Espacios de Tipos de Fragmentos enumerables de $L_{\omega_1\omega}$

Mariana de Jesús Herrera Reyes
Asesor: Xavier Caicedo

6 de febrero de 2009

Quiero agradecer muy especialmente al profesor Xavier Caicedo por su valiosa colaboración en el presente trabajo. De igual forma agradezco a mis padres por su constante apoyo e inmensa paciencia.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

La lógica infinitaria, se ha utilizado, para ampliar el rango de expresión de la lógica de primer orden, sin embargo en este proceso de ampliación se pierden propiedades deseables de la lógica de primer orden. La ausencia del teorema de compacidad, en la lógica $L_{\omega_1\omega}$ es un ejemplo concreto de este hecho. Es decir que pueden encontrarse fragmentos enumerables de $L_{\omega_1\omega}$, y conjuntos de fórmulas en estos lenguajes tales que son finitamente consistentes, pero no existe un modelo que realice la totalidad del conjunto.

Aunque el teorema de compacidad es una propiedad modelo teórica, se puede demostrar que el teorema tiene alcances topológicos. Un lenguaje que satisface el teorema de compacidad satisface que su espacio de tipos es un espacio compacto. La propiedad de compacidad, junto con el hecho de que el espacio de tipos es un espacio de Hausdorff, cero dimensional, nos dice que el espacio de tipos es el espacio de Stone del álgebra de Lindenbaüm. Por otro lado, si el lenguaje no es compacto, demostramos que el espacio de tipos de una teoría de un fragmento enumerable es un espacio topológicamente completo, como lo afirma Morley en su trabajo *Aplication of Topology to* $L_{\omega_1\omega}$[Mo].

De acuerdo con esto, este trabajo tiene como objetivo principal, explorar a fondo las propiedades topológicas de los espacios de tipos para demostrar tres teoremas clásicos de la teoría de modelos.

En primera instancia, generalizamos dos teoremas clásicos de la lógica de primer orden para la lógica $L_{\omega_1\omega}$, utilizando el hecho de que los espacios de tipos son espacios topológicamente completos. Así pues, demostramos el teorema de omisión de tipos para fragmentos enumerables de $L_{\omega_1\omega}$ y caracterizamos las teorías $\omega-$categóricas describiendo a su espacio de tipos, como un espacio discreto. Por otro lado, desarrollamos la idea de que el espacio de tipos de una teoría de la lógica de primer orden es un espacio booleano, y mostramos las conexiones entre el rango de Cantor-Bendixon y el rango de Morley, para así demostrar que si una teoría es $\omega-$estable entonces es $\kappa-$estable para todo $\kappa > \omega$.

Capítulo 2

Teoría de Modelos de $L_{\omega_1\omega}$

2.1. El Lenguage $L_{\omega_1\omega}$

Una **estructura relacional**, es una estructura $\mathbb{A} = \langle A, \{r_i^{\mathbb{A}}|i \in I\}, \{f_j^{\mathbb{A}}|j \in J\}, \{c_k^{\mathbb{A}}|k \in K\}\rangle$, tal que $I \subset \omega$, donde $r_i^{\mathbb{A}}, f_j^{\mathbb{A}}, c_k^{\mathbb{A}}$ son interpretaciones de relaciones, funciones y constantes en la estructura $\mathbb{A}$. El tipo $\tau = \tau(\mathbb{A})$ de una estructura $\mathbb{A}$, se define como $\tau = \langle\langle arg(r_i^{\mathbb{A}})|i \in I\rangle, \langle arg(f_j^{\mathbb{A}})|j \in J\rangle, K\rangle$ donde $\mathbf{arg}(\mathbf{r})$ es el número de argumentos de r, y $arg(f)$ es el número de argumentos de f. Así pues, τ muestra la aridad de las relaciones y de las funciones, y muestra cual es la enumeración de las constantes, si las hay. Ahora bien, en caso de que $J = \emptyset$ se dice que el sistema es **puramente relacional**.

Para cada tipo τ existe una lógica infinitaria, $L_{\omega_1\omega}(\tau)$, que tiene por símbolos:

* A los símbolos de relación, de función y de constante, r_i, f_j y c_k para cada $i \in I$, $j \in J$, y $k \in K$ respectivamente.
* Al conjunto de variables $\{x_i|i \in \omega\}$.
* A los simbolos lógicos de la lógica de primer orden " $=, \wedge, \neg, \exists$" más un nuevo símbolo de disyunción " $\bigvee$ ".

Ahora bien, definimos a los términos y a las fórmulas de $L_{\omega_1\omega}(\tau)$ de manera inductiva:

Sea x una variable libre, c_k un símbolo de constante, f_j un símbolo de función de tipo τ, cuyo $arg(f_j) = n$ y sean $t_0, \ldots, t_n$ términos de $L_{\omega_1\omega}(\tau)$. Entonces t definido de la siguiente manera, es un **término** de $L_{\omega_1\omega}(\tau)$:

$t := x.$

$t := c_k, k \in K.$

$t := f_j(t_0, \ldots, t_n), j \in J.$

Si r_i es una relación de tipo τ cuyo $arg(r_i) = n$ y si $t_0, \ldots, t_n$ son términos de $L_{\omega_1\omega}(\tau)$. Entonces una **fórmula atómica** de $L_{\omega_1\omega}(\tau)$, ϕ, es de la siguiente manera:

$\phi := (t_1 = t_2).$

$\phi := r_i(t_1, \ldots, t_n), i \in I.$

Si ψ, ψ_1, ψ_2 son fórmulas de $L_{\omega_1\omega}(\tau)$ y χ es un conjunto enumerable de fórmulas de $L_{\omega_1\omega}(\tau)$, con a lo sumo n variables libres, entonces ϕ definida de la siguiente manera, es una **fórmula** de $L_{\omega_1\omega}(\tau)$:

$\phi := \neg\psi.$

$\phi := \psi_1 \wedge \psi_2.$

$\phi := \exists x \psi(x).$

$\phi := \bigvee \chi.$

De está manera una fórmula ϕ puede ser una disyunción infinita enumerable de fórmulas, siempre y cuando el número de variables libres de ϕ sea finito. Se utilizan las abreviaciones usuales, $(\phi \vee \psi) = \neg(\neg\phi \wedge \neg\psi)$, $(\phi \rightarrow \psi) = (\neg\phi \vee \psi), (\phi \leftrightarrow \psi) = (\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi)$ y $\forall x \phi(x) = \neg\exists x \neg\phi(x)$ y una nueva abreviación $\bigwedge \chi = \neg(\bigvee \neg\chi)$.

Definición 2.1.1. *Un subconjunto $L(\tau)$ de $L_{\omega_1\omega}(\tau)$, es un fragmento si:*

i) El conjunto de fórmulas de $L(\tau)$ es cerrado bajo negaciones, conjunciones y el cuantificador existencial.

ii) El conjunto de fórmulas de $L(\tau)$ es cerrado bajo subfórmulas.

iii) El conjunto de fórmulas de $L(\tau)$ es cerrado bajo sustitución de variables: si $\phi(x_i) \in L(\tau)$, entonces $\phi(x_j) \in L(\tau)$.

De ahora en adelante abusamos de la notación y decimos que L es un fragmento de $L_{\omega_1\omega}$, en vez de decir que $L(\tau)$ es un fragmento de $L_{\omega_1\omega}(\tau)$.

2.2. Conjuntos Consistentes

Para el resto del capítulo, considere a L como un fragmento de $L_{\omega_1\omega}$. Decimos que ϕ es una $L-$fórmula si $\phi \in L$ y denotamos por L_n al conjunto de fórmulas de L con a lo sumo n variables libres.

Definición 2.2.1. *Un conjunto de fórmulas de L, S, es **consistente** si existe una $\tau-$estructura $\mathbb{A}$, tal que para toda fórmula $\phi \in S$, $\mathbb{A} \models \phi$.*

Definición 2.2.2. *Un conjunto de fórmulas de L, S, es **finitamente consistente** si para todo subconjunto finito de S, $S_0 \subset S$, S_0 es consistente.*

Definición 2.2.3. *Una **teoría** T **de** L, es un conjunto consistente de sentencias de L.*

Definición 2.2.4. *Decimos que ϕ, una $L-$fórmula, es **consecuencia lógica** de la teoría T, $T \models \phi$, si para toda $\tau-$estructura, si $\mathbb{A} \models T$ entonces $\mathbb{A} \models \phi$. Una teoría es **completa con respecto a** L, si ϕ o $\neg\phi$ es consecuencia lógica de T, para toda sentencia ϕ de L. Así pues, la teoría de un modelo de $T, \mathbb{A}$, $Th(\mathbb{A}) = \{\phi | \mathbb{A} \models \phi\}$ es una teoría completa. Adicionalmente, si T es una teoría completa con respecto a L, y si $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ son tales que $\mathbb{A} \models T$ y $\mathbb{B} \models T$, entonces $Th(\mathbb{A}) = Th(\mathbb{B})$, es decir que $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ son **elementalmente equivalentes con respecto a** L, $\mathbb{A} \equiv_L \mathbb{B}$.*

2.3. Subestructuras Elementales

Definición 2.3.1. *Sean $\mathbb{A} = \langle A, \{r_i^{\mathbb{A}} | i \in I\}, \{f_j^{\mathbb{A}} | j \in J\}, \{c_k^{\mathbb{A}} | k \in K\}\rangle$ y $\mathbb{B} = \langle B, \{r_i^{\mathbb{B}} | i \in I\}, \{f_j^{\mathbb{B}} | j \in J\}, \{c_k^{\mathbb{B}} | k \in K\}\rangle$ dos $\tau-$estructuras, decimos que $\mathbb{B}$ es **subestructura** de $\mathbb{A}$, $\mathbb{B} \subseteq \mathbb{A}$ si:*

- $B \subseteq A$.
- $c_k^{\mathbb{B}} = c_k^{\mathbb{A}}, \forall k \in K$.
- $r_i^{\mathbb{B}} = r_i^{\mathbb{A}} \cap B^{arg(r_i)}, \forall i \in I$, *es decir que si* $arg(r_i) = n, \forall (b_1, \ldots, b_n) \in B^n, r_i^{\mathbb{B}}(b_1, \ldots, b_n)$ *si y sólo si* $r_i^{\mathbb{A}}(b_1, \ldots, b_n)$.
- $f_j^{\mathbb{B}} = f_j^{\mathbb{A}} | B, \forall j \in J$, *es decir que si* $arg(f_j) = n, \forall (b_1, \ldots, b_n) \in B^n, f_j^{\mathbb{B}}(b_1, \ldots, b_n) = f_j^{\mathbb{A}}(b_1, \ldots, b_n)$.

Definición 2.3.2. *Sea L un fragmento de $L_{\omega_1\omega}$ y sea $\mathbb{B}$ una subestructura de $\mathbb{A}$, decimos que $\mathbb{B}$ es **subestructura elemental con respecto a** L de $\mathbb{A}$, $\mathbb{B} \preceq_L \mathbb{A}$ si para toda fórmula $\phi(\bar{x})$ de L, $\bar{b} \in B^n$, $\mathbb{A} \models \phi(\bar{b})[\bar{b}]$ si y sólo si $\mathbb{B} \models \phi(\bar{x})[\bar{b}]$.*

Test de Tarski-Vaught para $L_{\omega_1\omega}$ **2.3.3.** *Sea L un fragmento de $L_{\omega_1\omega}$ y sean $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ dos modelos de T. $\mathbb{A} \preceq_L \mathbb{B}$ si y sólo si $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B}$ y si para toda $\phi(x, x_1, \ldots, x_n) \in L$ y para toda $a, a_1, \ldots, a_n \in A$, si $\mathbb{B} \models \exists x \phi(x_1, \ldots, x_n)[a_1, \ldots, a_n]$ entonces existe $a \in A$ tal que $\mathbb{B} \models \phi(x, x_1, \ldots, x_n)[a, a_1, \ldots, a_n]$.*

Demostración. Demostraremos por inducción en fórmulas que si $a_1, \ldots, a_n \in A$, $\mathbb{A} \models \phi(x_1, \ldots, x_n)[a_1, \ldots, a_n]$ si y sólo si $\mathbb{B} \models \phi(x_1, \ldots, x_n)[a_1, \ldots, a_n]$:

- Para fórmulas atómicas la proposición se cumple pues $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B}$.

Ahora bien, supongamos que para toda $a_1, \ldots, a_n \in A$, $\mathbb{A} \models \phi_i(x_1, \ldots, x_n)[a_1, \ldots, a_n]$ si y sólo si $\mathbb{B} \models \phi_i(x_1, \ldots, x_n)[a_1, \ldots, a_n]$, para $i = 0, 1, 2$ y para toda $\phi_2(x_1, \ldots, x_n) \in \chi$.

- Los casos de $\phi(x_1, \ldots, x_n) = \neg\phi_0(x_1, \ldots, x_n)$, $\phi(x_1, \ldots, x_n) = \phi_0(x_1, \ldots, x_n) \wedge \phi_1(x_1, \ldots, x_n)$ y $\phi(x_1, \ldots, x_n) = \exists x \phi_0(x, x_1, \ldots, x_n)$ son demostraciones análogas al caso de la lógica de primer orden, así pues que se puede consultar [A, CH.14, Theorem 14.5].

- Si $\phi(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee \chi$ y $\bigvee \chi \in L$, $\mathbb{A} \models \bigvee \chi[a_1, \ldots, a_n]$ si y sólo si $\mathbb{A} \models \phi_2[a_1, \ldots, a_n]$ para alguna fórmula $\phi_2(x_0, \ldots, x_n) \in \chi$ y por hipótesis de inducción esto sucede si y sólo si $\mathbb{B} \models \phi_2(x_1, \ldots, x_n)[a_1, \ldots, a_n]$ y como $\bigvee \chi \in L$ esto sucede si y solamente si $\mathbb{B} \models \bigvee \chi[a_1, \ldots, a_n]$.

□

Teorema de Löwenheim-Skolem-Tarski Descendente para $L_{\omega_1\omega}$ **2.3.4.** *Sea L un fragmento enumerable de $L_{\omega_1\omega}$, si $\mathbb{A}$ es una estructura de tipo L, $X \subset A$, y κ un cardinal infinito, tal que $|X| \leq \kappa \leq |A|$, entonces existe $\mathbb{B} \preceq_L \mathbb{A}$ tal que $X \subset B$ y $|B| = \kappa$.*

Demostración. Consultar [EFT, Chapter IX, §2., Theorem 2.4]. □

El Teorema de Compacidad 2.3.5. *Si Γ es un conjunto de fórmulas de L, finitamente consistente entonces Γ es consistente.*

El anterior teorema es un resultado clásico de la teoría de modelos que es valido para la lógica de primer orden. Para fragmentos de la lógica infinitaria esto no es necesariamente cierto. Es más, el *primer teorema de Lindström*[1], tiene como consecuencia que el único fragmento de $L_{\omega_1\omega}$ que satisface el teorema, es la lógica de primer orden, $L_{\omega\omega}$. Así pues, cuando nos refiramos a fragmentos **compactos**, nos referimos a la lógica de primer orden, resaltando el hecho de que satisface el teorema de compacidad.

[1]Consultar [EFT, Chapter XII, §3., Theorem 3.1]

Capítulo 3

Espacios de Tipos en $L_{\omega_1\omega}$

3.1. Preliminares de Topología

En esta sección daremos las definiciones y los resultados básicos de topología, necesarios para abordar las siguientes secciones. El resultado más importante es el teorema de categoría de Baire que es cierto tanto para espacios completos, como para espacios compactos, este teorema será escencial en la demostración del teorema de omisión de tipos para fragmentos enumerables de la lógica $L_{w_1\omega}$ que presentaremos en el próximo capítulo.

Definición 3.1.1. *Sea $\langle X, d\rangle$ un espacio métrico, una* ***sucesión de Cauchy****, es un conjunto infinito de puntos $\{x_i\}_{i\in\omega}$ tal que $\forall\epsilon > 0$, existe $N \in \omega$ tal que $\forall n, m > N$, $d(x_n, x_m) < \epsilon$. Decimos que X es un espacio métrico* ***completo*** *si toda sucesión de Cauchy converge.*
Ahora bien, dado un espacio topológico $\langle X, \mathcal{T}\rangle$, X es ***topológicamente completo*** *si existe una distancia, que genera la misma topología, con la que el espacio es completo.*

Una propiedad estándar de los espacios topológicamente completos, es la siguiente: Sea d la distancia con la que el espacio es completo. Si $C_1 \supset C_2 \supset \ldots$ es una familia de conjuntos cerrados, tales que el diametro de C_i tiende a cero, según la distancia d, mientras que $i \to \infty$, la intersección $\bigcap_{i=1}^{\infty} C_i \neq \emptyset$.
Consultar [Mu, CH.8, §48, Lema 48.3].

Ahora bien, los espacios compactos satisfacen una propiedad similar, un teorema clásico de la literatura dice que $\langle X, \mathcal{T}\rangle$ es un espacio compacto, si y solamente si para toda familia de cerrados de $\mathcal{T}$, $\mathfrak{C}$ tal que satisface *pif*[1], se tiene que $\bigcap_{C\in\mathfrak{C}} C \neq \emptyset$.
Consultar [Mu, CH.3, §26, Theorem 26.9].

[1]Consultar Apéndice A.3, definición A.3.3.

Definición 3.1.2. *Sea X un espacio topológico, A es un subconjunto* ***denso*** *si dado $x \in X$, para toda vecindad U de x, $U \cap A \neq \emptyset$. Por otro lado, decimos que A es un subconjunto* ***denso en ninguna parte*** *si su clausura, $\bar{A}$, no contiene ningún abierto no vacío.*

Lema 3.1.3. *Sea X un espacio topológico, y sea A un subconjunto de X. Si A es denso en ninguna parte, entonces A^c es un conjunto denso en X.*

Demostración. Si A es un subconjunto denso en ninguna parte entonces no contiene ningún abierto no vacío, por lo que si $x \in X$ y U es un entorno de x entonces $U \cap A^c \neq \emptyset$, es decir que A^c es un abierto denso. □

Definición 3.1.4. *Decimos que X es un* ***espacio de Baire*** *si la intersección $\bigcap_{i=1}^{\infty} D_i$ de la familia de abiertos densos $\{D_i\}_{i=1}^{\infty}$ es también densa.*

Teorema de Categoría de Baire 3.1.5. *Si X es un espacio topológicamente completo, entonces X es un espacio de Baire*[2].

Demostración. Lo que queremos ver es que si $\{D_i\}_{i\in\omega}$ es una familia de conjuntos abiertos densos, y si U es un abierto no vacío de X, $U \cap \left(\bigcap_{i\in\omega} D_i\right) \neq \emptyset$.

Sea X un espacio topológicamente completo y sea $\{C_i\}_{1\in\omega}$ una familia de cerrados no vacíos cuyos diametros tienden a cero, tomados con la distancia d que hace a X un espacio completo. Construiremos una cadena $C_0 \supset C_1 \supset \ldots$, tal que $C_n \supseteq C_{n+1} \supseteq \ldots$ esté contenida en $U \cap D_n$ para todo $n \in \omega$.

En primera instancia, como existe $x_0 \in X$ tal que $x_0 \in D_0 \cap U$, pues D_0 es denso, entonces existe un $k^0 \in \omega$ y un abierto básico b^0 tal que $diam(b^0) = \frac{1}{k^0}$ según la distancia d y $b^0 \subseteq (D_0 \cap U)$. Adicionalmente, como X es un espacio métrico con la distancia d, existe $k_0 \in \omega$ tal que $k_0 \geq k^0 + 1$ y un básico $b_0 \subset b^0$ tal que $diam(b_0) = \frac{1}{k_0}$ y $\overline{b_0} \subset b^0 \subseteq (D_0 \cap U)$ y por lo tanto denotamos a $\overline{b_0} = C_0$.

Ahora bien, supongamos que se ha construido la cadena $C_0 \supset C_1 \supset \ldots \supset C_n$, tal que para todo $i = 0, \ldots, n$, $C_i = \overline{b_i}$ para algún $b_i \in \mathfrak{B}$, $diam(C_i) = \frac{1}{k_i}$ con $k_{i+1} \geq k_i + 1$, y $C_n \subseteq D_n \cap U$. Como D_{n+1} es denso abierto, $D_{n+1} \cap b_n$ es un abierto no vacío y por ende, existe un $k^{n+1} \in \omega$ y un básico b^{n+1} tal que $diam(b^{n+1}) = \frac{1}{k^{n+1}}$ y $b^{n+1} \subseteq (b_n \cap D_{n+1})$. Ahora bien como X es un espacio métrico con la distancia d, existe $k_{n+1} \in \omega$ tal que $k_{n+1} \geq k^{n+1} + 1 > k_n$ y un básico $b_{n+1} \subset b^{n+1}$ tal que $diam(b_{n+1}) = \frac{1}{k_{n+1}}$ y por lo tanto, $\overline{b_{n+1}} \subseteq b^{n+1} \subseteq C_n \subseteq (D_{n+1} \cap U)$, así pues denotamos a $\overline{b_{n+1}} = C_{n+1}$.

[2]Este teorema también es válido para espacios de Hausdorff y compactos. [Mu, Capítulo 8, §48, Teorema 48.2]

De esta manera obtenemos una cadena de cerrados $C_0 \supset C_1 \supset \ldots \supset C_n \ldots$ tales que $diam(C_i) \to 0$ si $i \to \infty$, por lo que $\bigcap_{i\in\omega} C_i \neq \emptyset$, y como $\bigcap_{i\in\omega} C_i \subset (U \cap (\bigcap_{i\in\omega} D_i))$ vemos que $\bigcap_{i\in\omega} D_i$ también es un conjunto denso. De esta manera queda demostrado el teorema de categoría de Baire. $\square$

3.2. Espacios de Tipos

Definición 3.2.1. *Un $n-$**tipo** de una teoría T, $S(\bar{x})$, es un conjunto de fórmulas con a lo sumo n variables libres tal que $T \cup S(\bar{x})$ es un conjunto consistente. Un $n-$tipo de T es **maximal**, si existe una $n-$tupla $\bar{a} \in A^n$ donde A es el universo de $\mathbb{A}$, un modelo de T, y $S(\bar{x}) = \{\phi(\bar{x}) \in L | \mathbb{A} \models \phi(\bar{x})[\bar{a}]\}$. Denotamos al $n-$tipo maximal de $\bar{a}$, por $S_{\bar{a}}(\bar{x})$. Claramente $T \subseteq S_{\bar{a}}(\bar{x})$ y $S_{\bar{a}}(\bar{x})$ es un conjunto maximal consistente.*

Adicionalmente si $\phi(\bar{x})$ es una fórmula de L_n, decimos que $S(\bar{x})$ es un $n-$tipo **principal generado por** $\phi(\bar{x})$, si $S(\bar{x}) = \{\psi(\bar{x}) | T \models \forall \bar{x}(\phi(\bar{x}) \to \psi(\bar{x}))\}$. De lo contrario, decimos que $S(\bar{x})$ es un $n-$tipo **no principal**.

Definición 3.2.2. *Sea L un fragmento enumerable de $L_{\omega_1\omega}$, sea T una teoría de L. El **espacio de** $n-$**tipos de** T es el conjunto:*

$$S_n(T) = \{S(\bar{x}) | S(\bar{x}) \textit{ es un } n\textit{−tipo maximal de } T\}.$$

*Si $T = \emptyset$ denotamos al espacio de $n-$tipos de T por $S_n(L)$ y lo llamamos el **espacio de** $L-$**tipos**.*

Decimos que un modelo $\mathbb{A}$ de T **realiza** al tipo $S(\bar{x})$ si existe una $n-$tupla $\bar{a} \in A^n$ tal que $S(\bar{x}) = S_{\bar{a}}(\bar{x})$. Por el contrario, si $\mathbb{A}$ no realiza a $S(\bar{x})$ decimos que $\mathbb{A}$ **omite** al tipo $S(\bar{x})$.

En adelante cuando hablemos del **espacio de** $n-$**tipos**, nos referimos al espacio topológico $S_n(T)$ cuya base $\mathfrak{B}$ está compuesta de los básicos $[\phi(\bar{x})]_{T,n} = \{S(\bar{x}) \in S_n(T) | \phi(\bar{x}) \in S(\bar{x})\}$, es decir $\mathfrak{B} = \{[\phi(\bar{x})]_{T,n} | \phi(\bar{x}) \in L_n\}$.

Adicionalmente, a modo de observación, es fácil ver que $\mathfrak{B}$ satisface las siguientes propiedades:

* $[\phi(\bar{x})]_{T,n} \cap [\psi(\bar{x})]_{T,n} = [\phi(\bar{x}) \wedge \psi(\bar{x})]_{T,n}$.
* $[\phi(\bar{x})]_{T,n} \cup [\psi(\bar{x})]_{T,n} = [\phi(\bar{x}) \vee \psi(\bar{x})]_{T,n}$.
* $[\phi(\bar{x})]^c_{T,n} = [\neg\phi(\bar{x})]_{T,n}$.
* $[x = x]_{T,n} = S_n(T)$.

* $[\neg(x=x)]_{T,n}=\emptyset$.
* $[\phi(\bar{x})]_{T,n}\subseteq[\psi(\bar{x})]_{T,n}$ si y sólo si $T\models\forall(\bar{x})(\phi(\bar{x})\to\psi(\bar{x}))$.

Ahora bien, decimos que un $n-$tipo maximal $S(\bar{x})$ es **aislado**, si es un punto aislado del espacio $S_n(T)$. Es decir que existe un básico $[\phi(\bar{x})]_{T,n}$ de $S_n(T)$ tal que si $S'(\bar{x})\in[\phi(\bar{x})]_{T,n}$ entonces $S'(\bar{x})=S(\bar{x})$.

Definición 3.2.3. *Un $\omega-$**tipo de** T, S_ω es un conjunto de fórmulas de L consistentes con la teoría T tales que sus variables libres se encuentran entre $\{x_i|i\in\omega\}$. A su vez, el espacio de $\omega-$tipos de T, $S_\omega(T)$, es el espacio topológico de los $\omega-$tipos maximales de T donde un básico de la topología es de la forma:*

$$[\phi(\bar{x})]_{T,\omega}=\{S_\omega\in S_\omega(T)|\phi(\bar{x})\in S_\omega\}.$$

Ahora bien, un modelo $\mathbb{A}$ de T realiza al $\omega-$tipo de T si existe una sucesión de elementos de A, $\{a_i|i\in\omega\}$, que satisface todas las fórmulas $\phi(\bar{x})\in S_\omega$.

Así pues, si $[\phi(\bar{x})]_{T,\alpha}$ es un básico de $S_\alpha(T)$, $\alpha\leq\omega$, y si es claro en el contexto que estamos hablando de una teoría específica T, denotamos al básico por $[\phi(\bar{x})]_\alpha$. Adicionalmente si es claro en el contexto que estamos hablando de un básico en el espacio de $\alpha-$tipos de T, $S_\alpha(T)$, denotamos al básico por $[\phi]$.

Proposición 3.2.4. *Si $\omega\geq\alpha>\beta$, la función $f:S_\alpha(T)\to S_\beta(T)$ tal que $f(S)=\{\phi\in S|\phi\in L_\beta\}$ es una función continua y abierta.*

Demostración. En primera instancia, veamos que f es una función continua. Sea $[\phi]_\beta$ un básico de $S_\beta(T)$, $f^{-1}([\phi]_\beta)=\{S\in S_\alpha(T)|\phi\in S\}=[\phi]_\alpha$ así pues, f es una función continua.

Ahora bien, sea $[\psi]_\alpha$ un abierto básico de $S_\alpha(T)$. Si $\psi=\psi(x_{i_0},\ldots,x_{i_n})$ y $i_n<\beta$ entonces $f([\psi]_\alpha)=[\psi]_\beta$. Si $i_0<\ldots<i_k\leq\beta<i_{k+1}<\ldots<i_n$, veamos que $f([\psi]_\alpha)=[\phi]_\beta$ donde $\phi=\exists x_{i_{k+1}}\ldots\exists x_{i_n}\psi(x_{i_0},\ldots,x_{i_n})$.

Si $S\in[\psi]_\alpha$, $\psi\in S$ entonces existe una sucesión $\{a_i|i\in\omega\}$ de un modelo $\mathbb{A}$ de T, que realiza al tipo S, por lo que la sucesión $\{a_i|i\in\omega\}$ también realiza las fórmulas $\psi(x_{i_0},\ldots,x_{i_n})$ y $\phi=\exists x_{i_{k+1}}\ldots\exists x_{i_n}\psi(x_{i_0},\ldots,x_{i_n})$. Así pues, como $\phi\in L_\beta$, entonces $\phi\in f(S)$, por lo que $f(S)\in[\phi]_\beta$. Así pues, $f([\psi]_\alpha)\subseteq[\phi]_\beta$.

Por otro lado, si $S' \in [\phi]_\beta$ entonces existe una $\beta-$tupla $[a_{i_0}, \ldots, a_{i_\beta}] \in A^\beta$ de un modelo $\mathbb{A}$ de T, tal que $\mathbb{A} \models \exists x_{i_{k+1}}, \ldots, x_{i_n} \psi(x_{i_0}, \ldots, x_{i_n})[a_{i_0}, \ldots, a_{i_\beta}]$ entonces existen $a_{i_{\beta+1}}, \ldots, a_{i_n} \in A$ tales que $\mathbb{A} \models \psi(x_{i_0}, \ldots, x_{i_n})[a_{i_0}, \ldots, a_{i_n}]$, entonces $S_{a_{i_0},\ldots,a_{i_n}} \in [\psi]_\alpha$, $f(S_{a_{i_0},\ldots,a_{i_n}}) = S'$ y $f([\psi]_\alpha) \supseteq [\phi]_\beta$. De esta manera, queda demostrado que $f([\psi]_\alpha) = [\phi]_\beta$, por lo que f es una función abierta.

$\square$

3.3. $S_n(L)$ como Espacio Booleano para Lenguajes Compactos.

Una vez definido el espacio de $n-$tipos, para todo $n \leq \omega$ empezaremos a explorar las propiedades topológicas de $S_n(L)$ como subespacio de $P(L_n)$, donde L es un fragmento enumerable de $L_{\omega_1\omega}$ y L_n es el lenguage L restringido a n variables libres, $\{x_1, \ldots, x_n\}$.

Ahora bien, al bien ordenar el conjunto L_n de la forma $L_n = \{\phi_\alpha(\bar{x}) : \alpha < \omega\}$ podemos identificar a $P(L_n)$ con el conjunto $\{0,1\}^\omega$ de la manera usual, identificando a cada conjunto $A \in P(L_n)$ con una tupla $(x_0, x_1, x_2, \ldots)$ de longitud ω donde cada coordenada x_α está asociada a la fórmula $\phi_\alpha(\bar{x})$ y su valor coincide con el valor de $\chi_A(\phi_\alpha(\bar{x}))$ (la función característica de A evaluada en $\phi_\alpha(\bar{x})$). Adicionalmente, al asignarle la topología producto al espacio $\{0,1\}^\omega$ cada básico b es de la siguiente forma:

Dada una sucesión finita fija de ceros y unos $s = \{s_{i_1}, s_{i_2}, \ldots, s_{i_m}\}$,

$$b_s = \{(x_0, x_1, x_2, \ldots) \in \{0,1\}^\omega |\, x_\alpha = s_\alpha \; \forall \alpha \in \{i_1, \ldots, i_m\}\}$$

el cual puede identificarse con:

$$\{A \in P(L_n) |\, \phi_\alpha(\bar{x}) \in A \text{ si } s_\alpha = 1, \text{ y } \phi_\alpha(\bar{x}) \notin A \text{ si } s_\alpha = 0,\ \alpha \in \{i_1, \ldots, i_m\}\}.$$

Proposición 3.3.1. *Sean L y L_n como arriba. La topología que hereda $S_n(L)$ como subespacio de $P(L_n)$ coincide con la topología de $S_n(L)$ determinada por la base $\mathfrak{B} = \{[\phi(\bar{x})] : \phi(\bar{x}) \in L_n\}$, donde $[\phi(\bar{x})] := \{S(\bar{x}) \in S_n(L) \mid \phi(\bar{x}) \in S(\bar{x})\}$.*

Demostración. En primer lugar, consideremos a $S_n(L)$ con la topología heredada como subespacio de $P(L_n)$, cada básico b'_s de $S_n(L)$, tiene la siguiente forma: $b'_s = b_s \bigcap S_n(L)$. Es decir,

$$b_s = \{S(\bar{x}) \in S_n(L) |\, \phi_\alpha(\bar{x}) \in S(\bar{x}) \text{ si } s_\alpha = 1, \text{ y } \phi_\alpha(\bar{x}) \notin S(\bar{x}) \text{ si } s_\alpha = 0, \alpha \in \{i_1, \ldots, i_m\}\}.$$

Ahora bien, puesto que los tipos de $S_n(L)$ son completos, es claro que para toda $\lambda < |L_n|$
Si $(x_0, x_1, x_2, ...) \in b_s$ y $x_\lambda = 0$ entonces $x_\beta = 1$ donde β es tal que $\phi_\beta(\bar{x}) = \neg\phi_\lambda(\bar{x})$.

Siguiendo con este orden de ideas, definimos para $\alpha \in \{i_1, \ldots, i_m\}$,

$$\psi_\alpha(\bar{x}) = \begin{cases} \phi_\alpha(\bar{x}), & \text{si } s_\alpha = 1, \\ \neg\phi_\alpha(\bar{x}), & \text{si } s_\alpha = 0 \end{cases}$$

Evidentemente $\bigwedge_{\alpha\in\{i_1,\ldots,i_m\}} \psi_\alpha(\bar{x}) \in L_n$ y por ende $\bigwedge_{\alpha\in\{i_1,\ldots,i_m\}} \psi_\alpha(\bar{x}) = \phi_\kappa(\bar{x})$ para algún $\kappa < |L_n|$. De acuerdo con esto, se puede ver a b_s como

$$b_s = \{S(\bar{x}) \in S_n(L) | \text{tal que } \phi_\kappa(\bar{x}) \in S(\bar{x})\}$$

y este conjunto es exactamente la definición de $[\phi_\kappa(\bar{x})]$, es decir que $b_s = [\phi_\kappa(\bar{x})]$.

Ahora bien, si $[\phi]$ es un básico de $S_n(L)$, entonces como $\phi \in L_n$, entonces $\phi = \phi_\alpha$ para algún $\alpha < |L_n|$, así pues, $[\phi] = \{(x_0, x_1, \ldots,) \in \{0,1\}^{|L_n|} | x_\alpha = 1\} \cap S_n(T)$ que es un básico de $P(L_n)$ interceptado con $S_n(T)$, es decir un básico de la topología que hereda de $S_n(T)$ como subespacio de $P(L_n)$.

De esta manera, la topología que hereda $S_n(L)$ como subespacio de $P(L_n)$ coincide con la topología de $S_n(L)$ determinada por la base $\mathfrak{B} = \{[\phi(\bar{x})] : \phi(\bar{x}) \in L_n\}$.

$\square$

Ahora bien, recordemos que un espacio booleano[3] es un espacio de Hausdorff, compacto con una base de çlopens", abiertos-cerrados. Es fácil ver que el espacio $\{0,1\}^{|L_n|}$, es un espacio booleano, así pues, de acuerdo a la siguiente proposición, si L es un fragmento compacto, $S_n(L)$ es un subespacio cerrado, y por ende $S_n(L)$ es a su vez un espacio Booleano. Puesto que un subespacio de un espacio de Hausdorff con base de clopens es a su vez un espacio de Hausdorff con base de clopens, y un subespacio cerrado de un espacio compacto, es un espacio compacto.

Proposición 3.3.2. *L es un fragmento enumerable de $L_{\omega_1\omega}$ que satisface el teorema de compacidad si y sólo si el espacio de $n-$tipos de L, $S_n(L)$, es un conjunto cerrado de $P(L_n)$.*

Demostración. (" $\Rightarrow$ ")Sea L_n el lenguage L restringido a n variables libres, y sea $L_n = \{\phi_\alpha : \alpha < \omega\}$ una enumeración de L_n. Vamos a demostrar que el complemento de

[3]Consultar Apendice A,4.

$S_n(L)$ es abierto. Dado un elemento cualquiera $A_0 \in P(L_n)$ tal que $A_0 \notin S_n(L)$ encontraremos un entorno alrededor de A_0 totalmente contenido en $(S_n(L))^c$. Basta considerar dos casos:

Caso 1: A_0 es inconsistente. Si A_0 es inconsistente, entonces por compacidad existe un subconjunto finito A_0' de A_0, el cual es inconsistente. Si $A_0' = \{\phi_{\alpha_1}, ..\phi_{\alpha_m}\}$, para algún $m \in \omega$, el básico $b = \{(x_1, x_2, x_3...)| \ x_{\alpha_i} = 1, \forall i = 1, ..., m\}$ corresponde a: $b = \{A \in P(L_n)| \ \phi_{\alpha_i} \in A \ \forall i = 1, ..., m\}$ por lo que se hace evidente que b es un entorno de A_0. Más aun, $b \cap S_n(L) = \emptyset$ dado que cualquier $A \in b$ al contener a A_0' ha de ser inconsistente, y por definición ningún tipo de $S_n(L)$ es inconsistente.

Caso 2: A_0 es consistente, pero no es maximal. Si A_0 es consistente pero no es completo, existe una fórmula $\phi_\alpha \in L_n$ tal que $\phi_\alpha \notin A_0$ y tampoco $\neg\phi_\alpha \notin A_0$. Así pues, por un argumento similar al anterior, sabemos que $\neg\phi_\alpha = \phi_\beta$ para algún $\beta < |L_n|$ y el básico $b = \{(x_1, x_2, x_3...)| \ x_\alpha = 0 \text{ y } x_\beta = 0\}$ se puede interpretar de manera natural como, $b = \{A \in P(L_n)| \ \phi_\alpha \notin A \ y \ \neg\phi_\alpha \notin A\}$. Claramente b es un entorno de A_0 y $b \cap S_n(L) = \emptyset$ puesto que cualquier conjunto $S \in S_n(L)$ o contiene a ϕ_α o a $\neg\phi_\alpha$ por maximalidad.

(" $\Leftarrow$ ") Supongamos que el espacio $S_n(L)$ es un cerrado en $P(L_n)$, entonces como $P(L_n)$ con la topología producto es compacto, entonces $S_n(L)$ es a su vez compacto. Ahora bien, si $S = \{\psi_j | j \in \omega\}$ es un conjunto de fórmulas fintamente consistente, entonces para todo $m < \omega$, $[\psi_{j_1}] \cap \ldots \cap [\psi_{j_m}] \cap S_n(L) \neq \emptyset$ y el conjunto $C = \{[\psi_j] \cap S_n(L) | j \in \omega\}$ es una familia de clopens que tiene la propiedad del pif y tal que $C \subseteq S_n(L)$, así pues, $\bigcap_{j \in \omega} [\psi_i] \cap S_n(L) \neq \emptyset$ y por ende existe un conjunto de fórmulas $S' \in S_n(L)$ tal que $S \subseteq S'$. Así pues el conjunto S es consistente y por ende L es un fragmento compacto como se buscaba. $\square$

De acuerdo con esto, $S_n(L)$ es un espacio booleno. Ahora bien, por la dualidad de Stone[4], $S_n(L)$ debe ser el espacio de Stone de algún álgebra booleana. Así pues, a continuación definimos tal álgebra booleana, el álgebra de Lindenbaüm.

3.4. El Álgebra de Lindenbaüm de T en L_n

Sea L un fragmento enumerable de $L_{\omega_1\omega}$, y sea T una teoría consistente de L. Consideremos el siguiente sistema algebraico $\mathcal{A}_n = \langle Fm(L_n), \vee, \wedge, \neg, \neg(x = x), (x = x) \rangle$ en donde $\phi(\bar{x}) \in Fm(L_n)$. Ahora bien, consideremos la siguiente relación:

[4]Consultar Apendice A,4.

$\psi(\bar{x}) \equiv_T \phi(\bar{x})$ si y sólo si $T \models \forall \bar{x}(\psi(\bar{x}) \leftrightarrow \phi(\bar{x}))$.

Es fácil ver que la relación "$\equiv_T$"satisface:

- $\phi(\bar{x}) \equiv_T \phi(\bar{x})$.
- Si $\phi(\bar{x}) \equiv_T \psi(\bar{x})$ entonces $\psi(\bar{x}) \equiv_T \phi(\bar{x})$.
- Si $\phi(\bar{x}) \equiv_T \psi(\bar{x})$ y $\psi(\bar{x}) \equiv_T \varphi(\bar{x})$ entonces $\phi(\bar{x}) \equiv_T \varphi(\bar{x})$.
- Si $\phi(\bar{x})_0 \equiv_T \psi_0(\bar{x}), \ldots, \phi(\bar{x})_n \equiv_T \psi_n(\bar{x})$ entonces $f(\phi_0(\bar{x}), \ldots, \phi_n(\bar{x})) \equiv_T f(\psi_0(\bar{x}), \ldots, \psi_n(\bar{x}))$ donde f es un símbolo de la lógica $L_{\omega_1\omega}$, para todo $n \leq \omega$.

De esta manera, " $\equiv_T$ " es una congruencia en $\mathcal{A}_n$ y al partir dicho sistema en clases de equivalencia de acuerdo a la relación "$\equiv_T$", considerando los conectivos lógicos como operadores básicos, obtenemos el álgebra booleana $\mathcal{A}_n(T) = \left(\mathcal{A}_n / \equiv_T\right)$ llamada él **álgebra de Lindenbaüm** de T en L_n.

Para ver que evidentemente, $\mathcal{A}_n(T) = \{[\phi(\bar{x})]^{\equiv_T} | \phi(\bar{x}) \in \mathcal{A}_n\}$ es un álgebra booleana, donde $\psi(\bar{x}) \in [\phi(\bar{x})]^{\equiv_T}$ si y sólo si $T \models \forall \bar{x}(\phi(\bar{x}) \leftrightarrow \psi(\bar{x}))$, basta ver lo siguiente:

* $[\phi(\bar{x})]^{\equiv_T} \wedge [\psi(\bar{x})]^{\equiv_T} = [\phi(\bar{x}) \wedge \psi(\bar{x})]^{\equiv_T}$.
* $[\phi(\bar{x})]^{\equiv_T} \vee [\psi(\bar{x})]^{\equiv_T} = [\phi(\bar{x}) \vee \psi(\bar{x})]^{\equiv_T}$.
* $-[\phi(\bar{x})]^{\equiv_T} = [\neg\phi(\bar{x})]^{\equiv_T}$.
* La unidad en $\mathcal{A}_n(T)$ corresponde a la clase de equivalencia ${}_{\equiv_T}[x = x] = \{\psi(\bar{x}) \in Fm(L_n) | T \models (\psi(\bar{x}) \leftrightarrow (x = x))\} = \{\psi(\bar{x}) \in Fm(L_n) | T \leftrightarrow (\psi(\bar{x}))\}$.
* El cero corresponde a la clase de equivalencia ${}_{\equiv_T}[\neg(x_1 = x_1)] = \{\psi(\bar{x}) \in Fm(L_n) | T \models \neg(x_1 = x_1) \rightarrow \psi(\bar{x})\}$ es decir, la clase de todas las fórmulas con a lo sumo n variables libres, que son inconsistentes con la teoría.

De acuerdo con esto, el orden booleano que satisface $\mathcal{A}_n(T)$ es tal que $[\phi(\bar{x})]^{\equiv_T} \leq [\psi(\bar{x})]^{\equiv_T}$ si y sólo si $T \models \forall \bar{x}(\phi(\bar{x}) \rightarrow \psi(\bar{x}))$, y para cualesquiera dos elementos del álgebra hay un supremo y un ínfimo. Así pues, el espacio $\langle \mathcal{A}_n(T), " \leq " \rangle$ es un álgebra booleana puesto que es un retículo complementado y distributivo donde $0 \neq 1$ dado que T es consistente[5].

En la siguiente sección veremos la importancia del álgebra de Lindenbaüm para el análisis de los espacios de tipos. De hecho, cómo ya lo habiamos dicho antes, para fragmentos compactos, $S_n(T)$ es el espacio de Stone del álgebra de Lindenbaüm de T en L_n.

[5]Consultar Apendice A,1

3.5. El Espacio de Stone del Álgebra de Lindenbaüm

Consideramos ahora un fragmento enumerable L y sea $\mathcal{A}_n(T)$ el álgebra de Lindenbaüm de T en L_n. Una fórmula $\phi(\bar{x})$ de tipo L_n es consistente con T si y sólo si $[\phi(\bar{x})]^{\equiv_T} \neq 0$, de manera similar, si el subconjunto de L_n, $S(\bar{x})$ es consistente entonces es finitamente consistente, es decir que el conjunto $S(\bar{x})^T = \{[\phi]^{\equiv_T} | \phi \in S(\bar{x})\}$ satisface *pif*. De esta manera, el filtro $\mathcal{F}_S$ generado por $S(\bar{x})^T$ es el conjunto de fórmulas que son consecuencia lógica de $S(\bar{x})^T \cup T$. Ahora bien, si $S(\bar{x})$ es un $n-$tipo maximal entonces para toda ϕ fórmula de L_n, o bien $\phi \in S(\bar{x})$, o bien $\neg\phi \in S(\bar{x})$, por lo que $S(\bar{x})^T$ es un ultrafiltro[6] en $\mathcal{A}_n(T)$. Así pues, por cada $n-$tipo de $S_n(T)$ existe un ultrafiltro en $\mathcal{A}_n(T)$, lo que quiere decir que $S_n(T)$ es un subconjunto del espacio de Stone de $\mathcal{A}_n(T)$.

Sin embargo, el conjunto de todos los ultrafiltros de $\mathcal{A}_n(T)$ no es subconjunto de $S_n(T)$ a no ser que el fragmento L sea compacto. Pues si $S(\bar{x})^T$ es un ultrafiltro, lo único que sabemos es que $S(\bar{x})^T$ satisface *pif* es decir que el conjunto $S(\bar{x}) = \{\phi | [\phi]^{\equiv_T} \in S(\bar{x})^T\}$ es finitamente consistente. Asi pues, únicamente si L es compacto, sabemos que $S(\bar{x}) \in S_n(T)$ y que el conjunto de todos los ultrafiltros de $\mathcal{A}_n(T)$, es el espacio de $n-$tipos de T.

De esta manera y de acuerdo a lo expuesto en el *Apéndice A*.4, si L es un fragmento compacto, la base $\mathfrak{B}$ de la topología del espacio $S_n(T)$ está determinada por la función $u([\phi(\bar{x})]^{\equiv_T}) = \{S(\bar{x}) \in S_n(T) | \phi(\bar{x}) \in S_n(T)\}$[7] donde $u : \mathcal{A}_n(T) \to S_n(T)$ es el isomorfismo entre $\mathcal{A}_n(T)$ y la base de $S_n(T)$, $\mathfrak{B}$. De esta manera queda demostrado que $S_n(T)$ es el espacio de Stone del álgebra de Lindenbaüm para fragmentos compactos.

Ahora bien, aunque un ultrafiltro en $\mathcal{A}_n(T)$ no necesariamente corresponde a un $n-$tipo de $S_n(T)$ para fragmentos que no satisfacen el teorema de compacidad, el siguiente teorema muestra que la correspondencia se tiene para ultrafiltros principales.

Teorema 3.5.1. *Sea L un fragmento enumerable y sea $S(\bar{x})$ un $n-$tipo máximal de $S_n(T)$, las siguientes afirmaciones son equivalentes, para $\phi(\bar{x}) \in L_n$ consistente:*

a) $S(\bar{x}) = \{\psi(\bar{x}) | T \models \forall\bar{x}(\phi(\bar{x}) \to \psi(\bar{x}))\}$*, es decir, es un $n-$tipo principal generado por* $\phi(\bar{x})$.

b) $S(\bar{x})$ *es aislado por el básico* $[\phi(\bar{x})]_T$.

c) $S(\bar{x})^T$ *es un ultrafiltro principal generado por* $[\phi(\bar{x})]^{\equiv_T}$ *en* $\mathcal{A}_n(T)$.

[6] Consultar Apendice A,3.
[7] Consultar Apendice A,4.

Demostración. $''a) \Rightarrow b)''$Sea $S(\bar{x}) = \{\psi(\bar{x})|T \models \forall \bar{x}(\phi(\bar{x}) \rightarrow \psi(\bar{x}))\}$. Veamos entonces que el básico $[\phi(\bar{x})]_T$ aisla a $S(\bar{x})$:
Supongamos que existe otro $n-$tipo, $S_n^*(\bar{x})$, tal que $S_n^*(\bar{x}) \in [\phi(\bar{x})]_T$, y sea $\psi(\bar{x}) \in S(\bar{x})$, como $T \models \forall \bar{x}(\phi(\bar{x}) \rightarrow \psi(\bar{x}))$ entonces $[\phi(\bar{x})]_T \subseteq [\psi(\bar{x})]_T$ y $S_n^*(\bar{x}) \in [\psi(\bar{x})]_T$, así pues, $S_n(\bar{x}) \subseteq S_n^*(\bar{x})$, pero como $S(\bar{x})$ es maximal entonces $S_n(\bar{x}) = S_n^*(\bar{x})$. De esta manera vemos que el básico $[\phi(\bar{x})]_T$ aisla a $S(\bar{x})$ como queriamos.

$''b) \Rightarrow a)''$Sea $[\phi(\bar{x})]_T$ el abierto básico que aisla a $S(\bar{x})$, así pues, para toda L_n-fórmula $\psi(\bar{x})$ tal que $\psi(\bar{x}) \in S(\bar{x})$, tenemos que $S(\bar{x}) \in [\psi(\bar{x})]_T$, y por lo tanto $[\phi(\bar{x})]_T \subseteq [\psi(\bar{x})]_T$ lo cual quiere decir que $T \models \forall \bar{x}(\phi(\bar{x}) \rightarrow \psi(\bar{x}))$. Pero como $S(\bar{x})$ es un $n-$tipo maximal, entonces $S(\bar{x}) = \{\psi(\bar{x})|T \models \forall \bar{x}(\phi(\bar{x}) \rightarrow \psi(\bar{x}))\}$.

$''a) \Rightarrow c)''$Sea $S(\bar{x}) = \{\psi(\bar{x})|T \models \forall \bar{x}(\phi(\bar{x}) \rightarrow \psi(\bar{x}))\}$, como $S(\bar{x})$ es consistente entones es finitamente consistente y $S(\bar{x})^T$ en $\mathcal{A}_n(T)$ satisface **pif**. Adicionalmente como $S(\bar{x})$ es maximal, entonces para toda fórmula $\varphi(\bar{x}) \in L_n$ o bien $\varphi(\bar{x}) \in S(\bar{x})$ o bien $\neg\varphi(\bar{x}) \in S(\bar{x})$ pues $S(\bar{x}) = S_{\bar{a}}(\bar{x})$ para alguna $n-$tupla $\bar{a} \in A^n$ de un modelo $\mathbb{A}$ tal que $\mathbb{A} \models T$. Así pues, en el álgebra de Lindenbaüm de T, $S(\bar{x})^T$ es un ultrafiltro. Ahora bien, dado que $T \models \forall \bar{x}(\phi(\bar{x}) \rightarrow \psi(\bar{x}))$, para toda $\psi(\bar{x}) \in S(\bar{x})$ tenemos que $[\phi(\bar{x})]^{\equiv_T} \leq [\psi(\bar{x})]^{\equiv_T}$ para toda $[\psi(\bar{x})]^{\equiv_T} \in S(\bar{x})^T$, lo cual quiere decir que $S(\bar{x})^T$ es un ultrafiltro principal en $\mathcal{A}_n(T)$ generado por $[\phi(\bar{x})]^{\equiv_T}$.

$''c) \Rightarrow a)''$Sea $S(\bar{x})^T$ un ultrafiltro principal en $\mathcal{A}_n(T)$ generado por $[\phi(\bar{x})]^{\equiv_T}$, es decir que $[\phi(\bar{x})]^{\equiv_T} \leq [\psi(\bar{x})]^{\equiv_T}$ para toda $[\psi(\bar{x})]^{\equiv_T} \in S(\bar{x})^T$, lo cual quiere decir que $T \models \forall \bar{x}(\phi(\bar{x}) \rightarrow \psi(\bar{x}))$ para toda $\psi(\bar{x}) \in S(\bar{x})$, puesto que $[\phi(\bar{x})]^{\equiv_T} \neq 0$ entonces existe un modelo $\mathbb{A} \models \phi(\bar{x})[\bar{a}]$ y por lo que $T \models \forall \bar{x}(\phi(\bar{x}) \rightarrow \psi(\bar{x}))$ entonces $\mathbb{A} \models \psi(\bar{x})[\bar{a}]$ para toda $[\psi(\bar{x})]^{\equiv_T} \in S(\bar{x})^T$. Así pues, $S(\bar{x}) = \{\psi(\bar{x})|T \models \forall \bar{x}(\phi(\bar{x}) \rightarrow \psi(\bar{x}))\}$ es un $n-$tipo de T, más aún, es maximal puesto que $S(\bar{x})^T$ es un ultrafiltro. □

Ahora bien, ya sabemos que para fragmentos de $L_{\omega_1\omega}$ que satisfacen el teorema de compacidad, el espacio de $n-$tipos de una teoría T es el espacio de Stone del álgebra de Lindenbaüm de T en la restricción del fragmento a n variables. Sin embargo quisieramos ver qué propiedades topológicas tiene el espacio de n-tipos de T como subespacio de $P(L_n)$, donde T es una teoría de L y L es un fragmento enumerable que no satisface compacidad. A continuación afirmamos que el subespacio $S_n(L)$ es la intersección enumerable de abiertos de $P(L_n)$, es decir un G_δ.

3.6. El Espacio $S_n(L)$ como un G_δ.

Al demostrar que $S_n(L)$ es un G_δ, podemos concluir que $S_n(L)$ es un espacio topológicamente completo, y por ende cumple el teorema de categoría de Baire, con lo que podremos demostrar el teorema de omisión de tipos para fragmentos enumerables de la lógica $L_{\omega_1\omega}$, así pues procedemos a demostrar que $S_n(L)$ es un G_δ. Recordemos que estamos tomando a L como un fragmento enumerable de $L_{\omega_1\omega}$ y a L_n como la restricción de L a n variables libres.

Proposición 3.6.1. *Sea $M = \{S \in P(L_n) | S$ satisface las propiedades P1-P6$\}$ donde,*

- $P1.\ \forall \phi, \psi \in L_n,$ *si* $\phi, \psi \in S$ *entonces* $\phi \wedge \psi \in S$
- $P2.\ \forall \phi \in L_n,\ (\phi \wedge \neg\phi) \notin S$
- $P3.\ \forall \phi \in L_n, \phi \in S$ *ó* $\neg\phi \in S$
- $P4.\ \forall (\bigvee \chi) \in L_n,$ *si* $(\bigvee \chi) \in S$ *entonces existe* $\phi \in \chi$ *tal que* $\phi \in S$
- $P5.$ *S es finitamente consistente.*

Entonces M es un G_δ.

Demostración. En primer lugar veamos que cada propiedad $P_i, i = 1, ..., 4$ por separado determina un G_δ:

1. $(P1)$ S satisface $P1$ si y sólo si $\forall \phi, \psi \in L_n$, si $S \in ([\phi] \cap [\Psi])$ entonces $S \in [\phi \wedge \psi]$; si y sólo si $\forall \phi, \psi \in L_n, S \in ([\phi] \cap [\psi])^c$ ó $S \in [\phi \wedge \psi]$; si y sólo si $S \in \bigcap_{\phi,\psi \in L_n} \big(([\phi] \cap [\psi])^c \cup [\phi \wedge \psi]\big)$.
2. $(P2)$ S satisface $P2$ si y sólo si $\forall \phi \in L_n, S \notin [\phi \wedge \neg\phi]$; si y sólo si $\forall \phi \in L_n, S \in [\phi \wedge \neg\phi]^c$; si y sólo si $S \in \bigcap_{\phi \in L_n} [\phi \wedge \neg\phi]^c$.
3. $(P3)$ S satisface $P3$ si y sólo si $\forall \phi \in L_n, S \in ([\phi] \cup [\neg\phi])$; si y sólo si $S \in \bigcap_{\phi \in L_n} ([\phi] \cup [\neg\phi])$.
4. $(P4)$ S satisface $P4$ si y sólo si dado $(\bigvee \chi) \in L_n$, si $S \in \bigvee \chi]$ entonces $S \in [\phi]$ para alguna $\phi \in \chi$; si y sólo si dado $(\bigvee \chi) \in L_n$, $S \in [\bigvee \chi]^c$ ó $S \in \bigcup_{\phi \in \chi} [\phi]$; si y sólo si $S \in \bigcap_{(\bigvee \chi) \in L_n} \big([\bigvee \chi]^c \cup (\bigcup_{\phi \in \chi} [\phi])\big)$.

Ahora bien, veamos que S satisface $P1 - P5$ si y sólo si $S \in G$, donde

$$G = \Big(\bigcap_{\models \phi, \phi \in L_n} [\phi]\Big) \cap \Big(\bigcap_{\phi \in L_n} [\phi \wedge \neg\phi]^c\Big) \cap \Big(\bigcap_{\phi,\psi \in L_n} \big(([\phi] \cap [\psi])^c \cup [\phi \wedge \psi]\big)\Big) \cap$$

$$\Big(\bigcap_{\phi\in L_n}([\phi]\cup[\neg\phi])\Big)\cap\Big(\bigcap_{(\bigvee\chi)\in L_n}(([\bigvee\chi]^c\cup(\bigcup_{\phi\in\chi}[\phi]))\Big)$$

En primera instancia, si S satisface $P1-P5$ entonces $S\in G$:
Claramente si S satisface $P1-P4$ entonces

$$S\in\Big(\bigcap_{\phi\in L_n}[\phi\wedge\neg\phi]^c\Big)\cap\Big(\bigcap_{\phi,\psi\in L_n}\big(([\phi]\cap[\psi])^c\cup[\phi\wedge\psi]\big)\Big)\cap$$

$$\Big(\bigcap_{\phi\in L_n}([\phi]\cup[\neg\phi])\Big)\cap\Big(\bigcap_{(\bigvee\chi)\in L_n}(([\bigvee\chi]^c\cup(\bigcup_{\phi\in\chi}[\phi]))\Big)$$

(Por los numerales $1-4$).

Ahora bien, veamos que si además S es finitamente consistente entonces $S\in\bigcap_{\models\phi}[\phi]$:
Supongamos que $S\notin\bigcap_{\models\phi}[\phi]$, entonces $S\notin[\phi]$ para alguna ϕ tal que $\forall\mathbb{A}$ modelo de L_n, $\mathbb{A}\models\phi$. Como $\phi\notin S$, por la propiedad $P3$, $\neg\phi\in S$ pero por definición de $\phi,\neg\phi$ es falsa en todos los modelos de L_n, es decir $\neg\phi$ es inconsistente, por lo que S no podría ser finitamente consistente y esto contradice la hipótesis.

Por otro lado, de acuerdo a lo demostrado en los numerales $1-4$ si $S\in G$, S satisface $P1-P4$. Ahora sólo falta probar que si $S\in G$ entonces S es finitamente consistente:
Supongamos que S no es finitamente consistente, entonces existe un subconjunto finito $\{\phi_1,...,\phi_n\}\subseteq S$ que no es consistente. Ahora, por la propiedad $P2$, $\phi_1\wedge\ldots\wedge\phi_n\in S$ y tampoco es consistente. De acuerdo con esto, $\neg(\phi_1\wedge\ldots\wedge\phi_n)$ es verdadero en todos los modelos de L_n y $S\in[\neg(\phi_1\wedge\ldots\wedge\phi_n)]$ puesto que $S\in\bigcap_{\models\phi}[\phi]$. Así pues, $\neg(\phi_1\wedge\ldots\wedge\phi_n)\in S$ y por la propiedad $P2$ $\big(\neg(\phi_1\wedge\ldots\wedge\phi_n)\wedge(\phi_1\wedge\ldots\wedge\phi_n)\big)\in S$ pero esto contradice el hecho de que $\forall\phi\in L_n,(\phi\wedge\neg\phi)\notin S$ (la propiedad $P1$).

De esta manera hemos demostrado que M es un G_δ, es decir que las propiedades $P1-P5$ determinan a un G_δ.

$\square$

Teorema 3.6.2. ***(Morley)*** *$S\in P(L_n)$ satisface las condiciones $P1-P5$ si y sólo si $S\in S_n(L)$.*

Si $S\in S_n(L)$ es fácil ver que S satisface las condiciones $P1-P5$, es decir que $S_n(L)\subseteq G$. Así sólo falta demostrar que $G\subseteq S_n(L)$, lo que equivale a decir que si S satisface las condiciones $P1-P5$ entonces $S\in S_n(L)$.

Sea $C=\{c_i|\ i\in\omega\}$ un conjunto de nuevas constantes que no aparecen en el lenguaje original L y sea $L^*=\{\phi(c_{i_1}\ldots c_{i_m})|\ \phi(x_1,\ldots,x_m)\in L\}$, como L es un fragmento enumerable, y C también lo es, entonces L^* se puede enumerar. Sea $\{\rho_j|\ j \in \omega\}$ una enumeración de L^* y sea $S^* = \{\phi(c_1 \dots c_n)|\ \phi(x_1, \dots, x_n) \in S\}$. Ahora bien, definimos de manera inductiva a T^*, de forma tal que $T_0 \subseteq \dots \subseteq T_n \subseteq T_{n+1} \subseteq \dots T^*$:

$$T_0 = \begin{cases} \rho_0, \text{ si } \{\rho_0\} \cup S^* \text{ es finitamente consistente} \\ \neg\rho_0, \text{ de lo contrario} \end{cases}$$

y para todo $k \geq 1$, definimos T_{2k} de la siguiente manera:

$$T_{2k} = T_{2k-1} \cup \{\psi_{2k}\}$$

donde

$$\psi_{2k} = \begin{cases} \rho_k, \text{ si } T_{2k-1} \cup \{\rho_k\} \cup S^* \text{ es finitamente consistente} \\ \neg\rho_k, \text{ de lo contrario} \end{cases}$$

Ahora bien, dado T_{2k}, definimos a T_{2k+1} $\forall k \geq 0$ de la siguiente manera:

1. Sea χ un subconjunto enumerable de fórmulas de L^*. Si $\psi_{2k} = \bigvee \chi(c_{i_1}, \dots, c_{i_m})$, sea $\rho_j \in \chi$ tal que j es el menor indice que cumple que $S^* \cup T_{2k} \cup \{\rho_j\}$ sea finitamente consistente.

2. Si $\psi_{2k} = \exists x \phi(x)$, definimos $T_{2k+1} = T_{2k} \cup \{\phi(c_j)\}$ donde $c_j \in C$ y j es el menor índice tal que c_j no aparece en ninguna fórmula de T_{2k}, y $\phi(c_j) \cup S^* \cup T_{2k}$ es finitamente consistente. Este c_j existe, puesto que las consantes de S^* son finitas y son fijas.

3. De lo contrario, definimos a $T_{2k+1} = T_{2k}$.

Para demostrar el **Teorema** 3.6.2, es necesario probar los siguientes lemas:

Lema 3.6.3. *La teoría T^* cumple lo siguiente:*

a) T^* es completa en el lenguage L^*.

b) T^* es finitamente consistente.

c) $S^* \subseteq T^*$.

d) Si $\phi \in T^*$, y si χ es un conjunto enumerable de fórmulas, tal que $\phi \in \chi$ y $\bigvee \chi \in L$, entonces $\bigvee \chi \in T^*$.

Demostración.
a) T^* es completa en el lenguage L^*. Sea $\phi \in L^*$ veamos que $\phi \in T^*$ ó $\neg\phi \in T^*$:
Puesto que $\phi = \rho_k$, para algún $k \in \omega$, entonces por construcción, o bien $\phi \in T_{2k}$ o bien $\neg\phi \in T_{2k}$, ý como $T_{2k} \subseteq T^*$ entonces $\neg\phi \in T^*$.

b) T^* es finitamente consistente.Supongamos por contradicción que T^* no es finitamente consistente, entonces existe un $k \in \omega$ tal que T_k tampoco es finitamente consistente. En primera instancia, sabemos que S^* es finitamente consistente, puesto que S lo es. Ahora bien, probaremos por inducción en k que $\forall k \in \omega, T_k \cup S^*$ es finitamente consistente. Esto no solamente implica que T_k es finitamente consistente si no también que la inducción está bien definida:

Caso Base: $k = 0$
Si $T_0 = \{\rho_0\}$, es porque $\{\rho_0\} \cup S^*$ es finitamente consistente y no hay nada que demostrar.

Ahora bien, dada una fórmula $\rho \in L^*$ veamos que si Γ es un subconjunto de L^* finitamente consistente y si $\Gamma \cup \{\rho\}$ no es finitamente consistente entonces $\Gamma \cup \{\neg\rho\}$ es finitamente consistente:
Supongamos por contradicción que $\Gamma \cup \{\neg\rho\}$ no es finitamente consistente, entonces existe un subconjunto $A_{\neg\rho} = \{\psi_1, \ldots, \psi_s\}, A_{\neg\rho} \subseteq \Gamma$ tal que para todo modelo $\mathbb{B}$, $\mathbb{B} \nvDash (\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_s \wedge \neg\rho)$. De manera similar, puesto que $\Gamma \cup \{\rho\}$ no es finitamente consistente, entonces existe un subconjunto $A_\rho = \{\phi_1, \ldots, \phi_r\}, A_\rho \subseteq \Gamma$ tal que para todo modelo $\mathbb{B}$, $\mathbb{B} \nvDash (\phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_r \wedge \rho)$. Pero por hipótesis, Γ es finitamente consistente, entonces el subconjunto $A_{\neg\rho} \cup A_\rho$ de Γ tiene un modelo $\mathbb{A}$, tal que $\mathbb{A} \models (\phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_r) \wedge (\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_s)$, pero entonces $\mathbb{A} \nvDash \neg\rho$ y $\mathbb{A} \nvDash \rho$ lo cual es una contradicción. Así pues, queda demostrado que si $\Gamma \cup \{\rho\}$ no es finitamente consistente, entonces $\Gamma \cup \{\neg\rho\}$ si lo es. Por lo que, si $T_0 = \{\rho_0\}$ y $\{\neg\rho_0\} \cup S^*$ no es finitamente consistente, entonces $T_0 \cup S^*$ si lo es.

Paso Inductivo: Supongamos que para todo $l \leq k, T_k$ es finitamente consistente. Así pues hay dos casos:

$k = 2m - 1$, k es impar:

$$T_{k+1} = T_{2m} = \begin{cases} T_{2m-1} \cup \rho_k, & \text{si } T_{2m-1} \cup \{\rho_k\} \cup S^* \text{ es finitamente consistente} \\ T_{2m-1} \cup \neg\rho_k, & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

La prueba que muestra que $T_{k+1} \cup S^*$ es finitamente consistente en este caso es análoga a la demostración inmediatamente anterior.

$k = 2m$, k es par:
$$T_{2m} = T_{2m-1} \cup \{\psi_{2m}\}$$

1. Si $\psi_{2m} = \bigvee \chi$, puesto que $T_{2m+1} = T_{2m} \cup \{\rho_j\}$ donde ρ_j es tal que $\rho_j \in \chi$ y j es el menor indice que cumple que $S^* \cup T_{2m} \cup \{\rho_j\}$ sea finitamente consistente. Entonces es claro que $T_{2m+1} \cup S^*$ es finitamente consistente, y $T_{2m+1} = T_{k+1}$.
2. Si $\psi_{2m} = \exists x \phi(x)$, definimos a $T_{n+1} = T_{2m+1} = T_{2m} \cup \{\phi(c_j)\}$, donde $j \in \omega$ es el menor indice tal que c_j no aparece en ninguna fórmula de T_{2m} y tal que $T_{2m} \cup \{\phi(c_j)\} \cup S*$ sea finitamente consistente.
3. De lo contrario, $T_{k+1} = T_{2m+1} = T_{2m}$ y por hipótesis de inducción se hace evidente que $T_{k+1} \cup S^*$ es finitamente consistente.

$c)$ $\underline{S^* \text{ es subconjunto de } T^*}$. Sea $\phi \in S^*$ entonces $\phi = \rho_k$, para algún $k \in \omega$. Así pues, veamos que $\phi \in T_{2k}$ y por ende $\phi \in T^*$:

$$T_{2k} = \begin{cases} T_{2k-1} \cup \{\phi\}, \text{ si } T_{2k-1} \cup \{\phi\} \cup S^* \text{ es finitamente consistente} \\ T_{2k-1} \cup \{\neg\phi\}, \text{ de lo contrario.} \end{cases}$$

Ahora bien, por contradicción supongamos que $T_{2k} = T_{2k-1} \cup \{\neg\phi\}$. En el numeral anterior demostramos que para todo $n \in \omega$, $T_n \cup S^*$ es finitamente consistente, por lo que $T_{2k} \cup S^*$ debe ser finitamente consistente. Ahora bien, como $\phi \in S^*$ y $\neg\phi \in T_{2k}$, entonces el conjunto $\{\phi, \neg\phi\} \subset T_{2k} \cup S^*$ debería ser consistente, lo cual es falso. Así pues, $\phi \in T_{2k}$ y por ende $\phi \in T^*$ como se quería.

$d)$ $\underline{\text{Si } \phi \in T^*, \text{ y si } \chi \text{ es un conjunto enumerable de fórmulas, tal que } \phi \in \chi \text{ y } \bigvee \chi \in L,}$ $\underline{\text{entonces } \bigvee \chi \in T^*}$. Supongamos por contradicción que $\phi \in T^*, \phi \in \chi, \bigvee \chi \in L$ y $\bigvee \chi \notin T^*$, entonces puesto que T^* es completa con respecto a L^* $\neg(\bigvee \chi) \in T^*$. Ahora bien, sea $\rho_m = \phi$ y sea $\rho_k = \bigvee \chi$ y consideremos los siguientes dos casos:
Si $m > k, \neg \bigvee \chi \notin T_j, \forall j < k$ y $\neg \bigvee \chi \in T_j, \forall j \geq k$, en particular $\neg \bigvee \chi \in T_m$ y $\phi \in T_m$. Ahora bien, T_m es finitamente consistente, por lo que $\{\neg \bigvee \chi, \phi\}$ a de ser consistente, lo cual es una contradicción, puesto que para cualquier modelo $\mathbb{A}$ tal que $\mathbb{A} \models \phi$, se tiene que $\mathbb{A} \models \bigvee \chi$. Si $m < k$ la demostración es similar tomando a $\{\neg \bigvee \chi, \phi\} \subseteq T_k$. $\square$

Ahora bien, sea $\mathbb{B} = \langle B, \{r^{\mathbb{B}}\}, \{c^{\mathbb{B}}\}\rangle$ una estructura puramente relacional, donde el universo B, las relaciones $r^{\mathbb{B}}$ y las constantes $c^{\mathbb{B}}$ se definen de la siguiente forma:

$B = C = \{c_i | \ i \in \omega\}$.

$r^{\mathbb{B}}(t_1, \ldots, t_n)$ si y sólo si $r(t_1, \ldots, t_n) \in T^*, \forall r \in L$.

$c^{\mathbb{B}} = c, \forall c \in C$.

Lema 3.6.4. *T^* tiene modelos.*[8]

Demostración. En primera instancia definimos la relación " $=_{T*}$ " para constantes, $c_i, c_j \in C$, de la siguiente manera, $c_i =_{T^*} c_j$ si y solamente si $(c_i = c_j) \in T^*$. Esta relación es una relación de equivalencia:

> $c_i =_{T^*} c_i$ para toda $c \in T^*$ pues, $c_i = c_i \in T^*$ de lo contrario puesto que T^* es completo, entonces $\neg(c_i = c_i) \in T^*$ y por lo tanto T^* no podría ser finitamente consistente.
>
> Si $c_i =_{T^*} c_j$ entonces $c_j =_{T^*} c_i$ pues si $c_j = c_i \notin T^*$ por un argumento similar, $\neg(c_j = c_i) \in T^*$ y el conjunto $\{\neg(c_j = c_i), c_i = c_j\} \subset T^*$ sería inconsistente.
>
> Si $c_i =_{T^*} c_j$ y $c_j =_{T^*} c_k$ entonces $c_i =_{T^*} c_k$. La demostración de está propiedad es análoga a la anterior.

De esta manera, el cociente $B/" =^*_T "$ es el universo del modelo $\mathbb{A} = \langle A, \{r^{\mathbb{A}}\}, \{c^{\mathbb{A}}\}\rangle$. Es decir que $A = \{[c] | c \in C\}$ donde $[c] = \{c' \in C | c' =_{T^*} c\}$. Ahora bien, las relaciones r^A y las constantes c^A se definen de la siguiente forma:

- ⋆ $r^{\mathbb{A}}([c_1], \ldots, [c_n])$ si y sólo si $r(c_1, \ldots, c_n) \in T^*, \forall r \in L$; $r^{\mathbb{A}}([c_1], \ldots, [c_n])$ está bien definida puesto que si $c_1, \ldots, c_n =_{T^*} c'_1, \ldots, c'_n$ y $r^{\mathbb{A}}(t_1, \ldots, t_n)$, entonces $r^{\mathbb{A}}(t'_1, \ldots, t'_n)$.
- ⋆ $c^{\mathbb{A}} = [c], \forall c \in C$.

A continuación, vamos a demostrar que $\mathbb{A} = \langle A, \{r^{\mathbb{A}}\}, \{c^{\mathbb{A}}\}\rangle$ es un modelo de T^*.

1. Es necesario demostrar que si t es un término de L^*, $\forall c_1, \ldots, c_n$ constantes de C, se tiene la siguiente igualdad:

$$t^{\mathbb{A}}([c_1], \ldots, [c_n]) = [t(c_1 \ldots c_n)]$$

Si $t := x_i, i \in \{1, \ldots, n\}$:
$t^{\mathbb{A}}([c_1], \ldots, [c_n]) = x_i^{\mathbb{A}}([c_1], \ldots, [c_n]) = [c_i]$
$[t(c_1 \ldots c_n)] = [x_i(c_1 \ldots c_n)] = [c_i]$.

Si $t := c, c \in C$:
$t^{\mathbb{A}}([c_1], \ldots, [c_n]) = c^{\mathbb{A}}([c_1], \ldots, [c_n]) = c^{\mathbb{A}} = [c]$
$[t(c_1 \ldots c_n)] = [c(c_1 \ldots c_n)] = [c]$.

[8]Para lenguages que no son puramente relacionales, se puede hacer una demostración análoga.

2. Ahora probaremos por inducción en fórmulas la propiedad deseada para toda fórmula $\phi(x_1,\ldots,x_n) \in L$:

$$\mathbb{A} \models \phi(x_1,\ldots,x_n)[[c_1],\ldots,[c_n]] \text{ si y sólo si } \phi(c_1,\ldots,c_n) \in T^*$$

Sea ϕ es una fórmula atómica y s_1, s_2, términos de L*:

Si $\phi := s_1(x_1,\ldots,x_n) = s_2(x_1,\ldots,x_n)$:
$\mathbb{A} \models (s_1(x_1,\ldots,x_n) = s_2(x_1,\ldots,x_n))[[c_1],\ldots,[c_n]]$; si y sólo si $s_1^{\mathbb{A}}([c_1],\ldots,[c_n] = s_2^{\mathbb{A}}([c_1],\ldots,[c_n]))$; si y sólo si $[s_1(c_1,\ldots,c_n)] = [s_2(c_1,\ldots,c_n)]$, por lo probado anteriormente); si y sólo si, $\big(s_1(c_1,\ldots,c_n) = s_2(c_1,\ldots,c_n)\big) \in T^*$, por definición de las clases de equivalencia.

Si $\phi := r(s_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,s_n(x_1,\ldots,x_n))$:
$\mathbb{A} \models r(s_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,s_n(x_1,\ldots,x_n))[[c_1],\ldots,[c_n]]$ si y sólo si
$(s_1^{\mathbb{A}}([c_1],\ldots,[c_n]),\ldots,s_n^{\mathbb{A}}([c_1],\ldots,[c_n])) \in r^{\mathbb{A}}$; si y sólo si
$([s_1(c_1,\ldots,c_n)],\ldots,[s_n(c_1,\ldots,c_n)]) \in r^{\mathbb{A}}$; si y sólo si
$r\big([s_1(c_1,\ldots,c_n)],\ldots,[s_n(c_1,\ldots,c_n)]\big) \in T^*$

Sean $\psi(x_1,\ldots,x_n)$ y $\psi'(x_1,\ldots,x_n)$ tales que:
$\mathbb{A} \models \psi(x_1,\ldots,x_n)[[c_1],\ldots,[c_n]]$ si y sólo si $\psi(c_1,\ldots,c_n) \in T^*$ y
$\mathbb{A} \models \psi'(x_1,\ldots,x_n)[[c_1],\ldots,[c_n]]$ si y sólo si $\psi'(c_1,\ldots,c_n) \in T^*$, veamos que la propiedad vale para:

Si $\phi := \neg\psi(x_1,\ldots,x_n)$:
$\mathbb{A} \models \neg\psi(x_1,\ldots,x_n)[[c_1],\ldots,[c_n]]$; si y sólo si $\mathbb{A} \models \neg\psi([c_1],\ldots,[c_n])$; si y sólo si $\mathbb{A} \not\models \psi([c_1],\ldots,[c_n])$; si y sólo si $\psi(c_1,\ldots,c_n) \notin T^*$; si y sólo si $\neg\psi(c_1,\ldots,c_n) \in T^*$ puesto que por construcción T^* es completo.

Si $\phi := (\psi \wedge \psi')(x_1,\ldots,x_n)$:
$\mathbb{A} \models \big(\psi(x_1,\ldots,x_n) \wedge \psi'(x_1,\ldots,x_n) bigr)[[c_1],\ldots,[c_n]]$; si y sólo si
$\mathbb{A} \models \neg\psi([c_1],\ldots,[c_n]) \wedge \psi'([c_1],\ldots,[c_n])$; si y sólo si
$\mathbb{A} \models \psi([c_1],\ldots,[c_n])$ y $\mathbb{A} \models \psi'([c_1],\ldots,[c_n])$; si y sólo si
$\psi(c_1,\ldots,c_n), \psi'(c_1,\ldots,c_n) \in T^*$; si y sólo si
$\psi(c_1,\ldots,c_n) \wedge \psi'(c_1,\ldots,c_n) \in T^*$ puesto que por construcción T^* es finitamente consistente.

Si $\phi := \forall x\psi(x, x_1, \ldots, x_n)$:
Supongamos que $\forall x\psi(x, c_1, \ldots, c_n) \notin T^*$ entonces $\exists x\neg\psi(c_1, \ldots, c_n) \in T^*$; entonces existe un testigo $c \in C$ por el caso 2 en la construcción de T^* tal que $\neg\psi(c, c_1, \ldots, c_n) \in T^*$ y por hipótesis de inducción, $\mathbb{A} \models \neg\psi([c], [c_1], \ldots, [c_n])$; entonces $\mathbb{A} \not\models \psi([c], [c_1], \ldots, [c_n])$; y por ende $\mathbb{A} \not\models \forall x\psi(x, [c_1], \ldots, [c_n])$, lo cual es lo mismo que si $\mathbb{A} \not\models \forall x\psi(x, x_1, \ldots, x_n)[[c_1], \ldots, [c_n]]$.

Supongamos que $\forall x\psi(x, c_1, \ldots, c_n) \in T^*$ y $\mathbb{A} \not\models \forall x\psi(x, [c_1], \ldots, [c_n])$, entonces $\exists [c] \in A$ tal que $\mathbb{A} \not\models \psi([c], [c_1], \ldots, [c_n])$, y por hipótesis de inducción, $\psi(c, c_1, \ldots, c_n) \notin T^*$; entonces $\neg\psi(c, c_1, \ldots, c_n) \in T^*$ puesto que por construcción T^* es completo. Sin embargo, $\{\neg\psi(c, c_1, \ldots, c_n), \forall x\psi(x, c_1, \ldots, c_n)\} \subset T^*$ y es inconsistente lo que contradice el hecho de que T^* sea finitamente consistente.

Si $\phi := \bigvee \chi(x_1, \ldots, x_n)$:
Supongamos que $\bigvee \chi(c_1, \ldots, c_n) \in T^*$ entonces existe $\phi(x_1, \ldots, x_n) \in \chi$ tal que $\phi(c_1, \ldots, c_n) \in T^*$ por el numeral 1, así pues, por hipótesis de inducción, $\mathbb{A} \models \phi(x_1, \ldots, x_n)[[c_1], \ldots, [c_n]]$, entonces
$\mathbb{A} \models \bigvee \chi(x_1, \ldots, x_n)[[c_1], \ldots, [c_n]]$.

Ahora supongamos que $\mathbb{A} \models \bigvee \chi(x_1, \ldots, x_n)[[c_1], \ldots, [c_n]]$ entonces, existe $\phi(x_1, \ldots, x_n) \in \chi$ tal que $\mathbb{A} \models \phi(x_1, \ldots, x_n)[[c_1], \ldots, [c_n]]$; entonces $\phi(c_1, \ldots, c_n) \in T^*$ por hipótesis de inducción, y por lo tanto $\bigvee \chi(c_1, \ldots, c_n) \in T^*$ por la parte $d)$ del **Lema** 3.6.3.

□

Finalmente podemos demostrar el **Teorema** 3.6.2:

Demostración. Puesto que para toda fórmula $\phi \in T^*$, $\mathbb{A} \models \phi$, y en especial $S^* \subseteq T^*$, entonces para toda fórmula $\phi \in S^*$, $\mathbb{A} \models \phi$, lo cual hace a S consistente pues se ha encontrado un modelo que lo realice, esto equivale a decir que $S \in S_n(L)$. □

Ahora bien, $P(L_n)$ con la topología producto es un espacio metrizable, separable y completo. Puesto que un subespacio de un espacio metrizable, separable y completo es topológicamente completo si y sólo si es un G_δ, el subespacio $S_n(L)$ de $P(L_n)$ es topológicamente completo.[9]

Corolario 3.6.5. *Sea T una teoría de L, los subespacios $S_n(T)$ de $P(L_n)$ y $S_\omega(T)$ de $P(L)$ son completos.*

[9] Consultar [Mu, Capítulo 7, §43]

Demostración. Si modificamos la condición $P5$ de la *Proposición* 3.6.1 de manera que $P5'$ diga que $S \cup T$ finitamente consistente, y si modificamos el G original de forma tal que ahora

$$G'_\lambda = \Big(\bigcap_{\mathbf{T}\models\phi}[\phi]\Big) \cap \Big(\bigcap_{\phi\in L_n}[\phi\wedge\neg\phi]^c\Big) \cap \Big(\bigcap_{\phi,\psi\in L_n}\big(([\phi]\cap[\psi])^c \cup [\phi\wedge\psi]\big)\Big)\cap$$

$$\Big(\bigcap_{\phi\in L_n}([\phi]\cup[\neg\phi])\Big) \cap \Big(\bigcap_{(\bigvee\chi)\in L_n}\big(([\bigvee\chi]^c \cup (\bigcup_{\phi\in\chi}[\phi])\big)\Big).$$

Obtenemos que las nuevas propiedades $P1' - P5'$ determinan a G'_λ.

De acuerdo con esto, y dado que si $S \in S_n(T)$ entonces S satisface las nuevas condiciones $P1 - P5$ entonces $S \in G'_\delta$, es decir que $S_n(T) \subseteq G'_\delta$.

Por otro lado, el *Teorema* 3.6.2 dice que si $S \in P(L_n)$ satisface las propiedades $P1 - P5$ entonces $S \in S_n(L)$, ahora bien, Sea $S \in P(L_n)$ que satisface las nuevas condiciones, $P1' - P5'$, entonces el conjunto $S \cup T \in P(L_n)$ satisface las propiedades originales, $P1 - P5$, entonces $S \cup T \in S_n(L)$, lo cual quiere decir que $S \in S_n(T)$ como se buscaba. De esta manera queda demostrado que $S_n(T)$ es un espacio completo.

Por último, para ver que $S_\omega(T)$ a su vez es un espacio completo, basta cambiar a L_n por L, en las demostraciones relevantes. $\square$

3.7. El Espacio $S_1(T)$ de la Teoría $T = TODSE \cup \{(c_i < c_{i+1}) |\ i \in \omega\}$

Por las siguientes dos secciones sea L la lógica de primer orden. En esta sección y en la siguiente se busca describir de manera detallada al espacio de $1-$tipos y de $2-$tipos de la teoría T definida a continuación.

Sea $\langle\{<\}, \{c_k | k \in \omega\}, \{x_k | k \in \omega\}, \{\wedge, \vee, \rightarrow, \neg\}\rangle$ el alfabeto de L, donde " $<$ " es un símbolo de relación binaria. Ahora bien, sea T una teoría de L cuyos axiomas son:

1. (Antisimetría)$\forall x \forall y((x < y) \rightarrow \neg(y < x))$
2. (Transitividad) $\forall x \forall y \forall z(((x < y) \wedge (y < z)) \rightarrow (x < z))$
3. (Tricotomía) $\forall x \forall y((x < y) \vee (y < x) \vee (x = y))$
4. (Densidad) $\forall x \forall y((x < y) \rightarrow \exists z((x < z) \wedge (z < y)))$

5. (Sin máximo) $\forall x \exists y (x < y)$

6. (Sin mínimo) $\forall x \exists y (y < x)$

7. $\Gamma = \{(c_i < c_{i+1}) | \ i \in \omega\}$

Los primeros seis axiomas describen a la *teoría de orden denso sin extremos* y los otros axiomas (expuestos en el numeral 7) sólo dicen que las constantes están ordenadas de manera ascendente.

Ahora, vamos a describir el espacio de $1-$tipos de T y vamos a ver que se puede representar como una sucesión de tipos principales que converge a un único tipo no principal.

En primera instancia, quisieramos demostrar que los únicos $1-$tipos de la teoría son de la siguiente forma:

1. $S^1(x) = \{\phi(x) | T \models \forall x((x < c_0) \rightarrow \phi(x))\}$.

2. El tipo $S^2(x)$ generado por el conjunto $\{(c_i < x) | \ i \in \omega\}$.

3. $S^{3_i}(x) = \{\phi(x) | T \models \forall x((x = c_i) \rightarrow \phi(x))\}$ para $i \in \omega$.

4. $S^{4_i}(x) = \{\phi(x) | T \models \forall x((c_i < x) \wedge (x < c_{i+1}) \rightarrow \phi(x))\}$ para $i \in \omega$.

Para demostrarlo, debemos probar que para cualquier modelo $\mathbb{A}$ de T y para cualquier elemento $a \in \mathbb{A}$, el tipo $S_a(x) = \{F(x) | \ \mathbb{A} \models F(x)[a]\}$ es igual a $S^j(x)$, para algún $j = 1, 2$ o a $S^{j_i}(x)$, para algún $j = 3, 4$ e $i \in \omega$. Puesto que el lenguaje L es enumerable, por el teorema de Löwenheim-Skolem descendente, existe un modelo $\mathbb{B}$ enumerable tal que $\mathbb{B} \models T \cup S_a(x)$, así que todos los tipos de T se deben realizar en algún modelo enumerable, por lo que de ahora en adelante únicamente consideraremos modelos enumerables.

Cada modelo de T, $\mathbb{A} = \langle A, <^{\mathbb{A}}, c_0^{\mathbb{A}}, c_1^{\mathbb{A}}, c_2^{\mathbb{A}}, \ldots \rangle$ se puede dividir en las siguientes regiones:

$K_1^{\mathbb{A}} = \{a \in A | \ \mathbb{A} \models (x < c_0)[a]\}$.

$K_2^{\mathbb{A}} = \{a \in \mathbb{A} | \ \mathbb{A} \models (c_i < x)[a], \forall i \in \omega\}$

$K_{3^i}^{\mathbb{A}} = \{a \in A | \ \mathbb{A} \models (c_i = x)[a]\}$ para algún $i \in \omega$.

$K_{4^i}^{\mathbb{A}} = \{a \in A | \ \mathbb{A} \models ((c_i < x) \wedge (x < c_{i+1}))[a]\}$ para algún $i \in \omega$.

Ahora bien, quisieramos demostrar, que para todos los elementos de una región específica de $\mathbb{A}$, hay un único tipo que se realiza. Para garantizarlo, es necesario probar el siguiente lema:

Lema 3.7.1. *Si* $\mathbb{A} = \langle A, <^{\mathbb{A}}, c_0^{\mathbb{A}}, \ldots, c_n^{\mathbb{A}} \rangle$ *y* $\mathbb{B} = \langle B, <^{\mathbb{B}}, c_0^{\mathbb{B}}, \ldots, c_n^{\mathbb{B}} \rangle$ *son dos modelos de la teoría* $T_n = TODSE \cup \{c_0 < c_1, \ldots, c_{n-1} < c_n\}$ *de L, para cualquier par de elementos* $a \in \mathbb{A}$ *y* $b \in \mathbb{B}$ *tales que se encuentran en la misma región de sus respectivos modelos, entonces se tiene un isomorfismo* $g : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ *tal que* $g(a) = b$.
Cuando decimos que a *y* b *se encuentren en la misma región de sus respectivos modelos, nos referimos a que sucede alguna de las siguientes opciones:*

* $a <^{\mathbb{A}} c_0^{\mathbb{A}}$ *y* $b <^{\mathbb{B}} c_0^{\mathbb{B}}$
* $c_i^{\mathbb{A}} <^{\mathbb{A}} a <^{\mathbb{A}} c_{i+1}^{\mathbb{A}}$ *y* $c_i^{\mathbb{B}} <^{\mathbb{B}} b <^{\mathbb{B}} c_{i+1}^{\mathbb{B}}$ *para algún* $i = 0, \ldots, n$.
* $c_n^{\mathbb{A}} <^{\mathbb{A}} a$ *y* $c_n^{\mathbb{B}} <^{\mathbb{B}} b$.

Demostración. Supongamos que a y b son como arriba, puesto que $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ son enumerables por hipótesis, sea $A = \{c_0^{\mathbb{A}}, \ldots, c_n^{\mathbb{A}}, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\}$ y $B = \{c_0^{\mathbb{B}}, \ldots, c_n^{\mathbb{B}}, b_{n+1}, b_{n+2}, \ldots\}$ una enumeración de los respectivas universos tal que $a_{n+1} = a$ y $b_{n+1} = b$. Construiremos una serie de isomorfismos parciales, tales que $g_0 \subseteq g_1 \subseteq \ldots$ y $g_i : A_i \to B_i, \forall i \in \omega$, donde los subconjuntos $A_i \subset A$ y $B_i \subseteq B$ son finitos y tanto $\bigcup_{i\in\omega} A_i = A$ como $\bigcup_{i\in\omega} B_i = B$. Así pues, definimos a $g : A \to B$ como $g = \bigcup_{i\in\omega} g_i$.

Ahora bien, primero vamos a demostrar que si $g : A_i \to B_i$ es un isomorfismo parcial de dominio finito, entonces g se puede extender a un isomorfismo parcial de dominio finito, $g_{\{a^*,b^*\}}$ para cualquier $a^* \in A$ y $b^* \in B$ de forma tal que $a^* \in dom(g_{\{a^*,b^*\}})$ y $b^* \in ran(g_{\{a^*,b^*\}})$.

Sean $A_i = \{a_{j_0}, a_{j_1}, \ldots, a_{j_t}\}$, $B_i = \{b_{j_0}, b_{j_1}, \ldots, b_{j_t}\}$ y sea
$g = \{(a_{j_0}, b_{j_0}), (a_{j_1}, b_{j_1}), \ldots, (a_{j_t}, b_{j_t})\}$, donde
$a_{j_0} < a_{j_1} < \ldots < a_{j_t}$ y $b_{j_0} < b_{j_1} < \ldots < b_{j_t}$.

Primero definimos g_{a^*}.

Si $a^* = a_{j_m}$, para algún $m = 0, \ldots, t$, definimos $g_{a^*} = g$.

Si $a^* \neq a_{j_m}$, para todo $m = 0, \ldots, t$, se toma b_k como el mínimo elemento de $B - B_i$ tal que:

* Si $a^* < a_{j_0}$, $b_k < b_{j_0}$. Sabemos que dicho b_k existe puesto que B no tiene mínimo.

* Si $a_{j_t} < a^*$, $b_{j_t} < b_k$. Sabemos que dicho b_k existe puesto que B no tiene máximo.

* Si $a_{j_i} < a^* < a_{j_{i+1}}$ para algún $i = 0, \ldots, t-1$, $b_{j_i} < b_k < b_{j_{i+1}}$. Sabemos que dicho b_k existe puesto que B es denso.

Así definimos a $g_{a^*} = g \cup (a^*, b_k)$.

Ahora, definimos a $g_{\{a^*,b^*\}}$:

Si $b^* = b_{j_m}$, para algún $m = 0, \ldots, t$, o $b^* = b_k$ (en caso de que b_k se haya definido), definimos $g_{\{a^*,b^*\}} = g_a^*$.

Si $b^* \neq b_{j_m}$, para todo $m = 0, \ldots, t$, y $b^* \neq b_k$ (en caso de que b_k se haya definido), de manera similar a la demostración anterior, se toma a_k como el mínimo elemento de $A - A_i$ tal que $g_{a^*} \cup (a_k, b^*)$ preserve el orden. Sabemos que dicho a_k existe puesto que A es denso y sin extremos. Así definimos a $g_{\{a^*,b^*\}} = g_{a^*} \cup (a_k, b^*)$.

Finalmente definimos para todo $i \in \omega$

$$g_i = \begin{cases} \{(c_0^{\mathbb{A}}, c_0^{\mathbb{B}}), \ldots, (c_i^{\mathbb{A}}, c_i^{\mathbb{B}})\}, \text{ para } i < n+1. \\ \{(c_0^{\mathbb{A}}, c_0^{\mathbb{B}}), \ldots, (c_i^{\mathbb{A}}, c_i^{\mathbb{B}}), (a,b)\}, \text{ para } i = n+1. \\ g_{(i-1)_{\{a_i,b_i\}}}, \text{ para } i > n+1. \end{cases}$$

Es importante notar que como por hipótesis a y b se encuentran en la misma región, entonces g_i está bien definido para $i = n+1$. Una vez definido g_i definimos:

$$A_i = \begin{cases} \{c_0^{\mathbb{A}}, \ldots, c_i^{\mathbb{A}}\}, \text{ para } i < n+1. \\ \{c_0^{\mathbb{A}}, \ldots, c_n^{\mathbb{A}}, a\}, \text{ para } i = n+1. \\ A_{i-1} \cup \{a_i, (g_i)^{-1}(b_i)\}, \text{ para } i > n+1. \end{cases}$$

$$B_i = \begin{cases} \{c_0^{\mathbb{B}}, \ldots, c_i^{\mathbb{B}}\}, \text{ para } i < n+1. \\ \{c_0^{\mathbb{B}}, \ldots, c_n^{\mathbb{B}}, b\} \text{ para } i = n+1. \\ B_{i-1} \cup \{b_i, g_i(a_i)\}, \text{ para } i > n+1. \end{cases}$$

Es claro que $g_0 \subseteq g_1 \subseteq \ldots$ y $A_0 \subseteq A_1 \subseteq \ldots \subseteq A$, $B_0 \subseteq B_1 \subseteq \ldots \subseteq B$, donde cada A_i y B_i son el $dom(g_i)$ y el $ran(g_i)$ respectivamente. Así pues, la función $g = \bigcup_{i \in \omega} g_i$, $g : A \to B$ está bien definida.

Ahora bien, si $a^*, a_* \in A$, tales que $a^* \neq a_*$, existen $j, k \in \omega$ tales que $a_* = a_j, a^* = a_k$, teniendo en cuenta que $a_0 = c_0^{\mathbb{A}}, \ldots, a_n = c_n^{\mathbb{A}}$, sin pérdida de generalidad se puede suponer que $j < k$. De esta manera, puesto que $a_j \in A_j$, $a_k \in A_k$ y $A_j \subseteq A_k$, entonces

$a_j, a_k \in A_k$. Si $a_j < a_k$ entonces $g(a_j) = g_k(a_j) < g_k(a_k) = g(a_k)$, puesto que la función g_k es un isomorfismo parcial. Así se puede ver que la función g es inyectiva y preserva el orden.

Finalmente, si $b^* \in B$ entonces $b^* = b_j$ para algún $j \in \omega$ y por construcción sabemos que $b_j \in B_j$. Puesto que B_j es el rango de g_j y g_j es un isomorfismo parcial, entonces existe un elemento a^*en A_j tal que $g_j(a^*) = b_j$. Por lo que demuestra que $g : A \to B$ es sobreyectiva y por ende que evidentemente es un isomorfismo como queríamos.

$\square$

Proposición 3.7.2. *Si $\mathbb{A} = \langle A, <^{\mathbb{A}}, c_0^{\mathbb{A}}, c_1^{\mathbb{A}}, c_2^{\mathbb{A}}, \ldots \rangle$ y $\mathbb{B} = \langle B, <^{\mathbb{B}}, c_0^{\mathbb{B}}, c_1^{\mathbb{B}}, c_2^{\mathbb{B}}, \ldots \rangle$ son dos modelos enumerables de la teoría T, para cualquier par de elementos $a \in \mathbb{A}$ y $b \in \mathbb{B}$ que se encuentren en la misma región con respecto a sus modelos, entonces se tiene que $S_a(x) = S_b(x)$.(En este caso se consideran las regiones $K_1, K_2, K_{3_i}, K_{4_j}, i, j \in \omega$.)*

Demostración. Sean $\mathbb{A} = \langle A, <^{\mathbb{A}}, c_0^{\mathbb{A}}, c_1^{\mathbb{A}}, c_2^{\mathbb{A}}, \ldots \rangle$ y $\mathbb{B} = \langle B, <^{\mathbb{B}}, c_0^{\mathbb{B}}, c_1^{\mathbb{B}}, c_2^{\mathbb{B}}, \ldots \rangle$ como se describen en el enunciado, supongamos que $a \in \mathbb{A}$ y $b \in \mathbb{B}$ son tales que se encuentran en la misma región con respecto a sus modelos, y supongamos por contradicción que $S_a(x) \neq S_b(x)$, es decir que existe una fórmula $\phi(x)$ de L tal que $\phi(x) \in S_a(x)$ y $\neg\phi(x) \in S_b(x)$. Ahora bien, sean $\{c_{j_1}, \ldots, c_{j_m}\}$ las constantes que aparecen en la fórmula $\phi(x)$ de forma tal que $j_m > j_k$ para $k = 1, \ldots, m-1$.

Consideremos ahora la reducción de los modelos $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ al lenguaje L_{j_m}, $\mathbb{A}' = \langle A, <^{\mathbb{A}'}, c_0^{\mathbb{A}'}, \ldots, c_{j_m}^{\mathbb{A}'} \rangle$ y $\mathbb{B}' = \langle B, <^{\mathbb{B}'}, c_0^{\mathbb{B}'}, \ldots, c_{j_m}^{\mathbb{B}'} \rangle$ respectivamente. Claramente $\mathbb{A}' \models \phi(x)[a]$ y $\mathbb{B}' \models \neg\phi(x)[b]$, adicionalmente a y b siguen estando en la misma región con respecto a $\mathbb{A}'$ y $\mathbb{B}'$. Por el lema anterior existe un isomorfismo $g : A \to B$ tal que $g(a) = b$, por lo que sabemos que $\mathbb{A}' \models \phi(x)[a]$ si y sólo si $\mathbb{B}' \models \phi(x)[g(a)]$, así pues $\mathbb{B}' \models (\phi(x) \wedge \neg\phi(x))[b]$ y obtenemos la contradicción buscada.

$\square$

Una vez demostrada la proposición anterior, denotemos a cada tipo de cada región por $S_{K_j}(x)$ para $j = 1, 2$, o $S_{K_{j_i}}(x)$ para $j = 3, 4$, e $i \in \omega$ dependiendo de la región que representan.
A continuación, demostraremos que los únicos $1-$tipos de la teoría son $S_1(x), S_2(x), S_{3_i}(x)$ para $i \in \omega$ y $S_{4_i}(x)$ para $i \in \omega$:

Proposición 3.7.3.

a) $S_{K_1}(x) = S^1(x)$.

b) $S_{K_2}(x) = S^2(x)$.

c) $S_{K_{3_i}}(x) = S^{3_i}(x)$ *para todo* $i \in \omega$.

d) $S_{K_{4_i}}(x) = S^{4_i}(x)$ *para todo* $i \in \omega$.

Demostración.

a) $S_{K_1}(x) = S^1(x)$: Sea $\mathbb{A}$ un modelo de T. Para cualquier elemento $a \in K_1^{\mathbb{A}}$, se satisface que $\mathbb{A} \models (x < c_0)[a]$, por lo que la fórmula $(x < c_0) \in S_{K_1}(x)$, más aun, si $T \models \forall x((x < c_0) \to \phi(x))$ para alguna fórmula $\phi(x)$ de L, entonces $\mathbb{A} \models \phi(x)[a]$, por lo que $\phi(x) \in S_a(x)$ y por la proposicíon anterior, $\phi(x) \in S_{K_1}(x)$. Así pues, $S^1(x) \subseteq S_{K_1}(x)$.

   Ahora bien, si demostramos que para toda fórmula de L, $\phi(x)$, $T \models \forall x((x < c_0) \to \phi(x))$ o $T \models \forall x((x < c_0) \to \neg\phi(x))$ demostraremos que $S^1(x)$ es un tipo maximal, y por ende $S_{K_1}(x) = S_1(x)$.

   De acuerdo a lo anterior, supongamos por contradicción que existe $\phi(x)$ tal que $T \not\models \forall x((x < c_0) \to \phi(x))$ y $T \not\models \forall x((x < c_0) \to \neg\phi(x))$, entonces existen $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ modelos de T, $\mathbb{A} \models ((x < c_0) \wedge \phi(x))[a]$ y $\mathbb{B} \models ((x < c_0) \wedge \neg\phi(x))[b]$ para algún $a \in \mathbb{A}$ y $b \in \mathbb{B}$ tales que $a \in K_1^{\mathbb{A}}$ y $b \in K_1^{\mathbb{B}}$. Por definición $\phi(x) \in S_a(x)$ y $\neg\phi(x) \in S_b(x)$, pero por la proposición anterior, sabemos que $S_a(x) = S_{K_1}(x)$ y $S_b(x) = S_{K_1}(x)$, lo cual supone que $\phi(x), \neg\phi(x) \in S_{K_1}(x)$ y esto es una contradicción.
   Así se prueba que $S^1(x)$ es completo, $S_{K_1}(x) = S^1(x)$ y $S_{K_1}(x)$ es un tipo principal.

b) $S_{K_2}(x) = S^2(x)$:Sea $\Gamma = \{c_i < x | \ \forall i \in \omega\}$. Vamos a demostrar de manera similar al caso anterior, que $S_{K_2}(x)$ es un tipo maximal, y así, puesto que para cada $i \in \omega$ se tiene que $(c_i < x) \in S_{K_2}(x)$, no sólo $S_2(x) \subseteq S_{K_2}(x)$, si no que $S_{K_2}(x) = S_2(x)$.

   Veamos entonces que para toda fórmula $\phi(x)$ de L cuyas constantes son $c_{j_0}, \ldots, c_{j_m}$, tales que $c_{j_i} < c_{j_m}$ para todo $i = 0, \ldots, m-1$, se tiene que $T \models \forall x(((c_0 < x) \wedge \ldots \wedge (c_{j_m} < x)) \to \phi(x))$ o que $T \models \forall x(((c_0 < x) \wedge \ldots \wedge (c_{j_m} < x)) \to \neg\phi(x))$.

   Supongamos por contradicción que existe una fórmula de L, $\phi(x)$, tal que $T \not\models \forall x(((c_0 < x) \wedge \ldots \wedge (c_{j_m} < x)) \to \phi(x))$ y $T \not\models \forall x(((c_0 < x) \wedge \ldots \wedge (c_{j_m} < x)) \to \neg\phi(x))$. Entonces existen $\mathbb{A} = \langle A, <^{\mathbb{A}}, c_0^{\mathbb{A}}, \ldots, c_{j_m}^{\mathbb{A}} \rangle$ y $\mathbb{B} = \langle B, <^{\mathbb{B}}, c_0^{\mathbb{B}}, \ldots, c_{j_m}^{\mathbb{B}} \rangle$ modelos de $TODSE \cup \{(c_0 < c_1), \ldots, (c_{j_m - 1} < c_{j_m})\}$ tales que $\mathbb{A} \models ((c_0 < x) \wedge \ldots \wedge (c_{j_m} < x) \wedge \phi(x))[a]$ y $\mathbb{B} \models ((c_0 < x) \wedge \ldots \wedge (c_{j_m} < x) \wedge \neg\phi(x))[b]$. Ahora bien, por el lema 3.7.1 sabemos que existe un isomorfismo $g : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ tal que $g(a) = b$.

Así $\mathbb{A} \models \phi(x)[a]$ si y sólo si $\mathbb{B} \models \phi(x)[h(a)]$, entonces $\mathbb{B} \models (\phi(x) \wedge \neg\phi(x))[b]$, lo cual es una contradicción. Así pues, los generadores de S_{K_2} son $\{(c_i < x) | \, i \in \omega\}$, por lo que $S_{K_2} = S^2(x)$ y es un tipo no principal.

c) $\underline{S_{K_{3_i}}(x) = S_{3_i}(x)\text{, para todo } i \in \omega}$: Sea $\mathbb{A}$ un modelo de T, si $a \in K_{3_i}^{\mathbb{A}}$ para algún $i \in \omega$, entonces $a = c_i^{\mathbb{A}}$. Puesto que a es definible, entonces el tipo $S_a(x)$ es principal, y generado por la fórmula que lo define, en este caso por $(x = c_i)$. Así, $S_{K_{3_i}}(x) = \{\phi(x) | \, T \models \forall x((x = c_i) \rightarrow \phi(x))\}$ como queríamos.

d) $\underline{S_{K_{4_i}}(x) = S_{4_i}(x) \text{ para todo } i \in \omega}$: La demostración es análoga a la del numeral $a)$.

□

Ahora nos encontramos listos para describir el espacio de $1-$tipos. Empecemos notando que todos los tipos son principales menos $S^2(x)$, así todos los tipos son puntos aislados en el espacio $S_1(T)$, salvo $S^2(x)$. Es decir que existe una sucesión de tipos que converge a él. Veamos que evidentemente esta sucesión existe:

Sea $\mathcal{U}$ un entorno de $S^2(x)$, entonces existe un básico $\mathcal{B} = [\phi(x)]$, $\phi(x)$ de L, tal que $[\phi(x)] \subseteq \mathcal{U}$, $S^2(x) \in [\phi(x)]$ y por lo tanto $\phi(x) \in S^2(x)$. Ahora bien, sean $c_{j_0}, \ldots, c_{j_m}$, las constantes de $\phi(x)$ tales que $c_{j_i} < c_{j_m}$ para todo $i = 0, \ldots, m-1$, entonces sabemos por lo demostrado en el numeral $b)$ de la proposición anterior, que $T \models \forall x(((c_0 < x) \wedge \ldots \wedge (c_{j_m} < x)) \rightarrow \phi(x))$ así que $[(c_0 < x) \wedge \ldots \wedge (c_{j_m} < x)] \subseteq [\phi(x)]$ y claramente $S^2(x) \in [(x < c_0) \wedge \ldots \wedge (x < c_{j_m})]$.

Ahora bien, para cada $n \in \omega$, el tipo $S^{4_n} \in [(c_0 < x) \wedge \ldots \wedge (c_n < x)]$. Si no fuera así, $(\neg(c_0 < x) \vee \ldots \vee \neg(c_n < x)) \in S^{4_n}$ y esto implicaría que $\neg(c_n < x)) \in S^{4_n}$ pero puesto que $((c_n < x) \wedge (x < c_{n+1})) \in S^{4_n}$, $(x < c_n) \in S^{4_n}$ entonces $(c_n < x) \wedge \neg(c_n < x) \in S^{4_n}$ lo cual es una contradicción. De esta manera vemos que los tipos $\left\{S^{4_i}\right\}_{i\in\omega}$ forman una sucesión que converge $S^2(x)$ puesto que para cualquier vecindad $\mathcal{U}$ de $S^2(x)$, existe un $i \in \omega$ tal que $S^{4_i} \in \mathcal{U}$.

Aunque se hace ahora evidente que existe una sucesión convergente quisieramos saber que sucede con los otros tipos principales. En principio, es análogo demostrar que $\left\{S^{3_i}\right\}_{i\in\omega-\{0\}} \rightarrow S^2(x)$, pues como $S^{3_i} \in [c_i = x]$ y $(c_{i-1} < c_i) \in T$ entonces $S^{3_i} \in [(c_0 < x) \wedge \ldots \wedge (c_{i-1} < x)]$. Ahora bien, los últimos dos tipos que nos faltan por considerar son $S^1(x)$ y S^{3_0}, como $S^1(x) \in [x < c_0]$, $S^2(x) \in [c_0 < x]$ y $[x < c_0] \cap [c_0 < x] = \emptyset$, el único abierto $\mathcal{U}$ tal que $S^1(x), S^2(x) \in \mathcal{U}$ es $[x = x]$. De manera similar, como $S^{3_0} \in [c_0 = x]$ y $[x = c_0] \cap [c_0 < x] = \emptyset$ el abierto $[x = x]$ es el único abierto que contiene a $S^1(x)$ y a $S^{3_0}(x)$.

Sobra decir que cualquier par de sucesiones que convergen al mismo punto se pueden reordenar para que sean una sóla, por lo que $\left\{S^{3_i}\right\}_{i\in\omega}$ y $\left\{S^{4_i}\right\}_{i\in\omega}$ se pueden reordenar en $\left\{S^i\right\}_{i\in\omega} \longrightarrow S^2(x)$ definida

$$S^i = \begin{cases} S^{3_{\frac{i}{2}}} \text{ si } i \text{ es par.} \\ S^{4_{\frac{i+1}{2}-1}} \text{ si } i \text{ es impar.} \end{cases}$$

El siguiente diagrama, es una ilustración del espacio de $1-$tipos de T, que es homeomorfo al espacio $\{1-\frac{1}{n}\}_{n\in\omega-\{0\}} \cup \{1\}$ visto como subespacio de $\mathbb{R}$ con la topológía del orden, identificando al tipo $S^2(x)$ con el 1:

$S_n(T)$

$\bullet S^1 = 0 \qquad \bullet S^{3_0} = \frac{1}{2} \qquad \bullet S^{4_0} = \frac{2}{3} \quad \bullet S^{3_1} \quad \bullet S^{4_1} \bullet \ldots \bullet \circ S^2(x) = 1$

3.8. El Espacio $S_2(T)$

En esta sección, describiremos al espacio $S_2(T)$ de la teoría $T = TODSE \cup \{c_i < c_{i+1} | i \in \omega\}$. En terminos generales, un $2-$tipo maximal de T, $S_{(a,b)}$, se determina por la posición de a, b, con respecto a las constantes del modelo. Así pues, si $a = c_k$ para algún $k \in \omega$ y si $c_i < b < c_{i+1}$ para algún $i \in \omega$, el tipo $S_{a,b}$ estará determinado por la fórmula $(x = c_k) \wedge (c_i < y) \wedge (y < c_{i+1})$ y será un tipo principal.

Haremos únicamente un bosquejo de la demostración de afirmación planteada, pues es similar a la demostración de que los $1-$tipos de $S_1(T)$ están determinados por las diferentes regiones $K_1, K_2, K_{3_i}, K_{4_j}, i, j \in \omega$a diferencia de que en este caso, el posicionamiento de x, y con respecto a ellos mismos genera tipos distintos:

1. En primera instancia se demuestra que si $a, a' \in A$, para $\mathbb{A} \models T$ y $b, b' \in B$, para $\mathbb{B} \models B$, dos modelos enumerables de T_n, tales que tanto a y b,como a' y b' se encuentren en las mismas regiones con respecto a sus respectivos modelos, como se describe en el *Lema* 3.7.1 entonces existe un isomorfismo $g : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ tal que $g(a) = b$ y $g(a') = b'$.

2. Ahora se demuestra algo análogo a la *Proposición* 3.7.2. Si $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ son modelos de T, entonces para cualquieras dos tuplas de elementos, $a, a' \in A$ y $b, b' \in B$ si tanto a y b,como a' y b' se encuentren en las mismas regiones con respecto a sus

respectivos modelos entonces $S_{(a,a')} = S_{(b,b')}$. Esto practicamente nos dice que los tipos $S_{(a,a')}$ están determinados de acuerdo al posicionamiento de a, a' con respecto a las constantes $\{c_i^{\mathbb{A}} | i \in \omega\}$.

3. Por último se demuestra que si $a, a' \in A$ se encuentran ambos en regiones diferentes a la región K_2, entonces el tipo $S_{(a,a')}$ es un tipo principal generado por la conyunción de las fórmulas generadoras de los $1-$tipos de cada región a la que pertencen. Si de lo contrario alguno de los dos elementos $a, a' \in A$ pertenecen a la región K_2 entonces $S_{(a,a')}$ es un $2-$tipo no principal, generado igualmente por la unión de las fórmulas generadoras de los $1-$tipos de cada región a la que pertencen.

Ahora bien, puesto que existen enumerables posibilidades en las que se pueden ubicar las variables x, y con respecto a las enumerables constantes, y por cada una de estas posiciones hay un tipo distinto, hemos construido un diagrama *Diagrama del Espacio de Tipos, $S_2(T)$.* 3.9.1 de manera que sea más fácil entender dicho espacio.

Ahora bien, considere un plano discreto, en donde el eje x representa la posición de la variable x con respecto a las constantes $\{c_i | i \in \omega\}$, y de manera similar, el eje y representa la posición de y con respecto a las mismas. De este modo, hemos diferenciado a los tipos, dependiendo de sus diversas propiedades:

($\bigcirc$) Los tipos diferenciados con un círculo grande, son tipos principales aislados por los básicos:

$$[(c_k = x) \wedge (c_i = y)]. \text{ Denotamos a estos tipos por } S_{k,i}^{(=)}, \text{ para } i, k \in \omega$$

$$[(c_k = x) \wedge (c_i < y < c_{i+1})]. \text{ Denotamos a estos tipos por } S_{k,i}^{(=,>)}, \text{ para } i, k \in \omega$$

($\circ$) Los tipos diferenciados con un círculo pequeño, son tipos aislados por los básicos:

$$[(c_k < x < c_{k+1}) \wedge (c_i < y < c_{i+1})]. \text{ Denotamos a estos tipos por } S_{k,i}^{(>)}, \text{ para } i, k \in \omega.$$

$$[(c_k < x < c_{k+1}) \wedge (c_i = y)]. \text{ Denotamos a estos tipos por } S_{k,i}^{(>,=)}(x, y), \text{ para } i, k \in \omega.$$

($+$) Los tipos diferenciados con una cruz, son tipos no principales tales de son de la siguiente forma:

$$S_{k,\infty}^{(=)}(x, y), \text{ es el tipo generado por las fórmulas } \{(c_k = x), c_0 < y, c_1 < y, \ldots\}.$$

$$S^{(>)}_{k,\infty}(x,y),\ \text{es el tipo generado por las fórmulas}\ \{(c_k < x < c_{k+1}), c_0 < y, c_1 < y, \ldots\}.$$

$$S^{(=)}_{\infty,i}(x,y),\ \text{es el tipo generado por las fórmulas}\ \{(c_i = y), c_0 < x, c_1 < x, \ldots\}.$$

$$S^{(>)}_{\infty,i}(x,y),\ \text{es el tipo generado por las fórmulas}\ \{(c_i < y < c_{i+1}), c_0 < x, c_1 < x, \ldots\}.$$

Como estos tipos no son principales, entonces existen las sucesiones de tipos principales convergentes, tales como:

Para todo $k \in \omega$, se tiene que $\{S^{(>)}_{k,i} | i \in \omega\}, \{S^{(>,=)}_{k,i} | i \in \omega\} \rightarrow S^{(>)}_{k,\infty}$, es decir que ambas convergen al tipo $S^{(>)}_{k,\infty}$. De manera similar, para todo $k \in \omega, \{S^{(=)}_{k,i} | i \in \omega\}, \{S^{(=,>)}_{k,i} | i \in \omega\} \rightarrow S^{(=)}_{k,\infty}$.

Para todo $i \in \omega$, se tiene que $\{S^{(>)}_{k,i} | k \in \omega\}, \{S^{(=,>)}_{k,i} | k \in \omega\} \rightarrow S^{(>)}_{\infty,i}$ y $\{S^{(=)}_{k,i} | k \in \omega\}, \{S^{(>,=)}_{k,i} | k \in \omega\} \rightarrow S^{(=)}_{\infty,i}$.

Adicionalmente las sucesiones de los tipos no principales, referenciados con $+$, $\{S^{(>)}_{k,\infty} | k \in \omega\}$, $\{S^{(>)}_{\infty,i} | i \in \omega\}$ convergen a los respectivos tipos, $S^{x<y}_{\infty}, S^{x>y}_{\infty}$ diferenciados con un asterísco, $(*)$. Estos tipos son tales que:

$$S^{x<y}_{\infty},\ \text{es el tipo generado por las fórmulas}\ \{x < y, c_0 < x, c_1 < x, \ldots\}$$
$$S^{x>y}_{\infty},\ \text{es el tipo generado por las fórmulas}\ \{y < x, c_0 < y, c_1 < y, \ldots\}$$

Claramente los tipos $\{S^{(=)}_{k,\infty} | k \in \omega\}$, $\{S^{(=)}_{\infty,i} | i \in \omega\}$ también convergen a los tipos, $S^{x<y}_{\infty}, S^{x>y}_{\infty}$ respectivamente.

Adjunto a los tipos, $S^{x<y}_{\infty}, S^{x>y}_{\infty}$, se encuentra el último tipo caracterizado por un asterisco:

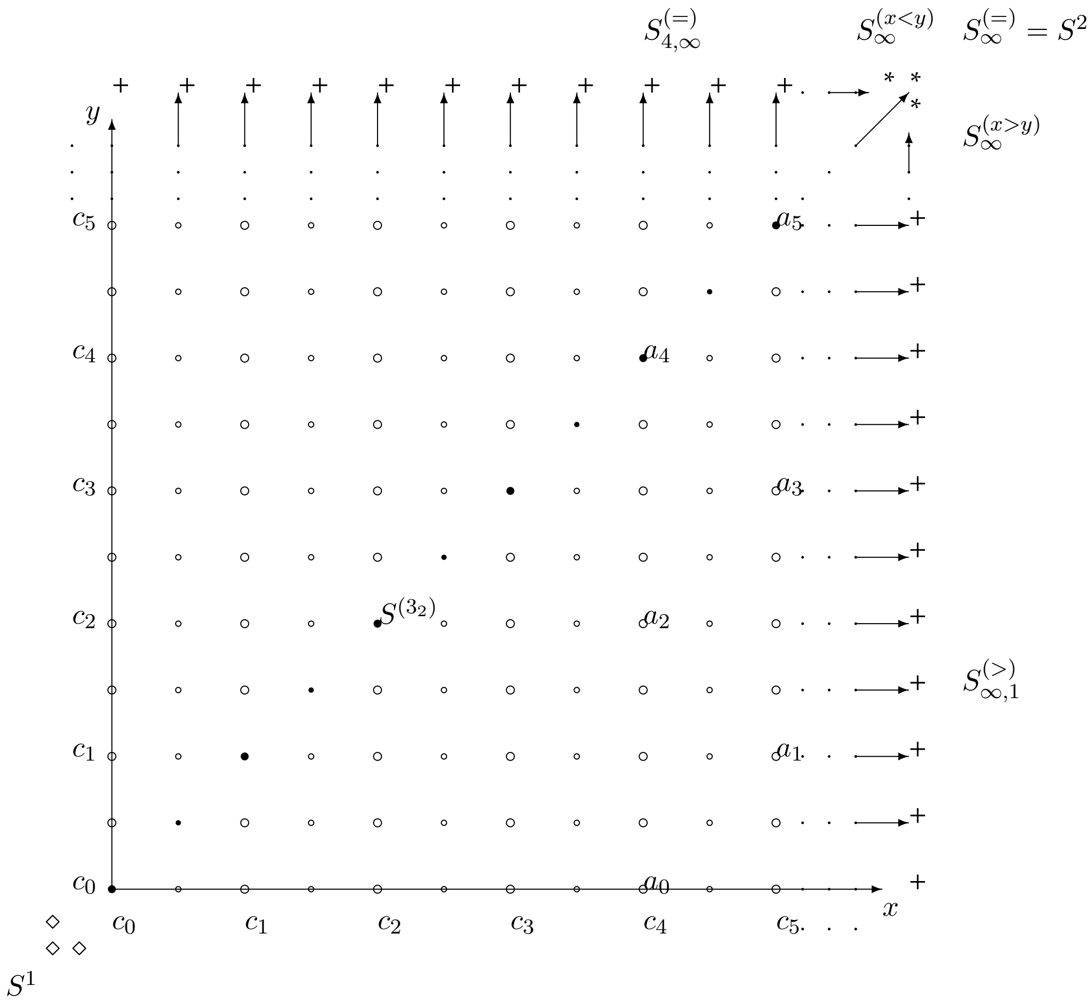
$$S^{(=)}_{\infty}(x,y),\ \text{es el tipo generado por las fórmulas}\ \{x = y, c_0 < x, c_1 < x, \ldots\}$$

Este tipo es el mismo tipo $S^2 \in S_1(T)$ de la sección anterior, es más, los tipos representados con un círculo negro, $(\bullet)$ son los tipos principales $S^{3_i}, S^{4_i} \in S_1(T)$ aislados por los básicos $[x = c_i \wedge y = c_i]$ y $[x = y \wedge (c_k < x < c_{k+1})]$ para todo $i, k \in \omega$, repectivamente. Por lo visto en el previo ejemplo, no es de extrañarnos que estos tipos principales, formen una sucesión que converja al tipo $S_\infty^{(=)}$.

Por último, los tipos diferenciados con un diamante, $(\diamond)$ son los tipos aislados por los básios: $[(x < y) \wedge (y < c_0)], [(y < x) \wedge (x < c_0)]$ y $[(x = y) \wedge (y < c_0)]$ reconocidos por $S_0^{x<y}, S_0^{y<x}$ y $S_0^{(=)}$. Este últimpo tipo, es el mismo tipo $S^1(x)$ del ejemplo anterior.

Ahora que ya hemos descrito a los diferentes tipos del espacio $S_2(T)$ el siguiente diagrama, nos ayudará a visualizar el espacio. Las flechas muestran las convergencias de los tipos principales y no principales. Adicionalmente, podemos ver que existen sucesiones no convergentes, como la sucesión $\{a_i | i \in \omega\}$ expresada en el diagrama y el hecho de que los tipos aislados de T, son densos en $S_2(T)$.

Diagrama del Espacio de Tipos, $S_2(T)$ **3.8.1.**



3.9. El espacio $S_1(T*)$, donde $T* = TODSE \cup \{\bigwedge_{i\in\omega}(c_i < c_{i+1})\}$

Consideremos a $L*$ un fragmento enumerable de la lógica $L_{\omega_1\omega}$ cuyo alfabeto es $\langle\{<\}, \{c_k | k \in \omega\}, \{x_k | k \in \omega\}, \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \bigvee, \bigwedge\}\rangle$, y consideremos a la teoría $T*$ de $L*$, cuyos axiomas son los axiomas de la TODSE más el axioma $\bigwedge_{i\in\omega}(c_i < c_{i+1})$. Así pues en términos generales, los axiomas describen a la *teoría de orden denso sin extremos con enumerables constantes ordenadas de manera ascendente*.

Aunque en cierta forma parece que los axiomas de la teoría T definida en la *Sección*

3.7 expresan lo mismo que la teoría $T*$, veamos que sus respectivos espacios de $1-$tipos difieren. En primer lugar, veamos que los únicos $1-$tipos de $S_1(T*)$ son de la siguiente forma:

1. $S^1(x) = \{\phi(x) | T* \models \forall x((x < c_0) \to \phi(x))\}$.
2. El tipo principal $S^{2_1}(x)$, generado por la $L-$fórmula
$$\bigwedge_{i\in\omega}(c_i < x) \wedge \Big(\forall y(\neg(x = y) \wedge \bigwedge_{i\in\omega}(c_i < y) \to (x < y)\Big)$$
.
3. El tipo principal $S^{2_2}(x)$, generado por la $L-$fórmula
$$\bigwedge_{i\in\omega}(c_i < x) \to \Big(\exists y(\bigwedge_{i\in\omega}(c_i < y)) \wedge (y < x)\Big)$$
.
4. $S^{3_i}(x) = \{\phi(x) | T* \models \forall x((x = c_i) \to \phi(x))\}$ para $i \in \omega$.
5. $S^{4_i}(x) = \{\phi(x) | T* \models \forall x((c_i < x) \wedge (x < c_{i+1}) \to \phi(x))\}$ para $i \in \omega$.

Para todo $i, j \in \omega$, los básicos $[(x < c_0)], [(x = c_i], [(c_j < x) \wedge (x < c_{j+1})]$ aislan a los tipos $S^1(x), S^{3_i}(x), S^{4_j}(x)$ respectivamente como ya se vió en la *Sección* 3.7.

Ahora bien, si $\mathbb{A} \models T*$, y existe un elemento $a \in A$ tal que $\mathbb{A} \models \bigwedge_{i\in\omega}(c_i < x)[a]$ entonces como $T*$ no tiene extremos, siempre existirá $b \in A$ tal que $a < b$, pero puede suceder que no exista $a' \in A$ tal que $\mathbb{A} \models \bigwedge_{i\in\omega}(c_i < x)[a']$ y $\mathbb{A} \models (x' < x)[a', a]$. De esta manera, como el lenguaje $L*$ es más expresivo que L, la región conocida por $K_2^{\mathbb{A}}$ se divide en $K_{2_1}^{\mathbb{A}} = \{a \in A | a \in K_2^{\mathbb{A}}$ y para todo $b \in K_2^{\mathbb{A}}, b \neq a, a < b\}$ y en $K_{2_2}^{\mathbb{A}} = \{a \in A | a \in K_2^{\mathbb{A}}$ existe $b \in K_2^{\mathbb{A}}, b < a\}$. Así pues, es claro que las fórmulas
$$\bigwedge_{i\in\omega}(c_i < x) \wedge \Big(\forall y(\neg(x = y) \wedge \bigwedge_{i\in\omega}(c_i < y) \to (x < y)\Big),$$
$$\bigwedge_{i\in\omega}(c_i < x) \to \Big(\exists y(\bigwedge_{i\in\omega}(c_i < y) \wedge (y < x)\Big),$$
diferencian a los elementos de K_{2_1} y de K_{2_2} respectivamente.

De acuerdo a lo anterior, todos los $1-$tipos de $T*$ son aislados, por lo que el espacio de $1-$tipos de $T*$, $S_1(T*)$, es un espacio discreto enumerable, homeomorfo al espacio de los naturales $\mathbb{N}$, vistos como subespacio de $\mathbb{R}$ con la topología del orden.

Teniendo en cuenta lo anterior, podemos ver que el espacio de $n-$tipos de $T*$ no es más que el espacio $\mathbb{N}^n$ visto como subespacio de $\mathbb{R}^n$ con la topología producto.

3.10. El Espacio de $1-$tipos de la teoría del modelo $\mathbb{A} = \langle \mathbb{R}, <, q_0, q_1, \ldots \rangle$

Sea $\mathbb{A} = \langle \mathbb{R}, <, \{q_i | i \in \omega\}, \ldots \rangle$, la estructura de los reales donde cada racional es una constante distinguida, y $\{q_i | i \in \omega\}$ es una enumeración de todos los racionales.

Consideremos al vocabulario de la estructura $\mathbb{A}$, y sea L un fragmento enumerable de $L_{\omega_1 \omega}$ en este vocabulario. Ahora bien, sea $T_L = Th(\mathbb{A})_L$ la teoría en L de la estructura $\mathbb{A}$.

Para cada racional q_i, el básico $[(x = q_i)]$ aisla al tipo $S_{\phi_i}(x)$ y es claro que si r es irracional, $S_r(x) \neq S_{q_i}(x)$ para todo $i \in \omega$, pues $(x = q_i) \in S_{q_i}(x)$ mientras que $\neg(x = q_i) \in S_r(x)$ para todo $i \in \omega$. Ahora bien si $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ son dos irracionales, sus $1-$tipos, $S_{r_1}(x), S_{r_2}(x)$, son diferentes, pues existe un $q_k, k \in \omega$, tal que $r_1 < q_k < r_2$ y por lo tanto, $\mathbb{A} \models (x < q_k)[r_1]$ y $\mathbb{A} \models \neg(x < q_k)[r_2]$. Así pues, $(x < q_k) \in S_{r_1}(x)$, $\neg(x < q_k) \in S_{r_2}(x)$ y $S_{r_1}(x) \neq S_{r_2}(x)$.

De acuerdo con esto, vemos que por cada racional e irracional hay un tipo diferente, es decir que $|S_1(T_L)| = 2^{\aleph_0} + \omega = 2^{\aleph_0}$. Ahora bien, si el espacio fuera discreto, por cada $a \in A$ se necesitaría un básico $[\phi]_a$ para aislar a su respectivo tipo, es decir que se necesitarían $2^{\aleph_0}$ fórmulas distintas para aislar a todos los $1-$tipos de T_L. Pero como L es un fragmento enumerable, entonces deben existir no enumerables tipos no principales.

Así pues para cada fragmento enumerable sabemos que hay más de enumerables tipos no principales.

Capítulo 4

Dos Teoremas de La Teoría de Modelos de $L_{\omega_1\omega}$

En este capítulo nos concentraremos en demostrar dos teoremas importantes en la teoría de modelos, el teorema de omisión de tipos, y el teorema de categorización de las teorías $\omega-$categóricas, para fragmentos enumerables de la lógica $L_{\omega_1\omega}$, utilizando las propiedades topológicas de los espacios de tipos, demostradas en el capítulo anterior.

4.1. Teorema de Omision de Tipos

Sea L un fragmento enumerable de $L_{\omega_1\omega}$, y sea T una teoría de L.

Lema 4.1.1. *Un $n-$tipo de T, $S(\bar{x})$, es no principal, si y sólo si el cerrado $\bigcap_{\phi(\bar{x})\in S(\bar{x})}[\phi(\bar{x})]_T$ es denso en ninguna parte.*

Demostración. El cerrado $F = \bigcap_{\phi(\bar{x})\in S(\bar{x})}[\phi(\bar{x})]_T$ es denso en ninguna parte si y sólo si no existe un abierto no vacío contenido en F; y esto sucede si y sólo si, no existe ningún clopen no vacío contenido en F, pues los clopens forman una base para $S_n(T)$. Ahora bien, lo anterior quiere decir que no existe $[\psi]_T$, tal que $[\psi]_T \subseteq \bigcap_{\phi(\bar{x})\in S(\bar{x})}[\phi(\bar{x})]_T$, y esto equivale a que no existe $[\psi]_T$ tal que $[\psi]_T \subseteq [\phi(\bar{x})]_T$ para toda $\phi(\bar{x}) \in S(\bar{x})$, lo cual quiere decir que el tipo $S(\bar{x})$ no es aislado y por el *Teorema* 3.5.1 esto quiere decir que $S(\bar{x})$, es no principal. $\square$

Proposición 4.1.2. *Sea $S_\omega \in S_\omega(T)$ un $\omega-$tipo de T como en la Definición 3.2.2, sea $\mathbb{A}$ un modelo de T y sea $\{a_i\}_{i\in\omega}$ una sucesión de elementos de A tales que realizan al $\omega-$tipo, S_ω. Si*

$$H = \bigcap_{i\in\omega} \bigcap_{\phi\in L_{i+1}} \bigcup_{j\in\omega} [\exists x_i \phi(\bar{x}) \rightarrow \phi(x_i/x_j)].$$

Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) $\{a_i\}_{i\in\omega}$ *es el universo de una subestructura elemental de* $\mathbb{A}$.

ii) $S_\omega \in H$.

Adicionalmente para todo $i \in \omega$ *y para cada* $\phi \in L^{i+1}$*, el conjunto* $D_{i,\phi} = \bigcup_{j\in\omega}[\exists x_i\phi(\bar{x}) \to \phi(x_i/x_j)]$ *es un denso abierto.*

Demostración. Una vez demostrado el Test de Tarski-Vaught para fragmentos enumerables de $L_{\omega_1\omega}$, la demostración es identica a la que se desarrolla en [C, CH.3, Proposición 3.6]. Por el Test de Tarski-Vaught sabemos que el hecho de que $\{a_i\}_{i\in\omega}$ sea el universo de una subestructura elemental de $\mathbb{A}$ equivale a lo siguiente:

> Sea $\phi(y,\bar{x}) \in L$ y sea $\bar{a}$ una tupla tal que $\bar{a} \in \{a_i\}_{i\in\omega}$, si $\mathbb{A} \models \exists y\phi(\bar{x})[\bar{a}]$ entonces existe $a \in \{a_i\}_{i\in\omega}$ tal que $\mathbb{A} \models \phi(y,\bar{x})[a,\bar{a}]$.
>
> Lo anterior es equivalente a decir que para todo $i \in \omega$, y cada $\phi(x_i,\bar{x}) \in L_{i+1}$, si $\mathbb{A} \models \exists x_i\phi[(a_k|k \in \omega)]$ entonces existe un $j \in \omega$ tal que $\mathbb{A} \models \phi(x_i/x_j)[(a_k|k \in \omega)]$.
>
> Como $\{a_i\}_{i\in\omega}$ es una sucesión de elementos de A tales que realizan al $\omega-$tipo, S_ω, lo anterior es equivalente a decir que para todo $i \in \omega$, y cada $\phi(x_i,\bar{x}) \in L_{i+1}$, si $\exists x_i\phi \in S_\omega$ entonces existe un $j \in \omega$ tal que $\phi(x_i/x_j) \in S_\omega$. Es decir que para algún $j \in \omega$, $(x_i\phi \to \phi(x_i/x_j)) \in S_\omega$ pues S_ω es maximal.
>
> Lo cual es equivalente a decir que para todo $i \in \omega$, y cada $\phi(x_i,\bar{x}) \in L_{i+1}$, para algún $j \in \omega$ $S_\omega \in [\exists x_i\phi \to \phi(x_i/x_j)]_T$.
>
> Y finalmente esto sucede si y sólo si $S_\omega \in H$.

Ahora bien, veamos que $\bigcup_{j\in\omega}[\exists x_i\phi \to \phi(x_i/x_j)]_T = D_{i,\phi}$ es un denso abierto:
Sea $\psi \in L$ consistente con la teoría T, veamos que $[\psi]_T \cap D_{i,\phi} \neq \emptyset$. Tomemos $j \in \omega$ tal que $i < j$ y $\psi \in L^j$ veamos que $[\psi]_T \cap [\exists x_i\phi \to \phi(x_i/x_j)]_T \neq \emptyset$:
Caso 1: Si $\psi \wedge \exists x_i\phi$ es inconsistente, como tomamos a $\psi \in L$ consistente, entonces existe una $j-$tupla, $\bar{a} \in A$ de $\mathbb{A} \models T$, tal que $\mathbb{A} \models \psi[\bar{a}]$ y se puede extender de manera arbitraria a la sucesión $(a_k|k \in \omega)$, ahora bien como $\psi \wedge \exists x_i\phi$ es inconsistente y $\mathbb{A} \models \psi[(a_k|k \in \omega)]$ entonces $\mathbb{A} \not\models \exists x_i\phi[(a_k|k \in \omega)]$ y por lo tanto, $\mathbb{A} \models \exists x_i\phi \to \phi(x_i/x_j)[(a_k|k \in \omega)]$. Así pues, $[\psi]_T \cap [\exists x_i\phi \to \phi(x_i/x_j)]_T \neq \emptyset$.
Caso 2: Si $\psi \wedge \exists x_i\phi$ es consistente, entonces existe un modelo $\mathbb{A}$ de T, tal que $\mathbb{A} \models \psi \wedge \exists x_i\phi[\bar{a}]$, por lo que existe $a \in A$ tal que $\mathbb{A} \models \phi[\bar{a},a]$, si tomamos una extensión de $\bar{a}$, $(a_k|k \in \omega)$ tal que $a_j = a$ tenemos que $\mathbb{A} \models \exists x_i\phi[\bar{a}] \to \phi(x_i/x_j)[(a_k|k \in \omega)]$. De esta manera queda demostrado que $[\psi]_T \cap [\exists x_i\phi \to \phi(x_i/x_j)]_T \neq \emptyset$ por lo que $D_{i,\phi}$ es denso y es abierto, pues es la unión de conjuntoas abiertos.

□

Proposición 4.1.3. *Sea $S(x_0, \ldots, x_{n-1})$ un $n-$tipo de T, y sea $S'(x_0, \ldots, x_{m-1})$ un $m-$tipo de T obtenido a partir de $S(x_0, \ldots, x_{n-1})$ por substitución de variables por otras variables. Ahora bien, si $S(x_0, \ldots, x_{n-1})$ es un $n-$tipo no principal, entonces $S'(x_0, \ldots, x_{m-1})$ es un $m-$tipo no principal.*

Demostración. Sea $\pi : n \to m$ una función, sea $S' = S_\pi = \{\phi_\pi | \phi \in S\}$ donde

$$\phi_\pi = \phi(x_{\pi(0)}, \ldots, x_{\pi(n-1)}), \text{ para cada } \phi \in S$$

Ahora bien, supongamo que existe $[\psi']_T$ tal que aisla a S', entonces como $S' \in [\psi]_T$, $\psi' \in S'$ lo que quiere decir que existe una fórmula de L_n, $\psi \in S$ tal que $\psi_\pi = \psi'$. Así pues, el clopen

$$[\psi \wedge (\bigwedge_{i<j<n, \pi(i)=\pi(j)} [x_i = x_j])]$$

aisla a S. De esta manera, vemos que si $S(x_0, \ldots, x_{n-1})$ es un $n-$tipo no principal, entonces $S'(x_0, \ldots, x_{m-1})$ es un $m-$tipo no principal, como se quería. □

Teorema de Omisión de Tipos 4.1.4. *Sea L un fragmento enumerable de $L_{\omega_1\omega}$. Sea T una teoría de L y sea P_n un conjunto enumerable de $n-$tipos no principales de T, entonces existe un modelo $\mathbb{B}$ enumerable de T tal que omite a todos los tipos de $\bigcup_{n\in\omega} P_n$.*

Demostración. Supongamos que $\bigcup_{n\in\omega} P_n$ es inicialmente cerrado bajo substitución dado que por el *Lema* 4.1.3 sabemos que al cerrarlo bajo sustitución, seguimos teniendo un conjunto enumerable de tipos no principales. Ahora bien, sea $n \in \omega$ y sea $S \in P_n$ un $n-$tipo no principal, por el *Lema* 4.1.1 sabemos que $\bigcap_{\phi\in S}[\phi]$ es un conjunto denso en ninguna parte del espacio de $n-$tipos, $S_n(T)$. Al considerar la función abierta y continua, $f : S_\omega(T) \to S_n(T)$, de la *Proposición* 3.2.4 y el hecho de que $\bigcap_{\phi\in S}[\phi]_n$ es cerrado, tenemos que $f^{-1}(\bigcap_{\phi\in S}[\phi]_n) = \bigcap_{\phi\in S}[\phi]_\omega$ es también cerrado, pues f es continua. Más aun, como f es una función abierta, $\bigcap_{\phi\in S}[\phi]_\omega$ es denso en ninguna parte, pues de no serlo así, si existe $[\psi] \subset \bigcap_{\phi\in S}[\phi]_\omega$ abierto no vacío en S_ω y $f([\psi]) \neq \emptyset$ sería abierto en $\bigcap_{\phi\in S}[\phi]_n$, contradiciendo el hecho de que $\bigcap_{\phi\in S}[\phi]_n$ es denso en ninguna parte. Así pues, $\bigcup_{\phi\in S}[\neg\phi]_\omega$ es un denso abierto en $S_\omega(T)$.

De esta manera, el conjunto $H \cap \left(\bigcap_{n\in\omega} \bigcap_{S\in P_n} \bigcup_{\phi\in S}[\neg\phi]_\omega\right)$, donde H es el conjunto definido en la *Proposición* 4.1.2, es la intersección de una familia enumerable de abiertos densos, en un espacio topológicamente completo $S_\omega(T)$, por lo que por el *Teorema de Categoría de Baire* existe un $\omega-$tipo, $S' \in S_\omega(T)$, tal que $S' \in H \cap \left(\bigcap_{n\in\omega} \bigcap_{S\in P_n} \bigcup_{\phi\in S}[\neg\phi]_\omega\right)$. Por otro lado, si $\{a_i\}_{i\in\omega}$ es una sucesión de elementos de un modelo $\mathbb{A}$ de T que realiza al tipo S', entonces de acuerdo con la *Proposición* 4.1.2, $\{a_i\}_{i\in\omega}$ es el universo de una subestructura elemental $\mathbb{B}$ de $\mathbb{A}$.

Siguiendo este orden de ideas, mostraremos que $\mathbb{B}$ es un modelo que omite a todos lo tipos de $\bigcup_{n\in\omega} P_n$. Supongamos por contradicción que existe un $n-$tipo de T, $S_n(x_0,\ldots,x_{n-1}) \in P_n$ tal que la $n-$tupla $a_{i_0},\ldots,a_{i_{n-1}} \subset \{a_i\}_{i\in\omega}$ realiza a $S_n(x_0,\ldots,x_{n-1})$. Ahora bien, al aplicar una permutación de variables adecuada π, encontramos que la $m-$tupla $a_0, a_1, \ldots, a_{i_k}$, donde $i_k = max\{i_0,\ldots,i_{n-1}\}$ y $m = i_k + 1$ realiza al tipo $S_n(x_{\pi(0)},\ldots,x_{\pi(n-1)})$, donde la permutación adecuada $\pi : n \to m$ es tal que $\pi(j) = i_j$, para $j < n$. Así pues, la $m-$tupla $a_0, a_1, \ldots, a_{i_k}$ realiza al tipo $S_n(x_{i_0},\ldots,x_{i_(n-1)})$. Sin embargo, para toda fórmula $\phi(\bar{x}) \in S_n(x_{\pi(0)},\ldots,x_{\pi(n-1)})$ se tiene que
$\mathbb{B} \models \phi(\bar{x})[a_0,\ldots,a_{i_k}]$ por lo que $\phi(\bar{x}) \in S'$, pues $\{a_i\}_{i\in\omega}$ realiza a S', y por ende $S' \in [\phi(\bar{x})]_\omega$ para toda $\phi(\bar{x}) \in S_n(x_{\pi(0)},\ldots,x_{\pi(n-1)})$, lo cual contradice que $S' \in H \cap \left(\bigcap_{n\in\omega}\bigcap_{S\in P_n}\bigcup_{\phi\in S}[\neg\phi]_\omega\right)$. De esta manera, queda demostrado el teorema.

$\square$

4.2. Caracterización de Teorías $\omega-$Categóricas

Definición 4.2.1. *Sea κ un cardinal infinito. Una teoría T es $\kappa-$categórica si para todos $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ tales que $\mathbb{A} \models T$, $\mathbb{B} \models T$ y $|\mathbb{A}| = |\mathbb{B}| = \kappa$, entonces $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ son isomorfos, $\mathbb{A} \simeq \mathbb{B}$.*

Teorema 4.2.2. *Sea L un fragmento enumerable de $L_{\omega_1\omega}$, y sea T una teoría completa de L con modelos infinitos. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) La teoría T es $\omega-$categórica.

b) Para todo $n \in \omega$, el espacio de tipos $S_n(T)$ es un espacio discreto.

Ahora bien, si adicionalmente el fragmento L es compacto entonces las afirmaciones c) y d) son equivalentes a las afirmaciones a) y b.

c) $|S_n(T)| < \omega$.

d) Para todo $n \in \omega$, el álgebra de Lindenbaüm de T en L_n es finita, $|\mathcal{A}_n(T)| < \omega$.

Demostración.
"$a) \Rightarrow b)$"Supongamos que T es una teoría $\omega-$categórica y supongamos buscando una contradicción que existe $n \in \omega$ y $S(\bar{x}) \in S_n(T)$ tal que $S(\bar{x})$ es un tipo no principal. Por un lado, sabemos que existe un modelo enumerable tal que $\mathbb{A} \models T \cup S(\bar{x})$, es decir que hay una tupla $\bar{a} \in A^n$ tal que realiza al tipo $S(\bar{x})$.

Por otro lado, por el *Teorema de omisión de tipos* existe un modelo enumerable $\mathbb{B} \models T$ que omite al tipo $S(\bar{x})$. Es decir que para cualquier tupla de elementos de $\mathbb{B}$, $\bar{b} \in B^n$ existe una fórmula $\phi(\bar{x}) \in S(\bar{x})$ tal que $\mathbb{B} \models \neg\phi(\bar{x})[\bar{b}]$.

Ahora bien, puesto que T es $\omega-$categórica, $\mathbb{A} \simeq \mathbb{B}$, por lo que existe un isomorfismo $h : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$, tal que para toda $\phi(\bar{\mathrm{x}}) \in L_n, \mathbb{A} \models \phi(\bar{\mathrm{x}})[\bar{\mathrm{a}}]$ si y sólo si $\mathbb{B} \models \phi(\bar{\mathrm{x}})[h(\bar{\mathrm{a}})]$. En especial para toda fórmula $\psi(\bar{\mathrm{x}}) \in S(\bar{\mathrm{x}})$, si $\mathbb{A} \models \psi(\bar{\mathrm{x}})[\bar{\mathrm{a}}]$ entonces $\mathbb{B} \models \psi(\bar{\mathrm{x}})[h(\bar{\mathrm{a}})]$. De acuerdo a lo expuesto anteriormente sabemos que existe una $n-$tupla $\bar{a} \in A^n$ tal que realiza a todas las fórmulas de $S(\bar{x})$ por lo que la $n-$tupla $h(\bar{a}) \in B^n$ debe realizar al tipo $S(\bar{x})$, lo cual contradice el hecho de que $\mathbb{B}$ omite a $S(\bar{x})$.

De esta manera hemos demostrado que los elementos del espacio de tipos $S_n(T)$ son todos tipos principales y por el *Teorema* 3.5.1 sabemos que todos los tipos de $S_n(T)$ son aislados, es decir que el espacio es discreto.

"$b) \Rightarrow a)$" Supongamos que para todo $n \in \omega$, $S_n(T)$ es un espacio discreto, y sea $S(\bar{x})$ un $n-$tipo de $S_n(T)$ entonces existe una L_n-fórmula $\phi(\bar{x})$ que aisla a $S(\bar{x})$ y por el *Teorema* 3.5.1, $S(\bar{x}) = \{\psi(\bar{x}) | T \models \forall \bar{x}(\phi(\bar{x}) \to \psi(\bar{x}))\}$, es decir $\phi(\bar{x})$ genera a $S(\bar{x})$.

Ahora demostraremos que si $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ son dos modelos enumerables de T, cuyos universos son $A = \{a_i | i \in \omega\}$ y $B = \{b_i | i \in \omega\}$, y $\{x_i | i \in \omega\}$ es una enumeración de las variables de L entonces $\mathbb{B} \simeq \mathbb{A}$: Tomemos al elemento $a_0 = u_0$ y sea $\phi_0(x_0)$ el generador del tipo que realiza a_0, $S^0(x_0)$, ahora bien, como $\mathbb{A} \equiv_L \mathbb{B}$ y $\mathbb{A} \models \exists x \phi_0(x)$ entonces $\mathbb{B} \models \exists x \phi_0(x)$, sea w_0 el mínimo $b_j \in \{b_i | i \in \omega\}$ tal que $\mathbb{B} \models \exists x \phi_0(x)[b_j]$. Ahora bien, sea w_1 el mínimo $b_j \in \{b_i | i \in \omega\}$ tal que $b_j \neq w_0$, y consideremos el generador $\phi_1(x_0, x_1)$ del tipo que realiza la tupla $w_0, w_1 \in B^2$, $S^1(x_0, x_1)$. Como $\mathbb{B} \models \exists x_1 \phi_1(x_0, x_1)[w_0]$, entonces $\mathbb{A} \models \exists x_1 \phi_1(x_0, x_1)[u_0]$ y llamamos u_1 al mínimo $a_j \in \{a_i | i \in \omega\}$ tal que $\mathbb{A} \models \exists x \phi_{w_0}(x_0, x_1)[u_0, a_j]$.

Ahora bien, supongamos que se han construido las tuplas $\{u_0, \ldots, u_n\}$, $\{w_0, \ldots, w_n\}$ tales que $\langle \mathbb{A}; u_0, \ldots, u_n \rangle \equiv_L \langle \mathbb{B}; w_0, \ldots, w_n \rangle$, tenemos entonces dos casos:

$\underline{n = 2k+1, \text{ para algún } k \in \omega}$: Tomamos a u_{n+1} como el mínimo $a_j \in \{a_i | i \in \omega\}$ tal que $a_j \neq u_m$ para toda $m = 0, \ldots, n$. Sea $S^{n+1}(x_0, \ldots, x_{n+1})$ el tipo realizado por $u_0, \ldots, u_{n+1}$ en $\mathbb{A}$ y sea $\phi_{n+1}(x_0, \ldots, x_{n+1})$ su respectivo generador.
Como $\mathbb{A} \models \exists x_{n+1} \phi_{n+1}(x_0, \ldots, x_{n+1})[u_0, \ldots, u_n]$ entonces $\mathbb{B} \models \exists x_{n+1} \phi_{n+1}(x_0, \ldots, x_{n+1})[w_0, \ldots, w_n]$. Sea entonces w_{n+1} el mínimo $b_j \in \{b_i | i \in \omega\} - \{w_0, \ldots, w_n\}$ tal que satisface a la fórmula $x_{n+1} \phi_{n+1}(x_0, \ldots, x_{n+1})[w_0, \ldots, w_n]$. Así pues, $\langle \mathbb{A}; u_0, \ldots, u_{n+1} \rangle \equiv_L \langle \mathbb{B}; w_0, \ldots, w_{n+1} \rangle$.

$\underline{n = 2k, \text{ para algún } k \in \omega}$: La demostración es análoga a la anterior, pero se hace tomando un elemento w_{n+1} en $\mathbb{B}$ y le encontramos un elemento u_{n+1} en $\mathbb{A}$. Así pues, se obtienen las sucesiones $\{u_i | i \in \omega\}$ y $\{w_i | i \in \omega\}$ tales que

$$\langle \mathbb{A}; \{u_i | i \in \omega\} \rangle \equiv_L \langle \mathbb{B}; \{w_i | i \in \omega\} \rangle.$$

y la función $h : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ tal que $h(u_i) = w_i$ está bien definida, pues la función mínimo también está. Adicionalmente h es un isomorfismo, pues:

- $\star$ Si $a_i, a_j \in A, i \neq j$ entonces $a_i = u_s$ y $a_j = u_r$ con $r \neq s$. Si $r < s$ entonces $h(u_r) = w_r$ y $h(u_s) = w_s$ y sabemos que w_s está en $\{b_i | i \in \omega\} - \{w_0, \ldots, w_{r-1}\}$, así pues, $w_r \neq w_s$. Por lo que h es una función uno-uno.

- $\star$ Si $b_j \in B$ entonces $b_j = w_s$ para algún $s \leq j$, esto se tiene por la manera en la que se escogen los w_i, y claramente $h(u_s) = b_j$. Una demostración ánaloga garantiza que el dominio de h es todo A.

- $\star$ De acuerdo a la construcción, para todo $n \in \omega$ si $a_{m_0}, \ldots, a_{m_n} \in A$,
$\mathbb{A} \models \psi(x_{i_0}, \ldots, x_{i_n})[a_{m_0}, \ldots, a_{m_n}]$ si y sólo si $\mathbb{A} \models \psi(x_{i_0}, \ldots, x_{i_n})[u_{i_0}, \ldots, u_{i_n}]$ donde $u_{i_j} = a_{m_j}, \forall j = 0, ..., n$. Ahora bien, esto sucede si y sólo si
$\mathbb{A} \models \psi(x_0, \ldots, x_{i_k})[u_0, \ldots, u_{i_k}]$, donde $i_k \geq i_j$, para todo $j = 0, ..., n$, pues la fórmula solamente habla de las variables $\{x_{i_0}, \ldots, x_{i_n}\}$. Ahora bien, por la construcción, sabemos que esto es equivalente a que
$\mathbb{B} \models \psi(x_0, \ldots, x_{i_k})[w_0, \ldots, w_{i_k}]$, y esto sucede si y sólo si
$\mathbb{B} \models \psi(x_{i_0}, \ldots, x_{i_n})[w_{i_0}, \ldots, w_{i_n}]$ pues la fórmula solamente habla de las variables $\{x_{i_0}, \ldots, x_{i_n}\}$ y por ende, equivale a que $\mathbb{B} \models \psi(x_{i_0}, \ldots, x_{i_n})[h(a_{m_0}), \ldots, h(a_{m_n})]$ como se quería.

Ahora bien, supongamos que el lenguage L es un fragmento compacto, entonces se puede afirmar lo siguiente:

"$b) \Rightarrow c)$" Sea $S_n(T)$ un espacio discreto, y sea $\{[\phi(\bar{x})]_T | \phi(\bar{x})$ genera a algún $n-$tipo $S(\bar{x})\}$ un recubrimiento de $S_n(T)$, como el espacio es un espacio compacto, entonces existe un sub recubrimiento finito. Así pues, sólo pueden haber finitos $n-$tipos en $S_n(T)$.

"$c) \Rightarrow d)$" Sea $n \in \omega$, como $S_n(T)$ es finito, entonces su base $\mathfrak{B}$ también es finita, pues $\mathfrak{B} \subseteq P(S_n(T))$ y $P(S_n(T)) = 2^{|S_n(T)|}$, por lo que $|\mathfrak{B}| \leq 2^{|S_n(T)|}$, ahora bien por la dualidad de Stone[1], sabemos que $\mathfrak{B}$ es isomorfa al álgebra de Lindenbaüm de T en L_n. Así pues, $|\mathcal{A}_n(T)| < \omega$.

"$d) \Rightarrow b)$" Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro del álgebra de Lindenbaüm $\mathcal{A}_n(T)$, puesto que $\mathcal{A}_n(T)$ es finita, entonces $\overline{[a]}_T = \bigwedge_{[\phi]^{\equiv_T} \in \mathcal{U}} [\phi]^{\equiv_T}] = \overline{[\bigwedge_{[\phi]^{\equiv_T} \in \mathcal{U}} \phi]}_T$. Ahora bien, sea $[\phi]^{\equiv_T} \in \mathcal{U}$, claramente $\overline{[a]}_T \subseteq [\phi]^{\equiv_T}$ por lo que $\overline{[a]}_T$ es el generador del ultrafiltro $\mathcal{U}$. De esta manera, para todo $n \in \omega$ todos los ultrafiltros de $\mathcal{A}_n(T)$ son principales y por ende todos los $n-$tipos de $S_n(T)$ son aislados, por lo que $S_n(T)$ es un espacio discreto como buscabamos.

$\square$

[1]Consultar Apéndice A.4

Asi pues, hemos visto cómo el hecho de que los espacios de tipos sean topológicamente completos hace que el teorema de omisión de tipos sea válido para fragmentos enumerables de la lógica $L_{\omega_1\omega}$, adicionalmente vimos que si T es una teoría de L, siendo L un fragmento enumerable de $L_{\omega_1\omega}$, el espacio de $n-$tipos de T, $S_n(T)$ es un espacio discreto si y sólo si T es una teoría $\omega-$categórica.

4.3. Aplicación del Teorema de Caracterización de Teorías $\omega-$categóricas en $L_{\omega_1\omega}$

Es un resultado conocido que la teoría $T = TODSE \cup \{c_i < c_{i+1} | i \in \omega\}$ de la lógica de primer orden, estudiada en la *Sección* 3.7 es una teoría completa. Ahora bien, como vimos que el espacio de $1-$tipos, es homeomorfo al espacio $\{1 - \frac{1}{n}\}_{n\in\omega-\{0\}} \cup \{1\}$ con la topología del subespacio heredada de $\mathbb{R}$, y la lógica de primer orden es un fragmento enumerable de $L_{\omega_1\omega}$. Como una aplicación del teorema anterior, dado que el espacio $S_n(T)$ no es discreto, podemos decir que la teoría no es $\omega-$categórica.

Por otro lado, aunque todos los espacios de $n-$tipos de la teoría $T*$ definida en la *Sección* 3.8 son espacios discretos, la teoría no es $\omega-$categórica pues la teoría $T*$ no es completa con respecto a $L*$.

Sin embargo, podemos completar la teoría de tres formas diferentes:

* $T_1* = T * \cup \{\exists x\Big(\bigwedge_{i\in\omega}(c_i < x) \wedge \forall y(\neg(x = y) \wedge \bigwedge_{i\in\omega}(c_i < y) \rightarrow (x < y))\Big)$. Si $\mathbb{A} \models T_1*$, la teoría dice que el conjunto de constantes $\{c_i^{\mathbb{A}}\}_{i\in\omega}$ está acotado y el supremo está en el modelo.
* $T_2* = T * \cup \{\exists x(\bigwedge_{i\in\omega}(c_i < x)), \forall x\Big(\bigwedge_{i\in\omega}(c_i < x) \rightarrow \exists y\big(\bigwedge_{i\in\omega}(c_i < y) \wedge (y < x)\big)\Big)$. Si $\mathbb{A} \models T_2*$, la teoría dice que el conjunto de constantes $\{c_i^{\mathbb{A}}\}_{i\in\omega}$ está acotado pero el supremo no está en el modelo.
* $T_3* = T * \cup \{\neg\exists x(\bigwedge_{i\in\omega}(c_i < x))\}$. La teoría dice que el conjunto $\{c_i^{\mathbb{A}}\}_{i\in\omega}$ no se encuentra acotado.

Así pues, los tipos de $S_1(T_1*)$ son los siguientes:

$S^1(x) = \{\phi(x) | T_1* \models \forall x((x < c_0) \rightarrow \phi(x))\}$.

El tipo principal $S^{2_1}(x)$, generado por la $L-$fórmula:

$$\bigwedge_{i\in\omega}(c_i < x) \wedge \Big(\forall y(\neg(x = y) \bigwedge_{i\in\omega}(c_i < y) \rightarrow (x < y))\Big)$$

. El tipo principal $S^{2_2}(x)$, generado por la $L-$fórmula:

$$\bigwedge_{i\in\omega}(c_i < x) \to \Big(\exists y(\bigwedge_{i\in\omega}(c_i < y)) \wedge (y < x)\Big)$$

$S^{3_i}(x) = \{\phi(x)|T_1{*} \models \forall x((x = c_i) \to \phi(x))\}$ para $i \in \omega$.

$S^{4_i}(x) = \{\phi(x)|T_1{*} \models \forall x((c_i < x) \wedge (x < c_{i+1}) \to \phi(x))\}$ para $i \in \omega$.

Los tipos de $S_1(T_2{*})$ son los siguientes:

$S^1(x) = \{\phi(x)|T_2{*} \models \forall x((x < c_0) \to \phi(x))\}$.

El tipo principal $S^2(x)$, generado por la $L-$fórmula:

$$\bigwedge_{i\in\omega}(c_i < x) \to \Big(\exists y(\bigwedge_{i\in\omega}(c_i < y)) \wedge (y < x)\Big)$$

.

$S^{3_i}(x) = \{\phi(x)|T_2{*} \models \forall x((x = c_i) \to \phi(x))\}$ para $i \in \omega$.

$S^{4_i}(x) = \{\phi(x)|T_2{*} \models \forall x((c_i < x) \wedge (x < c_{i+1}) \to \phi(x))\}$ para $i \in \omega$.

Y por último, los tipos de $S_1(T_3{*})$ son los siguientes:

$S^1(x) = \{\phi(x)|T_3{*} \models \forall x((x < c_0) \to \phi(x))\}$.

$S^{3_i}(x) = \{\phi(x)|T_3{*} \models \forall x((x = c_i) \to \phi(x))\}$ para $i \in \omega$.

$S^{4_i}(x) = \{\phi(x)|T_3{*} \models \forall x((c_i < x) \wedge (x < c_{i+1}) \to \phi(x))\}$ para $i \in \omega$.

Así pues, para cada n, y para cada teoría, $T_1{*}, T_2{*}, T_3{*}$, los espacios de $n-$tipos de las teorías son homeomorfos a $\mathbb{N}^n$ visto como subespacio de $\mathbb{R}^n$, y por lo tanto son espacios discretos. Podemos entonces concluir que cada una de las teorías es $\omega-$categórica.

Por último, podemos ver que para todo fragmento enumerable L la teoría T_L definida en la *Sección 3.10* no es $\omega-$categórica, pues ya vimos que su espacio de $1-$tipos tiene tipos no aislados, y por ende $S_1(T_L)$ no es un espacio discreto.

Capítulo 5

El Rango de Cantor-Bendixon y el Rango de Morley

En este capítulo definimos el rango y el grado de Cantor-Bendixon, y estudiamos su relación con el rango y el grado de Morley. Adicionalmente demostramos por métodos topológicos que si una teoría es $\omega-$estable entonces es $\kappa-$estable para todo cardinal $\kappa > \omega$.

5.1. Rango de Cantor-Bendixon

Sea $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ un espacio topológico, sea $A \subseteq X$ y sea $x \in X$. Si para toda $U \subseteq X$ vecindad de x, $U \cap (A - \{x\}) \neq \emptyset$ decimos que x es **punto límite de** A, adicionalmente denotamos por $A' = \{x \in A |\ x \text{ es punto límite de } A\}$.

Definición 5.1.1. *Sea $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ un espacio topológico. Definimos de manera inductiva para todo ordinal α, la $\alpha-$**derivada de Cantor-Bendixon**, X^α:*

* $X^0 = X$.
* $X^{\alpha+1} = (X^\alpha)'$.
* $X^\alpha = \bigcap_{\beta<\alpha} X^\beta$, *para α ordinal límite.*
* $X^\infty = \bigcap_\alpha X^\alpha$

A modo de observación, notemos que $X^0 \supseteq X^1 \supseteq \ldots \supseteq X^\alpha \supseteq X^{\alpha+1} \supseteq \ldots \supseteq X^\infty$.

Adicionalmente se define el rango de Cantor-Bendixon para elementos y conjuntos de un espacio topológico $\langle X, \mathcal{T} \rangle$:

Definición 5.1.2. *Sea $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ un espacio topológico. Definimos el* ***rango de Cantor-Bendixon de*** *$x \in X$, $CBR(x)$ de la siguiente manera:*

- *Si $x \in X^{\infty}$, $CBR(x) = \infty$.*
- *Si $x \notin X^{\infty}$, existe un ordinal α tal que $x \in X^{\alpha}$ y $x \notin X^{\alpha+1}$. De acuerdo con esto, $CBR(x) = \alpha$.*

Ahora bien, definimos el rango de Cantor-Bendixon para un subconjunto Y de X, $CBR(Y)$ de la siguiente manera:

- *Si $Y = \emptyset$, $CBR(Y) = -1$.*
- *Si $Y \cap X_{\beta} \neq \emptyset$ para todo ordinal β, decimos que $CBR(Y) = \infty$.*
- *Si $CBR(Y) \neq -1$ y $CBR(Y) \neq \infty$, definimos $CBR(Y) = sup_{x \in Y}\{CBR(x)\}$.*

Ahora bien, si el espacio $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ es un espacio compacto, el rango de Cantor-Bendixon para un conjunto cerrado se puede redefinir de la siguiente forma:

Proposición 5.1.3. *Sea $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ un espacio topológico* ***compacto*** *y sea $C \subseteq X$ un conjunto cerrado no vacío.*

Para todo ordinal α, y para $\alpha = \infty$, $CBR(C) = \alpha$, si y sólo si existe un elemento $x \in C$ tal que $CBR(x) = \alpha$ y x satisface que $\forall y \in C, CBR(x) \geq CBR(y)$, es decir que x tiene rango máximo.

Demostración. Si α es un ordinal y $CBR(C) = \alpha$ entonces $\alpha = sup_{x \in X}\{CBR(x)\}$. Ahora bien, si α es un ordinal sucesor, $sup_{x \in X}\{CBR(x)\} = \alpha$ si y sólo si $C \cap X^{\alpha} \neq \emptyset$ y $C \cap X^{\alpha+1} = \emptyset$ que es lo que queríamos.

Por otro lado, si α es un ordinal límite y $sup_{x \in X}\{CBR(x)\} = \alpha$, entonces $C \cap X^{\beta} \neq \emptyset, \forall \beta < \alpha$ y $C \cap X^{\alpha+1} = \emptyset$, enonces la familia $\mathfrak{C} = \{C\} \cup \{\{X_{\beta}\} | \beta < \alpha\}$ de cerrados cumple **pif**, y por ende $C \cap (\bigcap_{\beta < \alpha} X^{\beta}) = C \cap X^{\alpha} \neq \emptyset$, así existe un $x \in C$ tal que $CBR(x) \geq \alpha$ y $\forall y \in C, CBR(x) \geq CBR(y)$. De hecho, $CBR(x) = \alpha$ pues de lo contrario $(C \cap X^{\alpha+1} \neq \emptyset)$ y $CBR(C) = \alpha + 1$. El resultado recíproco se cumple de manera inmediata.

Por último, si $\alpha = \infty$, y si $CBR(C) = \infty$, entonces $C \cap X^{\beta} \neq \emptyset$ para todo ordinal β, y como $X^0 \supseteq X^1 \supseteq \ldots \supseteq X^{\beta} \supseteq X^{\beta+1} \supseteq \ldots$ es una cadena de cerrados, entonces $\mathfrak{C} = \{C\} \cup (\bigcup_{\beta}\{X^{\beta}\})$ es una familia de conjuntos cerrados que cumple **pif**. De acuerdo con esto, $C \cap (\bigcap_{\beta} X^{\beta}) = C \cap X^{\infty} \neq \emptyset$, por lo que existe $x \in C$ tal que $CBR(x) = \infty$. $(\Leftarrow)$ El recíproco es un resultado inmediato. $\square$

5.2. Grado de Cantor-Bendixon

Ahora bien es natural preguntarse por el tamaño de los conjuntos X^β para un ordinal β determinado, en particular es interesante cuestionarse acerca del cardinal de X^β tal que $CBR(X) = \beta$. De acuerdo con esto, definimos al grado de Cantor-Bendixon para subconjuntos cerrados de X:

Definición 5.2.1. *Sea $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ un espacio topológico y sea $C \subseteq X$ un cerrado. Definimos de manera natural al* ***grado de Cantor-Bendixon de C*** *como $CBD(C) = |C \cap X^\alpha|$ para $\alpha = CBR(C)$.*

Si X no es un espacio compacto y $C \subseteq X$ es un conjunto cerrado, puede suceder que $CBR(C) = \alpha$ y $CBD(C) = 0$, más aun puede suceder que $CBR(C) = \alpha$ y $CBD(C) = \omega$. Sin embargo, si $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ es un espacio **compacto** y $CBR(C) = \alpha$, el grado de Cantor-Bendixon de C siempre será un número entero positivo. Ahora bien esto es un resultado inmediato del conocido teorema que dice que si A es un conjunto compacto y $A' = \emptyset$ entonces A es un conjunto finito. De acuerdo con esto, dado que $C \cap X^\alpha$ es compacto y $(C \cap X^\alpha)' = C \cap X^{\alpha+1} = \emptyset$, entonces $CBD(C) = |C \cap X^\alpha| = n$ con $n \in \mathbb{N}$.

5.3. Ejemplo

Demostraremos que para todo ordinal $\alpha < \omega_1$ existe un subconjunto X_α, del intervalo $[0, 1]$ tal que el rango de Cantor-Bendixson de X es $CBR(X) = \alpha$.

Teorema 5.3.1. *Considere el intervalo $[0, 1]$ con la topología del orden, y sea α un ordinal tal que $\alpha < \omega_1$. Entonces existe un conjunto $X_\alpha \subseteq [0, 1]$ tal que $CBR(X_\alpha) = \alpha$ y tal que $(X_\alpha)^\alpha = \{1\}$.*

Demostración. Vamos a demostrarlo, haciendo inducción sobre ordinales.

Paso base: ($\alpha = 0$). Basta tomar $X_0 = \{1\}$.

Hipótesis de Inducción: Supongamos que para todo ordinal $\beta < \alpha$, existe $X_\beta \subseteq [0, 1]$ tal que $CBR(X_\beta) = \beta$, y $(X_\beta)^\beta = \{1\}$.

Paso sucesor: ($\alpha = \beta + 1$). Considere una sucesión $\{q_n | n \in \omega\}$ estrictamente creciente que converge a 1. Dado $[q_i, q_{i+1}]$, existe un homeomorfismo $f : [0, 1] \longrightarrow [q_i, q_{i+1}]$. De esta manera, existe una copia $X_{\beta,i} \subseteq [q_i, q_{i+1}]$ homeomorfa a X_β tal que $(X_{\beta,i})^\beta = \{q_{i+1}\}$, para cada $i \in \omega$.

Ahora bien, sea

$$X_{\beta+1} := \bigcup_{i\in\omega} X_{\beta,i} \cup \{1\}.$$

Veamos que $(X_\alpha)^\alpha = \{1\}$.

En primera instancia, $(X_\alpha)^\beta = \{q_i | i \in \omega - \{0\}\} \cup \{1\}$, pues para cada $X_{\beta,i}$, $(X_{\beta,i})^\beta = \{q_{i+1}\}$ y $\{q_i | i \in \omega - \{0\}\} \to 1$. De acuerdo con esto, cada q_i se puede aislar en $(X_\alpha)^\beta$, por el abierto $\left(\frac{q_i+q_{i-1}}{2}, \frac{q_i+q_{i+1}}{2}\right) \cap (X_\alpha)^\beta$. De esta manera, $(X_\alpha)^\alpha = \{1\}$ y $CBR(X_\alpha) = \alpha$.

Paso límite: (α es un ordinal límite enumerable). Sea $\{q_\beta | \beta < \alpha\} \subseteq [0, 1]$ una sucesión creciente tal que para todo racional $r \in \mathbb{Q}, r \neq 1$ existe q_β, $r < q_\beta$, y para todo $\beta < \alpha, q_\beta \neq 1$. Es decir que el 1 es punto límite de $\{q_\beta | \beta < \alpha\}$.

Ahora bien, como en el paso sucesor, para cada ordinal $\beta < \alpha$, existe un conjunto $X_{\beta,\beta}$ homeomorfo a X_β en el intervalo $[q_\beta, q_{\beta+1}]$ tal que $(X_\beta)^\beta = \{q_{\beta+1}\}$.

Consideremos al conjunto

$$X_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} X_{\beta,\beta} \cup \{1\}.$$

Ahora bien, para $\kappa < \alpha$, el espacio $(X_\alpha)^\kappa$ contiene al conjunto $\{q_\beta | \kappa < \beta\}$, y como α es un ordinal límite, este conjunto no es finito. Así pues, $\{q_i : i \geq \beta\}$ es una subsucesión de $\{q_\beta : \beta \in \alpha\}$, por lo que tiene como punto límite al 1, y por lo tanto $1 \in (X_\lambda)^\beta$.

Así, $1 \in \bigcap_{\beta<\alpha} (X_\alpha)^\beta = (X_\alpha)^\alpha$, como queríamos. □

5.4. El Rango de Cantor Bendixon y Espacios Booleanos

En esta sección, estudiamos ciertas propiedades de los espacios booleanos y en particular su rango de Cantor-Bendixon, pues estos espacios se comportan de manera especial. En primer lugar, si X no es un espacio T_1, $CBR(X)$ siempre será igual a infinito, pues por lo menos, existen dos puntos $x, y \in X$ que no se pueden aislar el uno del otro, y por ende $x, y \in X^\alpha, \forall\alpha$. Ahora bien, el espacio de tipos de una teoría T de la lógica de primer orden es un espacio booleano, así pues los resultados expuestos a continuación nos ayudarán a demostrar que si una teoría T es $\omega-$estable, entonces es $\kappa-$estable para todo $\kappa > \omega$.

En adelante, L denotará a a un fragmento enumerable de la lógica de primer orden.

Lema 5.4.1. *Sea $\langle X, \mathcal{T}\rangle$ un espacio booleano tal que tiene una base $\mathfrak{B}$ infinita de clopens. Si $\exists b \in \mathfrak{B}$ tal que $|b| > |\mathfrak{B}|$ entonces existen $b_0, b_1 \in \mathfrak{B}$ tales que $b_0 \cap b_1 = \emptyset, b_0 \cup b_1 = b$ y $|b_0| > |\mathfrak{B}|, |b_1| > |\mathfrak{B}|$.*

Demostración. Veamos que existe $b_* \in \mathfrak{B}$ tal que $|b_* \cap b| > |\mathfrak{B}|$, y $|b_*^c \cap b| > |\mathfrak{B}|$. De existir dicho b_*,como $\mathfrak{B}$ es un álgebra booleana entonces $b_* \cap b, b_*^c \cap b \in \mathfrak{B}$ y por ende $(b_* \cap b) \cap (b_*^c \cap b) = \emptyset, (b_* \cap b) \cup (b_*^c \cap b) = b$.

Ahora bien, sean $C = \{x \in b | \exists b' \in \mathfrak{B}, x \in b'$ y $|b \cap b'| \leq |\mathfrak{B}|\}$ y $D = \{b' \in \mathfrak{B} | b' \neq \emptyset$ y $|b \cap b'| \leq |\mathfrak{B}|\}$. Claramente $C \subseteq b$, si $C = b$ entonces $b \subseteq \bigcup_{b' \in D}(b' \cap b)$ y $|b| \leq |\bigcup_{b' \in D}(b' \cap b)| \leq |D| \cdot sup_{\{b' \in D\}}|(b' \cap b)| \leq |D| \cdot |\mathfrak{B}| \leq |\mathfrak{B}| \cdot |\mathfrak{B}| = |\mathfrak{B}|$, lo cual contradice el hecho de que $|b| > |\mathfrak{B}|$.

De acuerdo con esto, existen al menos dos elementos $x, y \in b - C$, pues de lo contrario si sólo hay un elemento x en $b - C$, entonces $|b - \{x\}| \leq |\bigcup_{b' \in D}(b' \cap b)| \leq |\mathfrak{B}|$ y por ende $|b| \leq |\mathfrak{B}|$ pues $\mathfrak{B}$ es una base infinita. Así pues, como X es un espacio de Hausdorff, existe $b_* \in \mathfrak{B}$ tal que $x \in (b_* \cap b)$, $y \in (b_*^c \cap b)$ y como $(b_* \cap b), (b_*^c \cap b)$ son básicos entonces $|b_* \cap b| > |\mathfrak{B}|$, $|b_*^c \cap b| > |\mathfrak{B}|$ pues de lo contrario $x, y \in D$. □

Teorema 5.4.2. *Sea $\langle X, \mathcal{T}\rangle$ un espacio booleano con una base infinita de clopens $\mathfrak{B}$. Si $\exists U \in \mathcal{T}$ tal que U es clopen y $|U| > |\mathfrak{B}|$ entonces existe un árbol binario $(b_s | s \in^{<\omega} 2)$, tal que $b_s \in \mathfrak{B}$, $b_{s,0} \cap b_{s,1} = \emptyset$ y $b_{s,0} \cup b_{s,1} = b_s$.*

Demostración. Sea U un clopen de X, tal que $|U| > |\mathfrak{B}|$. Por el hecho de que $\mathfrak{B}$ es un álgebra booleana característica, entonces $U \in \mathfrak{B}$, ahora bien, por el Lema anterior, existen $b_0, b_1 \in \mathfrak{B}$ tales que $b_0 \cap b_1 = \emptyset, b_0 \cup b_1 = U$ y $|b_0| > |\mathfrak{B}|, |b_1| > |\mathfrak{B}|$. Ahora bien, para el básico b_0 existen $b_{0,0}, b_{0,1}$ tales que $b_{0,0} \cap b_{0,1} = \emptyset, b_{0,0} \cup b_{0,1} = b_0$ y $|b_{0,0}| > |\mathfrak{B}|, |b_{0,1}| > |\mathfrak{B}|$. De manera similar, para el básico b_1 existen $b_{1,0}, b_{1,1}$ tales que cumplen las mismas propiedades. Continuando la construcción de manera iterativa conseguimos el árbol binario deseado. □

Proposición 5.4.3. *Sea $\langle X, \mathcal{T}\rangle$ un espacio booleano, y sea U un clopen de X, entonces, $CBR(U) \geq \alpha + 1$ si y sólo si existe una familia infinita de clopens dos a dos disyunta, $\{U_i | i \in I\}$, tal que $U_i \subseteq U$ y $CBR(U_i) \geq \alpha, \forall i \in I$.*

Demostración.

- ¨⇒¨ Sea U un clopen tal que $CBR(U) \geq \alpha + 1$, entonces existe un $x \in U \cap X^{\alpha+1}$. Como x es punto límite en X^{α}, y X es T_1, podemos construir una sucesión $\{x_i\}_{i \in \omega}$, en $X^{\alpha} \cap U$ que converge a x y tal que $x \neq x_i, \forall i \in \omega$. Además la sucesión tiene un único punto límite, en este caso, x. De acuerdo con esto, para x_0 existe $U_0 \subsetneq U$ un básico, tal que $x_0 \in U_0$ y el resto de la sucesión, $\{x_i\}_{i \in \omega - \{0\}} \subseteq ((U_0)^c \cap U)$, pues de lo contrario x_0 también sería punto límite de $\{x_i\}_{i\in\omega}$. Adicionalmente, como U_0 es un clopen, entonces U_0^c y $((U_0)^c \cap U) = V_1$ también lo son.

De esta manera podemos repetir el procedimiento para encontrar el clopen, $U_1 \subsetneq V_1$ tal que $x_1 \in U_1$ y $\{x_i\}_{i\in\omega-\{0,1\}} \subseteq ((U_1)^c \cap V_1)$, y $((U_1)^c \cap V_1) = V_2$ es un clopen. Más aun, $U_0 \cap U_1 = \emptyset$, pues $U_1 \subset (U_0)^c$.

Así pues, iterando el proceso construimos la familia infinita de clopens dos a dos disyunta $\{U_i | i \in I\}$, tal que $x_i \in U_i$, $U_i \subseteq U$ y $CBR(U_i) \geq \alpha, \forall i \in I$. La última condición se hace evidente pues $x_i \in X^\alpha$.

¨$\Leftarrow$¨ Sea U un clopen de X, y sea $\{U_i | i \in I\}$ una familia infinita de clopens no vacíos, dos a dos disyunta, tal que $U_i \subseteq U$ y $CBR(U_i) \geq \alpha, \forall i \in I$. Para cada U_i tomemos un $x_i \in U_i$ tal que $x_i \in X^\alpha$ así pues, $CBR(U) \geq \alpha$ pues existe $\{x_i\}_{i\in\omega} \subset (U \cap X^\alpha)$. Ahora bien, si $CBR(U) = \alpha$ entonces $X^{\alpha+1} \cap U = \emptyset$. Sin embargo, dado que U es compacto, pues es un subconjunto cerrado de un espacio compacto, y $\{x_i\}_{i\in\omega}$ es un conjunto infinito en $U \cap X^\alpha$, entonces $X^{\alpha+1} \cap U \neq \emptyset$. Así pues, $CBR(U) \geq \alpha + 1$.

$\square$

Lema 5.4.4. *Sea $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ un espacio booleano y sea $C \subseteq X$ un conjunto cerrado, entonces existe un clopen de X, U, tal que $CBR(U) = CBR(C)$ y $C \subseteq U$.*

Demostración. Sea C un subconjunto cerrado en X tal que $CBR(C) = \alpha$, y sea $\{U_x | \, x \in C\}$ un recubrimiento con clopens de C tal que $x \in U_x$ y $U_x \cap X^{\alpha+1} = \emptyset$. Como X es un espacio compacto, entonces existe un subrecubrimiento finito $\{U_{i_0}, \ldots, U_{i_n}\}$ de C, la unión $U = \bigcup_{j\leq n} U_{i_j}$ es un clopen de X, tal que $U \cap X^{\alpha+1} = \emptyset$ por lo que $CBR(U) < \alpha + 1$, pero $CBR(U) \geq \alpha$ pues $C \subseteq U$ y por ende, $CBR(U) = \alpha$. Si $C = \emptyset$ entonces tómese $U = C$, y si $CBR(C) = \infty$ tómese $U = X$. $\square$

Proposición 5.4.5. $CBR(x) = min\{CBR(U) | \, U$ *es un clopen y* $x \in U\}$.

Demostración.

$" \leq "$ Si $x \in U$ y U es un clopen, entonces $CBR(x) \leq CBR(U)$. Así pues, $CBR(x) \leq min\{CBR(U) | \, U$ es un clopen y $x \in U\}$.

$" \geq "$ Dado que $\{x\}$ es un conjunto cerrado, por la proposición anterior sabemos que existe un clopen U tal que $CBR(x) = CBR(\{x\}) = CBR(U)$, por lo que $CBR(x) \geq min\{CBR(U) | \, U$ es un clopen y $x \in U\}$.

$\square$

Ahora bien, la siguiente proposición nos ayudará a asociar el rango de Cantor-Bendixon con el rango de Morley, el cual definiremos en la siguiente sección.

Proposición 5.4.6. *Sea $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ un espacio booleano, y sea $U \subseteq X$ un clopen de la topología, entonces para todo ordinal α se tiene:*

<u>$\alpha = 0$</u>*:*
$CBR(U) \geq 0$*, si y sólo si* $U \neq \emptyset$*,*

<u>*Si α es un ordinal límite*</u>*:*
$CBR(U) \geq \alpha$ *si y sólo si* $CBR(U) \geq \beta, \forall \beta < \alpha$

<u>*Si $\alpha = \beta + 1$, es un ordinal sucesor:*</u>
$CBR(U) \geq \beta + 1$ *si y sólo si existe* $\{U_i | i \in I\}$ *una familia infinita de clopens dos a dos disyunta tal que* $U_i \subseteq U$ *y* $CBR(U_i) \geq \beta, \forall i \in I$*.*

Adicionalmente:

* $CBR(U) = -1$ *si* $U = \emptyset$*.*
* $CBR(U) = \alpha$ *si* $CBR(U) \geq \alpha$ *y* $CBR(U) \not\geq \alpha + 1$*.*
* $CBR(U) = \infty$ *si* $CBR(U) \geq \alpha$*, para todo ordinal* α*.*

Demostración. La demostración sigue de la definición del rango de Cantor-Bendixon y de la *Proposición* 5.4.3. □

Definición 5.4.7. *Sea $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ un espacio booleano, diremos que el espacio X es* ***disperso*** *si para todo çlopen"U de X, $CBR(U) \neq \infty$.*

Teorema 5.4.8. *Sea $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ un espacio booleano. X es un espacio disperso, entonces no existe un árbol binario, de abiertos no vacíos, $(b_s | s \in^{\omega<} 2)$ tal que $b_s \in \mathfrak{B}$, $b_{s,0} \cap b_{s,1} = \emptyset$ y $b_{s,0} \cup b_{s,1} = b_s$.*

Demostración. Sea X un espacio disperso, y sea $U \in \mathfrak{B}$ tal que $RCB(U) = \alpha$. Supongamos que existe un árbol binario, $(b_s | s \in^{\omega<} 2)$ tal que $b_s \in \mathfrak{B}$, $b_{s,0} \cap b_{s,1} = \emptyset$, $b_{s,0} \cup b_{s,1} = b_s$ y $b_s \subset U$. Sea entonces $b_{s'} \in (b_s | s \in^{\omega<} 2)$ de rango mínimo, $CBR(b_s) = \alpha$, y de grado mínimo, $CBD(b_{s',0}) = n$, y sean $b_{s',0}, b_{s',1} \subset b_{s'}$ tales que $b_{s',0} \cap b_{s',1} = \emptyset$ y $b_{s',0} \cup b_{s',1} = b'_s$ entonces como escogimos a b'_s de forma tal que su rango fuera el mínimo, $CBR(b_{s',0}), CBR(b_{s',1}) \geq \alpha$. Pero como $CBR(b_{s'}) = \alpha$, entonces $CBR(b_{s',0}) = CBR(b_{s',0}) = \alpha$.

De acuerdo con esto $CBD(b'_s) = CBD(b_{s',0}) + CBD(b_{s',1})$ y $CBD(b_{s',0}) \neq 0$, $CBD(b_{s',1}) \neq 0$ lo que contradice la minimalidad del grado de b'_s.

□

5.5. Rango de Morley

En esta sección consideramos teorías completas de L con modelos infinitos. Donde L es la lógica de primer orden. Además, dado un modelo $\mathbb{A}$ de tipo τ y dado un subconjunto $Y \subset A$ del universo de $\mathbb{A}$, se denota $\mathbb{A}_Y$ a la expansión $(\mathbb{A}, a)_{a \in Y}$ de $\mathbb{A}$, y a su respectivo lenguaje por L_Y. Más aún, si $q(\bar{x})$ es una L_Y-fórmula con n variables libres, $\phi(\mathbb{A}) = \{\bar{a} \in A | \mathbb{A} \models \phi(\bar{x})[\bar{a}]\}$, es decir $\phi(\mathbb{A})$ es el conjunto de $n-$tuplas de A que realizan a $\phi(\bar{x})$.

Definición 5.5.1. *Sea $\mathbb{A}$ una $\tau-$estructura y $\phi(\bar{x})$ una L_A-fórmula. Definimos el **Rango de Morley en** $\mathbb{A}$ de $\phi(\bar{x})$, $RM^{\mathbb{A}}(\phi(\bar{x})) \geq \alpha$ para cada ordinal α, de la siguiente manera:*

Si $\alpha = 0$: $RM^{\mathbb{A}}(\phi(\bar{x})) \geq 0$ *si y sólo si* $\phi(\mathbb{A}) \neq \emptyset$.

Si α es un ordinal límite: $RM^{\mathbb{A}}(\phi(\bar{x})) \geq \alpha$ *si y sólo si* $RM^{\mathbb{A}}(\phi(\bar{x})) > \beta, \forall \beta < \alpha$.

Si $\alpha = \beta + 1$ para algún ordinal β: $RM^{\mathbb{A}}(\phi(\bar{x})) \geq \beta + 1$ *si y sólo si existen* $\psi_0, \psi_1, \ldots$ *fórmulas de tipo L_A tales que* $\psi_0(\mathbb{A}), \psi_1(\mathbb{A}), \ldots$ *es una familia infinita, dos a dos disyunta tal que* $\psi_i(\mathbb{A}) \subseteq \phi(\mathbb{A})$ *y* $RM^{\mathbb{A}}(\psi_i(\bar{x})) \geq \beta$ *para todo* i.

Adicionalmente se definen:

* $RM^{\mathbb{A}}(\phi(\bar{x})) = -1$ *si* $\phi(\mathbb{A}) = \emptyset$.
* $RM^{\mathbb{A}}(\phi(\bar{x})) = \alpha$ *si* $RM^{\mathbb{A}}(\phi(\bar{x})) \geq \alpha$ *y* $RM^{\mathbb{A}}(\phi(\bar{x})) \ngeq \alpha + 1$.
* $RM^{\mathbb{A}}(\phi(\bar{x})) = \infty$ *si* $RM^{\mathbb{A}}(\phi(\bar{x})) \geq \alpha$, *para todo ordinal* α.

Ahora bien, dado un fragmento compacto, enumerable L, y una teoría de L, el espacio de tipos $S_n(T)$ es un espacio booleano, por lo que es interesante ver las conexiones entre el Rango de Morley en $\mathbb{A}$ de una L_A-fórmula, $\phi(\bar{x})$, y el Rango de Cantor Bendixon de $[\phi(\bar{x})]$ en $S_n(Th(\mathbb{A}_A))$, donde $[\phi(\bar{x})] = \{S(\bar{x}) \in S_n(Th(\mathbb{A}_A)) | \phi(\bar{x}) \in S(\bar{x})\}$.

Definición 5.5.2. *Sea $\mathbb{A}$ una estructura, sea κ un cardinal infinito. Diremos que $\mathbb{A} \models T$ es $\kappa-$**saturado** si $\forall Y \subseteq A$, tal que $|Y| < \kappa$ se tiene que todo tipo maximal $S(\bar{x}) \in S_n(Th(\mathbb{A}_Y))$ se realiza en $\mathbb{A}_Y$. Diremos que $\mathbb{A}$ es **saturado** si es $|A|-$**saturado**.*

Teorema 5.5.3. *Sea $\mathbb{A}$ una $\tau-$estructura, y sea $\phi(\bar{x})$ una L_A-fórmula entonces:*

a) $RM^{\mathbb{A}}(\phi(\bar{x})) \geq RCB([\phi(\bar{x})])$.

b) *Si $\mathbb{A}$ es un modelo saturado, se tiene la igualdad,* $RM^{\mathbb{A}}(\phi(\bar{x})) = RCB([\phi(\bar{x})])$.

Demostración. a) Para demostrar que $RM^{\mathbb{A}}(\phi(\bar{x})) \geq RCB([\phi(\bar{\text{x}})])$, se demostrará que si $RCB([\phi(\bar{\text{x}})]) \geq \alpha$ entonces $RM^{\mathbb{A}}(\phi(\bar{x})) \geq \alpha$. La demostración se hará por inducción en el ordinal α:

Si $\alpha = 0$:
$CBR([\phi(\bar{\text{x}})]) \geq 0$ entonces $[\phi(\bar{\text{x}})] \neq \emptyset$, es decir que $\phi(\bar{\text{x}})$ es consistente con $Th(\mathbb{A}_A)$, y existe un modelo $\mathbb{B} \models Th(\mathbb{A}_A)$, y una tupla $\bar{b} \in B^n$ tal que $\mathbb{B} \models \phi(\bar{x})[\bar{b}]$ y por ende $\mathbb{B} \models \exists\bar{x}\phi(\bar{x})$. Así pues, puesto que $Th(\mathbb{A}_A)$ es una teoría completa, $\mathbb{B} \equiv \mathbb{A}$, $\exists\bar{x}\phi(\bar{x}) \in Th(\mathbb{A}_A)$ y $\mathbb{A} \models \exists\bar{x}\phi(\bar{x})$ por lo que existe una tupla $(\bar{\text{a}}) \in A^n$ tal que satisface a $\phi(\bar{\text{x}})$, es decir que $\phi(\mathbb{A}) \neq \emptyset$ y $RM^{\mathbb{A}}(\phi(\bar{\text{x}})) \geq 0$ por definición.

(H.I.)Sea $[\phi(\bar{x})] \subseteq S_n(Th(\mathbb{A}_A))$, supongamos que para todo ordinal $\beta < \alpha$ si $CBR([\phi(\bar{x})]) \geq \beta$ entonces $RM^{\mathbb{A}}(\phi) \geq \beta$.

Si α es un ordinal límite:
$CBR([\phi(\bar{\text{x}})]) \geq \alpha$ si y sólo si $CBR([\phi(\bar{\text{x}})]) \geq \beta, \forall\beta < \alpha$ por la *proposición* 5.4.6. Ahora bien, por hipótesis de inducción tenemos que $RM^{\mathbb{A}}(\phi(\bar{\text{x}})) > \beta, \forall\beta < \alpha$, y esto implica que $RM^{\mathbb{A}}(\phi(\bar{\text{x}})) \geq \alpha$.

Si $\alpha = \beta + 1$ para algún ordinal β:
Por la *proposición* 5.4.3 $CBR([\phi(\bar{\text{x}})]) \geq \beta + 1$ si y sólo si existen $\psi_0(\bar{\text{x}}), \psi_1(\bar{\text{x}}), \ldots$ fórmulas de L_A tales que $[\psi_0(\bar{\text{x}})], [\psi_1(\bar{\text{x}})], \ldots$ es una familia infinita de clopens no vacíos, y $[\psi_i(\bar{\text{x}})] \cap [\psi_j(\bar{\text{x}})] = \emptyset\ \forall i \neq j$, $[\psi_i(\bar{\text{x}})] \subseteq [\phi(\bar{\text{x}})]$ y $CBR([\psi_i(\bar{\text{x}})]) \geq \beta\ \forall i$.

Ahora bien, si $[\psi_i(\bar{\text{x}})] \subseteq [\phi(\bar{\text{x}})]$ entonces $\psi_i(\mathbb{A}) \subseteq \phi(\mathbb{A})$ pues $[\psi_i(\bar{\text{x}})] \subseteq [\phi(\bar{\text{x}})]$ si y sólo si $Th(\mathbb{A}_A) \models \forall\bar{x}(\psi_i(\bar{\text{x}}) \to \phi(\bar{\text{x}}))$, por lo que si $\mathbb{A}_A \models \psi_i(\bar{x})[\bar{a}]$ entonces $\mathbb{A}_A \models \phi_i(\bar{x})[\bar{a}]$, así pues $\psi_i(\mathbb{A}) \subseteq \phi(\mathbb{A})$.

Por otro lado, $[\psi_i(\bar{\text{x}})] \cap [\psi_j(\bar{\text{x}})] = \emptyset$ implica $\psi_i(\mathbb{A}) \cap \psi_j(\mathbb{A}) = \emptyset$, pues $[\psi_i(\bar{\text{x}})] \cap [\psi_j(\bar{\text{x}})] = \emptyset$ si y sólo si $[\psi_i(\bar{\text{x}}) \wedge \psi_j(\bar{\text{x}})] = \emptyset$ por definición, y esto quiere decir que $(\psi_i(\bar{\text{x}}) \wedge \psi_j(\bar{\text{x}}))$ es inconsistente con la teoría $Th(\mathbb{A}_A)$, es decir que si $\mathbb{B} \models Th(\mathbb{A}_A)$ y $\mathbb{B} \models \psi_i(\bar{x})[\bar{a}]$ entonces $\mathbb{B} \not\models \psi_j(\bar{x})[\bar{a}]$. Así pues, $\psi_i(\mathbb{A}) \cap \psi_j(\mathbb{A}) = \emptyset$.

Por último, puesto que $CBR([\psi_i(\bar{\text{x}})]) \geq \beta\ \forall i$ entonces por hipótesis de inducción, $RM^{\mathbb{A}}(\psi_i(\bar{\text{x}})) \geq \beta\ \forall i$.

De acuerdo a lo expuesto anteriormente tenemos una familia infinita de fórmulas de L_A, $\psi_0, \psi_1, \ldots$ tales que $\psi_i(\mathbb{A}) \cap \psi_j(\mathbb{A}) = \emptyset\ \forall i \neq j$, $\psi_i(\mathbb{A}) \subseteq \phi(\mathbb{A})$ y $RM^{\mathbb{A}}(\psi_i(\bar{\text{x}})) \geq \beta\ \forall i$, lo cual por definición implica que $RM^{\mathbb{A}}(\phi(\bar{\text{x}})) \geq \beta + 1$.

b) Para demostrar que si $\mathbb{A}$ es un modelo saturado entonces $RM^{\mathbb{A}}(\phi(\bar{x})) = RCB([\phi(\bar{\mathrm{x}})])$, se demostrará que si $RM^{\mathbb{A}}(\phi(\bar{x})) \geq \alpha$ entonces $RCB([\phi(\bar{\mathrm{x}})]) \geq \alpha$ puesto que el recíproco se tiene por el punto anterior. La demostración se hará por inducción en el ordinal α:

<u>Si $\alpha = 0$:</u>
$RM(\phi(\bar{\mathrm{x}})) \geq 0$ si y sólo si $\phi(\mathbb{A}) \neq \emptyset$ entonces existe una tupla $\bar{a} \in A^n$ que satisface $q(\bar{x})$, es decir que $\phi(\bar{\mathrm{x}})$ es consistente con $Th(\mathbb{A}_A)$, puesto que $\mathbb{A} \models T$, lo cual quiere decir que, $[\phi(\bar{\mathrm{x}})] \neq [\neg(\bar{\mathrm{x}} = \bar{\mathrm{x}})]$ y por lo tanto $[\phi(\bar{\mathrm{x}})] \neq \emptyset$ en $S_n(Th(\mathbb{A}_A))$, y como $[\phi(\bar{\mathrm{x}})]$ es un clopen de $S_n(Th(\mathbb{A}_A))$ entonces $CBR([\phi(\bar{\mathrm{x}})]) \geq 0$.

(H.I.)Sea $\mathbb{A}$ un modelo saturado y sea $\phi(\bar{x}) \subseteq\in L_A$, supongamos que para todo ordinal $\beta < \alpha$ si $RM^{\mathbb{A}}(\phi) \geq \beta$ entonces $CBR([\phi(\bar{x})]) \geq \beta$.

<u>Si α es un ordinal límite:</u>
Si $RM^{\mathbb{A}}(\phi(\bar{\mathrm{x}})) \geq \alpha$ entonces $RM^{\mathbb{A}}(\phi(\bar{\mathrm{x}})) > \beta$, para todo ordinal $\beta < \alpha$. Por hipótesis de inducción tenemos que $CBR([\phi(\bar{\mathrm{x}})]) \geq \beta, \forall \beta < \alpha$ lo cual quiere decir que $CBR([\phi(\bar{\mathrm{x}})]) \geq \alpha$.

<u>Si $\alpha = \beta + 1$ para algún ordinal β:</u>
Por definición, $RM([\phi(\bar{\mathrm{x}})]) \geq \beta + 1$ si y sólo si existen $\psi_0(\bar{\mathrm{x}}), \psi_1(\bar{\mathrm{x}}), \ldots$ fórmulas de L_A tales que $\psi_0(\mathbb{A}), \psi_1(\mathbb{A}), \ldots$ es una familia infinita dos a dos disyunta, y $\psi_i(\mathbb{A}) \subseteq \phi(\mathbb{A})$ y $CBR([\psi_i(\bar{\mathrm{x}})]) \geq \beta \; \forall i$.

Veamos que $[\psi_i(\bar{\mathrm{x}})] \subseteq [\phi(\bar{\mathrm{x}})]$. Supongamos por contradicción que existe un $S(\bar{\mathrm{x}}) \in S_n(T)$ tal que $S(\bar{\mathrm{x}}) \in [\psi_i(\bar{\mathrm{x}})]$ y $S(\bar{\mathrm{x}}) \notin [\phi(\bar{\mathrm{x}})]$, puesto que $\mathbb{A}$ es saturado, $S(\bar{\mathrm{x}})$ se realiza en $\mathbb{A}_A$ y $S(\bar{\mathrm{x}}) = S_{\bar{\mathrm{a}}}(\bar{\mathrm{x}})$ para alguna tupla $\bar{\mathrm{a}} \in A^n$, así $\bar{\mathrm{a}} \in \psi_i(\mathbb{A})$. Ahora bien, puesto que $S_{\bar{\mathrm{a}}}(\bar{\mathrm{x}}) \notin [\phi]$ entonces $\bar{\mathrm{a}} \notin \phi(\mathbb{A})$ y esto contradice que $\psi_i(\mathbb{A}) \subseteq \phi(\mathbb{A})$.

Por otro lado, puesto que $\psi_i(\mathbb{A}) \cap \psi_j(\mathbb{A}) = \emptyset$, y $\mathbb{A}$ es saturado, entonces $[\psi_i(\bar{\mathrm{x}})] \cap [\psi_j(\bar{\mathrm{x}})] = \emptyset$, pues de lo contrario, si existe un $S(\bar{\mathrm{x}}) \in S_n(Th(\mathbb{A}_A))$ tal que $S(\bar{\mathrm{x}}) \in [\psi_i(\bar{\mathrm{x}})] \cap [\psi_j(\bar{\mathrm{x}})]$, entonces $S(\bar{\mathrm{x}})$ se realiza en $\mathbb{A}$ por lo que $\mathbb{A}$ es saturado. Entonces existe una tupla $\bar{\mathrm{a}} \in A^n$ que realiza a $S(\bar{\mathrm{x}})$ y por lo tanto, puesto que $\psi_i(\bar{\mathrm{x}}) \in S(\bar{\mathrm{x}})$ y $\psi_j(\bar{\mathrm{x}}) \in S(\bar{\mathrm{x}})$ entonces $\mathbb{A} \models \psi_i(\bar{x})[\bar{\mathrm{a}}]$ y $\mathbb{A} \models \psi_j(\bar{x})[\bar{\mathrm{a}}]$, contradiciendo el hecho de que $\psi_i(\mathbb{A}) \cap \psi_j(\mathbb{A}) = \emptyset$.

Adicionalmente, para $\beta < \alpha$, por hipótesis de inducción se tiene que si $RM(\psi_i(\bar{\mathrm{x}})) \geq \beta$ entonces $CBR([\psi_i(\bar{\mathrm{x}})]) \geq \beta, \forall i$.

De esta manera, demostramos que existen $\psi_0(\bar{\mathrm{x}}), \psi_1(\bar{\mathrm{x}}), \ldots$ fórmulas de tipo L_M tales que $[\psi_0(\bar{\mathrm{x}})], [\psi_1(\bar{\mathrm{x}})], \ldots$ es una familia infinita, donde $[\psi_i(\bar{\mathrm{x}})] \cap [\psi_j(\bar{\mathrm{x}})] = \emptyset \; \forall i \neq j$,

$[\psi_i(\bar{x})] \subseteq [\phi(\bar{x})]$ y $CBR([\psi_i(\bar{x})]) \geq \beta\ \forall i$. De esta manera por la *proposición* 5.4.3 esto sucede si y sólo si $CBR([\phi(\bar{x})]) \geq \beta + 1$.

Así pues, se ha demostrado que para modelos saturados, $\mathbb{A}$, el Rango de Morley de una fórmula ϕ de L_A coincide con el Rango de Cantor Bendixon del clopen $[\phi(\bar{x})]$ en $S_n(Th(\mathbb{A}_A))$. $\square$

Ahora bien, definimos al Rango de Morley para un tipo $S(\bar{x}) \in S_n(T)$ como $RM(S(\bar{x})) = min\{RM(\phi(\bar{x}))|\ \phi(\bar{x}) \in S(\bar{x})\}$. Así pues, es fácil ver que $RM(S(\bar{x}))$ coincide con el $CBR(S(\bar{x}))$ para estructuras saturadas, pues por la *proposición* anterior, $min\{RM(\phi(\bar{x}))|\ \phi(\bar{x}) \in S(\bar{x})\} = min\{CBR([\phi(\bar{x})])|\ \phi(\bar{x}) \in S(\bar{x})\}$, y considerando que $S_n(Th(\mathbb{A}_A))$ es un espacio Booleano, $min\{CBR([\phi(\bar{x})])|\ \phi(\bar{x}) \in S(\bar{x})\} = CBR(S(\bar{x}))$ por la *proposición* 5.4.5. Adicionalmente definimos al Rango de Morley de una teoría T, $RM(T) = RM(x = x)$, así pues, $RM(T) = CBR(S_n(Th(\mathbb{A}_A)))$, puesto que $[x = x] = S_n(Th(\mathbb{A}_A))$.

5.6. Grado de Morley

Proposición 5.6.1. *Sea $\mathbb{A}$ una $\tau-$estructura saturada, y sea $\phi(\bar{x})$ una L_A-fórmula tal que $RM^{\mathbb{A}}(\phi(\bar{x})) = \alpha$ para algún ordinal α. Existe un número natural n tal que si $\psi_1(\bar{x}), \psi_2(\bar{x})$, $\ldots, \psi_d(\bar{x})$ son L_A-fórmulas tales que $\psi_0(\mathbb{A}), \psi_1(\mathbb{A}), \ldots, \psi_d(\mathbb{A})$ son subconjuntos disyuntos de $\phi(\mathbb{A})$ tales que $RM(\psi_i(\bar{x})) = \alpha, \forall i = 1, \ldots, d$, entonces $d \leq n$. Llámamos a n el* ***Grado de Morley*** *de $\phi(\bar{x})$, $MD(\phi(\bar{x})) = n$.*

Demostración. Sea $RM^{\mathbb{A}}(\phi(\bar{x})) = \alpha$, como $\mathbb{A}$ es una estructura saturada entonces por la parte *b*) del *Teorema* 5.5.3 $CBR([\phi(\bar{x})]) = \alpha$, y puesto que $[\phi(\bar{x})]$ es un clopen, entonces es cerrado, y existe $n \in \omega$ tal que el **Grado de Cantor Bendixon**, $CBD([\phi(\bar{x})]) = n$. Es decir que existen $S_1(\bar{x}), S_2(\bar{x}), \ldots, S_n(\bar{x})$ tales que $S_i(\bar{x}) \in [\phi(\bar{x})]$ y$CBR(S_i(\bar{x})) = \alpha$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Puesto que el espacio $S_n(T)$ es de Hausdorff, entonces existen los clopens básicos subconjuntos de $[\phi(\bar{x})]$, $[\psi_1(\bar{x})], [\psi_2(\bar{x})], \ldots, [\psi_n(\bar{x})]$ tales que aislan a cada tipo $S_i(\bar{x}) \in [\psi_i(\bar{x})]$ para cada $i = 1, \ldots, n$, son dos a dos disyuntos y $CBR([\psi_i(\bar{x})]) = \alpha$.

Ahora bien, no pueden existir $n+1$ clopens dos a dos disyuntos tales que $CBR([\beta_i(\bar{x})]) = \alpha$ para todo $i = 1, \ldots, n$, puesto que únicamente hay n tipos que se puedan aislar, $S_1(\bar{x}), S_2(\bar{x}), \ldots, S_n(\bar{x})$ tales que $S_i(\bar{x}) \in [\phi(\bar{x})]$ y $CBR(S_i(\bar{x})) = \alpha$.

Así pues, existen a lo sumo n $L_{\mathbb{A}}-$fórmulas, $\psi_1(\bar{x}), \psi_1(\bar{x}), \ldots, \psi_n(\bar{x})$ tales que $\psi_1(\mathbb{A})$, $\psi_1(\mathbb{A}), \ldots, \psi_n(\mathbb{A})$ sean subconjuntos dos a dos disyuntos de $\phi(\mathbb{A})$ y $RM^{\mathbb{A}}(\psi_i(\bar{x}) = \alpha$ para todo $i = 1, \ldots, n$. $\square$

Ahora bien, si $\mathbb{A}$ no es una estructura saturada también existe un número natural n tal que si $\psi_1(\bar{x}), \psi_2(\bar{x}), \ldots, \psi_d(\bar{x})$ son L_A-fórmulas tales que $\psi_0(\mathbb{A}), \psi_1(\mathbb{A}), \ldots, \psi_d(\mathbb{A})$

son subconjuntos disyuntos de $\phi(\mathbb{A})$ tales que $RM(\psi_i(\bar{\mathrm{x}})) = \alpha, \forall i = 1, \ldots, d$, entonces $d \leq n$. Llámamos a n el **Grado de Morley** de $\phi(\bar{\mathrm{x}})$, $MD(\phi(\bar{\mathrm{x}})) = n$. Para ver esto, consultar [M, CH.6.2, Proposition 6.2.9].

5.7. Rango de Morley y Teorías $\omega-$Estables

Definición 5.7.1. *Sea T una teoría completa de L, con $|L| \leq \omega$ y con modelos infinitos. Sea κ un cardinal infinito. Diremos que T es una teoría $\kappa-$**estable** si para todo $\mathbb{A} \models T$, y para todo $Y \subset A$, tal que $|Y| = \kappa$, se tiene que $|S_n^{\mathbb{A}}(L_Y)| = \kappa, \forall n \in \omega$.*

Definición 5.7.2. *Una teoría T es **totalmente tracendente** si para todo modelo $\mathbb{A}$ de T, si ϕ es una L_A-fórmula, entonces $RM^{\mathbb{A}}(\phi) < \infty$.*

Teorema 5.7.3. *Sea T una teoría de L, si T es $\omega-$estable entonces T es totalmente trascendente.*

Demostración. Supongamos que T no es totalmente trascendental, es decir que existe ϕ una L_A-fórmula tal que $RM^{\mathbb{A}}(\phi) = \infty$, para algún $\mathbb{A} \models T$. Ahora bien, sea $A_\alpha^\phi = \{\{\psi_i(\bar{x})\}_{i\in I} | \psi_i \in L_A, \psi_i(\mathbb{A}) \cap \psi_j(\mathbb{A}) = \emptyset, \psi_i(\mathbb{A}) \subseteq \phi(\mathbb{A}) \text{ y } RM^{\mathbb{A}}(\psi_i) = \alpha, \forall i, j \in I\}$. Tenemos entonces que $A_0^\phi \supseteq A_1^\phi \supseteq \ldots \supseteq A_\alpha^\phi \supseteq A_{\alpha+1}^\phi \supseteq \ldots A_\infty^\phi$, más aún, $A_\infty^\phi = \bigcap_\alpha A_\alpha^\phi$.

Primero demostraremos que si $RM^{\mathbb{A}}(\phi(\bar{x})) = \infty$ entonces existe una familia de L_A-fórmulas $\psi_0, \psi_1, \ldots$ tales que $\psi_0(\mathbb{A}), \psi_1(\mathbb{A}), \ldots$ son dos a dos disyuntas, $\psi_i(\mathbb{A}) \subseteq \phi(\mathbb{A})$ y $RM^{\mathbb{A}}(\psi_i(\bar{x})) = \infty$. Ahora bien en busca de una contradicción, supongamos que no existe tal familia de fórmulas entonces $A_\infty^\phi = \bigcap_\alpha A_\alpha^\phi = \emptyset$, lo cual quiere decir que existe un ordinal β tal que $A_\beta^\phi \neq \emptyset$ y $A_{\beta+1}^\phi = \emptyset$ así pues, $RM^{\mathbb{A}}(\phi(\bar{x})) = \beta + 1$ contradiciendo la hipótesis de que $RM^{\mathbb{A}}(\phi(\bar{x})) = \infty$. De esta manera probamos que $A_\infty^\phi \neq \emptyset$.

Así pues, asumiendo el axioma de elección, escogemos $\psi_0(\bar{x}), \psi_1(\bar{x}) \in A_\infty^\phi$,y dado que $RM^{\mathbb{A}}(\psi_0(\bar{x})) = RM^{\mathbb{A}}(\psi_1(\bar{x})) = \infty$ podemos encontrar $\psi_{0,0}(\bar{x}), \psi_{0,1}(\bar{x}) \in A_\infty^{\psi_0}$, $\psi_{1,0}(\bar{x})$, $\psi_{1,1}(\bar{x}) \in A_\infty^{\psi_1}$. De esta manera continuamos escogiendo fórmulas tales que $RM^{\mathbb{A}}(\psi_s(\bar{x})) = \infty, \forall s \in^{<w} 2$ y construimos un árbol binario $(\psi_s(\bar{x}) | s \in^{<w} 2)$ de L_A-fórmulas tal que $\psi_{s,i}(\mathbb{A}) \subsetneq \psi_s, \forall i = \{0, 1\}$, y $\psi_{s,0}(\mathbb{A}) \cap \psi_{s,1}(\mathbb{A}) = \emptyset, \forall s \in^{<\omega} 2$.

Finalmente sea $Y \subseteq A$ el conjunto de constantes que aparecen en el árbol, y sea $X \subseteq A$ tal que $X = \begin{cases} Y, \text{ si } |X| = \omega. \\ Y + Z, \text{ donde } Z \subseteq A, \text{ tal que } |Z| = \omega. \end{cases}$.

Sabemos entonces que $|X| = \omega$, y por el teorema de Löwenheim-Skolem descendente, existe $\mathbb{B} \preceq_{L_A} \mathbb{A}$ tal que $X \subseteq B$ y $|B| = \omega$. Ahora bien, afirmamos que cada rama del árbol es finitamente consistente, pues si $C = \{\psi_\sigma | \ \sigma \in^{<n} 2$ tal que s es un segmento

inicial de $\sigma\}$ es un conjunto finito de fórmulas de una rama entonces existe ψ_ϑ tal que $\sigma \subset \vartheta$ y $\psi_\vartheta(\mathbb{A}) \subset \psi_\sigma(\mathbb{A}), \forall \psi_\sigma \in C$ por lo que existe una tupla $\bar{a} \in A^n$ tal que $\mathbb{A} \models \psi_\vartheta(\bar{x})[\bar{a}]$, y por ende $\mathbb{A} \models \psi_\sigma(\bar{x})[\bar{a}], \forall \sigma$. Así pues, como L_B es compacto entonces cada rama al ser finitamente consistene es consistente y representa un tipo de $S_n(Th(\mathbb{B}_B))$, así pues, $|S_n(Th(\mathbb{B}_B))| \geq \omega$ y por ende encontramos un modelo $\mathbb{B} \models T, |B| = \omega$ y $|S_n(Th(\mathbb{B}_B))| \geq \omega_1$, por lo que T no es una teoría $\omega-$estable. □

Teorema 5.7.4. *Sea T una teoría de L, si T es $\omega-$estable entonces T es $\kappa-$estable para todo $\kappa > \omega$.*

Demostración. Supongamos por contradicción que T no es $\kappa-$estable para algún cardinal $\kappa > \omega$, entonces existe un modelo $\mathbb{A}$ de T tal que $|A| = \kappa$ y $|S_n(Th(\mathbb{A}_A))| > \kappa$. Dado que $|L| \leq \omega$, $|L_A| = |L| + |A| = \kappa$, más aún, la base $\mathfrak{B}$ de $S_n(Th(\mathbb{A}_A))$ es tal que $|\mathfrak{B}| = |L_A| = \kappa$.

Por otro lado, $[x = x] = S_n(Th(\mathbb{A}_A))$, entonces $[x = x]$ es un clopen tal que $|[x = x]| > |\mathfrak{B}|$. Así por el *Teorema* 5.4.2 existe un árbol binario $([\phi_s(\bar{x})]|s \in^{<\omega} 2)$ tal que $[\phi_s(\bar{x})] \in \mathfrak{B}$, $[\phi_{s,0}(\bar{x})] \cap [\phi_{s,1}(\bar{x})] = \emptyset$ y $[\phi_{s,0}(\bar{x})] \cup [\phi_{s,1}(\bar{x})] = [\phi_s(\bar{x})]$. Ahora bien, por el *Teorema* 5.4.8 el espacio $S_n(Th(\mathbb{A}_A))$ no es disperso, es decir que existe un clopen $[\phi(\bar{x})] \subseteq S_n(Th(\mathbb{A}_A)$ tal que $CBR([\phi(\bar{x})]) = \infty$, y por el *Teorema* 5.5.3 $RM(\phi(\bar{x})) = \infty$. De acuerdo con esto, y el *Teorema* anterior, $Th(\mathbb{A}_A)$ no es $\omega-$estable, es decir existe $\mathbb{B} \models Th(\mathbb{A}_A)$, $|B| = \omega$, tal que para algún $n \in \omega, |S_n(Th(\mathbb{B}_B))| > \omega$, pero como $\mathbb{A}_A \models T$ entonces $\mathbb{B} \models T$ y por ende T no es $\omega-$estable, contradiciendo así la hipótesis. □

Apéndice A

Álgebras Booleanas

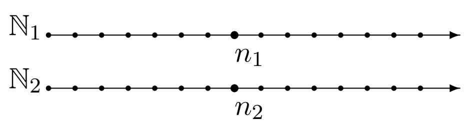
A.1. Retículos Complementados y Distributivos

Definición A.1.1. *Un **retículo** es un conjunto **R** parcialmente ordenado, donde* $\forall x, z \in \boldsymbol{R}$*, el ínfimo y el supremo entre* x *y* z*, existen y se denotan de la siguiente manera:*

El ínfimo entre x *y* z *es* $\inf\{x, z\} = x \wedge z$.

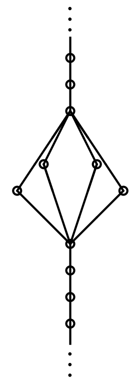
El supremo entre x *y* z *es* $\sup\{x, z\} = x \vee z$.

Ejemplo A.1.2. *Este es el diagrama de un conjunto parcialmente ordenado que no es un retículo puesto que no todos los pares de elementos tienen supremo ni ínfimo, por ejemplo, el* $\sup\{n_1, n_2\}$ *no existe.*

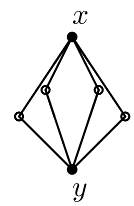


Ejemplo A.1.3. *Por el contrario, estos son dos grafos de retículos:*

$a)$



$b)$



El grafo $b)$ es un retículo con un elemento máximo (x) y un elemento mínimo (y).

Lema A.1.4. *Si un retículo **R** tiene un elemento maximal (minimal), este elemento es único.*

Definición A.1.5. *Un retículo **R** es **complementado** si tiene un elemento maximal y un elemento minimal, denotados por 1 y 0 respectivamente. Adicionalmente, para todo elemento x de un réticulo **complementado** debe existir un elemento $z \in \boldsymbol{R}$ tal que $x \vee z = 1$ y $x \wedge z = 0$.*

Definición A.1.6. *Un retículo es **distributivo** si satisface que $\forall x, y, z \in \boldsymbol{R}$:*

$$(x \wedge y) \vee z = (x \vee z) \wedge (y \vee z)$$

$$(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$$

Lema A.1.7. *En un retículo complementado y distributivo **R**, para cada $x \in \boldsymbol{R}$ existe un único elemento $z \in \boldsymbol{R}$, llamado el **complemento** de x, tal que $x \vee z = 1$ y $x \wedge z = 0$. Denotamos al complemento de x por $-x$.*

Definición A.1.8. *Un **álgebra booleana** $\mathcal{B} = \langle B, \leq \rangle$, es un retículo, complementado y distributivo, con al menos dos elementos $(0 \neq 1)$. Donde $x \leq y$ si y sólo si $x \wedge y = x$.*

Observación A.1.9. *Sean $x, z \in \mathcal{B}$, $(x \wedge -z) = 0$ si y sólo si $x \leq z$.*

Ejemplo A.1.10. *Sea X un conjunto, y sea " $\subseteq$ " la relación de inclusión:*

1. Denotamos por $P(X)$ al conjunto partes de X. Así $\langle P(X), \subseteq \rangle$ es un álgebra booleana, donde el conjunto vacío $\emptyset = 0$ y $X = 1$, en este caso, si Y es subconjunto de X, las operaciónes elementales del álgebra booleana "$\wedge, \vee, -$" corresponden de manera natural a "$\cap, \cup, Y^c$.

2. Un conjunto **cofinito** Y en X es unsubconjunto de X tal que el cardinal de su complemento es finito, $|Y^c| < \omega$. Así pues, $\langle Z(X), \subseteq \rangle$ es el **álgebra booleana de los cofinitos**, donde $Z(X) = \{Y \subseteq X |\ Y \text{ es finito, o cofinito}\}$.

3. Sea $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ un espacio topológico, el conjunto $C(X) = \{Y \subseteq X | Y \text{ es un clopen}\}$, donde un "*clopen*" es un subconjunto abierto y cerrado de X.
$\langle C(X), \subseteq \rangle$ es un álgebra booleana llamada el **álgebra característica de X**.

A.2. Átomos en Álgebras Booleanas

Definición A.2.1. *Sea $\mathcal{B} = \langle B, < \rangle$ un álgebra booleana, un elemento $a > 0$ en $\mathcal{B}$ es un átomo, si para todo $x \in \mathcal{B}$ tal que $x < a$, o bien $x = 0$, o bien $x = a$.*

Es decir que los átomos son elementos minimales en $\mathcal{B} - \{0\}$.

Observación A.2.2. *Si $a > 0$ es un átomo entonces para todo elemento $x \in \mathcal{B}$ se satisface que $a \leq x$, o bien $a \wedge x = 0$.*

Observación A.2.3. *Si a es un átomo y $x \in \mathcal{B}$ entonces o $a \leq x$ o $a \leq -x$.*

Observación A.2.4. *Si $a > 0$ es un átomo entonces para todo $x, z \in \mathcal{B}$, si $a = x \vee z$ entonces $a = x$ o $a = z$.*

Un álgebra booleana $\mathcal{B}$ es *átomica* si para todo elemento $x \in \mathcal{B}, x > 0$, existe un átomo a tal que $a \leq x$. Es fácil ver que toda álgebra boolena finita es atómica, y que toda álgebra booleana sin átomos es densa entre cualquier elemento $x > 0$ y 0. Por otro lado, se puede demostrar que toda álgebra booleana finita es isomorfa a $P(X)$ donde $X = \{a \in \mathcal{B} | a \text{ es átomo en } \mathcal{B}\}$. Este resultado se obtiene probando que la función f definida a continuación es efectivamente un isomorfismo.

$f : P(X) \rightarrow \mathcal{B}$

$f(S) = (a_1 \vee \ldots \vee a_n)$ y $S = \{a_1, \ldots, a_n\}$

Sin embargo, vale la pena resaltar en este momento que no todas las álgebras booleanas son isomorfas al álgebra booleana de partes de X, para agún conjunto X. Para ver esto, basta considerar el álgebra booleana de los cofinitos, $\langle Z(X), \subseteq \rangle$, para algún conjunto X tal que, $|X| = \aleph_0$. El cardinal de $Z(X)$ es también $\aleph_0$, mientras que el cardinal de $P(Y)$ para cualquier conjunto Y es o bien no enumerable o finito.

Ejemplo A.2.5.

1. Para cualquier conjunto X, al igual que en el álgebra booleana de $P(X)$, el álgebra booleana de los cofinitos, $\langle Z(X), \subseteq \rangle$, tiene a $0 = \emptyset$, $1 = X$ y los átomos son todos los conjuntos de un sólo elemento. Así pues, se puede demostrar que estas álgebras son atómicas, y la cantidad de átomos depende de la cardinalidad del conjunto X.

2. En el caso de las álgebras características, el hecho de que tengan o no tengan átomos depende del espacio topológico, $\langle X, \mathcal{T} \rangle$. Así pues si X es totalmente disconexo, $C(X) = P(X)$, y tiene como átomos a todos los conjuntos de un sólo elemento. Si por el contrario X es un espacio conexo, $C(X) = \{\emptyset, X\}$ y obviamente tiene por único átomo a X.

3. Sea $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ un espacio topológico donde $X = \{0,1\}^\kappa$, κ es un cardinal infinito y $\mathcal{T}$ es la topología producto. Ahora bien, los básicos de $\mathcal{T}$ son clopens, puesto que dada la sucesión finita, fija, de ceros y unos, $S = s_1, s_2, ..., s_m$, el básico,

   $$b_s = \{(x_0, x_1, x_2, ...) \in \{0,1\}^\kappa | \; x_i = s_i \; \forall i \in \{0, ..., m\}\}$$

   tiene como complemento a $b_{s'}$, donde $S' = s'_1, s'_2, \ldots, s'_{k'}$, $k = m$ y $s'_i = \begin{cases} 0, \text{ si } s_i = 1. \\ 1, \text{ si } s_i = 0. \end{cases}$
   Por lo que cada básico es abierto y cerrado.

   Ahora bien, para todo básico, b_s, existe un $b_{s'} \neq \emptyset$ tal que $b_{s'} \subseteq b_s$, esto se puede ver por el hecho de que $b_{s'} \subseteq b_s$ si y sólo si la sucesión S es un fragmento inicial de la sucesión S'. Es fácil ver que toda sucesión finita de ceros y unos, S', se puede extender a otra sucesión finita de ceros y unos. Simplemente añadirle un cero al final de la sucesión S' resulta ser una extensión. Así pues, afirmamos que el álgebra característica de X, $\langle C(X), \subseteq \rangle$, donde $C(X) = \{b \in \mathcal{T} | \; b$ es un abierto básico de $\mathcal{T}$ no tiene átomos.

A.3. Filtros y Ultrafiltros

Definición A.3.1. *Un filtro $\mathcal{F}$en un álgebra booleana $\mathcal{B} = \langle B, \leq \rangle$, es tal que $\mathcal{F} \subseteq B$ y satisface:*

i. $\forall x, y \in \mathcal{F}, x \wedge y \in \mathcal{F}$.

ii. $\forall x \in \mathcal{F}$ *si* $y > x, y \in \mathcal{F}$.

*Un filtro $\mathcal{F}$es **propio** si $0 \notin \mathcal{F}$.*

Definición A.3.2. *Puesto que los filtros en un álgebra booleana $\mathcal{B}$ son subconjuntos de $\mathcal{B}$, pueden ser ordenados parcialmente por medio de la inclusión. Un **ultrafiltro** es un filtro propio maximal con respecto a este orden.*

Definición A.3.3. *Un subconjunto S de un álgebra booleana $\mathcal{B}$ tiene la **propiedad de intersecciones finitas (pif)**, si $\forall x_1, \ldots, x_n \in S$,*
$x_1 \wedge \ldots \wedge x_n \neq 0$.

El siguiente es un resultado muy importante en el estudio de filtros y ultrafiltros, para esto es necesario suponer el axioma de elección:

Teorema A.3.4. *Todo subconjunto S de un álgebra booleana $\mathcal{B}$ que satisfaga **pif** puede extenderse a un ultra filtro.*

Demostración.

a) Todo subconjunto S de un álgebra booleana $\mathcal{B}$ satisface **pif** si y sólo si está incluido en un filtro propio $\mathcal{F}$.
Consultar [BM, CH.4, §3, Theorem 3.1].

b) Todo filtro propio puede extenderse a un ultrafiltro.*En esta demostración se utiliza una variación del axioma de elección: el Lema de Zorn.*
Consultar [BS, CH.1, §3, Theorem 3.4].

□

Teorema A.3.5. *Sea $\mathcal{B}$ un álgebra booleana y sea $\mathcal{F}$ un filtro propio. Las siguientes propiedades son equivalentes:*

a) *$\mathcal{F}$ es un ultrafiltro.*

b) *$\forall x \in \mathcal{B}$, o bien $x \in \mathcal{F}$, o bien $-x \in \mathcal{F}$.*

c) *Si $x \vee y \in \mathcal{F}$, o bien $x \in \mathcal{F}$, o bien $y \in \mathcal{F}$.*

Demostración. Consultar [CK, CH.1, §3, Theorem 3.4] □

Lema A.3.6. *Si $x, z \in \mathcal{B}, x \neq z \neq 0$ entonces existe un ultrafiltro, $\mathcal{U}_x$ tal que $x \in \mathcal{U}_x$ y $z \notin \mathcal{U}_x$*

Demostración. Si $x \neq z$ entonces o no sucede que $x \leq z$ o no sucede que $x \geq z$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que no sucede $x \leq z$, por la *observación* A,1,9 sabemos que $x \wedge -z \neq 0$, y así por el teorema anterior sabemos que se puede extender a un ultra fitro $\mathcal{U}_x$, y puesto que $x \wedge -z \leq -z, -z \in \mathcal{U}_x$, por lo que $z \notin U_x$. □

Ejemplo A.3.7. .

1. Toda álgebra booleana $\mathcal{B}$ es un filtro, mas no un filtro propio.

2. Sea $\mathcal{B}$ un álgebra booleana, el conjunto $\mathcal{F} = \{1\}$, es un filtro propio.

3. Sea $\mathcal{B}$ un álgebra booleana, y sea $x \in \mathcal{B}$, $x > 0$, el conjunto $\mathcal{F} = \{y \in \mathcal{B} | \ x \leq y\}$ es un filtro propio, denotado **filtro principal** generado por x. Así pues, si consideramos el álgebra booleana de partes de X, $\langle P(X), \subseteq \rangle$, vemos que el conjunto $\mathcal{F}_x = \{S \subseteq P(X) | \ x \in S\}$ es un filtro propio

4. Consideremos a un conjunto infinito X, y sea $\mathcal{B}$ el álgebra booleana de $P(X)$. El conjunto $\mathcal{F} = \{S \in P(X) | \ S \text{ es cofinito } \}$ es un filtro propio pero no es un ultrafiltro, se llama el *filtro de Frechet*. Para ver esto, consideramos a $X = \mathbb{N}$, el conjunto de los números naturales, podemos ver que ni el conjunto de los pares, ni el de los impares pertenecen a $\mathcal{F}$.

Teorema A.3.8. *Un ultrafiltro $\mathcal{U}$ es principal si y sólo si contiene un átomo a. En caso tal, a es el generador del ultrafiltro.*

Demostración. Sea $\mathcal{U} = \{x \in \mathcal{B} | \ b \leq x\}$ un ultrafiltro principal, donde b es el generador del ultrafiltro. Supongamos que existe $0 < a < b$ un átomo tal que $a \notin \mathcal{U}$ entonces $-a \in \mathcal{U}$, lo cual quiere decir que $b \leq -a$ y por transitividad, $a \leq -a$. Ahora bien, esto sucede si y sólo si $a \wedge -a = a$, pero a su vez $a \wedge -a = 0$, así pues $a = 0$, contradiciendo nuestra elección inicial de a. De esta manera, $a \in \mathcal{U}$.

Ahora bien, sea a un átomo que pertenece a un filtro propio $\mathcal{F}$, entonces el filtro principal $\mathcal{U} = \{x \in \mathcal{B} | a \leq x\}$ es subconjunto de $\mathcal{F}$. Por la *observación A.*2.3 sabemos que para todo $x \in \mathcal{B}$ o bien $a \leq x$ o $a \leq -x$, así pues $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro, por lo que $\mathcal{U} = \mathcal{F}$ y $\mathcal{F}$ es entonces un ultrafiltro principal generado por a. ☐

El resultado anterior nos muestra que existe una biyección entre átomos y ultrafiltros principales. Ahora bien, puesto que toda álgebra boolena finita es atómica, entonces todos sus filtros son ultrafiltros principales, pues si $b \in \mathcal{F}$ y $0 < b$, se puede demostrar que $b = (a_0 \vee \ldots \vee a_n)$ donde $a_0, \ldots, a_n$ son átomos de $\mathcal{B}$. Por ende, algún $a_i \in \mathcal{F}$ para $i = 0, \ldots, n$ por lo que $\mathcal{F}$es un ultrafiltro principal. Ahora bien, la siguiente proposición además de demostrar el recíproco de lo que acabamos de plantear, que si un álgebra booleana sólo tiene ultrafiltros principales entonces es finita, nos brinda un ejemplo específico de un ultrafiltro no principal.

Proposición A.3.9. *Si $\mathcal{B}$ es un álgebra booleana infinita entonces tiene ultrafiltros no principales.*

Demostración. Sea $\mathcal{B}$ un álgebra booleana infinita, debemos considerar dos casos:

a) Si $\mathcal{B}$ no tiene átomos, entonces por el teorema anterior, se tiene el resultado deseado.

b) Si $\mathcal{B}$ tiene átomos, consideremos el conjunto $F = \{-a \in \mathcal{B} | \ a \text{ es un átomo de } \mathcal{B}\}$. Este conjunto tiene la propiedad del **pif**, pues si existen $-a_0, \ldots, -a_n \in F$ tales que $-a_0 \wedge \ldots \wedge -a_n = 0$ entonces $-(-a_0 \wedge \ldots \wedge -a_n) = 1$. Por las leyes de Morgan, y por la unicidad del complemento, $a_0 \vee \cdots \vee a_n = 1$. Ahora bien, sea $a \in \mathcal{B}$, $a \wedge 1 = a \wedge (a_0 \vee \ldots \vee a_n) = (a \wedge a_0) \vee \ldots \vee (a \wedge a_n)$, pero por la *observación A.2.2*, sabemos que $a \wedge a_i = a_i$ o $a \wedge a_i = 0$ para todo $i = 0, \ldots, n$, así que $a = a_{i_0} \vee \ldots, \vee a_{i_m}$ donde $i_j \in \{0, \ldots, n\}$. De esta manera demostramos que todo elemento $a \in \mathcal{B}$ se puede ver como una combinación booleana de $\{a_0, \ldots, a_n\}$, así pues, $|\mathcal{B}| \leq |P(\{a_0, \ldots, a_n\})|$ que es un cardinal finito, lo cual es una contradicción.

Queda entonces demostrado que el ultrafiltro $\mathcal{U}$ generado por F es un ultrafiltro no principal, de serlo, algún átomo a pertenecería a $\mathcal{U}$ y $a \wedge -a$ también pertenecería a $\mathcal{U}$, lo cual contradice el hecho de que $\mathcal{U}$sea filtro.

$\square$

A.4. La Dualidad de Stone

Sin entrar en detalles, hemos visto que toda álgebra booleana finita es isomorfa al álgebra booleana de $P(X)$ para algún conjunto, X. Igualmente hemos visto que el álgebra booleana de los cofinitos no puede ser isomorfa a $P(X)$ para ningún conjunto X. Ahora bien, el teorema de representación de Stone muestra que toda álgebra booleana es isomorfa al álgebra característica de algún conjunto X. Es decir, toda álgebra booleana se puede ver como una subálgebra del álgebra de $P(X)$, donde una subálgebra de $\mathcal{B}$ es un subconjunto de $\mathcal{B}$ cerrado bajo operaciones booleanas.

Teorema de Representación de Stone A.4.1. *Sea $\mathcal{SB}$ es el conjunto de todos los ultrafiltros de $\mathcal{B}$, toda álgebra booleana es isomorfa a una subálgebra del álgebra de partes de $\mathcal{SB}$.*

Demostración. Sea $\mathcal{B}$ un álgebra booleana, $\mathcal{SB}$ el espacio de Stone de $\mathcal{B}$. Veamos que $u : \mathcal{B} \to P(\mathcal{SB})$, $u(x) = \{\mathcal{F} \in \mathcal{B} | \; x \in \mathcal{F}$ y $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro de $\mathcal{B}\}$ es un embebimiento, así pues hay un isomorfismo entre $\mathcal{B}$ y la imagen, $u[\mathcal{B}]$.

$\underline{u(x \wedge z) = u(x) \cap u(z) :}$
$\mathcal{F} \in u(x \wedge z)$ si y sólo si, $(x \wedge z) \in \mathcal{F}$, lo cual es equivalente a que $x \in \mathcal{F}$ y $z \in \mathcal{F}$ puesto que $\mathcal{F}$ es un filtro. Ahora bien, definición de u, $\mathcal{F} \in u(x)$ y $\mathcal{F} \in u(z)$, lo cual quiere decir que $\mathcal{F} \in u(x) \cap u(z)$.

$\underline{u(-x) = \mathcal{SB} - u(x) :}$
$\mathcal{F} \in u(-x)$ si y sólo si, $-x \in \mathcal{F}$, lo que es equivalente a que $x \notin \mathcal{F}$ pues $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro, es decir que $\mathcal{F} \notin u(x)$ y asi $\mathcal{F} \in \mathcal{SB} - u(x)$.

u es una función inyectiva:
Si $x \neq z$ entonces por el *lema* 1.3.6 sabemos que existe el ultrafiltro $\mathcal{F}$ tal que $x \in \mathcal{F}$ y $z \notin \mathcal{F}$. Así pues, $\mathcal{F} \in u(x)$ y $\mathcal{F} \notin u(z)$ por lo que $u(x) \neq u(z)$.

Así pues, u es un isomorfismo entre $\mathcal{B}$ y $u[\mathcal{B}]$, donde claramente $u[\mathcal{B}]$ es una subálgebra de $P(\mathcal{SB})$. $\square$

Ahora bien, vamos a asignarle a $\mathcal{SB}$ una topología natural de forma tal que se pueda decir algo más fuerte que el teorema de representación de Stone, que toda álgebra booleana es isomorfa al álgebra característica de X, de algún espacio topológico $\langle X, \mathcal{T}\rangle$.

Lema A.4.2. *Sea $\langle X, \mathcal{T}\rangle$ un espacio topológico compacto, si $\mathcal{B}$ es una subálgebra booleana de $P(X)$ que a su vez es base de $\mathcal{T}$, entonces $\mathcal{B} = C(X)$.*

Demostración.

$\mathcal{B} \subseteq C(X)$ Sea $b \in \mathcal{B}$ como $\mathcal{B}$ una subálgebra booleana de $P(X)$, $b^c \in \mathcal{B}$. Pero como $\mathcal{B}$ es base de $\mathcal{T}$ entonces b, b^c son abiertos y por ende b es un clopen. Así pues, $\mathcal{B} \subseteq C(X)$.

$C(X) \subseteq \mathcal{B}$ Sea $c \in C(X)$, como c es abierto y $\mathcal{B}$ es base, entonces $c = \bigcup_{i\in I} b_i$ donde $b_i \in \mathcal{B}, \forall i \in I$. Ahora bien, como $\mathcal{T}$ es compacto y c es un cerrado, existe un subconjunto finto $I_0 \subseteq I$ tal que $c = \bigcup_{i\in I_0} b_i$, pero como $\mathcal{B}$ es un subálgebra booleana es cerrada bajo uniones finitas, entonces $\bigcup_{i\in I_0} b_i \in \mathcal{B}$. Así, $C(X) \subseteq \mathcal{B}$.

$\square$

Ahora bien, llamamos al **espacio de Stone**, al espacio topológico $\langle \mathcal{SB}, \mathcal{T}\rangle$, donde los básicos de $\mathcal{T}$ son de la forma $u(x) = \{\mathcal{F} \in \mathcal{B}|\ x \in \mathcal{F} \text{ y } \mathcal{F} \text{ es un ultrafiltro de } \mathcal{B}\}$. Podemos ver que cada básico es un clopen, pues $\mathcal{SB} - u(x) = u(-x)$ dado que cada ultrafiltro o bien contiene a x o bien contiene a $-x$.

Veamos ahora que el álgebra cáracterística $C(X)$, la cual es isomorfa al álgebra booleana $\mathcal{B}$, proviene del espacio de Stone $\langle \mathcal{SB}, \mathcal{T}\rangle$, es decir que $X = \mathcal{SB}$. Para esto demostraremos que el espacio de Stone es un **espacio booleano** es decir que $\mathcal{SB}$ es un espacio compacto, de Hausdorff y totalmente disconexo. Ahora bien, por el teorema de representación de Stone, tenemos que $\mathcal{B}$ es isomorfa a $\{u(x)|x \in \mathcal{B}\}$, donde $u(x) = \{\mathcal{F} \in \mathcal{B}|\ x \in \mathcal{F} \text{ y } \mathcal{F} \text{ es un ultrafiltro de } \mathcal{B}\}$. Adicionalmente por el lema anterior sabemos que la base del espacio de Stone $\mathcal{SB}$, $\mathfrak{B} = \{u(x)|x \in \mathcal{B}\}$, es el álgebra cáracterística de $\mathcal{SB}$. De esta manera queda demostrado que toda álgebra booleana $\mathcal{B}$ es isomorfa al álgebra característica de $\mathcal{SB}$, $C(\mathcal{SB})$.

Teorema A.4.3. *El espacio de Stone $\mathcal{SB}$ de un álgebra booleana $\mathcal{B}$ es un espacio booleano.*

Demostración.

$\mathcal{SB}$ es un espacio de Hausdorff:
Sean $\mathcal{F}, \mathcal{U} \in \mathcal{SB}$, tales que $\mathcal{F} \neq \mathcal{U}$ es decir que existe un elemento x tal que $x \in \mathcal{F}$ y $x \notin \mathcal{U}$, así pues como $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro, esntonces $-x \in \mathcal{U}$. Así pues, los abiertos $u(x)$ y $u(-x)$ son dos tales que $\mathcal{F} \in u(x)$ y $\mathcal{U} \in u(-x)$ que son disyuntos.

$\underline{\mathcal{SB}\text{ es un espacio totalmente disconexo:}}$
Ya vimos que la base de $\mathcal{SB}$ $u(x) = \{\mathcal{F} \in \mathcal{B} | \ x \in \mathcal{F}$ y $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro de $\mathcal{B}\}$ es una base de clopens. Ahora bien, supongamos que $Y = \{\mathcal{F}, \mathcal{U}\}$ es un subespacio de $\mathcal{SB}$, puesto que $\mathcal{SB}$ es de Hausdorff, xiste un elemento x, tal que $\mathcal{F} \in u(x)$ y $\mathcal{U} \in u(-x)$, así pues, $Y = (Y \cap u(x)) \cup (Y \cap u(-x))$.

$\underline{\mathcal{SB}\text{ es un espacio compacto:}}$
Supongamos por contradicción, que el recubrimiento de $\mathcal{SB}$, $V = \{u(x_i) | x_i \in \mathcal{B}$ e $i \in I\}$ donde I es un conjunto infinito de indices, no tiene un subrecubrimiento finito. Es decir que para todo $I_0 \subsetneq I$, $|I_0| < \aleph_0$, $\bigcup_{i \in I_0} u(x_i) \neq \mathcal{SB}$, es decir que $\mathcal{SB} - \bigcup_{i \in I_0} u(x_i) \neq \emptyset$. Ahora bien, como u es un isomorfismo, $\mathcal{SB} - \bigcup_{i \in I_0} u(x_i) = \bigcap_{i \in I_0} u(-x_i) = u\big(\bigwedge_{i \in I_0} -x_i\big) \neq u(0)$, pues $\emptyset = u(0)$ y por lo tanto $\bigwedge_{i \in I_0} -x_i \neq 0$. Así pues, el conjunto $X = \{-x_i | i \in I\}$ tiene la propiedad de **pif** y por lo que se puede extender a un ultrafiltro $\mathcal{U}$[1]. Sin embargo $\mathcal{U} \in u(-x_i), \forall i \in I$, es decir que $-x_i \in \mathcal{U}, \forall i \in I$, así que $\mathcal{U} \notin \bigcup_{i \in I} u(x_i)$ lo que contradice que $V = \{u(x_i) | x_i \in \mathcal{B}$ e $i \in I\}$ sea un recubrimiento de $\mathcal{SB}$.

□

Ejemplo A.4.4.

1. *Considere el espacio $X = \{0\} \cup \{\frac{1}{n}\}_{n \in \omega}$ como subespacio de $\mathbb{R}$, con la topología usual. Este espacio es un espacio booleano:*

   $\underline{X\textit{ es un espacio de Hausdorff:}}$
   Sean $x, z \in X$, entonces existe un $y \in \mathbb{R}$ tal que si suponemos que $x \leq z$, entonces $x \leq y \leq z$. Ahora bien, los abiertos $(-\infty, y) \cap X, (y, \infty) \cap X$ son dos abiertos disyuntos tales que $x \in (-\infty, y) \cap X$ y $z \in (y, \infty) \cap X$.

   $\underline{X\textit{ es un espacio totalmente disconexo:}}$
   Sea $Y \subset X$ tal que $Y = \{x, z\}$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $x \leq z$, entonces existe un número irracional y tal que $x \leq y \leq z$ y $Y = \big((-\infty, y) \cap Y\big) \cup \big((y, \infty) \cap Y\big)$. Así pues X es totalmente disconexo.

   $\underline{X\textit{ es un espacio compacto:}}$
   Sea $\mathcal{V}$ un recubrimiento de X, existe un abierto $u \in \mathcal{V}$ tal que $0 \in u$. Ahora bien, todos los elementos de la forma $\frac{1}{n}, n \in \omega$, salvo finitos se encuentran en u.

[1]Consultar Apéndice A.3

Bibliografía

[A] Adamowicz, Z. *Logic of mathematics : a modern course of classical logic*, New York: John Wiley and Sons, 1997.

[BM] Bell, J. L. Machover, M. *A Course in Mathematical Logic*, Amsterdam: North-Holland Publishing, 1977.

[BS] Bell, J. L. Slomson, A. B. *Models and ultraproducts: an introduction*, Amsterdam: North-Holland Publishing, 1969.

[C] Casanovas, E. *Teoría de Modelos*, Preprint, 2000.

[CK] Chang, C. C. Keisler, H. J. *Model Theory*, Amsterdam; New York: North-Holand Publishing, 1990.

[EFT] Ebbinghaus, H.D. Flum, J. Thomas, W. *Mathematical Logic*, New York: Springer-Verlag, 1984.

[HJ] Hrbacek, K. Jech, T. *Introduction to Set Theory*, New York: Marcel Dekker, Inc, 1999.

[K] Keisler, H. J. *Model Theory for Infinitary Logic*, Amsterdam: North-Holand Publishing, 1971.

[M] Marker, D. *Model Theory: an introduction*, New York: Springer, 2002.

[Mo] Morley, M. *Proceedings of the Tarski Symposium: Aplications of Topology to* $L_{\omega_1\omega}$, Rhode Island: American Mathematical Society, 1974.

[Mu] Munkres, J. R. *Topología*, Madrid: Pearson Educación, S.A, 2002.

[P] Posada, J. P.*Cardinalidad de espacios de Stone y el Teorema de Morley*, Bogotá, D. C: Uniandes, 2002.