, y Stein y Stein suponen una correlación con valor 0 para facilitar la derivación de la fórmula de valoración.

En 1993, Heston [Hes93], propone un modelo de precios que tiene en cuenta la correlación entre el activo y su varianza instantánea, y además logra dar una fórmula cerrada de valoración para la opción CALL europea.

En lo sucesivo, introduciremos el modelo de Heston, y obtendremos resultados importantes, además de mencionar ciertas características relevantes del proceso de la varianza propuesto por el modelo. La derivación de una fórmula de valoración para la CALL europea, así como sus aspectos computacionales serán tratados en el Capítulo 4.

3.1. El Modelo y el Proceso de la Varianza

El modelo de Heston es análogo al modelo de Black-Scholes en el proceso de precios, pero introduce un proceso estocástico para la varianza, en contraposición a una volatilidad constante o determinística. Los procesos están

determinados por las ecuaciones:

$$dS = \mu S dt + S\sqrt{V}dZ_S \quad (3.1)$$

$$dV = \kappa(\theta - V)dt + \sigma\sqrt{V}dZ_V \quad (3.2)$$

$$Z = (Z_S, Z_V), \text{ movimiento browniano } 2 - \text{ dimensional.} \quad (3.3)$$

$$dZ_S dZ_V = \rho dt \quad (3.4)$$

Donde se tiene además: $\kappa, \theta, \sigma > 0, \rho \in (-1, 1)$.

El proceso de la varianza es conocido bajo el nombre de *difusión de raíz cuadrada*, o *Modelo CIR*, ya que fue incorporado por los autores Cox, Ingersoll y Ross en [CIR85], para modelar estocásticamente las tasas de interés.

La última ecuación implica que la varianza instantánea está correlacionada con el precio del activo (con un índice de correlación ρ), y es una característica que se incluye para modelar ciertos fenómenos de los mercados reales: en particular un fenómeno que se denomina el efecto del apalancamiento, y que consiste en una correlación negativa. El modelo de Stein y Stein para el proceso de la varianza es idéntico al anteriormente descrito, pero con un índice de correlación fijo $\rho = 0$.

El parámetro σ , conocido como la volatilidad de la volatilidad, es una medida de la influencia estocástica sobre el proceso de la varianza, de manera similar al papel que juega la volatilidad misma sobre el proceso del precio. Nótese además, que tomando $\sigma = 0$ el modelo de Heston colapsa al modelo clásico de Black-Scholes con volatilidad determinística.

El componente determinístico del proceso de la varianza, $\kappa(\theta - V)$, implica que el proceso de la varianza es atraído en cualquier instante a un valor θ fijo, con una *fuerza* de magnitud κ . Un proceso de varianza que obedece la condición anterior se le denomina, en inglés, *mean-reverting volatility*.

Como veremos en el Capítulo 5, el parámetro σ presenta una influencia directa en la *kurtosis* (pico más alto y colas más anchas) de la distribución del log-spot, mientras que el parámetro ρ tiene influencia directa sobre la inclinación del pico de tal distribución. A continuación derivamos ciertos resultados pertinentes del proceso de la varianza, desarrollados originalmente por Feller en [Fel51] y por Cox, et. al. en [CIR85].

Proposición 3.1. *La fdp condicionada a un valor inicial $V_0 = v_0$, de la variable aleatoria V_t , $f_V(t, v|V_0 = v_0)$, está determinada por la siguiente ecuación:*

ción diferencial:

$$\frac{\partial f_V}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial v^2} \left[\frac{1}{2} \sigma^2 v f_V \right] - \frac{\partial}{\partial v} \left[(-\kappa v + \kappa \theta) f_V \right] \quad (3.5)$$

$$(3.6)$$

$$f_V(0, v | V_0 = v_0) = \delta(v - v_0) \quad (3.7)$$

Demostración. Por aplicación directa de la ecuación de Fokker-Planck, con:

$$D_1^1(v, t) = \kappa(\theta - v), \quad D_{11}^2 = \frac{1}{2} \sigma^2.$$

□

En el artículo citado anteriormente, Feller resuelve la ecuación diferencial para $u(x, t)$ con forma general $u_t = (axu)_{xx} - ((bx + c)u)_x$, con a , b y c constantes. Según los resultados de Feller, el comportamiento de $u(x, t)$ en la frontera $u(0, t)$, depende enteramente de los coeficientes a, b y c . Citando a Feller, Cox, Ingerson y Ross mencionan los siguientes resultados para el proceso de la varianza en [CIR85] (que en su caso, es el proceso de las tasas de interés).

Proposición 3.2 (El proceso de la Varianza: Condición de Feller). *Si se cumple $2\kappa\theta \geq \sigma^2$ ($c \geq a$ en el caso general resuelto por Feller), tenemos que $V_t > 0$ casi siempre. Si la condición no se cumple, $V_0 > 0$ implica $V_t \geq 0$. Además, tenemos:*

$$V_t \sim \frac{\sigma^2(1 - e^{-\kappa t})}{4\kappa} \chi_d'^2 \left(\frac{4\kappa e^{-\kappa t}}{\sigma^2(1 - e^{-\kappa t})} V_0 \right) \quad (3.8)$$

$$d = \frac{4\kappa\theta}{\sigma^2} \quad (3.9)$$

La distribución $\chi_v'^2(\lambda)$ es una chi-cuadrado descentrada, con v grados de libertad, y parámetro de descentralidad λ . El resultado anterior es importante por dos razones: en primer lugar, la condición de Feller garantiza que la varianza no puede ser igual a 0 (característica deseable, si deseamos modelar correctamente el proceso de precios), y en segundo lugar nos permite simular de manera exacta el proceso de la varianza, en el caso en que podamos tomar muestras aleatorias de una distribución $\chi_v'^2(\lambda)$.

3.2. El Proceso de Riesgo Neutral

Como se mencionó anteriormente, la fórmula de valoración para la CALL europea, que expondremos en el Capítulo 4, hace uso de la teoría de valoración de riesgo neutral. El propósito de esta Sección es derivar el proceso de precios bajo una Medida Equivalente de Martingala, así como formalizar el concepto de *precio de mercado del riesgo*, y exponer la restricción de Heston sobre el modelo, para determinar una MEM única.

Aplicando el Teorema de Girsanov (2.4) tenemos, según la notación usada para su formulación (teniendo cuidado de no confundir la matriz de coeficientes del componente estocástico θ_t , con el parámetro θ):

$$\theta_t = \begin{pmatrix} S\sqrt{V} & 0 \\ 0 & \sigma\sqrt{V} \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

$$\beta_t = \begin{pmatrix} \mu S \\ \kappa(\theta - V) \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

Si queremos que la nueva medida, \mathbb{Q} , sea en efecto una Medida de Martingala, necesitamos que el vector de coeficientes para el componente determinístico del proceso bajo \mathbb{Q} , cumpla:

$$\alpha_t = \begin{pmatrix} rS \\ \Lambda(S, V, t) \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

Donde $\Lambda(S, V, t)$ no está especificado aún. Según el teorema de Girsanov, \mathbb{Q} está determinada por su derivada de Radon-Nikodým:

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \exp \left(- \int_0^t u(s, \omega) dZ - \frac{1}{2} \int_0^t u^2(s, \omega) ds \right).$$

Con u_t proceso 2-dimensional que cumple:

$$\theta_t u_t = \beta_t - \alpha_t. \quad (3.13)$$

Evidentemente, hasta tanto α_t no sea completamente especificado, no existe un único u_t que sea solución de la ecuación anterior. Recordemos que en mercados incompletos, existe más de una Medida Equivalente de Martingala, luego el resultado no debe sorprendernos. En efecto, como la volatilidad no

es en sí misma un activo canjeable, ella misma es un proceso no alcanzable, haciendo que el Modelo de Mercado de Heston sea incompleto. Además, como la volatilidad no es un proceso alcanzable, no requerimos que su proceso descontado sea una martingala bajo \mathbb{Q} , lo que deja completamente indeterminado el coeficiente del componente determinístico $\Lambda(S, V, t)$. Para determinar $\Lambda(S, V, t)$, es necesario hacer ciertas suposiciones acerca de las preferencias frente al riesgo de los agentes en el mercado particular, como veremos a continuación.

Según la ecuación (3.13), tenemos que

$$u_t^1 = \frac{\mu - r}{\sqrt{V}} \quad (3.14)$$

$$u_t^2 = \frac{\kappa(\theta - V) - \Lambda(S, V, t)}{\sigma\sqrt{V}} \quad (3.15)$$

Al coeficiente u_t^1 se le denomina *precio de mercado del riesgo*, pues según la ecuación anterior, es una medida de la prima en el retorno esperado por encima de la tasa libre de riesgo, que los inversionistas requieren, por cada unidad de volatilidad. Por otro lado, al término $\sigma\sqrt{V}u_t^2$, se le conoce como *precio del mercado del riesgo de la volatilidad*. Para una explicación detallada del *precio de mercado del riesgo de la volatilidad*, mediante una aproximación por ecuaciones diferenciales parciales véase [Gat].

En el artículo original, Heston supone que el *precio de mercado del riesgo de la volatilidad* debe ser proporcional a ésta, por lo que tenemos $\sigma\sqrt{V}u_t^2 = \lambda V$, para una constante λ que se determina según las preferencias frente al riesgo de los agentes en el mercado particular. Tenemos entonces:

$$\Lambda(S, V, t) = \kappa(\theta - V) - \sigma\sqrt{V}u_t^2 = \kappa(\theta - V) - \lambda V$$

De la ecuación anterior, obtenemos entonces la forma general del proceso de precios bajo la MEM \mathbb{Q} , determinada por las ecuaciones:

$$dS^{\mathbb{Q}} = rSdt + S\sqrt{V}dZ_S^{\mathbb{Q}} \quad (3.16)$$

$$dV^{\mathbb{Q}} = \kappa'(\theta' - V) + \sigma\sqrt{V}dZ_V^{\mathbb{Q}} \quad (3.17)$$

$$dZ_S^{\mathbb{Q}}dZ_V^{\mathbb{Q}} = \rho dt \quad (3.18)$$

$$\kappa' = \kappa + \lambda \quad (3.19)$$

$$\theta' = \frac{\kappa\theta}{\kappa + \lambda} \quad (3.20)$$

Nótese que en realidad, la suposición de Heston aún no garantiza la unicidad de la Medida Equivalente de Martingala, pues tanto el proceso, como el término u_t^2 , todavía dependen de un parámetro indeterminado λ . Si quisiéramos encontrar los parámetros de riesgo neutral según el comportamiento histórico del Spot, deberíamos encontrar primero los parámetros sobre la medida real, y luego extraer el parámetro λ de un activo cuyo valor sea dependiente del proceso de la varianza (una opción por ejemplo). Sin embargo, como veremos más adelante en el Capítulo 5, la calibración del modelo mediante la serie histórica es bastante complicada, y es preferible calibrar sobre el precio de las opciones directamente. Como la fórmula de valoración depende del proceso de riesgo neutral, y no del proceso sobre la medida real, la calibración se efectúa directamente sobre los parámetros de riesgo neutral κ' y θ' , luego no hay necesidad de encontrar el parámetro λ de manera explícita.

Como se verá en el Capítulo siguiente, la fórmula de valoración depende de la función característica del log-spot, que derivaremos a continuación. De ahora en adelante, cuando nos refiramos al proceso de precios suponemos que se trata del proceso de precios de riesgo neutral, y de manera consistente, el cálculo de los valores esperados se efectúa bajo la Medida Equivalente de Martingala. En particular, no usaremos más las comillas para referirnos a los parámetros ajustados, ni haremos referencia explícita a \mathbb{Q} .

3.3. La Función Característica del log-spot

El propósito de esta Sección es derivar una expresión analítica para $\Phi_T(u) = E[e^{iu \ln S_T}]$. Seguimos el análisis de Heston en su artículo original.

En primer lugar, haremos un cambio de variable, para facilitar la derivación de la función característica, tomando:

$$\begin{aligned} R_t &= \ln \left(\frac{S_t}{S_0} \right) - rt \\ \Phi_T(u) &= E[e^{iu \ln S_T}] = E[e^{iu R_T}] e^{iu(\ln(S_0) + rT)} \end{aligned} \quad (3.21)$$

Aplicando la fórmula de Itô para R_t obtenemos:

$$\begin{aligned} dR &= -\frac{1}{2}Vdt + \sqrt{V}dZ_1 \\ dV &= \kappa(\theta - V)dt + \sigma\sqrt{V}dZ_2 \\ dZ_1dZ_2 &= \rho dt \end{aligned}$$

Tomamos ahora una función de la forma:

$$f(R, V, t) = E[g(R(T), V(T)) | R(t) = R, V(t) = V], \text{ donde } t \in [0, T] \quad (3.22)$$

Nótese que se tiene:

$$f(R, V, T) = E[g(R(T), V(T)) | R(T) = R, V(T) = V] = g(R, V) \quad (3.23)$$

Pues en $t = T$, $g(R(T), V(T))$ deja de ser aleatorio. Aplicando la fórmula de Itô para $f(R, V, t)$, obtenemos:

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial R}dR + \frac{\partial f}{\partial V}dV + \\ &+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial R^2}dR^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial V^2}dV^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial R\partial V}dRdV \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$dR^2 = Vdt \quad (3.25)$$

$$dV^2 = \sigma^2Vdt \quad (3.26)$$

$$dRdV = \rho\sigma Vdt \quad (3.27)$$

Expandiendo la ecuación anterior obtenemos:

$$\begin{aligned} df &= \left[\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2}V\frac{\partial f}{\partial R} + \kappa(\theta - V)\frac{\partial f}{\partial V} + \right. \\ &+ \frac{1}{2}V\frac{\partial^2 f}{\partial R^2} + \frac{1}{2}\sigma^2V\frac{\partial^2 f}{\partial V^2} + \rho\sigma V\frac{\partial^2 f}{\partial R\partial V} \left. \right] dt + \\ &+ \sqrt{V}\frac{\partial f}{\partial R}dZ_1 + \sigma\sqrt{V}\frac{\partial f}{\partial V}dZ_2 \end{aligned} \quad (3.28)$$

Ahora bien, por espectación iterada, f es martingala, al igual que Z_1 y Z_2 , tenemos entonces $E[df] = E[dZ_1] = E[dZ_2] = 0$. Por lo tanto, tomando el

valor esperado a ambos lados, obtenemos una ecuación diferencial parcial sin componente estocástico de la forma:

$$0 = \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2}V \frac{\partial f}{\partial R} + \kappa(\theta - V) \frac{\partial f}{\partial V} + \frac{1}{2}V \frac{\partial^2 f}{\partial R^2} + \frac{1}{2}\sigma^2 V \frac{\partial^2 f}{\partial V^2} + \rho\sigma V \frac{\partial^2 f}{\partial R \partial V} \quad (3.29)$$

Finalmente, tomando $g(R, V) = e^{iuR}$, tenemos que la EDP anterior determina la función característica de R . La condición de frontera, resulta de la ecuación (3.23), $f(R, V, T) = e^{iuR_T}$.

Se propone una solución de la forma:

$$f(R, V, \tau) = e^{A(u, \tau) + B_V(u, \tau)V_{(T-\tau)} + iuR_{(T-\tau)}} \quad (3.30)$$

$$A(u, 0) = 0 \quad (3.31)$$

$$B_V(u, 0) = 0 \quad (3.32)$$

$$\tau = T - t; \quad (3.33)$$

A partir de aquí, seguimos la solución de Lord y Khal en [LK06].

Sustituyendo la solución propuesta en la ecuación (3.29), obtenemos:

$$\begin{aligned} 0 = & -\frac{dA}{d\tau} - \frac{dB_V}{d\tau}V - \frac{1}{2}Viu + \kappa(\theta - V)B_V - \\ & - \frac{1}{2}Vu^2 + \frac{1}{2}\sigma^2VB_V^2 + \rho\sigma ViuB_V \end{aligned} \quad (3.34)$$

Finalmente, obtenemos una ecuación diferencial de Riccati para el coeficiente $B_V(u, \tau)$ tomando:

$$\frac{dA}{d\tau} = \kappa\theta B_V \quad (3.35)$$

Sustituyendo de nuevo en la ecuación anterior y cancelando el término V :

$$\frac{dB_V}{d\tau} = \hat{\alpha}(u) - \beta(u)B_V + \gamma B_V^2 \quad (3.36)$$

$$\hat{\alpha}(u) = -\frac{1}{2}u(i + u) \quad (3.37)$$

$$\beta(u) = \kappa - \rho\sigma ui \quad (3.38)$$

$$\gamma = \frac{1}{2}\sigma^2 \quad (3.39)$$

Factorizando el lado derecho de la ecuación (3.36), obtenemos:

$$\frac{dB_V}{d\tau} = \gamma(B_V - a)(B_V - b) \quad (3.40)$$

$$a = \frac{\beta + D}{\sigma^2} \quad (3.41)$$

$$b = \frac{\beta - D}{\sigma^2} \quad (3.42)$$

$$D = \sqrt{\beta^2 - 4\hat{\alpha}\gamma} \quad (3.43)$$

La ecuación anterior sugiere una solución para B_V , de la forma:

$$B_V(u, \tau) = ab \frac{e^{(b-a)\gamma\tau} - 1}{be^{(b-a)\gamma\tau} - a} \quad (3.44)$$

Por lo tanto $B_V(u, \tau)$ está determinada por:

$$B_V(u, \tau) = \frac{\beta(u) - D(u)}{\sigma^2} \left(\frac{e^{-D(u)\tau} - 1}{G(u)e^{-D(u)\tau} - 1} \right) \quad (3.45)$$

$$G(u) = \frac{\beta(u) - D(u)}{\beta(u) + D(u)}$$

Finalmente, tenemos por la ecuación (3.35):

$$\begin{aligned} A(u, \tau) &= \kappa\theta \int_0^\tau B_V(u, s) ds = \kappa\theta \frac{\beta - D}{\sigma^2} \int_0^\tau \frac{e^{-Ds} - 1}{Ge^{-Ds} - 1} ds = \\ &= \kappa\theta \frac{\beta - D}{D\sigma^2} \int_G^{Ge^{-D\tau}} \frac{z/G - 1}{z(1 - z)} dz = \\ &= \kappa\theta \frac{\beta - D}{\sigma^2 D} \left[\frac{(G - 1) \ln(z - 1) - G \ln z}{G} \right]_G^{Ge^{-D\tau}} = \\ &= \frac{\kappa\theta}{\sigma^2} \left[(\beta - D)\tau - 2 \ln \left(\frac{Ge^{-D\tau} - 1}{G - 1} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.46)$$

Enunciamos el resultado del análisis anterior, como teorema.

Teorema 3.1. *La función característica del log-spot está determinada por la ecuación:*

$$\Phi_T(u) = e^{iu(\ln S_0 + rT) + A(u, T) + B_V(u, T)V_0} \quad (3.47)$$

Demostración. Tomando, $\tau = T$ en la ecuación (3.30) y notando que $R_0 = 0$, el resultado se sigue de la ecuación (3.21). \square

Finalmente hacemos notar que la solución que hallamos aquí, aunque es algebraicamente idéntica a la solución de Heston en el artículo original, está expresada de manera diferente. Hubiésemos podido expresar la solución para $B_V(u, \tau)$ como:

$$B_V(u, \tau) = ab \frac{e^{(a-b)\gamma\tau} - 1}{ae^{(a-b)\gamma\tau} - b} \quad (3.48)$$

En lugar de la manera en que está expresada en la ecuación (3.44). De haberlo hecho, hubiésemos encontrado una expresión idéntica a la usada por Heston, para los coeficientes B_V y A :

$$B_V(u, T) = \frac{\beta(u) + D(u)}{\sigma^2} \left(\frac{e^{D(u)T} - 1}{c(u)e^{D(u)T} - 1} \right). \quad (3.49)$$

$$A(u, T) = \frac{\kappa\theta}{\sigma^2} [(\beta(u) + D(u))T - 2 \ln F_1(u)].$$

$$c(u) = \frac{1}{G(u)}.$$

$$F_1(u) = \frac{c(u)e^{D(u)T} - 1}{c(u) - 1}. \quad (3.50)$$

Como veremos en la Sección 4.4, la escogencia de una u otra formulación es de vital importancia en la implementación computacional.

Capítulo 4

La Fórmula de Valoración

El propósito de este capítulo es derivar detalladamente la fórmula de valoración de opciones tipo CALL desarrollada por Carr y Madan en [CM99], y de igual manera exponer sus aspectos computacionales. Preferimos exponer el análisis de Carr y Madan sobre el de Heston por dos razones fundamentales: en primer lugar porque es la fórmula de Carr y Madan la que usaremos en la implementación computacional y en segundo lugar porque la fórmula general desarrollada por Carr y Madan es independiente del modelo de precios y por lo tanto incluye como caso particular a la fórmula de Heston. Para aquel que esté interesado, los detalles de la formulación de Heston pueden encontrarse en el artículo original del autor [Hes93].

No obstante, antes de continuar consideramos importante señalar las diferencias fundamentales entre una y otra formulación. La fórmula de valoración desarrollada por Heston puede expresarse de manera sucinta y análoga a la solución para el modelo de Black-Scholes como:

$$C(S, K, T) = Se^{rT}\Pi_1 - K\Pi_2$$

donde

$$\Pi_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \Re\left(\frac{e^{-iuk}\Phi_T(u-i)}{iu\Phi_T(-i)}\right) du$$

$$\Pi_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \Re\left(\frac{e^{-iuk}\Phi_T(u)}{iu}\right) du$$

y $\Phi_T(u) = E[e^{iu \ln S_T}]$ es la función característica del logaritmo del spot en el tiempo de *maduración* T .

La solución de las integrales en la fórmula de Heston requiere el uso de métodos de integración numérica, lo que supone la posibilidad de incurrir en errores de aproximación y posiblemente un costo computacional alto. La fórmula de Carr y Madan ofrece al menos dos ventajas en términos computacionales sobre la formulación de Heston: en primer lugar reduce el número de integrales a tan solo una, lo que minimiza tanto el riesgo de errores numéricos como el costo computacional, y en segundo lugar involucra un parámetro adicional que puede ser controlado por el usuario dentro de ciertas restricciones y que puede cambiar de manera radical la forma general del integrando para evitar oscilaciones fuertes del mismo, permitiendo una integración numérica más confiable.

4.1. La Fórmula de Valoración de Carr y Madan

Teorema 4.1. Sean $x_T = \ln(S_T)$ el log-spot en el tiempo de maduración T , $\Phi_T(u)$ la función característica de x_T , $k = \ln(K)$ y $\alpha > 0$ tal que $E[S_T^{\alpha+1}] < \infty$. Suponga que la tasa libre de riesgo es constante y que la fdp de x_T existe. El valor de la opción CALL en $t=0$ es:

$$C_0(S_0, k) = \frac{e^{-\alpha k}}{\pi} \int_0^{\infty} \Re(e^{-iuk} \varphi(u)) du$$

donde $\varphi(u) = \frac{e^{-rT} \Phi_T(u - (\alpha+1)i)}{-(u-i\alpha)(u-i(\alpha+1))}$.

Demostración. Considere la transformada de Fourier

$$\varphi(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iuk} e^{\alpha k} C_0(S_0, k) dk \quad (4.1)$$

donde el parámetro α se fija para garantizar la existencia de la integral. Podemos recuperar el valor de la opción efectuando la transformada inversa:

$$C_0(S_0, k) = \frac{e^{-\alpha k}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Re(e^{-iuk} \varphi(u)) du = \frac{e^{-\alpha k}}{\pi} \int_0^{\infty} \Re(e^{-iuk} \varphi(u)) du. \quad (4.2)$$

La última igualdad es cierta puesto que $C_0(S_0, k) \in \mathbb{R}$, lo que implica que el integrando es impar en su parte imaginaria y par en su parte real. Basta entonces encontrar una expresión para $\varphi(u)$, en términos de $\Phi_T(u)$. Por el corolario (2.1), tenemos que:

$$C_0(S_0, k) = E[e^{-rT} C_T(S_T, k)] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-rT} (e^w - e^k)^+ f_{x_T}(w) dw. \quad (4.3)$$

donde f_{x_T} denota la fdp de x_T . Reemplazando (4.3) en (4.1) obtenemos:

$$\begin{aligned} \varphi(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iuk} e^{\alpha k} e^{-rT} (e^w - e^k)^+ f_{x_T}(w) dw dk = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-rT} f_{x_T}(w) \int_{-\infty}^w (e^{w+\alpha k} - e^{(1+\alpha)k}) e^{iuk} dk dw = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-rT} f_{x_T}(w) \left(\frac{e^{w(\alpha+1+iu)}}{\alpha+iu} - \frac{e^{w(\alpha+1+iu)}}{\alpha+1+iu} \right) dw = \\ &= \frac{e^{-rT}}{-(u-i\alpha)(u-i(\alpha+1))} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(u-(\alpha+1)i)w} f_{x_T}(w) dw = \\ &= \frac{e^{-rT}}{-(u-i\alpha)(u-i(\alpha+1))} E[e^{i(u-(\alpha+1)i)x_T}] = \\ &= \frac{e^{-rT} \Phi_T(u - (\alpha+1)i)}{-(u-i\alpha)(u-i(\alpha+1))}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Para finalizar, es necesario encontrar las condiciones sobre α que garantizan la existencia de la transformada de Fourier en (4.1). Basta garantizar que se cumple:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |e^{\alpha k} C_0(S_0, k)| dk = \varphi(0) = \frac{e^{-rT} \Phi_T(-(\alpha+1)i)}{-(-i\alpha)(-i(\alpha+1))} < \infty.$$

Como el denominador de la expresión anterior es distinto de cero para $\alpha > 0$, aplicando la definición de la función característica, mostramos que la condición anterior se cumple cuando:

$$\begin{aligned} \Phi_T(-(\alpha+1)i) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{w(\alpha+1)} f_{x_T}(w) dw = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\ln(s)(\alpha+1)} f_{x_T}(\ln(s))}{s} ds = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} s^{\alpha+1} f_{S_T}(s) ds = E[S_T^{\alpha+1}] < \infty. \quad \square \end{aligned}$$

Como se anotó anteriormente, la fórmula de valoración de Carr y Madan es independiente del modelo de precios, pues su demostración no asume nada acerca de la forma de la función característica del log-spot. La fórmula es aplicable entonces a cualquier modelo de precios para el cual tengamos una expresión analítica de la función característica del log-spot, y garanticemos la existencia de la fdp del mismo. La relajación de ciertas restricciones de la fórmula de valoración de Carr y Madan como la existencia de la fdp, el comportamiento constante (o determinístico, a lo sumo) de la tasa libre de riesgo y la necesidad de que el parámetro α sea positivo, así como la extensión de la metodología desarrollada por ambos autores para la valoración de otro tipo de contratos diferentes de la CALL europea, es efectuada por Roger Lee en [Lee05].

Para aplicar la fórmula de valoración anterior, basta entonces reemplazar $\Phi_T(u)$, por la función característica del log-spot propia del modelo de precios propuesto por Heston, que ya fue desarrollada en el Capítulo 3 y que corresponde al teorema (3.1).

Antes de implementar de manera apropiada la fórmula de valoración para el caso específico del modelo de Heston, es necesario atender tres cuestiones diferentes: primero, encontrar un cambio de variable que finitice el intervalo de integración en la ecuación (4.2). En segundo lugar, es necesario encontrar el rango de α que garantice el cumplimiento de la última condición del teorema (4.1), y de ser posible encontrar un α que facilite la aplicación de una rutina de integración numérica. Por último, es necesario recordar que la función característica del log-spot involucra la evaluación del logaritmo complejo para calcular el término $A(u, T)$. Lo anterior plantea un serio problema para la implementación computacional, puesto que el logaritmo complejo es una función multivaluada, y la continuidad del logaritmo complejo que se requiere evaluar no está garantizada de antemano para cualquier rama prefijada. La evaluación del logaritmo complejo ejecutada por la mayoría de paquetes matemáticos se efectúa en la rama principal; como veremos más adelante, la expresión de $\Phi_T(u)$ del teorema (3.1) es continua si se escoge dicha rama.

Aunque una motivación principal para la formulación de Carr y Madan era aplicar un algoritmo de discretización de la inversa de Fourier conocido en inglés como *Fast Fourier Transform*, que consiste en expresar de manera aproximada la integral en (4.2) como una suma parcial, tal aproximación adolece de al menos dos fallas. En primer lugar, se incurre en errores de

discretización y truncamiento, al expresar la integral de Fourier como una sumatoria parcial. En segundo lugar, tanto para opciones OTM, como para opciones con tiempo de maduración breve, el integrando presenta fuertes oscilaciones, lo que obliga a los autores a modificar su método para esos casos específicos. Preferimos entonces seguir la aproximación de Lord y Khal en [LK06] y [LK07], artículos en los cuales, los tres problemas mencionados en el párrafo anterior son tratados detalladamente.

4.2. Transformación del Intervalo de Integración

El comportamiento asintótico del integrando en la ecuación (4.2) es derivado en [KJ05], y se enuncia en la siguiente proposición.

Proposición 4.1. *Sea $\Psi(u, \alpha) = \Re\left(\frac{e^{-iuk}\Phi_T(u-i(\alpha+1))}{-(u-i\alpha)(u-i(\alpha+1))}\right)$, y suponga que $\kappa, \theta, \sigma, T > 0$, $\rho \in (-1, 1)$. Se tiene entonces lo siguiente:*

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \Psi(u, \alpha) \approx \Psi(0, \alpha) \times e^{-uC_\infty} \times \Re\left(\frac{e^{iut_\infty}}{-u^2}\right) = \Psi(0, \alpha) \times e^{-uC_\infty} \times \frac{\cos(ut_\infty)}{-u^2}.$$

Con:

$$\begin{aligned} D_\infty &:= \sigma\sqrt{1-\rho^2} \\ C_\infty &:= \frac{\kappa\theta T}{\sigma^2}D_\infty - \frac{\sqrt{1-\rho^2}V_0}{\sigma} = \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\sigma}(V_0 + \kappa\theta T) \\ t_\infty &:= \frac{-\rho(\kappa\theta T + V_0)}{\sigma} + \ln\left(\frac{S_0 + rT}{K}\right) \end{aligned}$$

Demostración. Recordemos que según el teorema (3.1),

$$\Phi_T(u) = e^{iu(\ln S_0 + rT) + A(u, T) + B_V(u, T)V_0}$$

donde:

$$A(u, T) = \frac{\kappa\theta}{\sigma^2} \left((\beta(u) - D(u))T - 2 \ln \left(\frac{G(u)e^{-D(u)T} - 1}{G(u) - 1} \right) \right)$$

$$B_V(u, T) = \frac{\beta(u) - D(u)}{\sigma^2} \left(\frac{e^{-D(u)T} - 1}{G(u)e^{-D(u)T} - 1} \right)$$

$$D(u) = \sqrt{\beta(u)^2 - 4\hat{\alpha}(u)\gamma}, \quad G(u) = \frac{\beta(u) - D(u)}{\beta(u) + D(u)}$$

$$\hat{\alpha}(u) = \frac{-1}{2}u(i + u), \quad \beta(u) = \kappa - \rho\sigma ui, \quad \gamma = \frac{1}{2}\sigma^2.$$

Tenemos entonces:

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{D(u)}{u} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\kappa^2}{u^2} - \frac{2i\sigma(\kappa\rho - \frac{1}{2}\sigma)}{u} + \sigma^2(1 - \rho^2)} = \\ &= \sigma\sqrt{1 - \rho^2} := D_\infty \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow \infty} G(u) &= \frac{-\rho\sigma i - \sigma\sqrt{1 - \rho^2}}{-\rho\sigma i + \sigma\sqrt{1 - \rho^2}} = -\frac{(-\sigma\sqrt{1 - \rho^2} - \rho\sigma i)^2}{\sigma^2(1 - \rho^2) + \sigma^2\rho^2} = \\ &= -\frac{\sigma^2(1 - \rho^2) + 2i\sigma^2\rho\sqrt{1 - \rho^2} - \rho^2\sigma^2}{\sigma^2} = \\ &= -1 + 2\rho^2 - 2i\rho\sqrt{1 - \rho^2} = (-i\sqrt{1 - \rho^2} + \rho)^2. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Tomando $c(u) = \frac{1}{G(u)}$, y teniendo en cuenta que

$$\lim_{u \rightarrow \infty} |G(u)| = \lim_{u \rightarrow \infty} |c(u)| = 1$$

según el resultado anterior, tenemos que la siguiente expresión es correcta.

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{-D(u)T} - 1}{G(u)e^{-D(u)T} - 1} \right] &= \lim_{u \rightarrow \infty} \left[\frac{1/G - e^{DT}/G}{1 - e^{DT}/G} \right] = \lim_{u \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{G} \left(\frac{e^{DT} - 1}{ce^{DT} - 1} \right) \right] = \\ &= \lim_{u \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{G} \frac{1}{c} \left(1 + \frac{1 - c}{ce^{DT} - 1} \right) \right] = 1 \end{aligned} \quad (4.7)$$

El resultado anterior, junto con la ecuación (4.5) permiten concluir:

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{B_V(u, T)}{u} = \frac{1}{\sigma^2}(-\sigma\sqrt{1 - \rho^2} - \rho\sigma i) = \frac{-\rho i - \sqrt{1 - \rho^2}}{\sigma}. \quad (4.8)$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned}
 \lim_{u \rightarrow \infty} \left[\ln \left(\frac{G(u)e^{-D(u)T} - 1}{G(u) - 1} \right) \frac{1}{u} \right] &= \lim_{u \rightarrow \infty} \left[\ln \left(\frac{ce^{DT} - 1}{ce^{DT} - e^{DT}} \right) \frac{1}{u} \right] = \\
 &= \lim_{u \rightarrow \infty} \left[\ln \left(\frac{e^{DT}c - 1/e^{DT}}{e^{DT}c - 1} \right) \frac{1}{u} \right] = \\
 &= \lim_{u \rightarrow \infty} \left[\ln \left(\frac{c}{c - 1} \right) \frac{1}{u} \right] = 0 \quad (4.9)
 \end{aligned}$$

De las ecuaciones (4.5) y (4.9) obtenemos:

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{A(u, T)}{u} = \frac{-\kappa\theta T}{\sigma^2} (D_\infty + \rho\sigma i) \quad (4.10)$$

El resultado se sigue directamente de las ecuaciones (4.8) y (4.10). \square

Proposición 4.2. Sean $\Psi(u, \alpha)$, C_∞ y t_∞ definidos en la proposición (4.1), y considere el cambio de variable $u = g(x)$, con $g(x) = \frac{-\ln(x)}{C_\infty}$. Tenemos entonces la siguiente igualdad:

$$\int_0^\infty \Psi(u, \alpha) du = \int_0^1 \frac{\Psi(g(x), \alpha)}{x} dx \quad (4.11)$$

Además,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{\Psi(g(x), \alpha)}{x} \right| < \infty \quad \lim_{x \rightarrow 1} \left| \frac{\Psi(g(x), \alpha)}{x} \right| < \infty \quad (4.12)$$

Demostración. La ecuación (4.11) se obtiene de manera directa. Además se tiene por la proposición anterior:

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\Psi(g(x), \alpha)}{x} &= \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\Psi(u, \alpha)}{e^{-C_\infty u}} \approx \Psi(0, \alpha) \frac{\cos(ut_\infty)}{-u^2} = \\
 &= \Psi(0, \alpha) \frac{\cos(g(x)t_\infty)}{-(g(x))^2} \quad (4.13)
 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\Psi(g(x), \alpha)}{x} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\Psi(u, \alpha)}{e^{-C_\infty u}} = \Psi(0, \alpha) \quad (4.14)$$

El resultado se sigue pues las expresiones finales de las ecuaciones (4.13) y (4.14) son acotadas para los límites pertinentes. \square

La ecuación (4.11) permite la aplicación directa de una rutina de integración numérica, pues se trata de un intervalo finito, y los valores del integrando son acotados sobre todo el intervalo. A continuación resolvemos la segunda cuestión mencionada anteriormente, a saber, la determinación del intervalo permitido de α y la posibilidad de encontrar un valor óptimo del mismo.

4.3. La Escogencia Óptima de α

Recordemos que la fórmula de valoración de Carr y Madan es correcta cuando se cumple $\Phi_T(-i(\alpha + 1)) = E[S_T^{\alpha+1}] < \infty$. La segunda expresión corresponde al $(\alpha + 1)$ -ésimo momento de la distribución de S_T , por lo tanto, para establecer el máximo α permitido en la fórmula de valoración, basta establecer condiciones precisas sobre la explosión de momentos en el modelo de Heston. En [AP07], Andersen y Piterbarg efectúan tal examen. Para encontrar sus resultados, los autores hacen uso de la llamada *Kolmogorov Backward Equation*, aunque sugieren que el análisis puede también efectuarse partiendo de la expresión de la función característica, lo cual es evidente teniendo en cuenta la ecuación expuesta al comienzo del párrafo. Dado que ya disponemos de la ecuación característica, será menos dispendioso derivar los resultados directamente de aquella.

Definición 4.1. Para $\kappa, \theta, \sigma, \rho$ y un momento ω_0 fijos, definimos el **instante crítico** T^* , tal que $\Phi_T(-i(\omega_0)) < \infty, \forall T$ tal que $T < T^*$, y $\Phi_T(-i(\omega_0)) = \infty, \forall T$ tal que $T \geq T^*$.

Para $\kappa, \theta, \sigma, \rho$ y un instante T_0 fijos, definimos el **momento crítico**, ω^* , tal que $\Phi_{T_0}(-i(\omega)) < \infty, \forall \omega$ tal que $\omega < \omega^*$, y $\Phi_{T_0}(-i(\omega)) = \infty, \forall \omega$ tal que $\omega \geq \omega^*$.

Como se hará claro más adelante, aunque en teoría estamos interesados en encontrar ω^* para uno tiempo T de maduración prefijado, en la práctica resulta más conveniente encontrar primero T^* . De ahora en adelante obviaremos la referencia a los parámetros fijos cuando nos refiramos a ω^* o T^* , salvo en las ocasiones necesarias.

Proposición 4.3. T^* es instante crítico si y solo si $B_V(-i\omega, T) < \infty$, $\forall T$ tal que $T < T^*$, y $B_V(-i\omega, T^*) = \infty$.

Demostración. Recordemos una vez más que

$$\Phi_T(u) = e^{iu(\ln S_0 + rT) + A(u, T) + B_V(u, T)V_0}$$

donde,

$$A(u, T) = \kappa\theta \int_0^T B_V(u, t)dt$$

según la derivación de la función característica efectuada en el teorema (3.1). Por lo tanto, $A(-i\omega, T) < \infty$ si y solo si $B_V(-i\omega, t) < \infty \forall t$ tal que $t < T$. Por otro lado es claro que $\Phi_T(-i\omega) = \infty$, si y solo si $A(-i\omega, T) = \infty$ o $B_V(-i\omega, T) = \infty$. \square

Las siguientes condiciones sobre la analiticidad de $B_V(-i\omega, T)$, son sencillas y aparecen en [LK06].

Proposición 4.4. *Recuérdese que*

$$B_V(-i\omega, T) = \frac{\beta(-i\omega) - D(-i\omega)}{\sigma^2} \left(\frac{e^{-D(-i\omega)T} - 1}{G(-i\omega)e^{-D(-i\omega)T} - 1} \right).$$

$B_V(-i\omega, T)$ es analítico para toda pareja $(\omega, T) \in (1, \infty) \times [0, \infty)$ salvo en los siguientes casos:

$$1. D(-i\omega) \neq 0 \quad \wedge \quad G(-i\omega)e^{-D(-i\omega)T} = 1. \quad (4.15)$$

$$2. D(-i\omega) = 0 \quad \wedge \quad T = \frac{-2}{\beta(-i\omega)}. \quad (4.16)$$

Donde se tiene:

$$\hat{\alpha}(-i\omega) = \frac{1}{2}(\omega^2 - \omega), \quad \beta(-i\omega) = \kappa - \rho\sigma\omega, \quad \gamma = \frac{1}{2}\sigma^2. \quad (4.17)$$

$$D(-i\omega) = \sqrt{\beta(-i\omega)^2 - 4\hat{\alpha}(-i\omega)\gamma} = \sqrt{\beta(-i\omega)^2 - \sigma\omega(\omega - 1)}. \quad (4.18)$$

$$G(-i\omega) = \frac{\beta(-i\omega) - D(-i\omega)}{\beta(-i\omega) + D(-i\omega)}. \quad (4.19)$$

Demostración. De ahora en adelante obviaremos la referencia al parámetro interno $-i\omega$. Considere el caso en que $D = 0$. Tenemos entonces por l'Hôpital lo siguiente:

$$\lim_{D \rightarrow 0} B_V = \lim_{D \rightarrow 0} \frac{-(e^{-DT} - 1) - T(\beta - D)e^{-DT}}{\sigma^2 e^{-DT} \left[\frac{-\beta^2 T - D^2 T - 2\beta}{(\beta + D)^2} \right]} = \frac{T\beta^2}{\sigma^2(\beta T + 2)} \quad (4.20)$$

Por lo tanto la expresión B_V se mantiene bien definida salvo en el caso en que $\beta T + 2 = 0$. Finalmente, cuando $D \neq 0$, la primera condición se sigue inmediatamente de la forma del denominador. \square

De las condiciones arriba mencionadas es evidente la dificultad de despejar ω para derivar las condiciones de la explosión de los momentos de manera directa, al contrario de lo que sucede con el parámetro T . A continuación enunciamos el resultado de Andersen y Piterbarg.

Teorema 4.2. *Usando la notación de la proposición anterior, y fijando un momento $\omega > 1$, el instante crítico está determinado por alguna de las ecuaciones que se enuncian a continuación:*

$$D^2 \geq 0, \quad \beta > 0 \quad T^* = \infty. \quad (4.21)$$

$$D^2 \geq 0, \quad \beta < 0$$

$$T^* = \frac{\ln(G)}{D}, \quad D \neq 0. \quad (4.22)$$

$$T^* = \frac{-2}{\beta}, \quad D = 0. \quad (4.23)$$

$$D^2 < 0$$

$$T^* = \frac{2}{|D|} \left[\pi 1_{\{\beta > 0\}} + \arctan \frac{-|D|}{\beta} \right]. \quad (4.24)$$

Demostración. Nótese en primer lugar, que por la ecuación (4.18) y la restricción $\omega > 1$, $\beta = 0$ implica que $D^2 < 0$, por lo cual las condiciones arriba contempladas son exhaustivas. Nótese también que por la misma ecuación, $D^2 \in \mathbb{R}$, luego las condiciones tienen sentido. A continuación derivaremos el instante de explosión T_B^* para B_v en cada caso.

Caso 1

Cuando $D = 0$, $T \neq \frac{-2}{\beta}$, pues $T, \beta > 0$, así que la condición (2) de la proposición anterior no se cumple para ningún T . Por otro lado, nótese que $D^2 > 0$ implica que $D > 0$, pues hemos escogido la raíz positiva en la formulación de $\Phi_T(u)$. Lo anterior implica $G < 1$ y $-DT < 0$. Confirmamos que la condición (1) tampoco se cumple para ningún T , tomando el logaritmo real a ambos lados de la ecuación. Por lo tanto, $T_B^* = \infty$.

Caso 2

Nótese que $G > 0$, pues tenemos que se cumple:

$$|D| = \sqrt{\beta^2 - \sigma^2 \omega(\omega - 1)} < \sqrt{\beta^2} = |\beta|.$$

Además, $|G| \geq 1$, pues tenemos:

$$|\beta + D| \leq |\beta| + |D| = |(-1)(|\beta| + |D|)| = | -|\beta| - |D|| = |\beta - D|.$$

Por lo tanto, $G \geq 1$ y el resultado se sigue de la proposición anterior.

Caso 3

Nótese que $D^2 < 0$ implica que $D = i|D|$. Por lo tanto, tenemos que:

$$G = \frac{\beta - i|D|}{\beta + i|D|} = \frac{z}{\bar{z}}, \quad |G| = 1, \quad |e^{-|D|iT}| = 1, \quad |Ge^{-|D|iT}| = 1.$$

Por lo tanto, la condición (1) de la proposición anterior se cumple cuando:

$$\text{Arg}(G) + \text{Arg}(e^{-|D|iT}) = 0$$

Ahora bien,

$$G = \frac{z}{\bar{z}} = \frac{z^2}{|z|^2}.$$

Por lo tanto tenemos que:

$$\begin{aligned} \text{Arg}(G) &= 2\pi 1_{\{\beta \leq 0\}} + 2\text{Arg}(z) = \\ &= 2\pi 1_{\{\beta \leq 0\}} + 2 \left[\arctan\left(\frac{-|D|}{\beta}\right) - \pi 1_{\{\beta \leq 0\}} \right] = \\ &= 2 \arctan\left(\frac{-|D|}{\beta}\right). \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\text{Arg} (e^{-|D|iT}) = 2\pi 1_{\{\beta > 0\}} - |D|T$$

Finalmente arrivamos a la conclusión:

$$T_B^* = \frac{2}{|D|} \left[\pi 1_{\{\beta > 0\}} + \arctan \left(\frac{-|D|}{\beta} \right) \right]$$

El resultado se sigue por la unicidad de T_B^* derivado en cada caso, y de la proposición (4.3). \square

Proposición 4.5. *Para parámetros fijos, κ , θ , σ , ρ y $\omega > 1$, sea $T^*(\omega)$ tal como se estableció en la proposición anterior. Tenemos entonces, $T^*(\omega_1) \leq T^*(\omega_2)$, cuando $\omega_1 \geq \omega_2$. La desigualdad estricta se cumple sobre el dominio en el cual $T^*(\omega) < \infty$.*

Demostración. Se sigue de la forma de T^* en el teorema (4.2). \square

Nótese que el resultado anterior garantiza la invertibilidad de $T^*(\omega)$ sobre el dominio en el cual $T^*(\omega) < \infty$. Por lo tanto, podemos definir la función $w^*(T) = (T^*)^{-1}$ sobre tal intervalo. Para encontrar el momento crítico del modelo con parámetros fijos κ , θ , σ , ρ y tiempo de maduración T , bastará entonces aplicar $w^*(T)$, lo que puede hacerse mediante un algoritmo de búsqueda de raíces. Sin embargo, el problema que subsiste es el hecho de que $T^*(\omega)$ está definida a trozos sobre el dominio de ω según el teorema (4.2) y por lo tanto, la función a invertir no está determinada, si no conocemos de antemano el rango apropiado del dominio de ω en el cual se encuentra ω^* . Aunque pareciera que nos estamos moviendo en círculos, el rango apropiado de ω^* puede determinarse independientemente del valor del tiempo de maduración T , si se impone la restricción $\rho < \frac{\kappa}{\sigma}$.

En lo sucesivo demostraremos la observación anterior.

El siguiente resultado aparece en [LK06].

Proposición 4.6. *Considere el polinomio en ω :*

$$D^2(-i\omega) = \beta^2(-i\omega) - 4\hat{\alpha}(-i\omega)\gamma = \kappa^2 + \sigma(\sigma - 2\kappa\rho)\omega - \sigma^2(1 - \rho^2)\omega^2. \quad (4.25)$$

Con raíz positiva:

$$\omega_+ = \frac{\sigma - 2\kappa\rho + \sqrt{(\sigma - 2\kappa\rho)^2 + 4(1 - \rho^2)\kappa^2}}{2\sigma(1 - \rho^2)} \quad (4.26)$$

Si se cumple $\rho < \frac{\kappa}{\sigma}$, tenemos que $T^*(\omega_+) = \infty$.

Demostración. El polinomio en (4.25) es cóncavo hacia abajo y además tenemos que $D^2(-i) = (\kappa - \sigma\rho)^2 > 0$, donde la desigualdad estricta se tiene por la restricción enunciada en la proposición, lo que implica que $\omega_+ > 1$. Por lo tanto, podemos aplicar los resultados del teorema (4.2), y bastará mostrar que $\beta > 0$. Lo cual es cierto pues,

$$\beta(-i\omega_+) = \kappa - \rho\sigma\omega_+ > \kappa - \rho\sigma > 0.$$

□

Corolario 4.1. Si se cumple la restricción $\rho < \frac{\kappa}{\sigma}$, se tiene $\omega^*(T) > \omega_+$, $\forall T < \infty$, por lo que tenemos que $D^2(-i\omega^*) < 0$.

Demostración. Suponga que existe $T < \infty$ tal que $\omega^*(T) \leq \omega_+$. Tenemos entonces, $T = T^*(\omega^*(T)) \geq T^*(\omega_+) = \infty$, arribando a una contradicción. La segunda parte del corolario se sigue de la forma del polinomio en (4.25). □

Corolario 4.2. Si se cumple la restricción $\rho < \frac{\kappa}{\sigma}$, tenemos que $\omega^*(T) = F^{-1}(\omega)$, donde $F^{-1}(\omega)$ es la inversa de la función contemplada en el tercer caso del teorema (4.2).

Como resultado final de la discusión anterior notamos que el máximo α permitido para un tiempo de maduración fijo T en la fórmula de valoración de Carr y Madan, corresponde entonces a $\omega^*(T) - 1$, para garantizar las condiciones del teorema (4.1). Por otro lado, recordamos que el teorema (4.2) garantiza la existencia de todos los momentos en el intervalo $(1, \omega^*)$. Finalmente, la existencia de todos los momentos en el intervalo $[0, 1]$ está garantizada para cualquier tiempo de maduración, dada la desigualdad $E[S_T^\omega] < E[S_T] + 1, \forall \omega \in [0, 1)$, luego los momentos menores que 1 están todos acotados por el primer momento más uno [LK07]. La figura 4.1, muestra $\Phi_T(-i\omega)$ para un conjunto de parámetros determinado, sobre el intervalo $[0, \omega^*]$; aunque la gráfica parece constante antes del momento de explosión, esto se debe al proceso de reescalamiento que hace Matlab para poder acomodar el valor en ω^* .

Como se anotó anteriormente, la escogencia de α puede alterar de manera sustancial la forma del integrando del teorema (4.1). Carr y Madan

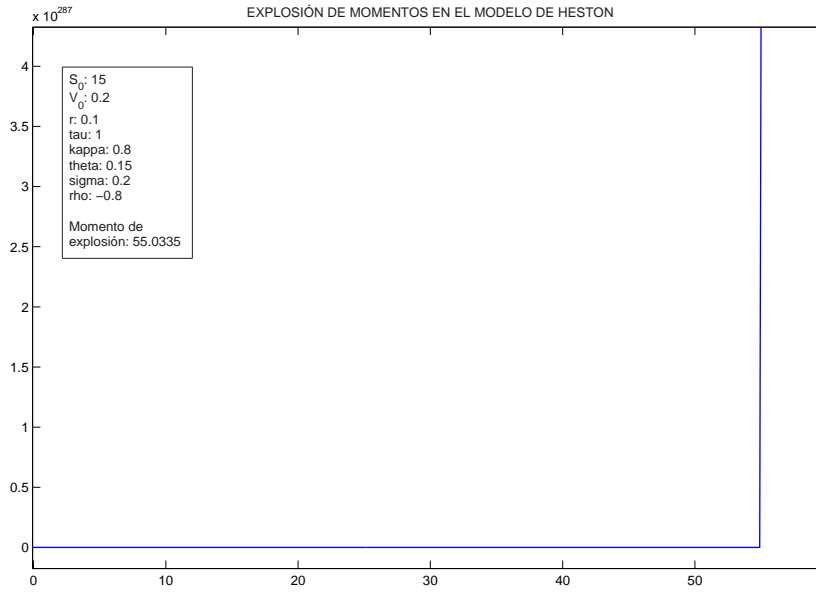


Figura 4.1: Gráfica de $\Phi_T(-i\omega)$, con parámetros $S_0 = 15$, $V_0 = 0.2$, $r = 0.1$, $T = 1$, $\kappa = 0.8$, $\theta = 0.15$, $\sigma = 0.2$, $\rho = -0.8$. El momento de explosión calculado es 55.0335, que corresponde a lo observado en la gráfica.

sugieren aplicar su fórmula de valoración con un valor de α correspondiente a un cuarto del máximo valor de α permitido. En el artículo anteriormente citado [Lee05], Lee, quien sigue a Carr y Madan en el uso de la *Fast Fourier Transform*, deriva fórmulas sofisticadas para el cálculo del α óptimo, mediante la minimización de los errores de discretización y truncamiento propios de dicho método. Recuérdese que nuestra implementación de la fórmula de valoración, se basa en los artículos Lord y Khal en [LK06] y [LK07], en los cuales se sugiere finitizar el intervalo de integración (eliminando así los errores de truncamiento), y la aplicación de una rutina de integración numérica adaptativa (virtualmente eliminando los errores de discretización).

Para minimizar el error de aproximación de la cuadratura en la rutina de integración numérica, requeriríamos minimizar el comportamiento oscilatorio del integrando, que corresponde a la fórmula:

$$\Psi(u, \alpha) = \Re \left(\frac{e^{-iuk} \Phi_T(u - i(\alpha + 1))}{-(u - i\alpha)(u - i(\alpha + 1))} \right).$$

Una medida de la oscilación de una función sobre un intervalo determinado

$[a, b]$ es la Varianza Total, que corresponde a la siguiente ecuación:

$$VT(f) = \int_a^b \left| \frac{df}{dx}(x) \right| dx.$$

Según la idea anterior, el α óptimo sería la solución del siguiente problema de optimización:

$$\alpha_{opt} = \min_{\alpha \in (0, \alpha_{max})} e^{-\alpha k} \int_0^\infty \left| \frac{d}{du} \frac{\Psi(u, \alpha)}{\Psi(0, \alpha)} \right| du,$$

donde el término $e^{-\alpha k}$ se introduce para reescalar los resultados y hacerlos comparables. Sin embargo, la solución del problema anterior, no solo requiere el cálculo de la derivada de $\Psi(u, \alpha)$, sino de nuevo, el cálculo numérico de la integral. Lord y Khal sugieren un problema de minimización más sencillo, que consiste en minimizar el valor máximo del integrando $\Psi(u, \alpha)$ que ocurre claramente cuando $u = 0$, dado el comportamiento oscilatorio acotado de $e^{-iuk} \Phi_T(u - i(\alpha + 1))$, y la presencia del término cuadrático $-(u - i\alpha)(u - i(\alpha + 1))$, en el denominador.

El problema de minimización resulta ser entonces el siguiente:

$$\begin{aligned} \alpha_{opt} &= \min_{\alpha \in (0, \alpha_{max})} \left| e^{-\alpha k} \Psi(-(\alpha + 1)i) \right| = \\ &= \min_{\alpha \in (0, \alpha_{max})} \left[-\alpha k + \frac{1}{2} \ln (\Psi(-(\alpha + 1)i)^2) \right]. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Antes de terminar la sección es necesario hacer una última anotación: cuando el tiempo de maduración es muy breve, el α máximo analítico puede ser lo suficientemente grande como para causar problemas de *overflow* en la implementación computacional, lo que quiere decir que, aunque analíticamente los valores de la función característica son finitos, aquellos resultan bastante grandes y sobrepasan el límite superior de los números de máquina. El algoritmo de valoración corrige este problema, reduciendo iterativamente el α máximo analítico, hasta asegurarse de que el valor de $\Phi_T(-i\alpha)$ pertenece al rango permitido de los números de máquina, garantizando de tal manera que la integral es finita sobre todo el intervalo. Una vez hecho lo anterior, el algoritmo resuelve la ecuación (4.27) sobre el nuevo intervalo reducido. Evidentemente, en los casos en que el α_{opt} analítico se encuentra por encima de la cota superior de los números de máquina, el integrando puede no comportarse de la manera apropiada. En la figura 4.2 se muestra la reconstrucción

de un ejemplo presentando por Lord y Khal en [LK07], que muestra el comportamiento del integrando utilizando varios valores para α , en condiciones normales. Nótese que se combinan los dos factores que hacían problemática la aplicación de la *Fast Fourier Transform*: un opción profundamente OTM y un tiempo de maduración breve. En la figura 4.3, mostramos el comportamiento del integrando en el caso en que aparentemente el α óptimo sugerido por los autores, sobrepasa el límite de los números de máquina, y el α óptimo computacional se ha calculado sobre el intervalo reducido. En ambos casos, las gráficas se han reescalado por valores apropiados, para que las gráficas quepan todas en una sola ventana.

4.4. El Cálculo del Logaritmo Complejo

La última cuestión que es necesario abordar en la implementación de la fórmula de valoración, es el cálculo del logaritmo complejo implicado en $A(u, T)$. Recuérdese que tenemos dos formulaciones distintas para $A(u, T)$ (La formulación 1, aparece por ejemplo en el artículo original de Heston [Hes93] y en [KJ05], mientras que la formulación 2 aparece en [LK06] y [LK07], [Al06] y [Gat]):

Formulación 1:

$$\begin{aligned} A(u, T) &= \frac{\kappa\theta}{\sigma^2} [(\beta(u) + D(u))T - 2 \ln F_1(u)]. \\ c(u) &= \frac{1}{G(u)}. \\ F_1(u) &= \frac{c(u)e^{D(u)T} - 1}{c(u) - 1}. \end{aligned} \tag{4.28}$$

Formulación 2:

$$\begin{aligned} A(u, T) &= \frac{\kappa\theta}{\sigma^2} [(\beta(u) - D(u))T - 2 \ln F_2(u)]. \\ F_2(u) &= \frac{G(u)e^{-D(u)T} - 1}{G(u) - 1}. \end{aligned} \tag{4.29}$$

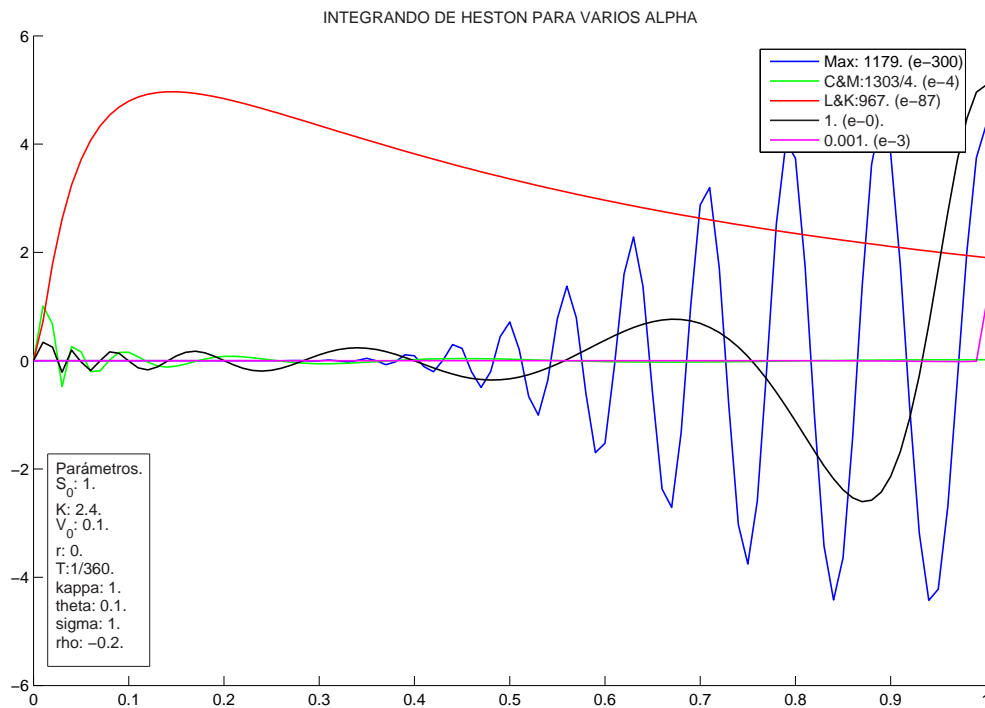


Figura 4.2: Integrando de Heston sobre el intervalo $[0, 1]$, para parámetros: $S_0 = 1$, $K = 2.4$, $V_0 = 0.1$, $r = 0$, $T = 1/360$, $\kappa = 1$, $\theta = 0.1$, $\sigma = 1$, $\rho = -0.2$. El máximo α analítico es 1303, y el máximo α computacional es un valor cercano 1179.

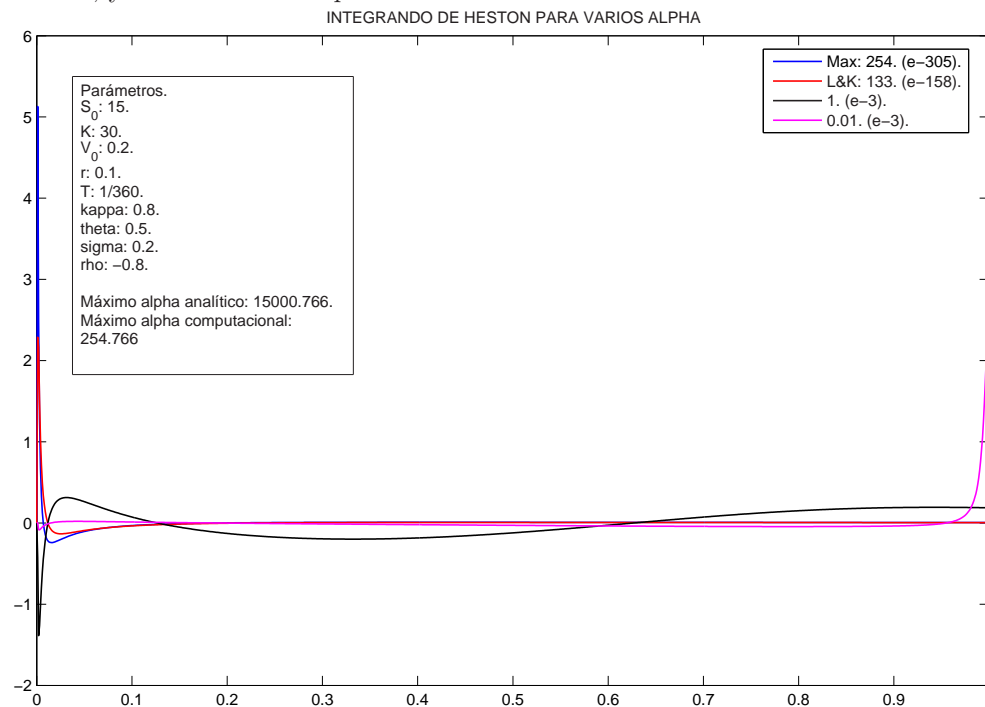


Figura 4.3: Integrando de Heston sobre el intervalo $[0, 1]$, para parámetros: $S_0 = 15$, $K = 30$, $V_0 = 0.2$, $r = 0.1$, $T = 1/360$, $\kappa = 0.8$, $\theta = 0.5$, $\sigma = 0.2$, $\rho = -0.2$. El máximo α analítico es 15000.766, mientras que el máximo α computacional es apenas 254.766

Recuérdese que el logaritmo complejo es una función multivaluada, definida de la siguiente manera:

$$\log(z) = \ln |z| + i(\text{Arg}(z) + 2n\pi), \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

El problema con tal función, es que al elegir un n particular, la función no es continua sobre la totalidad del plano complejo: en particular, si escogemos la rama principal del logaritmo (tomando $n=0$), la función es discontinua en cualquier punto del semi-eje real negativo. La mayoría de paquetes matemáticos, incluido Matlab, realiza el cálculo del logaritmo complejo sobre dicha rama, luego la pregunta crucial que hay que hacerse es si las funciones expresadas en las ecuaciones (4.28) y (4.29) cruzan en algún momento tal semi-eje, cuando u recorre el intervalo de integración $(0, \infty)$. El problema ha sido tratado de manera extensa en diferentes artículos (véase por ejemplo [LK06], [KJ05], [Al06]), con la conclusión de que la ecuación (4.28), presenta siempre tal comportamiento, para tiempos de maduración lo suficientemente grandes. Desafortunadamente, *lo suficientemente grandes* no significa, lo suficientemente grandes para ser irrelevantes en cualquier aplicación práctica del modelo, y evidentemente la introducción de discontinuidades en el término $A(u, T)$, genera errores de valoración que pueden llegar a ser significativos.

Diversos mecanismos se han desarrollado para evitar las discontinuidades en $A(u, T)$, escogiendo la rama apropiada para el cálculo del logaritmo complejo en la ecuación (4.28), pero más importante aún, los mismos autores han realizado esfuerzos encaminados a mostrar que el comportamiento patológico de la ecuación (4.28) no se presenta en absoluto en la ecuación (4.29). En [LK06], Lord y Khal muestran que la formulación en (4.29), no cruza el semi-eje real negativo bajo ciertas restricciones sobre los parámetros del modelo, y conjeturan que las restricciones pueden ser eliminadas, aunque aún no tienen una demostración formal.

La demostración formal es efectuada por Albrecher et. al. en [Al06], y aunque no es complicada, es larga y tediosa pues considera cinco casos diferentes, dependiendo de los valores de ciertas combinaciones de los parámetros del modelo. Por lo tanto, enunciamos como teorema el resultado, y referimos al lector interesado en conocer la demostración, al artículo original.

Teorema 4.3. *La función expresada en la ecuación (4.29) no cruza el semi-eje real negativo para ninguna configuración de los parámetros, cuando $u \in (0, \infty)$. Por lo tanto, $A(u, T)$ es continua sobre dicho intervalo.*

Capítulo 5

Análisis Empírico del Modelo de Heston

5.1. Volatilidad Implícita

Recordemos que en el teorema (2.3) del Capítulo 2, concluimos que el modelo de precios de Black-Scholes supone que la distribución de precios es log-normal. El objetivo de esta sección es exponer de manera clara las consecuencias que acarrea asumir erróneamente la suposición anterior, a la hora de valorar derivados financieros; específicamente las opciones CALL y PUT europeas. Para lograr lo anterior resulta conveniente introducir el concepto de la volatilidad implícita, pues ésta proporciona una manera unificada de medir los errores de valoración en los que se incurre al aplicar el modelo de Black-Scholes. En lo sucesivo, seguimos la clara e iluminativa exposición de Hull en [Hull].

Nótese que la proposición (2.5) nos permite hacer la siguiente definición.

Definición 5.1. *Para valores fijos, S, K, T, r, q , definimos una función $\sigma_{BS}(V)$, con $V \in \mathbb{R}^+$, tal que $BS_C(S, K, T, r, q, \sigma_{BS}(V)) = V$. Decimos que $\sigma_{BS}(V)$ es la **volatilidad implícita** del valor V .*

La anterior definición afirma en palabras, que la volatilidad implícita del valor de una opción CALL con parámetros S, K, T, r y q (nótese que los

parámetros anteriores son todos observables directamente en el mercado, a diferencia de la volatilidad), no es más que el valor de volatilidad que debemos introducirle a la fórmula de valoración de Black-Scholes para obtener el valor apropiado. Como veremos a continuación, si definimos la volatilidad implícita para la opción PUT, los valores concuerdan, si se aplican a opciones que cumplan la relación de paridad expresada en la proposición (2.2).

Proposición 5.1. Sean C y P tales que $P + Se^{-qT} = C + Ke^{-rT}$ y sean $\sigma_{BS}^C(V)$ y $\sigma_{BS}^P(V)$ tales que se cumple:

$$BS_C(S, K, T, r, q, \sigma_{BS}^C(V)) = V$$

$$BS_P(S, K, T, r, q, \sigma_{BS}^P(V)) = V$$

Tenemos entonces que:

$$\sigma_{BS}^C(C) = \sigma_{BS}^P(P)$$

Demostración. Por la proposición (2.4) sabemos que se cumple:

$$BS_C(S, K, T, r, q, \sigma) + Ke^{-rT} = BS_P(S, K, T, r, q, \sigma) + Se^{-qT}.$$

Restando la ecuación anterior con la condición expresada en la proposición obtenemos:

$$BS_C(S, K, T, r, q, \sigma) - C = BS_P(S, K, T, r, q, \sigma) - P, \quad \forall \sigma \quad (5.1)$$

En particular, tenemos:

$$BS_P(S, K, T, r, q, \sigma_{BS}^C(C)) - P = BS_C(S, K, T, r, q, \sigma_{BS}^C(C)) - C = 0 \quad (5.2)$$

Donde la última igualdad es cierta por la definición de $\sigma_{BS}^C(C)$. Nótese también que por definición de $\sigma_{BS}^P(P)$, tenemos que la ecuación anterior implica:

$$\sigma_{BS}^P(P) = \sigma_{BS}^C(C)$$

□

Recordemos que según la proposición (2.5), la fórmula de valoración de Black-Scholes es creciente sobre el parámetro σ , este hecho, junto con el resultado anterior, nos permiten exhibir claramente las consecuencias sobre la valoración de derivados financieros, que ocurren cuando suponemos que

la distribución de precios es log-normal, en lugar de una distribución con *kurtosis* positiva (pico más alto y colas más anchas). las figuras 5.1 y 5.2, muestran de manera esquemática la relación; las gráficas en rojo se asemejan al comportamiento real de la distribución del log-spot y de la volatilidad implícita del precio real de las opciones.

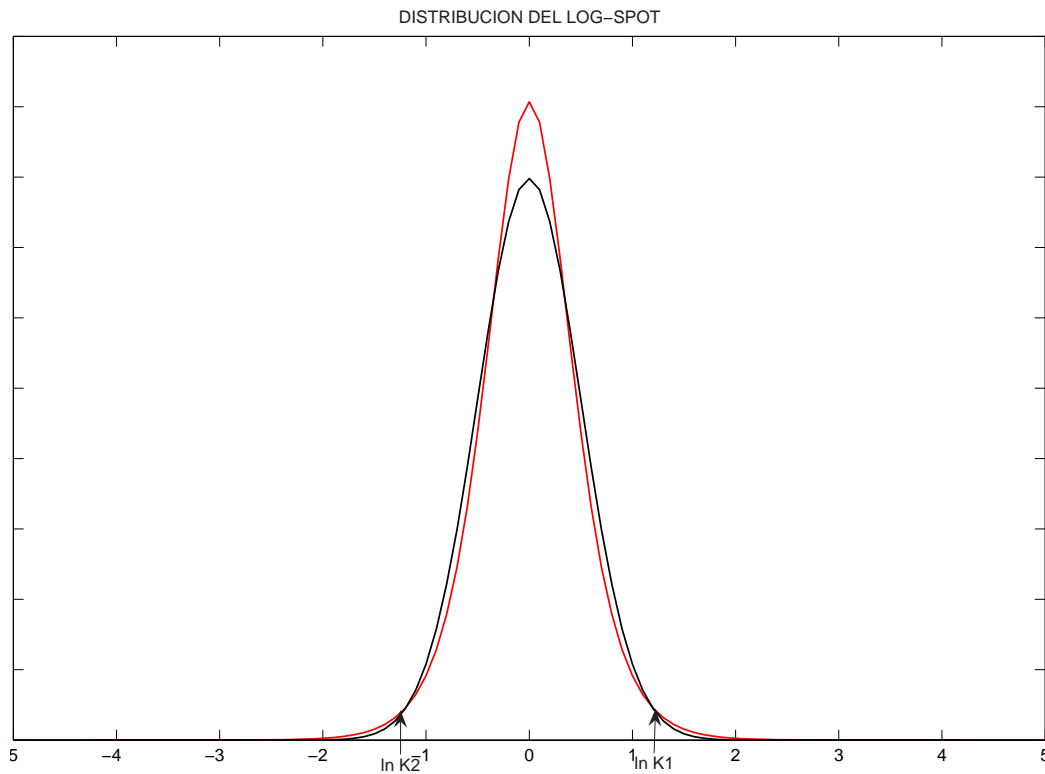


Figura 5.1: Esquema de la Distribución del log-spot. En rojo una distribución con *kurtosis* positiva. En negro una distribución normal con igual varianza, 0.5.

Supongamos el caso de una opción CALL profundamente OTM, con Strike $K1$: las colas más anchas de la distribución real del log-spot, implican que la probabilidad de ejercicio de tal opción es mayor que la supuesta por una distribución normal, y por lo tanto el valor real de tales opciones se encuentra por encima del precio según el modelo de Black-Scholes. Lo anterior implica a su vez una volatilidad implícita relativamente mayor. Por otro lado, consideremos una opción PUT profundamente OTM, con Strike $K2$: de nuevo, la

suposición de un comportamiento log-normal del spot, subestima la probabilidad de ejercicio, lo que causa que el valor real de tales opciones se encuentre por encima del valor supuesto por el modelo de Black-Scholes. Por la proposición anterior, tenemos que la curva de volatilidad implícita del valor de mercado, tanto para opciones PUT como para CALL, se asemeja a la figura 5.2.

Lo anterior tiene la indeseable consecuencia de que si se desea aplicar el modelo de Black-Scholes para la valoración de opciones en los mercados reales, será necesario modificar el valor de la volatilidad del spot en términos del Strike, lo cual no tiene mucho sentido, si se tiene en cuenta que el Strike de las opciones no tiene en realidad, ninguna conexión con el comportamiento del activo ni con su volatilidad. Como anotación personal, deseo referirme a una frase que leí alguna vez y que me parece que da exactamente con el punto: *"La volatilidad implícita, es el valor erróneo, que introducimos en el modelo erróneo, para obtener los precios correctos (los precios del mercado)"*.

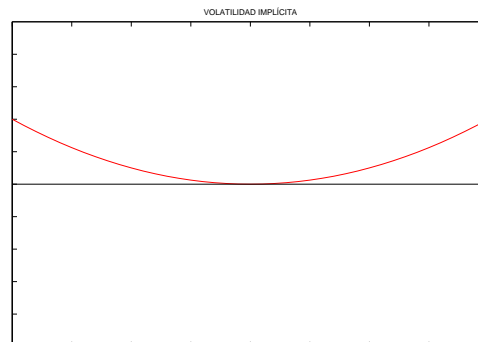


Figura 5.2: Esquema de la Volatilidad Implícita para las distribuciones de la figura 5.1.

La discusión anterior se ve, en efecto, reflejada en la volatilidad implícita del valor de las opciones en los mercados reales, a tal punto que el comportamiento tipificado en la figura 5.2, recibe el nombre de sonrisa de volatilidad (en inglés, *volatility smile*). Como se mostró en la argumentación anterior, la existencia de las *volatility smiles* en el mercado real, y el hecho de una *kurtosis* positiva en la distribución real del log-spot son dos caras de una misma moneda.

Finalmente, recordemos que en el Capítulo 3, afirmamos que la distribución real del log-spot, puede diferir de una distribución normal en dos aspectos fundamentales: el primero, mencionado justo antes, consiste en que la distribución real puede exhibir una *kurtosis* positiva. El segundo consiste en que la distribución puede exhibir cierta inclinación, haciendo que una de las colas sea más ancha que la otra. De manera similar a la argumentación anterior, podemos concluir que el comportamiento asimétrico de la distribución se

ve reflejado en un comportamiento asimétrico de la gráfica de volatilidad implícita. En particular, si la gráfica se inclina hacia la derecha, la cola izquierda se hace más ancha, lo que implica que el modelo de Black-Scholes subvalora opciones CALL profundamente ITM (equivalentemente, opciones PUT profundamente OTM), mientras que sobrevalora opciones CALL profundamente OTM (equivalentemente, opciones PUT profundamente ITM). Si la cola se inclinase hacia la derecha, se observaría, el efecto contrario.

5.2. Volatilidad Implícita y el Modelo de Heston

Según lo anterior, es evidente que un modelo de precios que logre capturar el comportamiento real de los mercados bajo un conjunto de parámetros fijo, es preferible al modelo de Black-Scholes, para el cual la volatilidad tiene que ser ajustada persistentemente. Como se había mencionado en ocasiones anteriores, los parámetros σ y ρ del modelo de Heston, permiten ajustar la distribución implicada por el modelo a la distribución real del mercado, y por lo tanto logra capturar los dos fenómenos que mencionamos anteriormente para las gráficas de volatilidad implícita.

Presentamos a continuación la incidencia de los dos parámetros, tanto en la distribución del log-spot, como en la gráfica de volatilidad implícita. Los resultados obtenidos confirman tanto las conclusiones de la sección anterior, como la versatilidad del modelo de Heston. Para graficar una aproximación a las distribuciones del log-spot para un conjunto de parámetros fijo, usamos un esquema de simulación Montecarlo, con 100.000 simulaciones, y 1000 pasos por simulación (hacemos notar que aunque el esquema de simulación no es sofisticado, logra dar cuenta de la incidencia de los parámetros sobre la distribución, seguramente usando un esquema más elaborado, se obtendrían gráficas más exactas). Luego de obtener los datos simulados, dividimos el rango total de datos en un número apropiado de intervalos de longitud fija, contamos el número de datos por intervalo, y dividimos en cada caso tal número, por el número total de datos y la longitud del intervalo.

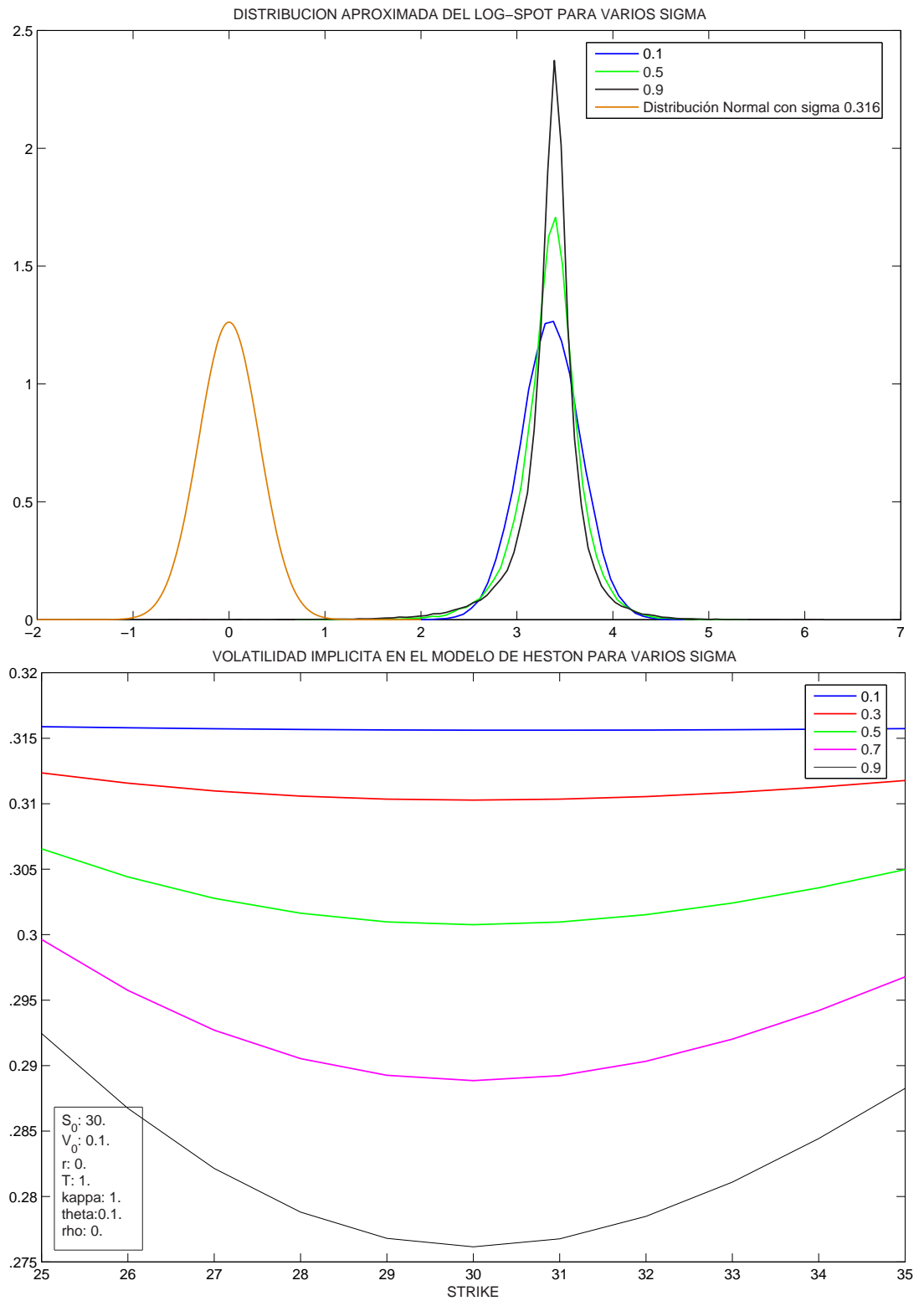
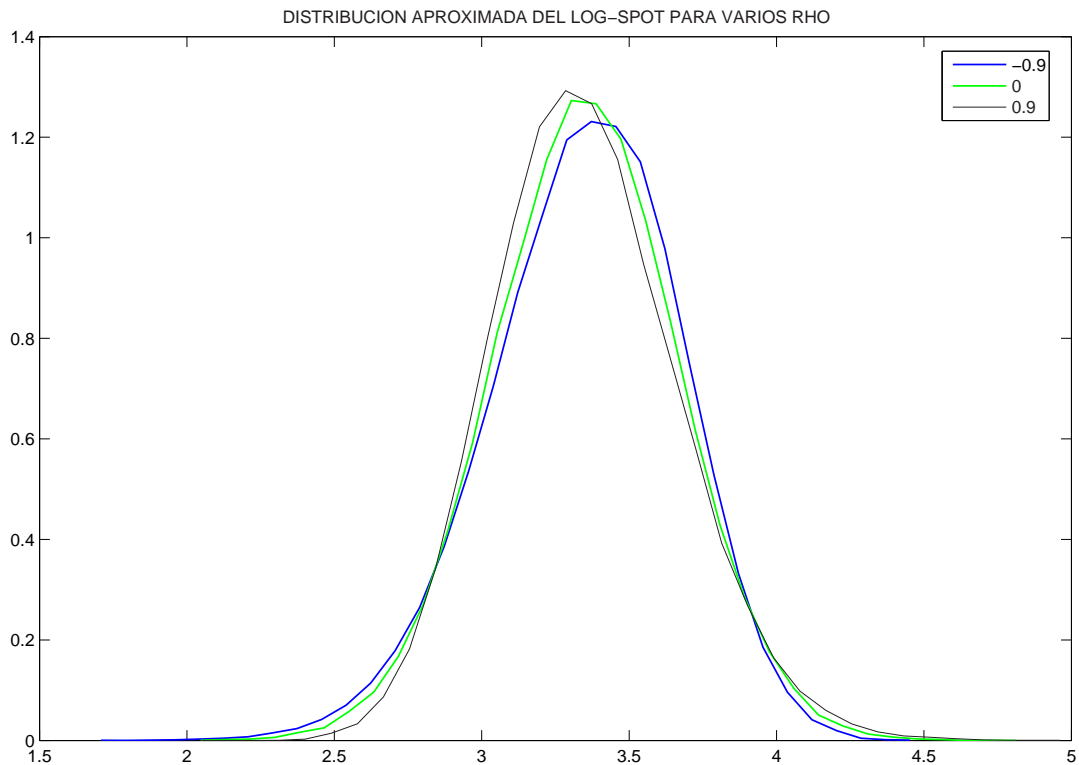


Figura 5.3: Distribución del log-spot y volatilidad implícita para varios σ . Parámetros fijos: $S_0 = 30$, $V_0 = 0.1$, $r = 0$, $\kappa = 1$, $\theta = 0.1$, $\rho = 0$

Es importante notar dos cosas de las gráficas anteriores: en primer lugar, cómo el parámetro σ tiene influencia directa sobre la *kurtosis* de la distribución, y cómo se puede observar que las colas de las distribuciones con picos más altos son, en efecto, más anchas. En segundo lugar es interesante notar cómo, para un valor de $\sigma = 0.1$, el hecho de que $\theta = V_0 = 0.1$, implican que V_t es aproximadamente constante, lo que causa que el modelo de Heston se aproxime al modelo de Black-Scholes con un valor de la volatilidad $\sqrt{V} = 0.316$. En la gráfica de las distribuciones, notamos cómo la gráfica en azul, que corresponde a la distribución del modelo, se asemeja bastante a una distribución normal con desviación estándar 0.316 (la gráfica en naranja). Esta última distribución es precisamente la distribución implicada por el modelo de Black-Scholes para un tiempo de maduración $T = 1$, según la Proposición 2.3. En cuanto a la figura de la volatilidad implícita, notamos como la gráfica para $\sigma = 0.1$ es casi recta.



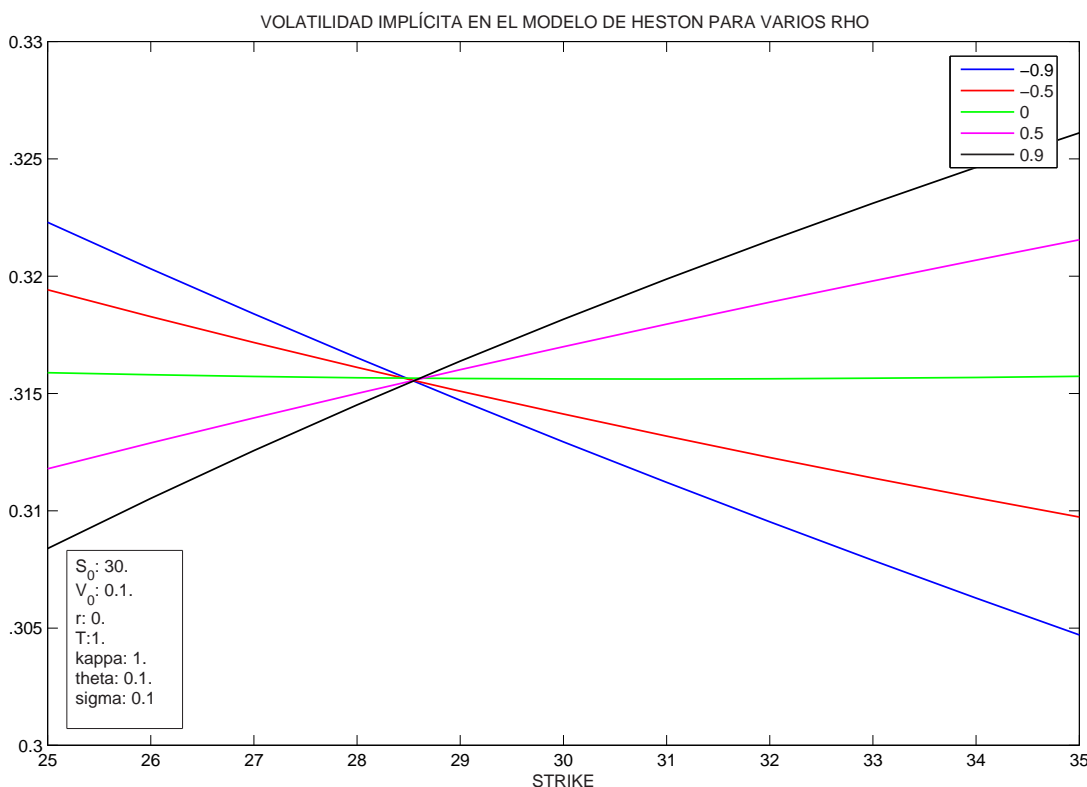


Figura 5.4: Distribución del log-spot y volatilidad implícita para varios ρ . Parámetros fijos: $S_0 = 30$, $V_0 = 0.1$, $r = 0$, $\kappa = 1$, $\theta = 0.1$, $\sigma = 0.1$

En cuanto a la incidencia del parámetro ρ , notamos cómo una correlación positiva, inclina el pico de la distribución del log-spot hacia la izquierda, mientras que el efecto contrario se observa para correlaciones negativas. Nótese cómo en efecto, la inclinación del pico hace que una de las colas sea más ancha que la otra, confirmando las conclusiones de la sección anterior. En el caso de la figura de volatilidad implícita, una correlación negativa inclina la gráfica en el sentido de las manecillas del reloj, y para una correlación positiva se observa el fenómeno contrario. También es interesante notar como el eje de rotación es el mismo para todos los valores de ρ , y se podría conjeturar que está ubicado en la media de la distribución del log-spot, $rT - \frac{1}{2} \int_0^T V_t dt$. Como en el ejemplo $r = 0$, tal suposición explicaría por qué el eje de rotación está ubicado antes del valor inicial $S_0 = 30$.

Las gráficas son casi rectas pues hemos usado un valor $\sigma = 0.1$, para mos-

trar los efectos aislados de ambos parámetros. En general, las gráficas de volatilidad implícita de los valores reales del mercado, muestran una incidencia conjunta de ambos.

Finalmente hay que notar, aunque no presentamos las figuras correspondientes, que la incidencia de ambos parámetros sobre la forma de las gráficas de volatilidad implícita disminuye a medida que el tiempo de maduración aumenta.

Como conclusión de la Sección, tenemos entonces que el modelo de Heston logra reproducir, bajo un conjunto fijo de parámetros, ciertas características relevantes, tanto de la distribución del log-spot, como de las gráficas de volatilidad implícita, que el modelo de Black-Scholes es incapaz de capturar con un valor de volatilidad constante.

5.3. La Calibración del Modelo

El objetivo de esta sección es exponer brevemente el problema de la calibración, esto es, la manera en que deben encontrarse los parámetros que se introducirán en la fórmula de valoración. Recordemos, que el modelo de Heston requiere la introducción de un conjunto de parámetros $\Theta = (V_0, \kappa, \theta, \sigma, \rho)$, que no es directamente observable, a diferencia por ejemplo, de los parámetros S_0 y K . En principio tenemos dos conjuntos diferentes de datos a partir de los cuales podemos inferir el conjunto apropiado de parámetros Θ : la serie histórica del comportamiento del Spot por un lado, y por el otro, el valor de mercado de las opciones sobre éste.

El acercamiento mediante la serie histórica tiene una gran cantidad de dificultades. En primer lugar, no hay garantías de que el conjunto de parámetros encontrado mediante este acercamiento, corresponda al conjunto de parámetros implicado en el valor real de las opciones. Lo anterior no debe sorprendernos: los parámetros históricos reflejan el comportamiento pasado del activo subyacente, mientras que el precio de las opciones contiene, por su propia naturaleza, las expectativas del mercado acerca de dicho comportamiento. El valor de una opción durante tiempo de maduración depende, no del comportamiento del Spot en los días anteriores a la escritura del contrato, sino precisamente, de su comportamiento posterior. Evidentemente, en un modelo

perfectamente especificado, los parámetros deberían mantenerse más o menos constantes a través del tiempo, luego suponiendo que el modelo está perfectamente construido, el conjunto de parámetros histórico debería coincidir con las expectativas futuras del mercado. Sin embargo, no podemos pretender que el modelo de Heston (ni ningún otro modelo de precios) esté perfectamente construido y refleje, de manera exacta, el complicado comportamiento de los activos en el tiempo. Además, la calibración mediante la serie histórica requiere un amplio número de datos, lo que nos obliga, bien a mirar cada vez más atrás en el tiempo (agravando el problema latente de la inconsistencia entre los parámetros futuros y los pasados), o bien, a asumir la solución poco viable de tomar mediciones en lapsos cada vez más cortos.

En términos generales, si deseamos insistir en la calibración mediante la serie histórica, existen dos formulaciones. En [DY02], Dragulescu y Yakovenko derivan una expresión para la fdp del comportamiento de los precios para el Modelo de Heston, bajo la forma de una inversa de Fourier. Se podría entonces minimizar sobre Θ la distancia entre la distribución estadística del activo, y la distribución implicada por el Modelo. Sin embargo, tal aproximación es impráctica, pues cada evaluación de la función objetivo, requiere a su vez la evaluación de un número de integrales de Fourier igual, al número de datos históricos.

Por otro lado en [Jav], Javaheri dedica un libro completo a la calibración de varios modelos con volatilidad estocástica recurriendo a la serie histórica, mediante el uso de diversas técnicas de filtración. Los resultados no son alentadores: aunque la estimación de los parámetros $\kappa\theta$ y κ es bastante aceptable, la estimación de los parámetros σ y ρ es bastante deficiente. Basta recordar los resultados de la Sección anterior para caer en cuenta de la suprema relevancia de éstos últimos. Aún menos esperanzador es el hecho de que las técnicas de filtración son aplicadas a series históricas simuladas usando el propio Modelo de Heston (para poder comparar los parámetros inferidos con los parámetros reales), luego sería de suponer que el pobre desempeño sobre series de datos que por construcción, están descritas perfectamente por el modelo, sería magnificado al aplicar tales métodos a series de datos que seguramente, no se ajustan exactamente.

Finalmente, también es pertinente recordar que la calibración mediante la serie histórica extrae, en el mejor de los casos, los parámetros sobre la medida real, mientras que los parámetros que necesitamos introducir en el

modelo son los parámetros de riesgo neutral, lo que añade una complicación más, pues sería necesario extraer el parámetro λ (el *valor de mercado del riesgo de la volatilidad*) de activos cuyo valor dependa de λ .

La calibración directa mediante el precio de las opciones no está, de ninguna manera, exenta de problemas, pero garantiza que el conjunto de parámetros Θ es el de riesgo neutral, y además se acomoda a los precios del mercado. En términos generales, la idea es minimizar sobre Θ el cuadrado de la distancia entre cierto conjunto de precios del mercado, y la correspondiente valoración que ofrece el modelo.

Formalmente tenemos lo siguiente: $\{t_i\}_{i=1}^n$ un conjunto de tiempos de maduración, $K = \{K_{t_i}\}$ una familia de conjuntos de Strikes, donde $K_{t_i} = (K_{t_i}^1, \dots, K_{t_i}^{m_{t_i}})$ y donde conocemos los parámetros observables S_0 , r y q , y tenemos un conjunto de precios del mercado $M_{t_i}^{K_{t_i}^j}$. Podemos expresar de manera formal el problema de minimización de la siguiente manera:

$$\Theta_{opt} = \min_{\Theta} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_{t_i}} p_{ij} \left(M_{t_i}^{K_{t_i}^j} - H(\Theta, t_i, K_{t_i}^j) \right)^2 \quad (5.3)$$

Donde $H(\Theta, t_i, K_{t_i}^j)$ es la valoración del modelo de Heston y p_{ij} es algún esquema de ponderación. En general, el problema anterior no es convexo, y además es de magnitud considerable, pues $\Theta \in \mathbb{R}^5$, luego existe el riesgo de acabar en un mínimo local. Algunos autores (ver el artículo de Mikhailov y Nögel [MN], por ejemplo) sugieren el uso de algoritmos de minimización global probabilística, como algoritmos genéticos o algoritmos de recocido simulado, para evitar caer en mínimos locales. Sin embargo, los autores citados anteriormente encuentran que los algoritmos de minimización local de Excel funcionan relativamente bien, condicionados a una buena elección del valor inicial.

Dadas las restricciones de tiempo, fue imposible realizar un estudio a profundidad del problema de minimización mencionado anteriormente, y optamos por el uso, un tanto injustificado, de los algoritmos de minimización de Matlab. Como veremos en la siguiente sección, los resultados son bastante buenos, a pesar de todo.

Unas palabras finales acerca de la implementación del problema de minimización que fue efectuada: el valor de las opciones, tanto del mercado

como las obtenidas por el modelo mismo, puede tener un rango muy amplio dependiendo del Strike. En términos generales, un rango de precios para un tiempo de maduración determinado puede cubrir el intervalo $[0.1, 1000]$. Evidentemente la total falta de proporción entre los precios puede generar serios problemas en la minimización. Para evitar lo anterior, decidimos normalizar los valores tomando su volatilidad implícita, lo que genera un rango de valores mucho más homogéneo. Finalmente, el objetivo de la calibración es lograr que los precios obtenidos mediante el modelo se encuentren dentro del rango de los precios de compra y venta (en inglés, *bid-ask spread*), rango que puede variar sustancialmente dependiendo del Strike. La minimización fue efectuada entonces sobre la volatilidad implícita del promedio entre los precios de compra y venta, pero se incluyó un factor de ponderación $p_{ij} = \frac{1}{\text{compra-venta}}$, para otorgarle más peso a los Strikes en donde la diferencia entre los precios de compra y venta es menor.

5.4. El Modelo de Heston en el Índice S&P500

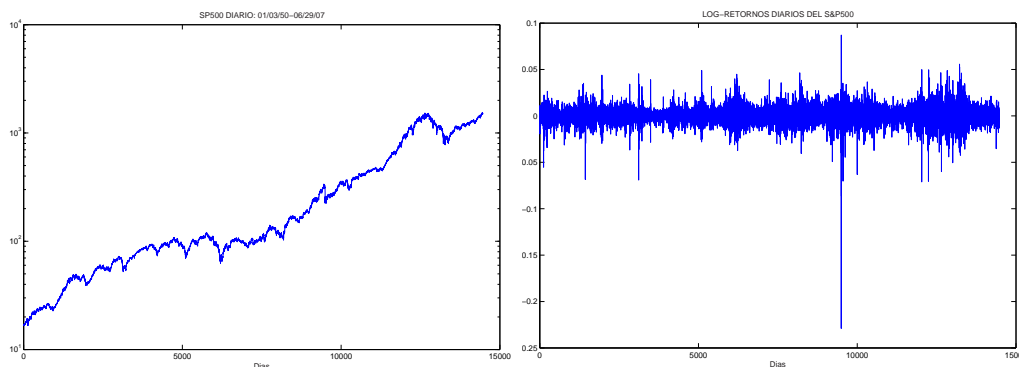


Figura 5.5: Izquierda: Índice S&P500 diario, desde Enero 3 de 1950, hasta Junio 29 de 2007, en escala logarítmica. Derecha: Log-retornos sobre el mismo lapso. Fuente: finance.yahoo.com

Hacemos un pequeño excurso, antes de examinar el comportamiento del Modelo de Heston en opciones sobre el S&P500, para hacer ciertas anotaciones relevantes acerca del comportamiento histórico del índice, representado en la figura 5.5. En la gráfica derecha, nótese el retorno negativo de -0.2, que corresponde al colapso financiero de octubre 19 de 1987, conocido como el

lunes negro. En la gráfica izquierda se puede observar un crecimiento más o menos lineal, ya que la figura está en escala logarítmica.

A continuación presentamos una gráfica de mayor importancia dentro del análisis que hemos efectuado en esta disertación, y que corresponde a la distribución aproximada de los log-retornos diarios sobre el Índice.

Según la proposición 2.3, tenemos:

$$\ln\left(\frac{S_{t+\Delta t}}{S_t}\right) \sim N\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t, \sigma^2\Delta t\right), \forall t \geq 0.$$

Suponiendo entonces que los parámetros μ y σ se han mantenido constantes, podemos tomar cada log-retorno diario $\ln\left(\frac{S_{t+1}}{S_t}\right)$, como una muestra aleatoria de la distribución normal descrita en la ecuación anterior. La figura 5.6, muestra la distribución estadística de $\ln\left(\frac{S_{t+1}}{S_t}\right)$, y una distribución normal, con media y varianza iguales. Se puede observar, como era de esperarse, que el pico de la distribución estadística es mucho mayor, y consecuentemente, que las colas son más anchas.

Para observar el desempeño del Modelo de Heston, se tomó un conjunto de precios de la opción CALL europea sobre el Índice S&P500. Los datos fueron obtenidos directamente de la página de la *Chicago Board of Options Exchange* (www.cboe.com), y corresponden a los precios sobre la opción CALL, en el día 3 de Julio de 2007. Al momento de la adquisición de los datos el valor del Spot era de \$1523.24. Para obtener una aproximación consistente de la tasa libre de riesgo, se calculó el promedio de la tasa que pagan los billetes del tesoro de los Estados Unidos, emitidos en Junio 28 de 2007, obteniendo un valor de 0.048. La información anterior fue consultada en la página de internet: www.savingbonds.gov/RI/OFBills. Finalmente, para obtener una medida consistente de los dividendos continuos sobre el Índice S&P500 (que corresponden al promedio ponderado de los dividendos continuos de las 500 empresas que componen el Índice) se consultó la página de internet: www.indexarb.com/dividendYieldSortedsp.html, obteniendo un valor de 0.0153.

Se tomaron los datos del valor de la opción CALL para tres vencimientos diferentes: 20 de julio de 2007, 17 de agosto de 2007 y 21 de diciembre de 2007. La calibración se efectuó de manera conjunta sobre los tres vencimientos; es

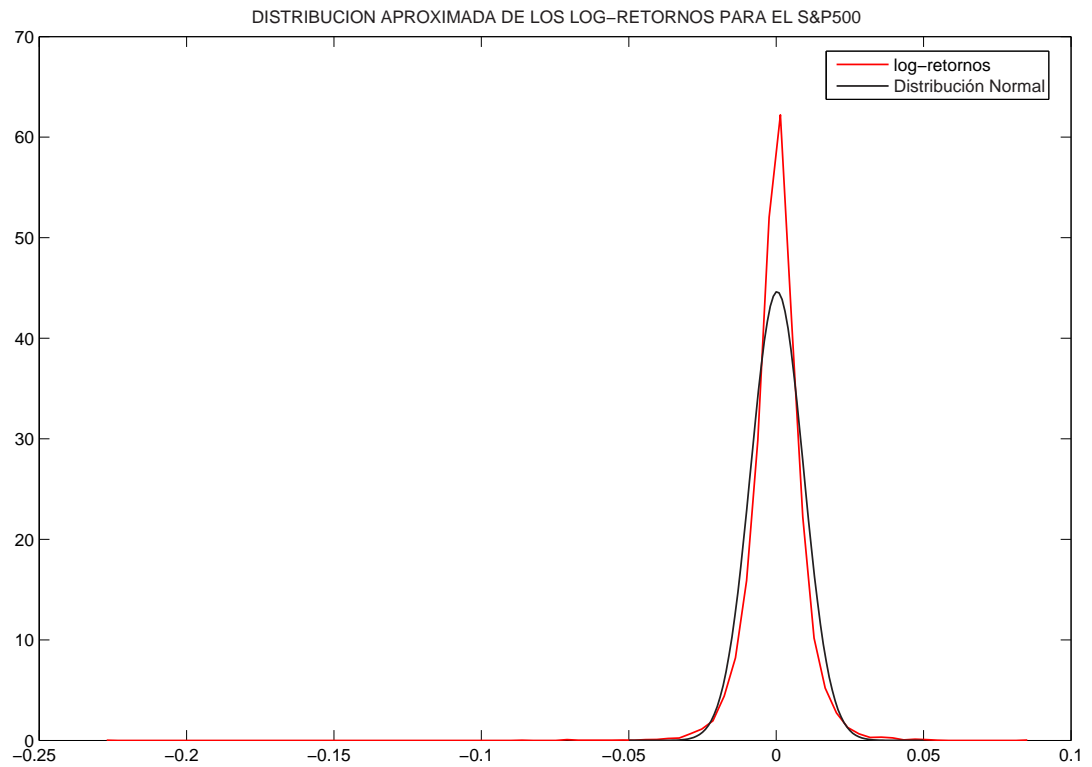


Figura 5.6: En rojo: Distribución estadística de los log-retornos. En negro: Distribución Normal, con media $3.1126e(-4)$ y varianza $7.9855e(-5)$. **Los valores para la media y la varianza de ambas distribuciones son iguales.**

de suponer que una calibración aislada sobre cada vencimiento obtendría aproximaciones más exactas. Los resultados obtenidos se presentan en las figuras 5.7, 5.8 y 5.9. El conjunto de parámetros encontrado fue el siguiente: $\Theta_{opt} = (0.01, 0.2864, 0.7469, 0.6227, -0.8605)$.

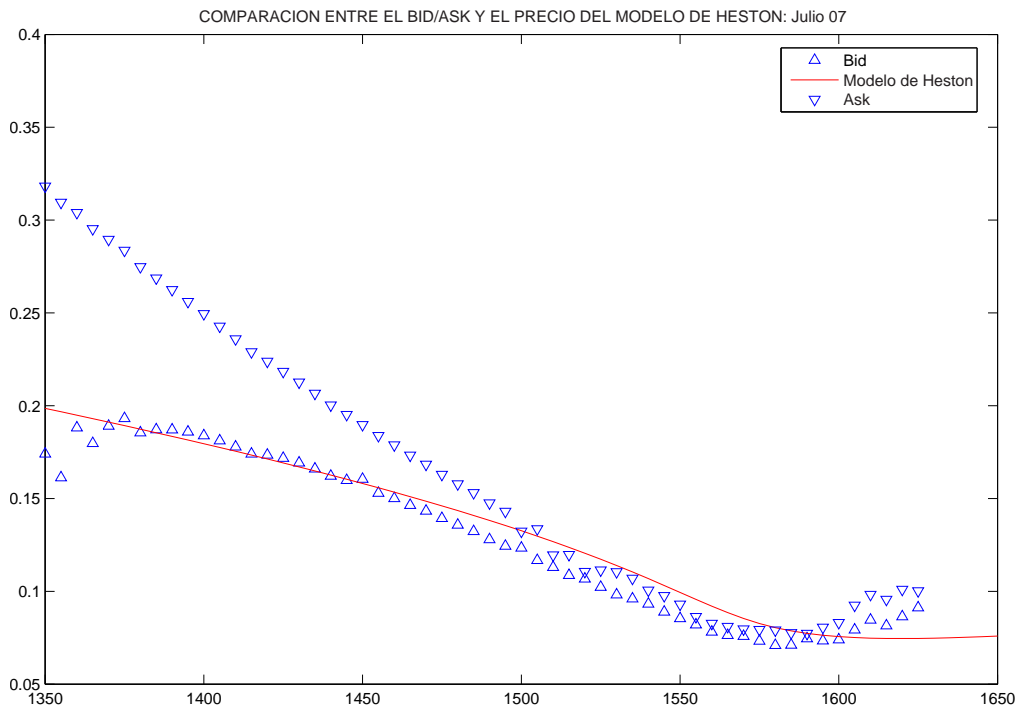


Figura 5.7: Precio del Modelo de Heston en Julio07, con parámetros conjuntos para Julio07, Agosto07 y Diciembre07: $V_0=0.01$, $\kappa=0.2864$, $\theta=0.7469$, $\sigma=0.6227$, $\rho=-0.8605$.

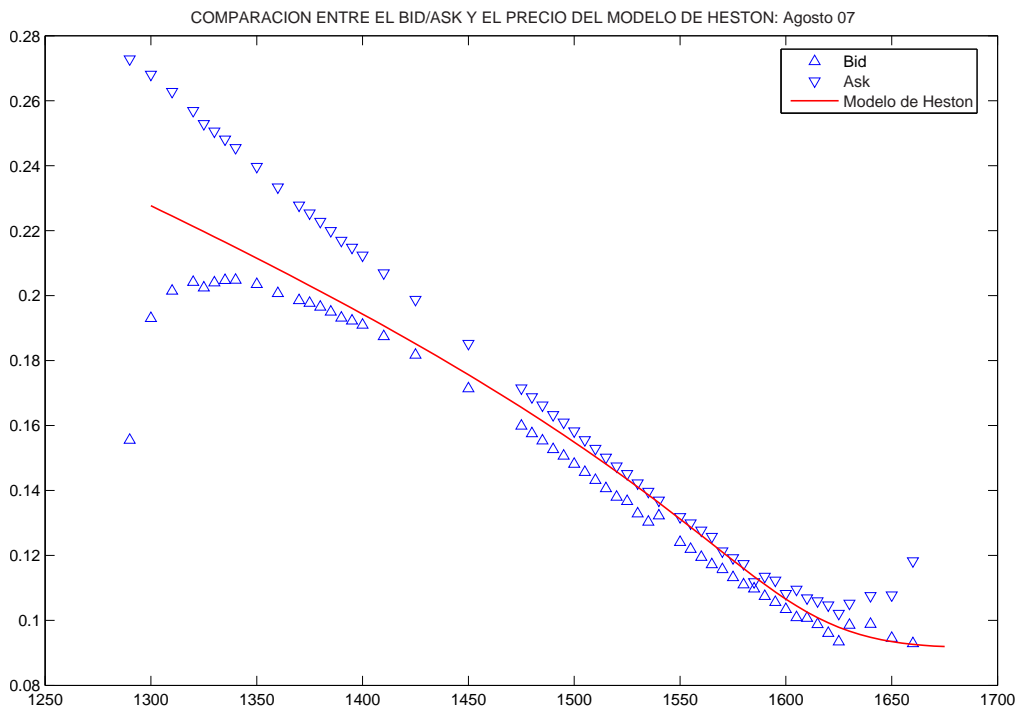


Figura 5.8: Precio del Modelo de Heston en Agosto07, con parámetros conjuntos para Julio07, Agosto07 y Diciembre07: $V_0=0.01$, $\kappa=0.2864$, $\theta=0.7469$, $\sigma=0.6227$, $\rho=-0.8605$.

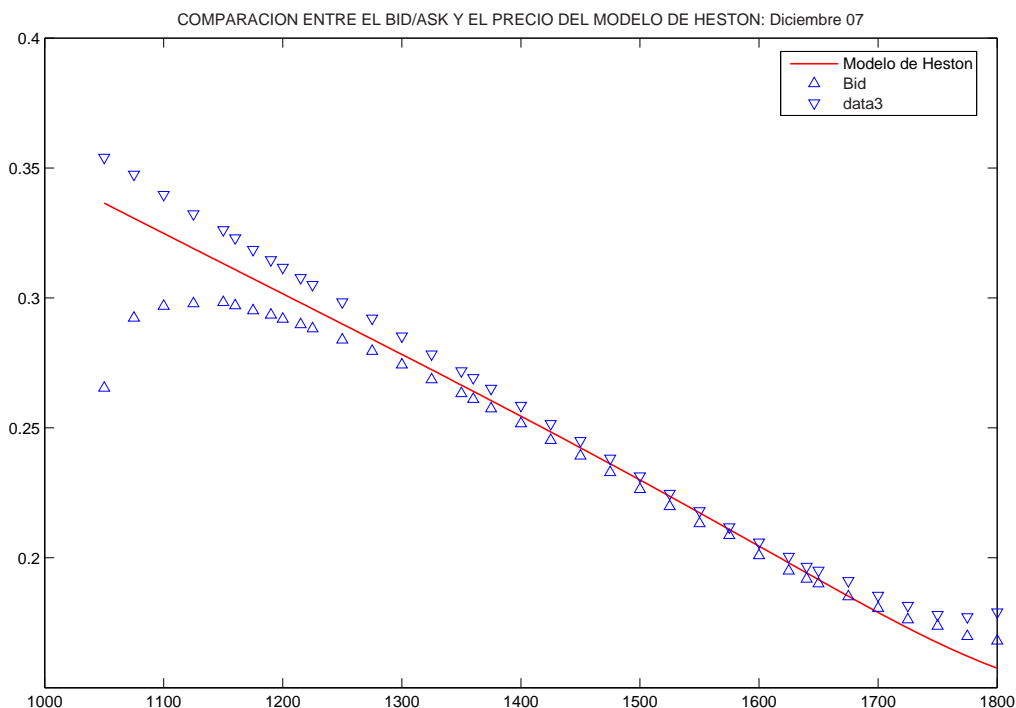


Figura 5.9: Precio del Modelo de Heston en Diciembre07, con parámetros conjuntos para Julio07, Agosto07 y Diciembre07: $V_0=0.01$, $\kappa=0.2864$, $\theta=0.7469$, $\sigma=0.6227$, $\rho=-0.8605$.

En términos generales el resultado es satisfactorio, sobre todo en el caso de agosto, en donde el ajuste es excepcional. Sin embargo, llama la atención el elevado valor de la volatilidad media $\theta=0.7469$. Por otro lado, se puede observar que la curvatura del Bid/Ask de Julio07 es un poco mayor que la de la gráfica de los precios del Modelo. En [Gat], Gatheral también registra éste fenómeno, que además se incrementa notablemente, a medida que el tiempo de maduración se acorta. El Modelo de Heston, según el autor, es incapaz de reproducir la intensidad de la *sonrisa de volatilidad* para tiempos de maduración breves. En su libro, presenta un ejemplo sumamente interesante, en donde el vencimiento de la opción CALL sobre el S&P500 es al día siguiente del registro de los datos. La *sonrisa de volatilidad* registrada por el mercado es extremadamente marcada, y el Modelo de Heston es incapaz de reproducirla. Gatheral afirma, que las expectativas de cambios drásticos en el mercado (la realización de valores extremos) es mayor que la implicada por el Modelo de Heston, diferencia que se hace particularmente notable en

tiempos de maduración breves.

Es importante señalar que, de hecho, ese era el mismo problema del Modelo de Black-Scholes. En efecto, la introducción de un comportamiento estocástico de la volatilidad que, recordemos, tiene como consecuencia una distribución del log-spot con colas más anchas que las de una distribución normal, acorta de manera considerable la brecha entre las expectativas del mercado acerca de la posibilidad de valores extremos, y la probabilidad que el Modelo le atribuye a tales eventos. Se podría pensar que para hacer el modelo consistente con los datos del mercado, bastaría entonces con aumentar la *kurtosis* de la distribución, aumentando el valor del parámetro σ ; sin embargo, tal solución desajustaría el modelo a largo plazo. El problema del Modelo de Heston, según Gatheral, es que supone que el cambio en los precios es continuo (el modelo de Heston es una difusión), por lo que subestima, por su misma estructura, la probabilidad real de cambios extremos en el mercado, sobre todo en el corto plazo.

La solución, sugiere Gatheral, es introducir discontinuidades en el Modelo, para cerrar aún más la brecha. La sugerencia no es gratuita: de hecho, poco tiempo después de la publicación del artículo de Heston, apareció en la literatura una gran cantidad de Modelos que recorren este camino, introduciendo saltos, tanto en el comportamiento de la varianza, como en el comportamiento del activo (Modelos SVJ y SVJJ por el nombre común en inglés *Stochastic Volatility with Jumps*), pero profundizar en tales modelos está por fuera de los objetivos de esta dicertación. Bastará con mencionar que el desempeño de tales modelos es efectivamente superior al Modelo de Heston.

Apéndice A

Códigos en MatLab

A.1. Códigos de La Fórmula de Valoración

Función Característica de Heston

```
function z=HCharacter(u, S, v, r, tau, kappa, theta, sigma, rho)
%function z=HCharacter(u, S, v, r, tau, kappa, theta, sigma, rho)

[m,n]=size(u);

alpha=-0.5*u.*(u+i*ones(m,n)); beta=kappa*ones(m,n)-u*rho*sigma*i;
gamma=0.5*sigma^2;

D=sqrt(beta.^2-4*alpha*gamma); G=(beta-D)./(beta+D);

B=((beta-D)/sigma^2).*((ones(m,n)-exp(-D*tau))
./((ones(m,n)-G.*exp(-D*tau))));
A=(kappa*theta/sigma^2)*((beta-D)*tau-2*
log((G.*exp(-D*tau)-ones(m,n))./(G-ones(m,n))));
(i*u*(log(S)+r*tau)+A+B*v);

z=exp(i*u*(log(S)+r*tau)+A+B*v);
```

Integrando de Heston

```
function r=IntegrandoH(x, S, K, v, r, tau, kappa, theta, sigma,
rho, alpha)
%function r=IntegrandoH(x, S, K, v, r, tau, kappa, theta, sigma,
rho, alpha)

[m,n]=size(x); C_inf=(sqrt(1-rho^2)/sigma)*(v+kappa*theta*tau);

u=-log(x)/C_inf; u2=u-i*(alpha+1)*ones(m,n);

num=exp(-i*log(K)*u).*HCharacter(u2, S, v, r, tau, kappa, theta,
sigma, rho); den=-(u-i*alpha*ones(m,n)).*u2; r=real(num./den);
r=r./(x*C_inf);

if x(1)==0
    r(1)=0;
end
```

Momento Crítico

```
function eta2=MaxEta(eta,tau, kappa, sigma, rho)
%eta2=MaxEta(eta,tau, kappa, sigma, rho)
[m n]=size(eta); a=(2/sigma^2)*(rho*sigma*eta-kappa*ones(m,n));
D=(4/sigma^4)*(kappa^2*ones(m,n)+sigma*(sigma-2*kappa*rho)*
eta-sigma^2*(1-rho^2)*eta.^2);
beta=0.5*sqrt(abs(D));

for j=1:n
    if a(j)<0
        eta2=(2/(beta(j)*sigma^2))*(pi+atan(2*beta(j)/a(j)));
    else
        eta2=(2/(beta(j)*sigma^2))*atan(2*beta(j)/a(j));
    end
end
```

```
eta2=eta2-tau*ones(m,n);
```

α óptimo

```
function alpha=AlphaOpt(u, S, K, v, r, tau, kappa, theta, sigma,
rho)
%alpha=AlphaOpt(u, S, K, v, r, tau, kappa, theta, sigma, rho)
alpha=-u*log(K)+0.5*log((HCharacter(-u*i, S, v, r, tau, kappa,
theta, sigma, rho)/(u.*(u+1)))^2);
```

La Fórmula de Valoración

```
function C=CALLHeston(S,K,v,r,rf,tau,kappa,theta,sigma,rho,info)
%CALLHeston(S,K,v,r,rf,tau,kappa,theta,sigma,rho,info)
%Calcula el valor de la opcion CALL europea con parmetros:
%S: spot en t=0.
%K: strike.
%v: Varianza en t=0.
%r: tasa libre de riesgo.
%rf:dividendos continuos.
%tau: tiempo restante para ejercicio.
%kappa: constante de reversin de la volatilidad.
%theta: varianza a largo plazo.
%sigma: varianza de la varianza.
%rho: correlacin instantnea entre spot y varianza.
%Si info ~=0 se muestra en pantalla el mximo y ptimo
%alpha para la
%inversin de Fourier.
```

```
S=exp(-rf*tau)*S;
```

```
if rho<kappa/sigma
    rpos=(sigma-2*kappa*rho+sqrt((sigma-2*kappa*rho)^2+4*
(1-rho^2)*kappa^2))
    /(2*sigma*(1-rho^2));
    maxeta=fzero(@(x)MaxEta(x,tau, kappa, sigma, rho),
```



```

[rpos+0.0001 100000]);

if abs(real(HCharacter(-(maxeta-0.1)*i, S, v, r, tau, kappa,
theta, sigma, rho)))==inf
    while abs(real(HCharacter(-maxeta*i, S, v, r, tau,
kappa, theta, sigma, rho)))==inf
        maxeta=maxeta-1;
    end
end

alpha=fminbnd(@(x)AlphaOpt(x,S, K, v, r, tau,
kappa, theta, sigma, rho),0,maxeta-1);
alpha=real(alpha);
if info~=0
disp([maxeta-1 alpha]);
end
else
    alpha=1
    if info~=0
disp([alpha]);
end
end

C=adapQuad(@IntegrandoH, 10^(-9), 1,0,0, S, K, v,
r, tau, kappa,
theta, sigma, rho,alpha); C=exp(-alpha*log(K)-r*tau)/pi*C;

```

Calibración del Modelo

```

function CUAD=cuad(PAR,S,r,q,tiempos,varargin)
%CAD=cuad(v,kappa,theta,sigma,rho,S,r,q,tiempos,varargin)
%tiempos es un vector de tiempos de maduracin
%varargin recibe una celda, del mismo tamaño que el vector de tiempos,
%donde cada componente contiene una matriz con varios STRIKES y la
%volatilidad implícita del bid/ask
contcuad=1; [m n]=size(tiempos); for i=1:n
    [k m]=size(varargin{1,i});
    for j=1:k

```

```

    CUAD(contcudad)=(1/(varargin{1,i}(j,3)-varargin{1,i}(j,2)))*
    (0.5*(varargin{1,i}(j,2)+varargin{1,i}(j,3))-
    vImpCALL(r,q,CALLHeston(S,varargin{1,i}(j,1),PAR(1)
    ,r,q,tiempos(i),PAR(2),PAR(3),PAR(4),PAR(5),0)
    ,tiempos(i),S,varargin{1,i}(j,1)));
    contcudad=contcudad+1;
end
end
end

```

Rutina de Integración Numérica Gauss-Lobatto

La rutina de integración numérica implementada en el algoritmo siguiente es desarrollada por Gander y Gautschi en [GG00].

```

function I=adapQuad(f, a, b, tol, trace, varargin)

%I=adapQuad(f,a,b,tol,trace, a1,a2,...,an)
%Calcula la cuadratura de f(x, a1, a2, ...,an)
%usando un algoritmo adaptativo Gauss-Lobatto, con un grado de tolerancia
%tol. (tol=0 tiene la precisin de la mquina).
%trace ~=0 muestra en pantalla el limite izquierdo, la longitud y el
%resultado de la integracin sobre el subintervalo.

if tol<eps, tol=eps; end;

I=0; i=1; alpha=sqrt(2/3); beta=1/sqrt(5);
x1=0.94288241569547971905635175843185720232;
x2=0.64185334234578130578123554132903188354;
x3=0.23638319966214988028222377349205292599;
A=0.015827191973480183087169986733305510591;
B=0.094273840218850045531282505077108171960;
C=0.15507198733658539625363597980210298680;
D=0.18882157396018245442000533937297167125;
E=0.19977340522685852679206802206648840246;
F=0.22492646533333952701601768799639508076;
G=0.24261107190140773379964095790325635233;

a(1)=a; b(1)=b; h=(b-a)/2; m=(a+b)/2;
x=[a,m-x1*h,m-alpha*h,m-x2*h,m-beta*h,m-x3*h,m,m+x3*h,m+beta*h,m+x2*h,

```

```

m+alpha*h,m+x1*h,b]; y=feval(@(z)f(z,varargin{:}),x); fa(1)=y(1);
fb(1)=y(13);
i1=(h/1470)*(77*(y(1)+y(13))+432*(y(3)+y(11))+625*(y(5)+y(9))+672*y(7));
i2=(h/6)*(y(1)+y(13)+5*(y(5)+y(9)));
is=h*(A*(y(1)+y(13))+B*(y(2)+y(12))+C*(y(3)+y(11))+D*(y(4)+y(10))+
E*(y(5)+y(9))+F*(y(6)+y(8))+G*y(7));

R=abs(i1-is)/abs(i2-is); if (R>0 & R<1), tol=tol/R; end;
is=is*tol/eps; if (is==0), is=b-a; end;

while i>0
    j=i;
    h=(b(i)-a(i))/2;
    m=(a(i)+b(i))/2;
    x=[m-alpha*h, m-beta*h, m, m+beta*h, m+alpha*h];
    y=feval(@(z)f(z,varargin{:}),x);
    i1=(h/1470)*(77*(fa(i)+fb(i))+432*(y(1)+y(5))+625*(y(2)+
y(4))+672*y(3));
    i2=(h/6)*(fa(i)+fb(i)+5*(y(2)+y(4)));

    if(trace), disp([a(i) b(i)-a(i) i1]); end;

    if (is+(i1-i2)==is) | (b(i)<=x(5)) | (x(5)<= x(4)) |
(x(4)<= x(3)) | (x(3)<=x(2)) | (x(2)<=a(i))
        if (b(i)<=x(5)) | (x(5)<= x(4)) | (x(4)<= x(3)) |
(x(3)<=x(2)) | (x(2)<=a(i))
            %warning('El intervalo no contiene suficientes nmeros de mquina,
la tolerancia requerida puede no ser cumplida');
        end
        I=I+i1;
        i=i-1;

    else
        bi=b(i);           %Intervalo [a(i) m-alpha*h]
        fbi=fb(i);
        b(i)=x(1);
        fb(i)=y(1);

```

A.2. SIMULACIÓN MONTECARLO Y DISTRIBUCIONES ESTADÍSTICAS 81

```
    i=i+1;           %Intervalo [m-alpha*h m-beta*h]
    a(i)=x(1);
    b(i)=x(2);
    fa(i)=y(1);
    fb(i)=y(2);
    i=i+1;           %Intervalo [m-beta*h m]
    a(i)=x(2);
    b(i)=x(3);
    fa(i)=y(2);
    fb(i)=y(3);
    i=i+1;           %Intervalo [m m+beta*h]
    a(i)=x(3);
    b(i)=x(4);
    fa(i)=y(3);
    fb(i)=y(4);
    i=i+1;           %Intervalo [m+beta*h m+alpha*h]
    a(i)=x(4);
    b(i)=x(5);
    fa(i)=y(4);
    fb(i)=y(5);
    i=i+1;           %Intervalo [m+alpha*h b(i)]
    a(i)=x(5);
    b(i)=bi;
    fa(i)=y(5);
    fb(i)=fbi;
end
end
```

A.2. Simulación Montecarlo y Distribuciones Estadísticas

Simulación Montecarlo

```
function Sim=MonteCarloHeston(S,V,T,mu,kappa,theta,
sigma,rho,N,M)
```

```

%Simulacion montecarlo del modelo de Heston con
los siguientes parametros:
%MonteCarloHeston(S,V,T,mu,kappa,theta,sigma,rho,N,M)
%S: spot.
%V: volatilidad inicial.
%T: Tiempo.
%mu: drift.
%kappa: regresion de la varianza.
%theta: varianza a largo plazo.
%sigma: volvol.
%rho: parametro de correlacion.
%N: numero de simulaciones.
%M: numero de pasos por simulacion.

dt=T/M; for i=1:N
    logS=log(S);
    for j=1:M
        Normal=randn(1,2);
        logS=logS+(mu-0.5*V)*dt+sqrt(V*dt)*(rho*Normal(1)
+sqrt(1-rho^2)*Normal(2));
        V=(sqrt(V)+0.5*sigma*sqrt(dt)*Normal(1))^2+kappa*
(theta-V)*dt-0.25*sigma^2*dt;
        if V<0
            V=0;
        end
    end
    Sim(i)=logS;
end

```

Distribuciones estadísticas

```

function Histograma(A)
maxA=max(A); minA=min(A); [m n]=size(A);
particion=ceil(n/175); deltaR=(maxA-minA)/particion;
x(1)=minA+deltaR/2; for j=1:particion

```

```

numeventos(j)=0;
x(j+1)=x(j)+deltaR;
for k=1:n
    if A(k)>=minA+(j-1)*deltaR && A(k)<minA+j*deltaR
        numeventos(j)=numeventos(j)+1;
    end
end
end numeventos(particion)=numeventos(particion)+1; sum(numeventos)
numeventos=numeventos/n/deltaR; plot(x(1:particion),numeventos);

```

A.3. Cálculo de la volatilidad implícita

Derivada con respecto a la volatilidad de la función de valoración del modelo de Black-Scholes

```

function dCALL=derivadaCALL(r, rf, sigma, T, S, K) S=exp(-rf*T)*S;
d1=(log(S)-log(K) + T*(r+0.5*sigma^2))/(sigma*sqrt(T));
d2=(log(S)-log(K) + T*(r-0.5*sigma^2))/(sigma*sqrt(T));
dCALL=(S*(sqrt(T)-d1/sigma)*exp(-d1^2/2)/sqrt(2*pi))-
(K*exp(-r*T-d2^2/2)*(-sqrt(T)-d2/sigma)/sqrt(2*pi));

```

Newton-Raphson

```

function sigma=vImpCALL(r,rf,V,T,S,K)
%Clculo de la volatilidad implcita para la CALL usando Newton-Raphson.
%sigma=vImpCALL(r, rf, V, T, S, K).
%r: tasa libre de riesgo.
%rf: tasa libre de riesgo moneda extranjera.
%V: Valor de la opcin.
%T: tiempo restante para el ejercicio.
%S: valor del subyacente.
%K: valor del strike.

```

```

[m n]=size(V);

```

```
for j=1:n

if (V(j) <= max(S*exp(-rf*T)-K*exp(-r*T),0))
    sigma(j)=0;
elseif (V(j) >= S*exp(-rf*T))
    sigma(j)=inf;
else
    if S==K && r==0 && rf==0
        sigma1=0.1;
    else
        sigma1=sqrt(abs(log(S*exp(-rf*T))-log(K)+r*T)*2/T);
    end
    Val=europea(r, rf, sigma1, T, S, K);
    sigma2=sigma1-((Val(1)-V(j))/derivadaCALL(r, rf, sigma1, T, S, K));
    while (abs(sigma2-sigma1) >= 0.0001)
        sigma1=sigma2;
        Val=europea(r, rf, sigma1, T, S, K);
        sigma2=sigma1-((Val(1)-V(j))/derivadaCALL(r, rf, sigma1, T, S, K));
    end

    sigma(j)=sigma2;
end end
```

Bibliografía

- [Al06] Albrecher, Mayer, Schoutens y Tistaert, *The Little Heston Trap*.
<http://perswww.kuleuven.be/~u0009713/HestonTrap.pdf>.
- [AP07] L. Andersen y V. Piterbarg, *Moment Explosions in Stochastic Volatility Models*. Finance Stochastics, Vol. 11, No. 1, pgs. 29-50. 2007.
- [BS] F. Black and M. Scholes. *The Valuation of Options and Corporate Liabilities*. Journal of Political Economy. No. 81, pgs. 637-654. 1973.
- [BK] N. H. Bingham y R. Kiesel, *Risk-Neutral Valuation*. Springer, 2 ed.
- [CIR85] J. Cox, J. Ingersoll y S. Ross, *A Theory of Term Structure of Interest Rates*. Econometrica, Vol. 53, No. 2, pgs. 385-407. 1985.
- [CM99] P. Carr y D. Madan, *Option Valuation Using the Fast Fourier Transform*. Journal of Computational Finance, Vol. 2, No.4, pgs. 61-73. 1999.
- [DY02] *Probability Distribution of Returns in the Heston Model with Stochastic Volatility*. Quantitative Finance, Vol.2, pgs. 443-453. 2002.
- [Fel51] , W. Feller, *Two Singular Diffusion Problems*. The Annals of Mathematics, 2da Ser., Vol. 54, No. 1, pgs. 173-182. 1951.
- [Gat] J. Gatheral, *The Volatility Surface: A Practitioners Guide*. Wiley Finance, 2006.
- [GG00] W. Gander y W. Gautschi, *Adaptive Quadrature Revisited*. BIT, 40(1), pgs. 84-101. 2000. <ftp://inf.ethz.ch/pub/publications/tech-reports/3xx/306.ps.gz>.

- [Hes93] S. Heston, *A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options*. The Review of Financial Studies, Vol. 6, No. 2, pgs. 327-343. 1993.
- [HW87] J. Hull y A. White, *The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities*. The Journal of Finance, Vol. 42, No. 2, pgs. 281-300. 1987.
- [Hull] J. Hull, *Options, Futures and Other Derivatives*. Prentice Hall, 5 ed.
- [Jav] A. Javaheri, *Inside Volatility Arbitrage: The Secrets of Skewness*. Wiley Finance, 2005.
- [KJ05] C. Kahl y P. Jäckel, *Not-so-complex logarithms in the Heston model*. Wilmott, September, 2005.
- [Lee05] R. Lee, *Option Pricing by Transform Methods: Extensions, Unification and Error Control*. Journal of Computational Finance, Vol. 7, No. 3, pgs. 51-86. 2005.
- [LK06] R. Lord y C. Khal, *Why the Rotation Count Algorithm Works*. Tinbergen Institute Discussion Paper No. 2006-065/2. 2006.
- [LK07] R. Lord y C. Khal, *Optimal Fourier Inversion in Semi-Analytical Option Pricing*. Tinbergen Institute Discussion Paper No. 2006-066/2. 2007.
- [MN] S. Mikhailov y U. Nögel, *Heston's Stochastic Volatility Model Implementation, Calibration and Some Extensions*. Wilmott Magazine.
- [Oks] B. Oksendal, *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications*. Springer, 5 ed.
- [SS91] E. Stein y J. Stein, *Stock Price Distributions with Stochastic Volatility: An Analytic Approach*. The Review of Financial Studies, Vol. 4, No. 4, pgs. 727-752. 1991.