

Estructuras de Hodge puras.

por

Nicolás Suescún Gómez

Trabajo presentado al Departamento de Matemáticas de la Universidad de los Andes
en el cumplimiento parcial de los requisitos para optar el título de

Matemático

de la

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES

Septiembre 2008

© Nicolás Suescún Gómez, 2008

El autor agradece a la Universidad de los Andes su permiso de poder
distribuir copias de este documento tesis completamente o parcialmente.

Firma del autor
Nicolás Suescún Gómez
19 de Mayo de 2008

Certificado por
Andrés Rodríguez Arias
Departamento de Matemáticas
Director de la tesis

Aceptado por
Luis Jaime Corredor Londoño
Director, Departamento de Matemáticas

Resumen

En este escrito se presentan nociones introductorias a la geometría diferencial, con el objetivo de presentar las estructuras de Hodge puras. Este escrito se divide en tres partes. En la primera parte de éste, presento las ideas necesarias para entender las variedades diferenciales y analíticas, en esta parte también expongo las definiciones de formas diferenciales y haces. En la segunda parte, describo que es una métrica Hermitiana, y los operadores que induce ésta además del operador d sobre $\mathcal{E}^*(X)$, con X variedad analítica. Después de esto expongo la cohomología de Čech y la Dolbault. Estas son las que luego nos llevan a la descomposición de Hodge de la cohomología de de Rham para una variedad de Kähler. En la última parte de este escrito, expongo como recuperar la estructura compleja de un toro a partir de su descomposición de Hodge. Junto con un par de ejemplos, para mostrar la utilidad y la forma de usar esta información de una variedad.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Notación	1
1.2. Variedades Diferenciales	1
1.3. Haces	6
1.4. Formas	8
2. Métricas y Cohomología	11
2.1. Métricas	11
2.2. Cohomología	13
2.3. Variedades de Kähler	17
3. Cálculos	21
3.1. Esfera	21
3.2. Toro	22

Capítulo 1

Introducción

1.1. Notación

Por practicidad, en este escrito usaré algunas notaciones ligeramente diferentes a las encontradas en los textos de álgebra y geometría. Además asumiré las pruebas de los teoremas y las definiciones básicas de temas que refieren a espacios topológicos y fibrados vectoriales. La teoría de fibrados vectoriales que se usa viene de [3].

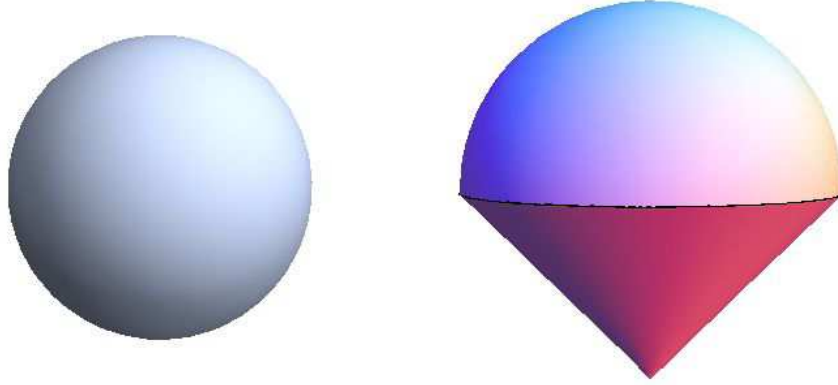
Notación 1. Si $f : X \rightarrow Y$ es una función y $U \subseteq X$, $f[U] := \{y \in Y : \exists x \in U(f(x) = y)\}$.

Notación 2. Si $\mathfrak{A} = \{A_i\}_{i \in I}$ entonces $\bigcup \mathfrak{A} := \bigcup_{i \in I} A_i$.

Notación 3. Para V espacio vectorial $\bigwedge^k V = \left(\bigotimes_{i=1}^k V \right) / \langle v \otimes v \rangle$.

1.2. Variedades Diferenciales

Las variedades son espacios topológicos, con alguna estructura adicional que da información acerca de su parecido con \mathbb{R}^n y \mathbb{C}^n . En esencia uno puede tener dos espacios geométricos distintos que son topológicamente equivalentes. Por ejemplo la esfera (S^2) y una esfera con una punta, la cual se puede ver como un cono con media esfera pegada en su base.



Este segundo espacio topológico viene parametrizado por $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (\sqrt{x^2 + y^2} = z + 1) \wedge (x^2 + y^2 \leq 1)\} \cup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{-x^2 - y^2 + 1} = z\}$. Aunque topológicamente son homeomorfos, hay un punto del cono al que no se le puede poner un plano tangente ($P : (0, 0, -1)$), en cambio, a la esfera se le puede poner un plano tangente en cualquier punto.

La información que se agrega a un espacio topológico, nos permite encontrar estas diferencias. Las siguientes definiciones son una primera forma de agregar información a un espacio topológico.

Definición 1.2.1. Dado un espacio topológico X , y $U \subseteq X$ abierto, una *carta* es una pareja ordenada (U, φ) donde $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un homeomorfismo en su imagen.

Para X espacio topológico, dadas dos cartas (U_1, φ_1) y (U_2, φ_2) , se dice que éstas son compatibles si $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ ó si

$$\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} : \varphi_2[U_1 \cap U_2] \rightarrow \varphi_1[U_1 \cap U_2]$$

y

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1[U_1 \cap U_2] \rightarrow \varphi_2[U_1 \cap U_2]$$

son de clase C^p ¹. Estas funciones se denominarán funciones de transición.

¹ p puede ser cualquier natural o ∞

Definición 1.2.2. Un atlas es una familia de cartas $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ tales que son compatibles 2 a 2 y $\{U_i\}_{i \in I}$ es un recubrimiento para X .

Un atlas lo podemos clasificar según las funciones de transición; si éstas son todas de clase por lo menos C^p , decimos que el atlas es de clase C^p .

Definición 1.2.3. La pareja (X, \mathcal{A}) es una variedad diferencial donde X es un espacio topológico Hausdorff, junto con \mathcal{A} atlas maximal. En el sentido que si (U, φ) es una carta y $(U, \varphi) \notin \mathcal{A}$ entonces existe $(V, \psi) \in \mathcal{A}$, tal que (U, φ) y (V, ψ) no son compatibles.

Un sistema de coordenadas en V de clase C^p es un conjunto de funciones $x = (x_1, \dots, x_n)$ tales que para $(\varphi, U) \in \mathcal{A}$, tanto $\varphi \circ x^{-1}$ como $x \circ \varphi^{-1}$ son de clase C^p .

Observación 1.2.1. Dado un atlas \mathcal{A} de clase C^p existe un único atlas maximal \mathcal{A}' que lo contiene y es de clase C^p .

Demostración. Para la demostración suponga todos los atlas sobre un espacio topológico X fijo. Sea $\mathfrak{A}(\mathcal{A}) = \{\mathcal{B} : \mathcal{B} \text{ es atlas y de clase } C^p, \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}\}$. Sea $\mathcal{A}' = \bigcup \mathfrak{A}(\mathcal{A})$. Sean $(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2) \in \mathcal{A}'$; Suponga que $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, sea $(V_i, \psi_i) \in \mathcal{A}$, $i \in I$ una familia de cartas tal que

$$U = U_1 \cap U_2 \subseteq \bigcup \{V_i\}_{i \in I}$$

Ahora considere $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} \upharpoonright (U \cap V_i)$. En este abierto se tiene que

$$\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} = \varphi_1 \circ (\psi_i^{-1} \circ \psi_i) \circ \varphi_2^{-1} = (\varphi_1 \circ \psi_i^{-1}) \circ (\psi_i \circ \varphi_2^{-1})$$

Como $\varphi_1 \circ \psi_i^{-1}$ y $\psi_i \circ \varphi_2^{-1}$ son compatibles pues los atlas en el que están (U_1, φ_1) y (U_2, φ_2) está (V_i, ψ_i) . Luego $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} \upharpoonright (U \cap V_i)$ es de clase C^p . Análogamente se tiene para $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} \upharpoonright (U \cap V_i)$, luego como $\{V_i\}_{i \in I}$ es un cubrimiento para U , se tiene que $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ y $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ son de clase C^p . Entonces se tiene que \mathcal{A}' es un atlas de clase C^p . Sea $(V, \psi) \notin \mathcal{A}'$ carta, considere el conjunto $\mathcal{A} \cup \{(V, \psi)\}$, éste conjunto no es un atlas porque de ser así se tendría que $(V, \psi) \in \mathcal{A}'$. Por lo tanto (V, ψ) es incompatible con alguna carta de \mathcal{A} , entonces \mathcal{A}' es un atlas maximal. Cabe notar que $\mathcal{A}' \in \mathfrak{A}(\mathcal{A})$, esto implica la unicidad de éste atlas. \square

Esta observación lo que nos permite, en general, es trabajar con un atlas pequeño en vez de tener que trabajar con un atlas casi inconcebible. Además, para efectos prácticos, como verificar que una función continua entre dos variedades es un morfismo de variedades resulta mucho más sencillo. Aunque no he definido que es un morfismo entre variedades, éste se define de una forma natural.

Definición 1.2.4. Dadas dos variedades (X, \mathcal{A}) e (Y, \mathcal{B}) y $f : X \rightarrow Y$ una función continua. Si para $(V, \psi) \in \mathcal{B}$ y para cada $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ tal que $f^{-1}(V) \cap U \neq \emptyset$ se tiene que

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi[f^{-1}(V) \cap U] \rightarrow \psi[f[U] \cap V]$$

es de clase C^p . Entonces f es un morfismo entre X e Y .

Con esta definición de morfismo, ya es más fácil responder la discusión original. Básicamente se reduce a notar que la esfera tiene una estructura de variedad diferencial C^∞ y la esfera con la punta no, porque ésta, en las vecindades de la punta las cartas van a ser de clase C^0 . Más adelante, cuando dé explícitamente los atlas para estas variedades, formalizaré esta idea. Por ahora seguiré introduciendo nociones que ayudarán a seguir caracterizando diferencias entre espacios topológicos.

La noción de variedad diferencial se puede extender a variedad analítica. Ahora supongamos que (X, \mathcal{A}) es una variedad diferencial. Si $(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2)$ son cartas, tales que $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$. Podemos pensar que $\varphi : U_i \rightarrow \mathbb{C}^n$. Pues hay un homeomorfismo natural entre \mathbb{R}^{2n} y \mathbb{C}^n . Ahora, en vez de pedir que las funciones de transición sean de clase C^p , podríamos requerir que éstas sean holomorfas, es decir, como ahora tenemos mapas entre abiertos de \mathbb{C}^n (las funciones de transición), podemos pedir que en estos abiertos estos mapas cumplan las condiciones de Cauchy-Riemann. Ésto es una variedad analítica, además esta estructura que adquiere la variedad es mucho más restrictiva que requerir que sea de clase C^p , en la medida que no toda variedad de dimensión $2n$ se puede dotar de estructura compleja.

Un ejemplo de una variedad compleja es el plano proyectivo $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$. Éste se construye de la siguiente forma: Considere $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ y la siguiente relación de equivalencia: $(z_0, \dots, z_n) \sim (z'_0, \dots, z'_n) \iff (z_0, \dots, z_n) = \lambda \cdot (z'_0, \dots, z'_n)$. Ahora $\mathbb{C}\mathbb{P}^n = (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim$, y un punto

en $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ lo denotaré como $p = (z_0 : \cdots : z_n)$. Note que el siguiente conjunto es abierto: $U_i := \{(z_0 : \cdots : z_i : \cdots : z_n) \in \mathbb{C}\mathbb{P}^n : z_i \neq 0\}$, para $0 \leq i \leq n$ la familia $\{U_i\}$ forma un recubrimiento para $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$. En cada uno de estos abiertos, podemos fijar un representante para cada elemento en U_i , $(z_0 : \cdots : z_i : \cdots : z_n) = (\frac{z_0}{z_i} : \cdots : 1 : \cdots : \frac{z_n}{z_i})$, y este representante nos induce un homeomorfismo, que es el siguiente mapa $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}^n$, tal que $\varphi_i((z_0 : \cdots : 1 : \cdots : z_n))^3 = (z_0, \dots, \hat{1}, \dots, z_n)$. Por otro lado, considere $V_i = \{\bar{z} \in \mathbb{C}^n : z_i \neq 0\}$, note que $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : V_i \rightarrow V_j$ y que $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}((z_1, \dots, z_n)) = (\frac{z_1}{z_i}, \dots, \frac{z_j}{z_i}, \frac{1}{z_i}, \frac{z_{j+1}}{z_i}, \dots, \frac{z_{i-1}}{z_i}, \frac{z_{i+1}}{z_i}, \dots, \frac{z_n}{z_i})^4$. Este mapa es claramente holomorfo donde está definido (V_i). Esto es un primer ejemplo de una variedad compleja, para la variedad $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$, las cartas y mapas de transición se definen de forma análoga y estas son C^∞ . Por otro lado para continuar con la discusión con la que comenzamos, tenemos que $\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \cong \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, donde $\infty = (1 : 0)$. Entonces tenemos que $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ es la compactificación por punto de \mathbb{C} , luego $\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \cong S^2$, con esto ya probamos que S^2 tiene una estructura C^∞ . Ahora falta ver que X (el espacio topológico definido al principio) no le podemos agregar una estructura de variedad diferenciable. Cabe aclarar que este conjunto tiene la topología inducida por \mathbb{R}^3 . Entonces considere los siguientes 3 abiertos: $U_1 := X \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0\}$, $U_2 := X \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z < 0\}$ y $U_3 := X \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in (-\frac{1}{10}, \frac{1}{10})\}$. Sean $\varphi_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ y $\varphi_2 : U_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definidas de la siguiente forma $\varphi_i((x, y, z)) = (x, y)$, para $i = 1, 2$. Estas funciones son homeomorfismos en su imagen⁵. Finalmente defina $\varphi_3 : U_3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de la siguiente forma:

$$\varphi_3((x, y, z)) = \begin{cases} (x, y) & , \text{ si } z \geq 0 \\ (\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}) & , \text{ si } z \leq 0 \end{cases}$$

Note que esta función está bien definida para $z = 1$, pues en ambos casos la ecuación $x^2 + y^2 = 1$ se cumple, entonces por definición de la función en ambos casos se tiene la igualdad.⁶ Para ver que esto es un atlas en X falta ver que esta familia de cartas son compatibles. En primera instancia (U_3, φ_3) y (U_1, φ_1) son compatibles, pues éstas al componerlas nos dan la identidad.

²Esta construcción se puede hacer en general para cualquier espacio vectorial V sobre un campo k , y se denotaría $V\mathbb{P}^n$

³el 1 está en la i -ésima posición

⁴Esto en el caso que $j < i$, en el caso $i < j$ sería de forma análoga

⁵Esto viene dado porque son la restricción de la proyección de \mathbb{R}^3 a \mathbb{R}^2

⁶De aquí también se sigue que esta función es continua, pues son dos funciones continuas que se pegan y en su intersección coinciden.

Se tiene también que (U_1, φ_1) y que (U_2, φ_2) son compatibles, pues estas tienen intersección vacía. El último caso se traduce en ver que la función compleja $f(z) = \frac{1}{z}$ es una función continua, pues esta función es en últimas la que define la segunda parte de la carta subyacente al abierto U_3 . Con esto ya tenemos el atlas que queríamos sobre X , y faltaría ver que éste no es de clase C^∞ . Para esto considere la siguiente función: $\psi : U_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\psi((x, y, z)) = (xz, yz)$ ⁷. Entonces $\psi \circ \phi_2^{-1}(x, y) = (x\sqrt{x^2 + y^2} - x, y\sqrt{x^2 + y^2} - y)$. Luego tenemos que esta función no es diferenciable en $(0, 0)$ y por esto tendríamos que en X el atlas es de clase C^0 .

1.3. Haces

Otra forma de agregar información a un espacio topológico es por medio de haces, estos objetos nos permiten guardar información acerca de la relación de regiones pequeñas de un espacio topológico y regiones grandes de éste. En general se denota un haz con la letra \mathcal{F} por el nombre de este en francés *faisceau*.

Definición 1.3.1. Sea X un espacio topológico, un haz \mathcal{F} le asocia a cada abierto $U \subseteq X$ un grupo (Anillo, Espacio vectorial, etc ...) $\mathcal{F}(U)$, llamado las secciones de \mathcal{F} sobre U . Para cada par de abiertos $U \subseteq V$ existe una función $\rho_{V,U} : \mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{F}(U)$, llamada función de restricción, y ésta satisface las siguientes condiciones:

1. Para cualquier terna de abiertos $U \subseteq V \subseteq W$ se tiene que $\rho_{W,U} = \rho_{V,U} \circ \rho_{W,V}$.

Notación 4. Gracias a esta propiedad se puede usar si confusión $\rho_{U,V}(\sigma) = \sigma \upharpoonright_V$

2. Para cualquier par de abiertos U, V y secciones $\sigma \in \mathcal{F}(U), \tau \in \mathcal{F}(V)$ tales que $\sigma \upharpoonright_{U \cap V} = \tau \upharpoonright_{U \cap V}$ entonces existe $\rho \in \mathcal{F}(U \cup V)$ tal que $\rho \upharpoonright_U = \sigma$ y $\rho \upharpoonright_V = \tau$.
3. Si $\sigma \in \mathcal{F}(U \cup V)$ y $\sigma \upharpoonright_U = \sigma \upharpoonright_V = 0$, luego $\sigma = 0$.

Este objeto, aquí definido nos da una herramienta para el estudio de variedades, pues este agrega información local de un espacio topológico y nos permite pasar a información global.

⁷Esta función junto con U_3 también forma una carta para X .

Definición 1.3.2. Sea $p \in X$ y \mathcal{F} haz sobre X el tallo de \mathcal{F} en p se denota como:

$$\mathcal{F}_p = \lim_{\substack{\longrightarrow \\ p \in U}} \mathcal{F}(U)$$

Cabe notar que el límite es inducido por el mapa de restricción inherente al haz \mathcal{F} .

Considere una variedad (X, \mathcal{A}) sobre \mathbb{C} , el haz de funciones holomorfas sobre X , es tal que, $\mathcal{O}_X(U) = \{f : U \rightarrow \mathbb{C} \mid f \circ \varphi^{-1} : \varphi[U \cap V] \rightarrow \mathbb{C}, \text{ es holomorfa para cualquier } (V, \varphi) \in \mathcal{A}\}$. La restricción de este haz se define de forma natural. Ahora sea $p \in X$ y considere $\mathcal{O}_{X,p}$, esto es un anillo local, con ideal maximal $m_p = \{f : f(p) = 0\}$. Éste anillo son los gérmenes de funciones en p , además este es noetheriano, con $\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_{X,p}) = \dim(X) = \dim(\frac{m_p}{m_p^2})$. Para ver esto bastaría ver que los generadores de m_p son $\beta = \{z_i - a_i\}$, con $p = (a_1, \dots, a_n)$ y $z = (z_1, \dots, z_n)$ sistema de coordenadas holomorfo. Claramente estos están en m_p , y son linealmente independientes sobre \mathbb{C} . Notar que no hay más generadores se sigue de considerar la serie de Taylor alrededor de p para $f \in m_p$. Para esta función no hay términos de orden 0 en la serie de Taylor y todos los términos de orden n son divisibles por algún elemento de β , luego podemos escribir $f = \sum_{i=1}^n (z_i - a_i) \cdot f_i$, con $f_i \in \mathcal{O}_{X,p}$.

Definición 1.3.3. Para X variedad compleja y $p \in X$ el *espacio tangente real a X en p* , $T_{\mathbb{R},p}(X)$ se puede ver como el espacio de derivaciones \mathbb{R} -lineales en el anillo de funciones reales C_p^∞ donde consideramos a X como variedad real de dimensión $2n$ y $z_i = x_i + iy_i$. Luego $T_{\mathbb{R},p}(X) = \mathbb{R}\{\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial y_i}\}$

Definición 1.3.4. $T_{\mathbb{C},p}(X) = T_{\mathbb{R},p} \otimes \mathbb{C}$ es el espacio tangente a X en p complexificado. Éste se puede ver como el espacio de derivaciones \mathbb{C} -lineales sobre funciones con valores complejos en el anillo C_p^∞ , se puede escribir $T_{\mathbb{C},p}(X) = \mathbb{C}\{\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial y_i}\} = \mathbb{C}\{\frac{\partial}{\partial z_i}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_i}\}$. Donde $\frac{\partial}{\partial z_i} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x_i} - i\frac{\partial}{\partial y_i})$ y $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_i} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x_i} + i\frac{\partial}{\partial y_i})$

Definición 1.3.5. $T'_p(X) = \mathbb{C}\{\frac{\partial}{\partial z_i}\} \subset T_{\mathbb{C},p}(X)$ es el espacio tangente holomorfo a X en p . Se puede ver que el espacio de derivaciones que se anulan en funciones antiholomorfas es independiente del sistema de coordenadas que se elija. El subespacio $T''_p(X) = \mathbb{C}\{\frac{\partial}{\partial \bar{z}_i}\}$ se llama espacio tangente antiholomorfo a X en p . Esto induce la siguiente descomposición $T_{\mathbb{C},p}(X) = T'_p(X) \oplus T''_p(X)$. Cabe también notar que $\overline{T'_p(X)} = T''_p(X)$, esto debido a que la definición de $T_{\mathbb{C},p}$ como espacio vectorial sobre \mathbb{R} tensorizado con \mathbb{C} , por medio del mapa $\frac{\partial}{\partial z_i} \longrightarrow \frac{\partial}{\partial \bar{z}_i}$.

Definición 1.3.6. Para (X, \mathcal{A}) variedad, sea $U \subseteq X$ abierto defina $\mathcal{T}(U) = \text{der}(\mathcal{O}_X(U))$, donde para $f, g \in \mathcal{O}_X(U)$ y $D \in \mathcal{T}(U)$ se tiene que $D : \mathcal{O}_X(U) \rightarrow \mathcal{O}_X(U)$ es una transformación lineal ($\mathcal{T}(U)$ es un espacio vectorial sobre \mathbb{C}) y $D(f \cdot g) = (Df) \cdot g + f \cdot (Dg)$

Observación 1.3.1. 1. $\mathcal{T}(U)$ es un $\mathcal{O}_X(U)$ -módulo.

2. \mathcal{T} es un haz de \mathcal{O}_X -módulos.

3. Para $p \in X$ \mathcal{T}_p tiene como base $\{\frac{\partial}{\partial z_i}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_i} : 1 \leq i \leq n\}$

1.4. Formas

Para comenzar denote $\mathcal{E}^1(U) = (T_M(U))^*$ donde $T_M(U) = \bigcup_{p \in U} T_{\mathbb{C}, p}$ y $U \subseteq M$, con una base dual $(\frac{\partial}{\partial z_i})^* = dz_i$. Luego esto nos induce una descomposición en $\mathcal{E}_X^1 = (T')^* \oplus (T'')^*$ analoga a la del fibrado tangente donde denotamos $(T')^* = \mathcal{E}_X^{(1,0)}$ y $(T'')^* = \mathcal{E}_X^{(0,1)}$.

Definición 1.4.1. El espacio de las k -formas se define como $\mathcal{E}_X^k = \bigwedge^k \mathcal{E}_X^1$. En esta notación omito el hecho que las secciones de este espacio están definidas sobre abiertos de X . De aquí en adelante lo omitiré y sólo cuando sea necesario referirme a las secciones explícitamente lo haré.

Note que este espacio tiene una descomposición inducida por la descomposición en $\mathcal{E}^1 = \mathcal{E}^{(1,0)} \otimes \mathcal{E}^{(0,1)}$. Entonces $\mathcal{E}^{(p,q)} = \bigwedge^p \mathcal{E}^{(1,0)} \otimes \bigwedge^q \mathcal{E}^{(0,1)}$ luego la descomposición en las k -formas es $\mathcal{E}^k = \bigoplus_{p+q=k} \mathcal{E}^{(p,q)}$ con $\mathcal{E}^{(p,q)} = \overline{\mathcal{E}^{(q,p)}}$.

Notación 5. $\mathcal{E}^* = \bigwedge^* \mathcal{E}^1 = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{E}^k$ con \mathcal{E}^0 las funciones \mathcal{C}^∞ sobre X .

Si \mathcal{E}^1 tiene dimensión d como espacio vectorial, para $k > d$ se tiene que $\mathcal{E}^k = 0$. Por otro lado se define la proyección $\Pi^{(p,q)} : \mathcal{E}^* \rightarrow \mathcal{E}^{(p,q)}$ de forma natural.

Definición 1.4.2. Sea $d : \mathcal{E}^k \rightarrow \mathcal{E}^{k+1}$ la extensión compleja de la derivada exterior. Luego $\partial : \mathcal{E}^{(p,q)} \rightarrow \mathcal{E}^{(p+1,q)}$ y $\bar{\partial} : \mathcal{E}^{(p,q)} \rightarrow \mathcal{E}^{(p,q+1)}$ se definen como:

$$\partial = \Pi^{(p+1,q)} \circ d \quad \text{y} \quad \bar{\partial} = \Pi^{(p,q+1)} \circ d$$

Para cualquier función f definida en un abierto U se tiene

$$df = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x_i} f dx_i + \frac{\partial}{\partial y_i} f dy_i \right) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial z_i} f dz_i + \frac{\partial}{\partial \bar{z}_i} f d\bar{z}_i \right)$$

Esto nos da idea de cómo actúa tanto ∂ como $\bar{\partial}$ sobre las formas, es decir, sea $\omega \in \mathcal{E}^{(p,q)}$ tal que $\omega = f dz_{i_1} \wedge \cdots \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_{j_q}$, luego

$$\partial\omega = \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial z_k} f dz_k \wedge dz_{i_1} \wedge \cdots \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_{j_q}$$

y

$$\bar{\partial}\omega = \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} f d\bar{z}_k \wedge dz_{i_1} \wedge \cdots \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_{j_q}$$

. Esta descripción local nos lleva al siguiente lema.

Lema 1.4.1. 1. $d = \partial + \bar{\partial}$

2. $\partial^2 = \bar{\partial}^2 = 0$ y $\partial\bar{\partial} = -\bar{\partial}\partial$

3. Tanto ∂ como $\bar{\partial}$ satisfacen la regla de Leibniz, i.e.

$$\partial(\alpha \wedge \beta) = \partial(\alpha) \wedge \beta + (-1)^{p+q} \alpha \wedge \partial(\beta)$$

$$\bar{\partial}(\alpha \wedge \beta) = \bar{\partial}(\alpha) \wedge \beta + (-1)^{p+q} \alpha \wedge \bar{\partial}(\beta)$$

Demostración. 1. Esto se sigue de la descripción local que se dio anteriormente de ∂ y $\bar{\partial}$.

2. Primero note que $0 = d^2 = \partial^2 + \bar{\partial}^2 + \partial\bar{\partial} - \bar{\partial}\partial$. El caso que $\partial^2 = 0$ se sigue de calcularlo para una forma

$$\omega = \sum_{k=1}^n f dz_{i_1} \wedge \cdots \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_{j_q}$$

Entonces

$$\partial^2(\omega) = \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial z_j} \cdot dz_l \wedge dz_k \wedge dz_{i_1} \wedge \cdots \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_{j_q}$$

Luego de ahí se sigue que cuando $k = l$ los términos se anulan, y como

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial z_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial z_j \partial z_i}$$

Entonces el resto de términos se anulan, pues las formas son alternantes. Análogamente se tiene para $\bar{\partial}^2$.

3. Esto último se sigue de considerar las $(p+r+1, q+s)$ -partes y $(p+r, q+s+1)$ -partes en $d(\alpha \wedge \beta) = d(\alpha) \wedge \beta + (-1)^{p+q} \alpha \wedge d(\beta)$. Estas partes lo prueban para ∂ y $\bar{\partial}$ respectivamente.

□

Capítulo 2

Métricas y Cohomología

2.1. Métricas

Definición 2.1.1. Una variedad compleja X es una *variedad Hermitiana*, si su fibrado tangente holomorfo $T_X^{1,0}$ tiene estructura de fibrado Hermitiano.

Toda variedad compleja, se le puede inducir una estructura Hermitiana, pues éstas son localmente isomorfas a \mathbb{C}^n . Usando una partición de la unidad suave en X se le puede dotar de una estructura de variedad Hermitiana a X .

El producto escalar en $T_{X,x}^{1,0}$ es inducida por el emparejamiento

$$(\cdot, \cdot)_X : T_{X,x}^{1,0} \otimes \overline{T_{X,x}^{1,0}} \rightarrow \mathbb{C}$$

que depende localmente en X . En coordenadas locales el producto escalar Hermitiano está dado por

$$ds^2 = \sum_{i,j} h_{i,j}(z) dz_i \otimes \overline{dz_j}$$

y ds^2 es Hermitiano cuando $h_{i,j}(z) = \overline{h_{j,i}(z)}$.

La parte real e imaginaria del producto escalar (\cdot, \cdot) determina, respectivamente, un producto escalar euclidio y una 2-forma antisimétrica en el espacio vectorial $T_{X,x}^{1,0}$. Luego, bajo el isomor-

fismo natural $TX(\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} T_X^{1,0}$, la métrica Hermitiana ds^2 induce la métrica Riemanniana

$$\text{Re}ds^2 : T_x X(\mathbb{R}) \otimes T_x X(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

en X . La forma antisimétrica

$$\text{Im}ds^2 : T_x X(\mathbb{R}) \otimes T_x X(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

defina una 2-forma diferencial $\Omega = -\frac{1}{2}\text{Im}ds^2$, que llamaré la forma asociada a la métrica Hermitiana. Por el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt, se pueden encontrar formas $\phi_1, \dots, \phi_n \in T_{x,X}^{1,0}$, tal que la métrica Hermitiana se puede escribir localmente como $ds^2 = \sum_j \phi_j \otimes \overline{\phi_j}$.

En el contexto de esta métrica podemos definir un producto interno como:

Definición 2.1.2. Considere este producto interno en $\mathcal{E}^*(X)$:

$$(\alpha, \beta) := \int_X g(\alpha, \beta) * 1$$

Con este producto interno podemos considerar el operador adjunto a d , llámelo δ , éste se puede calcular explícitamente, por medio del operador $*$ de Hodge que se define como:

Definición 2.1.3. Para un espacio vectorial V con un producto interno g . Para $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base ortogonal, $*$: $\wedge^k V \rightarrow \wedge^{n-k} V$ se define como $*(v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_k}) = v_{j_1} \wedge \dots \wedge v_{j_l}$, donde $k + l = n$ y ambos elementos no nulos, y $*1 = \text{vol}$, donde vol es la forma de volumen en V .

Esta definición aplica en particular para \mathcal{E}^* , que aquí es donde nos interesa este operador.

Observación 2.1.1. $\delta = - * d *$

Demostración. Sea ω una p -forma

$$\begin{aligned} (d\omega, \eta) &= \int_X d\omega \wedge *\eta \\ &= \int_X [d(\omega \wedge *\eta) + (-1)^k \omega \wedge * *^{-1} d * \eta] \\ &= (-1)^k (\omega, *^{-1} d * \eta) = -(\omega, * d * \eta) \end{aligned}$$

Entonces el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}^p(X) & \xrightarrow{\delta} & \mathcal{E}^{p-1}(X) \\ \downarrow * & & -* \uparrow \\ \mathcal{E}^{n-p}(X) & \xrightarrow{d} & \mathcal{E}^{n-p+1}(X) \end{array}$$

□

Cabe notar que este operador se descompone en $\delta' = -*\partial*$ y $\delta'' = -*\bar{\partial}*$, éstos son operadores de tipo $(-1, 0)$ y $(0, -1)$ respectivamente, además $\delta'^2 = \delta''^2 = 0$

2.2. Cohomología

A lo largo de este texto hemos introducido herramientas para establecer diferencias entre objetos geométricos. La cohomología es uno de estos objetos, éste a partir de un objeto geométrico nos da una familia de grupos, espacios vectoriales o anillos, que agregan bastante información al objeto geométrico en cuestión. En general, si tenemos una secuencia libre, con M un R -módulo, tal que $\phi_i \circ \phi_{i+1} = 0$

$$M \xrightarrow{\phi_1} M_1 \xrightarrow{\phi_2} \dots \xrightarrow{\phi_{i-1}} M_{i-1} \xrightarrow{\phi_i} M_i \xrightarrow{\phi_{i+1}} M_{i+1} \xrightarrow{\phi_{i+2}} \dots$$

El k -ésimo grupo de cohomología es $H^k(M) = \frac{\ker \phi_{k+1}}{\phi_k[M_{k-1}]}$.

En particular si tenemos un espacio geométrico X . Podemos considerar $\mathcal{E}^0 \xrightarrow{d} \mathcal{E}^1 \xrightarrow{d} \dots \mathcal{E}^0 \xrightarrow{d} \mathcal{E}^k \xrightarrow{d} \mathcal{E}^{k+1} \xrightarrow{d} \dots$. El k -ésimo grupo de cohomología de esta secuencia es $H_{dR}^k(X)$, también conocido como la cohomología de de Rham. A estos grupos les podemos dar una estructura de anillo graduado si consideramos $(\bigoplus H_{dR}^k(X), +, \wedge)$. Finalmente otra observación importante de esta estructura es que si X es una variedad sin frontera entonces para $\omega, \eta \in [\omega] \in H_{dR}^k X$ $\int_X \omega = \int_X \eta$. Esto se sigue directamente del teorema de Stokes, y de que $d\omega - d\eta = d(\omega - \eta)$.

Definición 2.2.1. Suponga X es un espacio topológico y \mathcal{F} es un haz de grupos abelianos en X . También suponga que $\mathfrak{A} = \{U_i\}_{i \in I}$ es una cubierta para X de abiertos. Para $q = 0, 1, 2, \dots$

se define el grupo q -ésimo grupo de co-cadenas de \mathcal{F} , con respecto a \mathfrak{A} , como

$$C^q(\mathfrak{A}, \mathcal{F}) := \prod_{(i_0, \dots, i_q) \in I^{q+1}} \mathcal{F}(U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_q})$$

Luego una q -cadena es una familia $(f_{i_0}, \dots, f_{i_q})_{(i_0, \dots, i_q) \in I^{q+1}}$ tal que $f_{i_0, \dots, i_q} \in \mathcal{F}(U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_q})$, para todo $(i_0, \dots, i_q) \in I^{q+1}$. La suma de dos co-cadenas se define componente a componente. Ahora defina los operadores de co-frontera como

$$\delta : C^0(\mathfrak{A}, \mathcal{F}) \rightarrow C^1(\mathfrak{A}, \mathcal{F})$$

$$\delta : C^q(\mathfrak{A}, \mathcal{F}) \rightarrow C^{q+1}(\mathfrak{A}, \mathcal{F})$$

Donde para $(f_i)_{i \in I} \in C^0(\mathfrak{A}, \mathcal{F})$ considere $\delta((f_i)_{i \in I}) = (g_{ij})_{i, j \in I}$ donde $g_{ij} := f_j - f_i \in \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$.

Aquí se entiende que estamos considerando la restricción de f_j y f_i a la intersección $U_i \cap U_j$ y se toma su diferencia aquí.

Para el segundo caso tenemos lo siguiente:

$$\delta(f_{i_0, \dots, i_q})_{i_0, \dots, i_{q+1}} = \sum_{j=0}^{q+1} (-1)^j f_{i_0, \dots, j, \dots, i_q} \upharpoonright_{U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_q}}$$

Notación 6.

$$Z^P(\mathfrak{A}, \mathcal{F}) := \ker(\delta : C^i(\mathfrak{A}, \mathcal{F}) \rightarrow C^{i+1}(\mathfrak{A}, \mathcal{F}))$$

Definición 2.2.2. El cociente:

$$H^i(\mathfrak{A}, \mathcal{F}) := \frac{Z^P(\mathfrak{A}, \mathcal{F})}{\delta[C^{i-1}(\mathfrak{A}, \mathcal{F})]}$$

se llama el i -ésimo grupo de cohomología con coeficientes en \mathcal{F} con respecto al cubrimiento \mathfrak{A} . Sus elementos se denominan clases de cohomología, y dos co-ciclos que pertenezcan a la misma clase de cohomología, se denominan cohomólogos. Donde un co-ciclo, es un elemento del núcleo de δ .

Ahora, dados dos cubrimientos para un espacio topológico X $\mathfrak{A} = \{U_i\}_{i \in I}$ y $\mathfrak{B} = \{V_j\}_{j \in J}$,

decimos que \mathfrak{B} es un refinamiento de \mathfrak{A} si para todo $j \in J$ existe $i \in I$ tal que $V_j \subseteq U_i$ y escribimos $\mathfrak{B} < \mathfrak{A}$. Si $\mathfrak{B} < \mathfrak{A}$ entonces podemos encontrar una función $\phi : J \rightarrow I$ tal que para todo j se tiene que $V_j \subseteq U_{\phi(j)}$. Luego tendríamos el siguiente mapa inducido por ϕ :

$$\rho_\phi : C^p(\mathfrak{B}, \mathcal{F}) \rightarrow C^p(\mathfrak{A}, \mathcal{F})$$

definido de la siguiente forma:

$$(\rho_\phi \sigma)_{i_0, \dots, i_p} = \sigma_{\phi i_0, \dots, \phi i_p} \upharpoonright_{U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_p}}$$

Como $\delta \circ \rho_\phi = \rho_\phi \circ \delta$, entonces ρ_ϕ induce el homomorfismo:

$$\rho : H^p(\mathfrak{A}, \mathcal{F}) \rightarrow H^p(\mathfrak{B}, \mathcal{F})$$

que es independiente de ϕ .

Definición 2.2.3. Para X espacio topológico la cohomología de Čech se define como

$$H^p(X, \mathcal{F}) = \lim_{\mathfrak{A}} H^p(\mathfrak{A}, \mathcal{F})$$

En la práctica es casi imposible trabajar con la definición de esta cohomología como un límite directo. Pero es suficiente encontrar una cobertura \mathfrak{A} de X tal que $H^*(\mathfrak{A}, \mathcal{F}) = H^*(X, \mathcal{F})$. La existencia y la forma de calcular esta cobertura es dado por el teorema de Leray

Teorema 2.2.1. de Leray Si \mathfrak{A} es una cobertura acíclica para el haz \mathcal{F} en el sentido que

$$H^q(U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_p}, \mathcal{F}) = 0, \text{ para } q > 0, \text{ y cualquier } i_0 \dots i_p$$

Luego $H^*(\mathfrak{A}, \mathcal{F}) = H^*(X, \mathcal{F})$.

Demostración. Probaré este teorema sólo para haces sobre X espacio topológico que cumplen que si

$$0 \rightarrow \mathcal{E} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{F} \xrightarrow{\beta} \mathcal{G} \rightarrow 0 \quad (2.1)$$

entonces existe \mathfrak{A} cubrimiento arbitrariamente fino de X , tal que para cualquier $U = U_0 \cap \dots \cap$

U_p entonces

$$0 \rightarrow \mathcal{E}(U) \rightarrow \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U) \rightarrow 0$$

Afortunadamente para nosotros la mayoría de haces que aparecen de forma natural, como \mathcal{O}_X cumplen esto. En particular para todos los haces con los que tratamos en este escrito; así que, esta prueba es suficiente para los requerimientos de este texto. Ahora dada la secuencia exacta (2.1), tenemos mapas inducidos

$$C^p(\mathfrak{A}, \mathcal{E}) \xrightarrow{\alpha} C^p(\mathfrak{A}, \mathcal{F}), \quad C^p(\mathfrak{A}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\beta} C^p(\mathfrak{A}, \mathcal{G})$$

que conmutan con δ luego inducen los siguientes mapas

$$H^p(X, \mathcal{E}) \xrightarrow{\alpha^*} H^p(X, \mathcal{F}), \quad H^p(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\beta^*} H^p(X, \mathcal{G})$$

Ahora definimos el mapa de co-frontera $\delta^* : H^p(X, \mathcal{G}) \rightarrow H^{p+1}(X, \mathcal{E})$. Dado $\sigma \in C^p(\mathfrak{A}, \mathcal{G})$ con $\delta\sigma = 0$, siempre podemos pasar a un refinamiento \mathfrak{A}' de \mathfrak{A} y encontrar $\tau \in C^p(\mathfrak{A}', \mathcal{F})$ tal que $\beta(\tau) = \rho\sigma$. Luego $\beta\delta\tau = \delta\beta\tau = \delta\rho\sigma = 0$, entonces pasando a un refinamiento más allá \mathfrak{A}'' podemos encontrar $\mu \in C^{p+1}(\mathfrak{A}'', \mathcal{E})$ tal que $\alpha\mu = \delta\tau$; $\alpha\delta\mu = \delta\alpha\mu = \delta^2\tau = 0$ y ya que α es inyectivo esto significa que $\delta\mu = 0$. Luego $\mu \in Z^{p+1}(\mathfrak{A}'', \mathcal{E})$ y tomamos $\delta^*\sigma = \mu \in H^{p+1}(X, \mathcal{E})$.

Hecho: La secuencia:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & H^0(X, \mathcal{E}) & \rightarrow & H^0(X, \mathcal{F}) & \rightarrow & H^0(X, \mathcal{G}) \\ & & \rightarrow & H^1(X, \mathcal{E}) & \rightarrow & H^1(X, \mathcal{F}) & \rightarrow & H^1(X, \mathcal{G}) & \rightarrow & \dots \\ & & & & & \vdots & & & & \\ & & \rightarrow & H^p(X, \mathcal{E}) & \rightarrow & H^p(X, \mathcal{F}) & \rightarrow & H^p(X, \mathcal{G}) & \rightarrow & \dots \end{array}$$

es exacta. Luego podemos encontrar un recubrimiento arbitrariamente fino \mathfrak{A} para X tal que los grupos de co-cadenas forman una secuencia exacta:

$$0 \rightarrow C^p(\mathfrak{A}, \mathcal{E}) \rightarrow C^p(\mathfrak{A}, \mathcal{F}) \rightarrow C^p(\mathfrak{A}, \mathcal{G}) \rightarrow 0$$

Entonces de aquí se sigue el hecho mencionado anteriormente. □

Definición 2.2.4. Sea X una variedad compleja, luego la (p, q) -Dolbault cohomología es el espacio vectorial:

$$H^{p,q} = H^q(\mathcal{E}^{p,*}, \bar{\partial}) = \frac{\ker(\bar{\partial} : \mathcal{E}^{p,q}(X) \rightarrow \mathcal{E}^{p,q+1}(X))}{\bar{\partial}[\mathcal{E}^{p,q-1}]}$$

Vale la pena notar que esta también se puede calcular como $H^{p,q} = H^q(X, \Omega_X^p)$.

2.3. Variedades de Kähler

Hasta ahora se han definido varios operadores sobre \mathcal{E}^* , estos son la base para poder hacer la descomposición de Hodge.

Definición 2.3.1. El operador auto-adjunto $\Delta = (d + \delta)^2 = d\delta + \delta d$ se llama operador de Laplace o Laplaciano. Una forma ω se dice armónica si está en el kernel del Laplaciano, es decir, $\Delta\omega = 0$

Note que en el caso en que $ds^2 = \sum_{j=1}^n dz_j \otimes \bar{z}_j$ en \mathbb{C}^n , $\Delta = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_j^2} \right)$. De la definición del Laplaciano se tiene que este conmuta con d , δ y con $*$. Es decir $\Delta d = d\delta$, $\Delta\delta = \delta\delta$ y $\Delta* = *\Delta$. Con esto tenemos que si $\omega \in H^0(X, \mathcal{E}^*)$ es armónica si y sólo si $\delta\omega = d\omega = 0$. En particular toda forma armónica es cerrada. Ahora considere una variedad compacta X con métrica Hermitiana ds^2 y con ω su forma asociada.

Definición 2.3.2. Una variedad de Kähler se define como una variedad X con una métrica Hermitiana, tal que, la forma asociada es cerrada. Es decir, $d\omega = 0$.

Cabe anotar que $\mathcal{H}^k(X, g)$ es el espacio de las k -formas (d) -armónicas, en el caso en que la métrica sea clara se denota como $\mathcal{H}^k(X)$. Análogamente se define $\mathcal{H}^{p,q}(X, g)$ como el espacio de las (p, q) -formas armónicas.

Definición 2.3.3. Sea (X, g) una variedad Hermitiana compacta. Una forma $\alpha \in \mathcal{E}^*$ es $\bar{\partial}$ -armónica (resp. ∂ -armónica) si $\Delta_{\bar{\partial}}\alpha = 0$ (resp. $\Delta_{\partial}\alpha = 0$), más aún:

$$\mathcal{H}_{\bar{\partial}}^k(X, g) := \left\{ \alpha \in \mathcal{E}^k \mid (\bar{\partial} + \delta'')^2(\alpha) = \Delta_{\bar{\partial}}(\alpha) = 0 \right\}$$

$$\mathcal{H}_{\partial}^k(X, g) := \left\{ \alpha \in \mathcal{E}^k \mid (\partial + \delta')^2(\alpha) = \Delta_{\partial}(\alpha) = 0 \right\}$$

Lema 2.3.1. Sea (X, g) una variedad Hermitiana, no necesariamente compacta. Luego,

$$1. \mathcal{H}_{\bar{\partial}}^k = \bigoplus_{k=p+q} \mathcal{H}_{\bar{\partial}}^{p,q} \text{ y } \mathcal{H}_{\partial}^k = \bigoplus_{k=p+q} \mathcal{H}_{\partial}^{p,q}$$

2. Si (X, g) es de Kähler luego ambas descomposiciones coinciden con

$$\mathcal{H}^k(X, g) = \bigoplus_{p+q=k} \mathcal{H}^{p,q}(X, g)$$

En particular $\mathcal{H}^k(X, g) = \mathcal{H}_{\bar{\partial}}^k(X, g) = \mathcal{H}_{\partial}^k(X, g)$

Demostración. Sea $\alpha = \sum \alpha^{p,q}$ la descomposición bigraduada de una forma α . Claramente, si $\Delta_{\bar{\partial}}(\alpha^{p,q}) = 0$ para todo (p, q) luego también $\Delta_{\partial}(\alpha^{p,q}) = 0$. Por otro lado, $\Delta_{\bar{\partial}}(\alpha) = 0$ implica que $0 = \sum \Delta_{\bar{\partial}}(\alpha^{p,q})$ con $\Delta_{\bar{\partial}}(\alpha^{p,q}) \in \mathcal{E}^{p,q}$, pero la descomposición bigraduada es directa. Luego $\Delta_{\bar{\partial}}(\alpha^{p,q}) = 0$ en otras palabras los $(\alpha^{p,q})$ son armónicos. La prueba para el espacio de las formas ∂ -armónicas, es análoga.

La segunda afirmación se sigue de notar que $\Delta_{\partial} = \Delta_{\bar{\partial}} = \frac{1}{2}\Delta$ □

Teorema 2.3.1. Descomposición de Hodge Para una variedad compacta de Kähler X , la cohomología compleja satisface:

$$\begin{cases} H^r(X, \mathbb{C}) \cong \bigoplus_{p+q=r} H^{p,q}(X) \\ H^{p,q}(X) = \overline{H^{p,q}(X)} \end{cases}$$

Por el lema anterior tenemos que $H^{p,q}(X) \cong H_{\bar{\partial}}^{p,q} \cong H^q(X, \Omega^p)$. En particular tomando $q = 0$, $H^{p,0}(X) = H^0(X, \Omega^p)$ es el espacio de las p -formas holomorfas. Luego las formas holomorfas son armónicas para cualquier métrica en una variedad compacta de Kähler.

Este teorema se sigue de dos teoremas importantes:

Teorema 2.3.2. Sea (X, g) una variedad compacta Hermitiana. Luego existen dos descomposiciones naturales

$$\mathcal{E}^{p,q}(X) = \partial \mathcal{E}^{p-1,q} \oplus \mathcal{H}_{\partial}^{p,q} \oplus \delta' \mathcal{E}^{p+1,q}$$

y

$$\mathcal{E}^{p,q}(X) = \bar{\partial} \mathcal{E}^{p-1,q} \oplus \mathcal{H}_{\bar{\partial}}^{p,q} \oplus \delta'' \mathcal{E}^{p+1,q}$$

Los espacios $\mathcal{H}^{p,q}$ son finito-dimensionales. Si (X, g) es de Kähler luego $\mathcal{H}_{\partial}^{p,q} = \mathcal{H}_{\bar{\partial}}^{p,q}$

Teorema 2.3.3. *Sea (X, g) una variedad compacta Hermitiana. Luego la proyección $H : \mathcal{H}_{\bar{\partial}}^{p,q}(X, g) \rightarrow H^{p,q}(X)$ es un isomorfismo.*

Demostración. Ya que cualquier $\alpha \in \mathcal{H}_{\bar{\partial}}^{p,q}(X, g)$ es $\bar{\partial}$ -cerrado, enviar a α a su clase de cohomología de Dolbault $[\alpha] \in H_{\bar{\partial}}^{p,q}(X, g)$ define H . Más aún $\text{Ker}(\bar{\partial} : \mathcal{E}^{p,q}(X) \rightarrow \mathcal{E}^{p+1,q}(X)) = \bar{\partial}\mathcal{E}^{p-1,q} \oplus \mathcal{H}_{\bar{\partial}}^{p,q}$, como $\bar{\partial}\delta''\beta = 0$ si y sólo si $\delta''\beta = 0$. En efecto, $\bar{\partial}\delta''\beta = 0$ implica que $0 = (\bar{\partial}\delta''\beta, \beta) = \|\delta''\beta\|^2$. Luego, $H : \mathcal{H}_{\bar{\partial}}^{p,q}(X, g) \rightarrow H^{p,q}(X)$ es un isomorfismo. \square

Con estos dos teoremas ya se puede probar *Descomposición de Hodge*

Demostración. La descomposición es inducida por

$$H^k(X, \mathbb{C}) = \mathcal{H}^k(X, g) = \bigoplus_{p+q=k} \mathcal{H}^{p,q}(X, g) = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}(X)$$

que a priori dependería de la metrica de Kähler g . Sea g' una segunda metrica de Kähler asociada a X . Ambos grupos $\mathcal{H}^k(X, g)$ como $\mathcal{H}^k(X, g')$ están asociados de la siguiente forma:

$$\mathcal{H}^{p,q}(X, g) \cong H^{p,q}(X, \mathbb{C}) \cong \mathcal{H}^{p,q}(X, g')$$

Ahora falta probar que dado $\alpha \in \mathcal{H}^{p,q}(X, g)$ y su correspondiente $\alpha' \in \mathcal{H}^{p,q}(X, g')$ sus clases $[\alpha], [\alpha'] \in h^k(X, g)$ son iguales. Como α y α' inducen el mismo elemento en $H^{p,q}(X)$, ellos difieren en $\bar{\partial}\gamma$, i.e. $\alpha' = \alpha + \bar{\partial}\gamma$. Pero $d\bar{\partial}\gamma = d(\alpha' - \alpha) = 0$. Mas aun, $\bar{\partial}\gamma$ es ortogonal a $\mathcal{H}^k(X, g)$. Por la descomposición de d se tiene que $\bar{\partial}\gamma \in d[\mathcal{E}^{k-1}(X)]$. Entonces, $[\alpha] = [\alpha'] \in H^k(X, \mathbb{C})$. \square

Finalmente la generalización de estas ideas viene dado por las estructuras de Hodge

Definición 2.3.4. Una estructura de Hodge racional de peso k consiste de un espacio vectorial H y una descomposición asociada a una suma directa

$$H \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} = \bigoplus_{p+q=k} h^{p,q}$$

que satisface $H^{p,q} = \overline{H^{q,p}}$

Esta definición se puede extender a \mathbb{Z} -módulos libres, en vez de \mathbb{Q} -espacios vectoriales. Éstos se denominan estructuras de Hodge enteras. Dos estructuras de Hodge enteras H y H'

son isomorfas si y sólo si existe un isomorfismo de \mathbb{Z} -módulo $\varphi : H \cong H'$ tal que su extensión \mathbb{C} -linear satisface $\varphi_{\mathbb{C}}(H^{p,q}) = H'^{p,q}$.

Definición 2.3.5. Si X es una variedad compacta de Kähler la información $\{H_{\mathbb{Z}}, H^{p,q}\}$ es una estructura de Hodge de peso k si las siguientes condiciones se satisfacen:

$$H = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}, \quad H^{p,q} = \overline{H^{q,p}}$$

$$H_{\mathbb{Z}} = H^k(X, \mathbb{Z}) / (\text{torsion}), \quad H_{\mathbb{C}} = H_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{C} \simeq H^n(X, \mathbb{C})$$

y $H^{p,q}$ es la cohomología de tipo (p, q) en la descomposición de Hodge.

Finalmente uno puede definir una filtración dada una estructura de Hodge $\{H_{\mathbb{Z}}, H^{p,q}\}$ de peso n al fijar

$$F^p = H^{p,0} \oplus \dots \oplus H^{p,n-p}, \quad F^{n+1} = \{0\}$$

Ahora esto induce la filtración descendente

$$0 = F^{n+1} \subseteq F^n \subseteq \dots \subseteq F^0 = H$$

Entonces podríamos usar esta filtración para definir la estructura de Hodge pues

$$H^{p,q} = F^p \cap \overline{F^{n-p}}$$

Entonces esto reconstruye toda la información de la estructura de Hodge.

Capítulo 3

Cálculos

En este capítulo haré dos cálculos que son el objetivo de este escrito. El primer cálculo consiste en calcular explícitamente $H^1(\mathbb{P}^1, \mathbb{C})$, y mostrar su descomposición de Hodge. El segundo cálculo consiste en recuperar la estructura compleja de un Toro, a partir de su estructura de Hodge.

3.1. Esfera

En esta sección mostraré que \mathbb{P}^1 es de Kähler y calcularé los generadores de $H^2(\mathbb{P}^1)$. Lo primero consiste en ver que la forma asociada a la métrica de este espacio es cerrada. La métrica que tiene este espacio se denomina la métrica de *Fubini-Study*. Esta viene dada por $ds^2 = \frac{dzd\bar{z}}{(1+z\bar{z})^2}$. Esta $(1, 1)$ -forma es la inducida por la métrica usual de \mathbb{C} . También se puede ver de la siguiente forma: $ds^2 = \partial\bar{\partial} \ln(1+|z|^2)$. Ahora se sabe que

$$H^0(\mathbb{P}^1, \mathbb{C}) = H^1(\mathbb{P}^1, \mathbb{C}) = 0$$

y que

$$H^2(\mathbb{P}^1, \mathbb{C}) = H^{2,0}(\mathbb{P}^1, \mathbb{C}) \oplus H^{1,1}(\mathbb{P}^1, \mathbb{C}) \oplus H^{0,2}(\mathbb{P}^1, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}$$

Como en \mathbb{P}^1 no hay 3-formas entonces

$$H^{2,0}(\mathbb{P}^1, \mathbb{C}) = H^{0,2}(\mathbb{P}^1, \mathbb{C}) = 0$$

Luego

$$H^2(\mathbb{P}^1, \mathbb{C}) = H^{1,1}(\mathbb{P}^1, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}$$

Entonces $H^{1,1}(\mathbb{P}^1, \mathbb{C}) = \mathcal{E}^{1,1}/(d[\mathcal{E}^1]) = \{\alpha \cdot \omega : \alpha \in \mathbb{C}\}$. Vale la pena notar que $\int_{\mathbb{P}^1} \omega \neq 0$ pues de ser 0 esta integral, implicaría que esta es la imagen de una 1-forma. Es decir por el teorema de Stokes tenemos que $\int_{\partial\mathbb{P}^1} \eta = \int_{\mathbb{P}^1} d\eta = 0$ para η una 1-forma. Esta integral es 0 por que $\partial\mathbb{P}^1 = 0$. Por otro lado, como $\mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ basta calcular

$$\int_{\mathbb{C}} \frac{dzd\bar{z}}{(1+z\bar{z})^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^2} = 2 \int_0^\infty \frac{rdr}{(1+r^2)^2} = 1$$

Entonces la forma asociada a la métrica es cohomologicamente no trivial, y la clase de esta genera $H^2(\mathbb{P}^1)$.

3.2. Toro

En esta sección, estudiaré el toro complejo, éste tiene una métrica inducida por la métrica que tiene \mathbb{C} , que es cerrada, entonces tiene una descomposición de Hodge. En general dado un látice, $\Gamma = \alpha_1\mathbb{Z} + \alpha_2\mathbb{Z}$, con α_1 y α_2 linealmente independientes sobre \mathbb{R} , el cociente $T = \mathbb{C}/\Gamma$, es un toro. La estructura geométrica compleja de éste viene caracterizada por éste látice en la medida que si $f : \mathbb{C}/\Gamma_1 \rightarrow \mathbb{C}/\Gamma_2$ entonces $f(\Gamma_1) \subseteq \Gamma_2$, más precisamente se tiene que si $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset \mathbb{C}$ son látices y

$$f : \mathbb{C}/\Gamma_1 \rightarrow \mathbb{C}/\Gamma_2$$

es una función holomorfa no constante tal que $f(0) = 0$. Entonces existe un único $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $\alpha\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$ y el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{F} & \mathbb{C} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ \mathbb{C}/\Gamma_1 & \xrightarrow{f} & \mathbb{C}/\Gamma_2 \end{array}$$

donde $F(z) = \alpha z$ y π y π' son las proyecciones canónicas

Para un toro T tenemos que $H^1(T, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ y que $H^1(T, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$, cabe notar que

$H^1(T, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{C} \cong H^1(T, \mathbb{C})$. Ahora suponga $\alpha_1 = 1$, fije $\alpha \in \mathbb{C}$, y sea $T = \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z})$. Considere la estructura de Hodge $\{H_{\mathbb{Z}}, H^{p,q}\}$ de peso 1, sobre T . Sean $\gamma_1 : [0, 1] \rightarrow T$, y $\gamma_2 : [0, 1] \rightarrow T$ representantes de los generadores de $H^{1,0}(T, \mathbb{Z})$ y $H^{0,1}(T, \mathbb{Z})$, respectivamente. Sea $\pi : \mathbb{C} \rightarrow T$ la proyección, y sean $\gamma'_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ y $\gamma'_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ definidos de la siguiente forma $\gamma'_1(t) = t$ y $\gamma'_2(t) = t \cdot \alpha$ respectivamente. Entonces $\gamma'_1 \circ \pi \in [\gamma_1]$ y $\gamma'_2 \circ \pi \in [\gamma_2]$. Por otro lado sea $\omega \in H^{1,0}(T, \mathbb{C})$, tal que $\|\omega\| = 1$. Quisiéramos calcular

$$\int_{\gamma_1} \omega \quad \text{y} \quad \int_{\gamma_2} \omega$$

Para calcular estas integrales basta calcular la integral del pullback en \mathbb{C} de un representante de estas clases. En primera instancia tenemos que $[\omega] = [dz]^1$ y como habíamos notado antes, sus integrales son iguales. Luego tendríamos que:

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma'_1} dz \quad \text{y} \quad \int_{\gamma_2} \omega = \int_{\gamma'_2} dz$$

pues el pullback de γ_i es γ'_i , y dz en T viene dado por el pushforward de dz esto se reduce a calcular una integral de línea sobre los complejos. Como bien sabemos $\int_{\gamma} f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$. Entonces en nuestro caso de interés nos quedan las integrales

$$\int_{\gamma'_1} dz = \int_0^1 dt = 1 \quad \text{y} \quad \int_{\gamma'_2} dz = \int_0^1 \alpha dt = \alpha$$

Ahora, resulta que estos números son los generadores del látice, y además las integrales calculadas vienen de la estructura de Hodge asociada al Toro. Entonces $\Gamma = \int_{\gamma_1} \omega \cdot \mathbb{Z} + \int_{\gamma_2} \omega \cdot \mathbb{Z}$ es el látice que genera al toro T . Luego si tenemos dos toros T_1 y T_2 y estructuras de Hodge asociadas a éstos, calculando las integrales, como lo hicimos anteriormente, podemos ver si vienen del mismo látice. Ahora las ideas usadas para reconstruir este toro se pueden generalizar si consideramos el toro $T = \mathbb{C}^n/\Gamma$ con $\Gamma = \bigoplus_{i=1}^{2n} \gamma_i \mathbb{Z}$ látice donde los γ_i son linealmente independientes sobre \mathbb{R} . Entonces al considerar la estructura de Hodge asociada a este toro $\{H_{\mathbb{Z}}, H^{p,q}\}$ podemos hacer lo mismo que hicimos en este otro caso. Luego consideramos $\gamma_1, \dots, \gamma_{2n}$ los generadores de $H_{\mathbb{Z}}^1$. Hay un mapa natural entre $\psi : H_{\mathbb{Z}}^1 \rightarrow H^1$. Además sabemos que los gen-

¹Cabe notar que dz viene del pushforward de dz en \mathbb{C}

eradores de H^1 son $\{dz_i, \bar{z}_i\}$, $1 \leq i \leq n$. Además como $\psi(\gamma_j) = \overline{\psi(\gamma_j)}$, para $1 \leq j \leq 2n$ tenemos que $\psi(\gamma_j) = \alpha dz_i + \beta d\bar{z}_i$, con $\alpha = \bar{\beta}$. Entonces suponga una enumeración de $\{\gamma_j\}$ como $\{\gamma_{k,l}\}$, con $1 \leq k \leq n$ y $l = 1, 2$ de tal manera que $\psi(\gamma_{k,l}) = \alpha dz_k + \beta d\bar{z}_k$. Entonces el látice $\Gamma = \bigoplus_{k=1}^n (\int_{\gamma_{k,l}} dz_k) \cdot e_k \mathbb{Z}$, donde $(0, \dots, 1, \dots, 0)^2 = e_k \in \mathbb{C}^n$ induce el mismo látice que genera este toro.

²El 1 está en la k -ésima posición

Bibliografía

- [1] Forster, Otto (1977). *Lectures on Riemman Surfaces*. Estados Unidos de America, Nueva York: Springer-Verlag New York
- [2] Griffiths, Philip A. & Harris, Joseph (1994). *Principles of Algebraic Geometry*. Estados Unidos de America: John Wilwey & Sons
- [3] Huybrechts, Daniel (2005). *Complex Geometry An Introduction*. Alemania: Springer-Verlag Berlin Heidelberg
- [4] Parshin, A.N. & Shafarevich, I.R. (1998). *Algebraic Geometry III*. Alemania: Springer-Verlag Berlin Heidelberg