Álgebras de Hopf y Extensiones de Galois

por

Alicia Pérez Gutiérrez

Una tesis

presentada al departamento

de Matemáticas

como parte de los requisitos

para el grado de

Matemático

Director: Alexander Cardona

Universidad de los Andes
Bogotá, Colombia
Julio, 2006

Índice general

Introducción

Un álgebra de Hopf es la generalización —al contexto no conmutativo— de un álgebra de Lie. En un álgebra de Hopf hay una estructura de biálgebra que permite definir, además de la conmutatividad usual, una coconmutatividad. Como veremos en los ejemplos desarrollados en el texto, estas dos nociones son independientes. Toda álgebra de Hopf contiene un álgebra de Lie, y a partir de un álgebra de Lie es posible construir ejemplos interesantes de álgebras de Hopf (el álgebra envolvente universal de un álgebra de Lie, grupos cuánticos obtenidos por deformación de un álgebra de Lie), por esta razón el texto comienza con un capítulo sobre álgebras de Lie y sus propiedades básicas.

Las extensiones de Galois de álgebras de Hopf fueron introducidas por Kreimer y Takeuchi en [KT]. El objetivo principal del presente trabajo es estudiar tales extensiones, entender el caso clásico de extensiones de Galois de campos como un caso particular y describir las extensiones de Galois de diferentes tipos de álgebras de Hopf. Finalmente, daremos una interpretación geométrica a la extensión de Galois de ciertas álgebras de Hopf como el caso no conmutativo de la noción de fibración principal de variedades asociadas a acciones de grupos de Lie, también llamadas fibraciones principales cuánticas. En particular, daremos una construcción explícita de una fibración de Hopf de esferas cuánticas.

En el primer capítulo recordaremos las definiciones básicas de álgebras de Lie, su relación con los grupos de Lie y construiremos el álgebra envolvente universal de un álgebra de Lie. Todas estas nociones estarán ilustradas con ejemplos que utilizaremos posteriormente para construir ejemplos de álgebras de Hopf.

En el capítulo 2 definimos los conceptos de coálgebra, biálgebra y finalmente álgebra de Hopf. A lo largo de este capítulo analizaremos algunos ejemplos clásicos de álgebras de Hopf, como el álgebra envolvente universal $U(\mathfrak{g})$ y el álgebra de un grupo $\mathbb{K}G$. Ilustraremos cómo toda álgebra de Hopf contiene trivialmente un álgebra de Lie.

En el tercer capítulo hablaremos de extensiones de Galois de álgebras de Hopf.

Definiremos formalmente esta noción y miraremos cómo son estas extensiones en algunos de los ejemplos presentados en el segundo capítulo. Para entender las extensiones de $U(\mathfrak{g})$ necesitamos aprender cómo es su filtración coradical, pues a partir de ella construiremos lo que definimos como $U(\mathfrak{g})$-comódulos. Por eso, antes de empezar a construir los ejemplos que nos interesan, exponemos la teoría de filtraciones y coradicales en la primera sección de este capítulo. Una vez expuesta esta teoría, miraremos en qué caso las extensiones de Galois de álgebras de Hopf coinciden con las extensiones de Galois de campos del álgebra abstracta. Después describiremos las extensiones de Galois de $\mathbb{K}G$ y finalmente de $U(\mathfrak{g})$.

En el último capítulo mostraremos que la noción de haz principal cuántico en geometría no conmutativa coincide con la de extensión de Galois para ciertos grupos cuánticos. En particular, dualizando la construcción clásica de la fibración de Hopf sobre la 2-esfera, reconstruiremos la llamada fibración de Hopf cuántica y la identificaremos con la extensión de Galois del álgebra de Hopf de polinomios de Laurent sobre el círculo coactuando sobre el grupo cuántico $SU_q(2)$.

Capítulo 1

Álgebras de Lie

En la primera parte de este capítulo se introducirán los conceptos de grupo y álgebra de Lie con sus propiedades principales. Muchos de los ejemplos que aparecen a lo largo del texto están basados en estos conceptos y las relaciones entre ellos. Finalmente se definirá el álgebra envolvente universal de un álgebra de Lie, y se expondrá el teorema de la base de Poincaré-Birkhoff-Witt. Esta álgebra será un ejemplo importante de las álgebras de Hopf y luego se verá cómo son sus extensiones de Galois. Seguiremos principalmente [Kna][BG].

1.1. Definiciones Básicas

Sea $\mathbb{K}$ un campo. Una **$\mathbb{K}$-álgebra de Lie** $\mathfrak{g}$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con un producto $[\ ,\ ] : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ bilineal que satisface:

- $[X, X] = 0$ para todo $X \in \mathfrak{g}$.
- *(Identidad de Jacobi)* $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$, $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}$.

A este producto se le llama **corchete ó bracket de Lie**.
Nótese que la primera condición implica que $[X, Y] = -[Y, X]$ para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$.

Un **homomorfismo** de $\mathbb{K}$-álgebras de Lie es una aplicación $\mathbb{K}$-lineal $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ tal que

$$\phi([X, Y]) = [\phi(X), \phi(Y)].$$

Para dos subconjuntos $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ de $\mathfrak{g}$, sea

$$[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] = gen\,\{[X, Y] : X \in \mathfrak{a}, Y \in \mathfrak{b}\}\,.$$

Una **subálgebra de Lie** $\mathfrak{h}$ de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es un subespacio vectorial de $\mathfrak{g}$ que satisface $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}$. Un **ideal** $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ es un subespacio que satisface $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{h}$.

Una **$\mathbb{K}$-álgebra** A es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial junto con dos operaciones $\mathbb{K}$-lineales $m : A \otimes A \to A$ y $u : \mathbb{K} \to A$ que satisfacen

$$m(a \otimes m(b \otimes c)) = m(m(a \otimes b) \otimes c)$$

para todo $a, b, c \in A$ *(asociatividad)* y

$$m(u(k) \otimes a) = k \cdot a$$

para todo $a \in A$, $k \in \mathbb{K}$. La identidad de A se define como $1_A = u(1_{\mathbb{K}})$. A m se le llama **multiplicación** y a u se le llama **unidad**. Por simplicidad de ahora en adelante notaremos $m(a \otimes b) = ab$.

Un **homomorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras** $\psi : (A, m_A, u_A) \to (B, m_B, u_B)$ es una aplicación $\mathbb{K}$-lineal tal que $\psi(a_1 a_2) = \psi(a_1)\psi(a_2)$ para todo $a_1,\ a_2 \in A$ y $\psi(u_A(k)) = u_B(k)$ para todo $k \in \mathbb{K}$.

Ejemplo 1.1. Si A es un $\mathbb{K}$-álgebra, defínase $[X, Y] = XY - YX$. Entonces

$$[X, X] = XX - XX = 0.$$

Además,

$$\begin{aligned}
&[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] \\
&\qquad = ([X, Y]Z - Z[X, Y]) + ([Y, Z]X - X[Y, Z]) \\
&\qquad + ([Z, X]Y - Y[Z, X]) \\
&\qquad = ((XY - YX)Z - Z(XY - YX)) + ((YZ - ZY)X - X(YZ - ZY)) \\
&\qquad + ((ZX - XZ)Y - Y(ZX - XZ)) \\
&\qquad = XYZ - YXZ - ZXY + ZYX + YZX - ZYX - XYZ \\
&\qquad + XZY + ZXY - XZY - YZX + YXZ \\
&\qquad = 0.
\end{aligned}$$

Así, A es un álgebra de Lie.

Para entrar en la teoría de los grupos de Lie y las álgebras de Lie asociadas, recordemos un poco los términos utilizados en la teoría de variedades diferenciables.

Sea M un espacio topológico métrico y separable. Un **atlas** para M está conformado por **parches de coordenadas** (U, ϕ) donde U es un abierto de M y $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ es un homeomorfismo de U sobre un abierto $\phi(U)$ de $\mathbb{R}^n$ que satisface:

1. Para todo (U_1, ϕ_1), (U_2, ϕ_2), $\phi_2 \circ \phi_1^{-1} : \phi_1(U_1 \cap U_2) \to \phi_2(U_1 \cap U_2)$ y su inversa son de clase C^∞,

2. Todos los abiertos de estas parejas cubren a M.

Este espacio topológico M con el atlas definido como arriba se llama **variedad suave**. Sean M, N variedades suaves y $f : M \to N$ una función. Decimos que f es **de clase** C^∞ si para todo $x \in M$ y para (V, ψ) parche de coordenadas de N con $f(x) \in V$, existe un parche (U, ϕ) del atlas de M tal que $x \in U$, $f(U) \subseteq V$ y $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ es de clase C^∞. Similarmente decimos que f es de **clase** C^1 si se cumplen las condiciones anteriores y $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ es de clase C^1. Si f es una biyección de clase C^∞ y su inversa f^{-1} es también de clase C^∞ entonces decimos que f es un **difeomorfismo**. Notaremos $C^\infty(M)$ al conjunto de funciones reales sobre M de clase C^∞.

Para una variedad M y $m \in M$, el **espacio tangente a** M **en** m $T_m(M)$ es el conjunto de todos los vectores tangentes a M en m, es decir funciones $\phi : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ tales que para todo $f, g \in C^\infty(M)$

$$\phi(fg) = \phi(f)g(m) + f(m)\phi(g),\ \phi(f+g) = \phi(f) + \phi(g), \phi(af) = a\phi(f).$$

El **haz tangente** de M es la unión disyunta $TM = \bigcup_{m \in M} T_m(M)$.

El primer ejemplo de álgebra de Lie que veremos es el álgebra de Lie de campos vectoriales sobre una variedad suave.

Un **campo vectorial** sobre una variedad M es una aplicación $X : M \to TM$ tal que $X(m) \in T_m(M)$ para todo $m \in M$. Sea $\chi(M)$ el conjunto de todos los campos vectoriales sobre M. Para $X, Y \in \chi(M)$, definimos $X+Y(m) = X(m)+Y(m)$, donde $X(m)+Y(m)$ corresponde a la suma puntual de funciones. También definimos la multiplicación de un campo vectorial por un escalar $aX(m) = a(X(m))$. Se puede ver fácilmente que $\chi(M)$ es un espacio vectorial. Si $f \in C^\infty(M)$ definimos $(fX)(m) = f(m)X(m)$. También podemos poner a X a actuar sobre f poniendo $(Xf)(m) = X(m)f$. Así obtenemos una función Xf de M en $\mathbb{R}$. Es fácil probar las siguientes afirmaciones [BG]:

1. $X(af + bg) = a(Xf) + b(Xg)$ para todo $a, b \in \mathbb{R}$ y $f, g \in C^\infty(M)$.

2. $X(fg) = (Xf)g + f(Xg)$ para todo $f, g \in C^\infty(M)$.

Decimos que X es **suave** si su dominio es abierto y si para todo $m \in M$, si $f : U \to \mathbb{R}$ (donde U es vecindad de m) es de clase C^∞, entonces Xf tiene como dominio una vecindad de m y también es de clase C^∞.

Definamos ahora el bracket de Lie en $\chi(M)$. Sean $X, Y \in \chi(M)$. Entonces X y Y actúan sobre las funciones de $C^\infty(M)$ como se explicó en el párrafo anterior. Así, para $f \in C^\infty(M)$, ponemos $[X,Y] : M \to TM$, donde $[X,Y](m) : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ para todo $m \in M$ y $[X,Y](m)(f) = X(m)(Yf) - Y(m)(Xf)$ para todo $f \in C^\infty(M)$. Veamos que $[X,Y]$ es un campo vectorial. Sea $m \in M$ y $f, g \in C^\infty(M)$. Entonces

$$\begin{aligned}
[X,Y](m)(fg) &= X(m)(Yfg) - Y(m)(Xfg) \\
&= X(m)((Yf)g + f(Yg)) - Y(m)((Xf)g + f(Xg)) \\
&= X(m)((Yf)g) + X(m)(f(Yg)) - Y(m)((Xf)g) - Y(m)(f(Xg)) \\
&= (X(m)(Yf) - Y(m)(Xf))g(m) + f(m)(X(m)(Yg) - Y(m)(Xg)) \\
&= [X,Y](m)(f)g(m) + f(m)[X,Y](m)(g).
\end{aligned}$$

También,

$$\begin{aligned}
[X,Y](m)(af+g) &= X(m)(Y(af+g)) - Y(m)(X(af+g)) \\
&= X(m)(aYf + Yg) - Y(m)(aXf + Xg) \\
&= aX(m)(Yf) + X(m)(Yg) - aY(m)(Xf) - Y(m)(Xg) \\
&= a(X(m)(Yf) - Y(m)(Xf)) + X(m)(Yg) - Y(m)Xg \\
&= a[X,Y](m)(f) + [X,Y](m)(g).
\end{aligned}$$

Así, $[X,Y](m) \in T_m(M)$ para todo $m \in M$ y $[X,Y]$ es un campo vectorial sobre M. Realizando algunos cálculos sencillos se pueden probar las siguientes propiedades:

1. $[aX + bX', Y] = a[X,Y] + b[X',Y]$.

2. $[X, aY + bY'] = a[X,Y] + b[X,Y']$.

3. $[Y,X] = -[X,Y]$.

4. $[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] = 0$.

Así, el producto $[\ ,\ ]$ es un corchete de Lie y $\chi(M)$ es un álgebra de Lie.

Si X es un campo vectorial sobre M, sea X_p el valor de X en p ($X_p = X(p) \in T_p(M)$). Si $\Psi : M \to N$ es una función de clase C^∞ entre variedades suaves, el diferencial de Ψ en p es la aplicación

$$d\Psi_p : T_p(M) \to T_{\Psi(p)}(N),$$

donde si $\phi \in T_p(M)$ y $h \in C^\infty(N)$, $d\Psi_p(\phi)(h) = \phi(h \circ \Psi)$.

1.2. Grupos de Lie y Álgebras de Lie

Un **grupo de Lie** es un grupo que posee una topología con la que las operaciones de inversión y multiplicación son contínuas que además es separable y variedad. Para $x \in G$ grupo de Lie, sea $L_x : G \to G$ el difeomorfismo dado por $L_x(y) = xy$.

Para $x, y \in G$, consideremos el difeomorfismo $L_{yx^{-1}}$. Entonces el diferencial de este difeomorfismo en x es $(dL_{yx^{-1}})_x : T_x(G) \to T_y(G)$. Un campo vectorial X sobre G es **invariante por izquierda** si para cada x, y en G, $dL_{yx^{-1}}(X_x) = X_y$. Los campos vectoriales invariantes por izquierda forman un espacio vectorial y son cerrados bajo el bracket de Lie definido sobre $\chi(G)$. Así, forman una subálgebra de Lie que denotaremos $\mathfrak{f}$.

Sea G un grupo de Lie y $T_e(G)$ el espacio tangente a G en la identidad. Entonces a todo vector en $T_e(G)$ le corresoponde un campo vectorial invariante por izquierda. En efecto, la aplicación $h : \mathfrak{f} \to T_e(G)$ tal que $X \mapsto X_e$ es un isomorfismo [Kna]. Así, $\mathfrak{g} = T_e(G)$ es un álgebra de Lie y se llama el **álgebra de Lie de** G.

Ejemplo 1.2. Sea $GL(n, \mathbb{C})$ el grupo de matrices no singulares de $n \times n$ con entradas en $\mathbb{C}$ con la operación de multiplicación matricial. Si identificamos a $GL(n, \mathbb{C})$ con $\mathbb{R}^{2n^2}$, entonces le podemos dar una topología. La multiplicación de matrices es contínua en cada entrada pues está dada por funciones polinomiales en las entradas de las matrices. Además, la inversión está dada por un cociente de polinomios en cada entrada, donde el denominador es el polinomio det que es distinto de cero. Así la inversión también es contínua y $GL(n, \mathbb{C})$ es un grupo con una topología con la que las operaciones de multiplicación e inversión son contínuas. Además es separable por ser isomorfo a $\mathbb{R}^{2n^2}$.

Sea $SU(2) = \{x \in GL(2, \mathbb{C}) | xx^* = I, \det x = 1\}$, donde x^* denota la matriz adjunta de x. Entonces $SU(2)$ es un subgrupo de $GL(2, \mathbb{C})$. Sea $c : \mathbb{R} \to SU(2)$ una curva tal que $c(t) = \begin{pmatrix} F(t) & G(t) \\ H(t) & P(t) \end{pmatrix} \in SU(2)$, con F, G, H, P funciones de clase C^∞ y $c(0) = I$ $\left(\text{por ejemplo}, c(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}\right)$. Definimos $c'(t) = \begin{pmatrix} F'(t) & G'(t) \\ H'(t) & P'(t) \end{pmatrix}$. Entonces $c'(0)$ indica en qué dirección está el vector tangente a la curva c en el punto I. Sea

$$\mathfrak{g} = \{c'(0) |\ c : \mathbb{R} \to SU(2) \text{ tal que } c(0) = I \text{ y } \ C^\infty \text{ en cada componente}\}.$$

Entonces $\mathfrak{g}$ es la $\mathbb{R}$-álgebra de Lie de $SU(2)$.

Es fácil ver que el álgebra de Lie de $SU(2)$ es $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$, el espacio de todas las matrices de $n \times n$ con entradas complejas y

$$\mathfrak{su}(2) = \{X \in \mathfrak{gl}(2, \mathbb{C}) | X + X^* = 0 \ y \ TrX = 0\} = \mathfrak{g}$$

donde TrX es la traza de X. En efecto, las matrices en $\mathfrak{su}(2)$ son de la forma

$$\begin{pmatrix} a_1+b_1i & a_2+b_2i \\ a_3+b_3i & a_4+b_4i \end{pmatrix},$$

donde

$$\begin{pmatrix} a_1+b_1i & a_2+b_2i \\ a_3+b_3i & a_4+b_4i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1-b_1i & a_3-b_3i \\ a_2-b_2i & a_4-b_4i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ y\ a_1+a_4+(b_1+b_4)i=0.$$

Es decir,

$$2a_1=0,\ a_2+a_3+(b_2-b_3)i=0,\ 2a_4=0\ y\ b_1+b_4=0$$

de donde

$$a_1=0,\ a_3=-a_2,\ b_2=b_3,\ a_4=0\ y\ b_1=-b_4.$$

Por lo tanto las matrices en $\mathfrak{su}(2)$ son de la forma $\begin{pmatrix} 0 & a_2 \\ -a_2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -b_4 & b_3 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} i$, y

$$\mathfrak{su}(2) = gen_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Sean $c_1(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$, $c_2(t) = \begin{pmatrix} \cos t + i\sin t & 0 \\ 0 & \cos t - i\sin t \end{pmatrix}$ y $c_3(t) = \begin{pmatrix} \cos t & i\sin t \\ i\sin t & \cos t \end{pmatrix}$. Entonces para $i=1,2,3$ y para todo $t\in\mathbb{R}$ es fácil ver que $\det c_i(t)=1$ y que $c_i(t)c_i(t)^*=I$. Así, $\forall t$, $c_i(t)\in SU(2)$ para $i=1,2,3$. Además,

$$c_1'(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ c_2'(0) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}\ y\ c_3'(0) = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

pertenecen a $\mathfrak{g}$, por lo tanto $\mathfrak{su}(2)\subseteq\mathfrak{g}$.

Para la otra contenencia, sea $c'(0)\in\mathfrak{g}$. Entonces $c(t)\in SU(2)$ para todo $t\in\mathbb{R}$, por lo que $c(t)c(t)^*=I$ para todo $t\in\mathbb{R}$. Derivando ambos lados,

$$c'(t)c(t)^* + c(t)c'(t)^* = 0$$

para todo $t\in\mathbb{R}$, luego para $t=0$,

$$c'(0)+c'(0)^*=0.$$

Por otra parte, si $c(t) = \begin{pmatrix} F(t) & G(t) \\ H(t) & P(t) \end{pmatrix}$ con $c(0)=I$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\det c(t)|_{t=0} &= \frac{d}{dt}(F(t)P(t)-H(t)G(t))|_{t=0} \\ &= (F'(t)P(t)+F(t)P'(t)-H'(t)G(t)-H(t)G'(t))|_{t=0} \\ &= F'(0)+P'(0) \\ &= Tr(c'(0)). \end{aligned}$$

Pero $\det c(t) = 1$ luego $\frac{d}{dt}\det c(t) = 0$, y así $Tr(c'(0)) = 0$. Entonces $c'(0) \in \mathfrak{su}(2)$ y $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{su}(2)$.

Esto quiere decir que el álgebra de Lie del grupo de Lie $SU(2)$ es $\mathfrak{su}(2) = \mathfrak{g}$.

1.3. El Álgebra Envolvente Universal

Definición 1.3. Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie compleja y $T(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} T^k(\mathfrak{g})$, donde $T^0(\mathfrak{g}) = \mathbb{C}$ y $T^k(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g} \otimes \ldots \otimes \mathfrak{g}$ *(k veces)*. Sea J el ideal generado por los tensores de la forma $X \otimes Y - Y \otimes X - [X, Y]$, para todo $X, Y \in T^1(\mathfrak{g})$. El **álgebra envolvente universal** de $\mathfrak{g}$ es el cociente $U(\mathfrak{g}) = T(\mathfrak{g})/J$.

Si definimos la multiplicación $m : T^n(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathbb{C}} T^m(\mathfrak{g}) \to T^{m+n}(\mathfrak{g})$ canónicamente, entonces le podemos dar a $U(\mathfrak{g})$ estructura de álgebra. Se denota por $\iota : \mathfrak{g} \to U(\mathfrak{g})$ a la inyección canónica de $\mathfrak{g}$ en su álgebra envolvente universal. Para $X, Y \in \mathfrak{g}$ se satisface $\iota\,[X, Y] = \iota(X)\iota(Y) - \iota(Y)\iota(X)$.

Proposición 1.4. ***(Propiedad Universal)*** *Si A es un álgebra compleja y $\pi : \mathfrak{g} \to A$ es una aplicación lineal que satisface $\pi\,[X, Y] = \pi(X)\pi(Y) - \pi(Y)\pi(X)$ para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$ entonces existe un único homomorfismo de álgebras $\varphi : U(\mathfrak{g}) \to A$ tal que $\varphi(1) = 1$ y el diagrama*

$$\begin{tikzcd} & U(\mathfrak{g}) \arrow[dr, "\varphi"] & \\ \mathfrak{g} \arrow[ur, "\iota"] \arrow[rr, "\pi"'] & & A \end{tikzcd}$$

conmuta.

Teorema 1.5. ***(Poincaré-Birkhoff-Witt)*** *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie y $\{X_i : i \in I\}$ una base ordenada para $\mathfrak{g}$ con I un conjunto ordenado de índices. Entonces el conjunto de monomios de la forma $(\iota X_{i_1})^{j_1} ... (\iota X_{i_n})^{j_n}$ con $i_1 < ... < i_n$ y $j_k > 0$ para todo k es una base para $U(\mathfrak{g})$ como álgebra.*

Observación 1. El corchete Lie de $\mathfrak{g}$ nos permite escribir todos los elementos de $U(\mathfrak{g})$ como combinaciones lineales de potencias X^n, donde $X \in \mathfrak{g}$ y $n \in \mathbb{N}$. Por ejemplo, $X \otimes Y \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ se puede escribir como $\frac{1}{2}(X+Y) \otimes (X+Y) - \frac{1}{2}X \otimes X - \frac{1}{2}Y \otimes Y + \frac{1}{2}[X, Y] = \frac{1}{2}(X+Y)^2 - \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}Y^2 + \frac{1}{2}[X, Y]$. Así, $U(\mathfrak{g})$ es el espacio vectorial generado por $\{X^n | \ X \in \mathfrak{g}, n \in \mathbb{N}\}$. Entonces, para cada elemento en la base PBW existe una combinación lineal de estas potencias.

Ejemplo 1.6. Sea $\mathfrak{su}(2, \mathbb{C})$ el álgebra de Lie de matrices de 2×2 con entradas en $\mathbb{C}$, antisimétricas y de traza nula. Sea $U(\mathfrak{su}(2, \mathbb{C}))$ su álgebra envolvente universal. Ya vimos que una base para $\mathfrak{su}(2,\mathbb{C})$ sobre $\mathbb{R}$ es

$$\left\{H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}\right\},$$

por lo tanto, si calculamos los corchetes de Lie de estos generadores sumergidos en $U(\mathfrak{su}(2,\mathbb{C}))$, obtenemos

$$\iota[Y,X] = Y \otimes X - X \otimes Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = 2H.$$

$$\iota[X,H] = X \otimes H - H \otimes X = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2i \\ 2i & 0 \end{pmatrix} = 2Y.$$

$$\iota[H,Y] = H \otimes Y - Y \otimes H = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2i & 0 \\ 0 & -2i \end{pmatrix} = 2X.$$

Según el teorema anterior, el conjunto $\left\{H^i X^j Y^k\right\}_{i,j,k\geq 0}$ es una base para $U(\mathfrak{su}(2,\mathbb{C}))$.

Capítulo 2

Coálgebras y Álgebras de Hopf

En este capítulo veremos el concepto de coálgebra, biálgebra y finalmente álgebra de Hopf. Luego estudiaremos algunos ejemplos de estos conceptos. Finalmente veremos en qué sentido un álgebra de Hopf es una generalización de un álgebra de Lie. Nos basaremos principalbente en [Mon] [Kas].

Como ya sabemos un álgebra está conformada por una tripla (A, m, u) donde A es un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{K}$, $m : A \otimes A \to A$ y $u : \mathbb{K} \to A$ son operaciones $\mathbb{K}$-lineales que satisfacen las siguientes propiedades:

Asociatividad: El diagrama

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \otimes A \arrow[r, "m\otimes id"] \arrow[d, "id\otimes m"] & A \otimes A \arrow[d, "m"] \\ A \otimes A \arrow[r, "m"] & A \end{tikzcd}$$

conmuta.

Unidad: El diagrama

$$\begin{tikzcd} & A & \\ \mathbb{K} \otimes A \arrow[ur] \arrow[r, "u\otimes id"] & A \otimes A \arrow[u, "m"] & A \otimes \mathbb{K} \arrow[ul] \arrow[l, "id\otimes u"'] \end{tikzcd}$$

conmuta.

A m se le llama **multiplicación** y a u se le llama **unidad**. Lo que hace u es sumergir el campo en A para después poder multiplicar los elementos de $\mathbb{K}$ con los elementos de A, creando así un producto por escalar.

2.1. Coálgebras

El concepto de coálgebra es *dual* al concepto de álgebra. Lo que queremos tener son operaciones *duales* a la multiplicación y la unidad de un álgebra. Queremos tener por ejemplo una aplicación que, en lugar de tomar dos elementos en el álgebra y multiplicarlos, tome un elemento y lo parta en dos, cumpliendo con una propiedad dual a la asociatividad. Así, una coálgebra se obtiene invirtiendo las flechas de los diagramas anteriores. Las operaciones resultantes se llaman comultiplicación y counidad respectivamente.

Definición 2.1. Una $\mathbb{K}$**-coálgebra** C es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con dos aplicaciones $\mathbb{K}$-lineales $\Delta : C \to C \otimes C$ **(comultiplicación)** y $\epsilon : C \to \mathbb{K}$ **(counidad)** que satisfacen:

Coasociatividad: el diagrama

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & C \otimes C \arrow[d, "\Delta \otimes id"] \\ C \otimes C \arrow[r, "id \otimes \Delta"'] & C \otimes C \otimes C \end{tikzcd}$$

conmuta.
Counidad: el diagrama

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "1\otimes"'] \arrow[d, "\Delta"] \arrow[dr, "\otimes 1"] & \\ \mathbb{K} \otimes C & C \otimes C \arrow[l, "\epsilon \otimes id"] \arrow[r, "id \otimes \epsilon"'] & C \otimes \mathbb{K} \end{tikzcd}$$

conmuta.

Definición 2.2. Un **morfismo de coálgebras** $f : (C, \Delta_C, \epsilon_C) \to (D, \Delta_D, \epsilon_D)$ es una aplicación $\mathbb{K}$-lineal que satisface:

- $\Delta_D \circ f = (f \otimes f)\Delta_C$.
- $\epsilon_C = \epsilon_D \circ f$.

Un subespacio D de C es una **subcoálgebra** de C si $\Delta(D) \subseteq D \otimes D$, y un subespacio I de C es un **coideal derecho (izquierdo)** si $\Delta I \subseteq I \otimes C$ (resp. $\Delta I \subseteq C \otimes I$) y $\epsilon(I) = 0$.

Notación. Si C es una coálgebra con comultiplicación $\Delta : C \to C \otimes C$, la comultiplicación de un elemento de C se denota $\Delta c = \sum c_{(1)} \otimes c_{(2)}$. Esta notación es útil cuando aplicamos Δ más de una vez. Por ejemplo, al aplicar Δ a c y luego a las primeras o seguntas componentes resultantes, obtenemos $\sum c_{(1_1)} \otimes c_{(1_2)} \otimes c_{(2)} = \sum c_{(1)} \otimes c_{(2_1)} \otimes c_{(2_2)}$.

Escribiremos esta suma (obtenida al aplicar Δ dos veces) como $\Delta_2(c) = \sum c_1 \otimes c_2 \otimes c_3$ para simplificar los subíndices. Llamaremos $\Delta_n(c) = \sum c_1 \otimes \cdots \otimes c_{n+1}$ a la suma obtenida al iterar este proceso y aplicar la coasociatividad $n-1$ veces.

Así como en un álgebra la multiplicación puede ser conmutativa, en una coálgebra podemos dualizar este concepto y mirar la coconmutatividad de la comultiplicación. Decimos que un álgebra (A, m, u) es **conmutativa** si $m(a \otimes b) = m(b \otimes a)$ para todo $a, b \in A$. Diremos entonces que una coálgebra (C, Δ, ϵ) es **coconmutativa** si para todo $c \in C$, $\Delta(c) = \sum c_1 \otimes c_2 = \sum c_2 \otimes c_1$.

Ejemplo 2.3. Sea G un grupo finito y $\mathbb{C}G = \{\sum_{i=1}^n c_i g_i : c_i \in \mathbb{C}, g_i \in G\}$. Entonces $\mathbb{C}G$ es una coálgebra coconmutativa con las operaciones:

- $\Delta(g) = g \otimes g$, $\forall g \in G$,
- $\epsilon(g) = 1$, $\forall g \in G$.

En efecto, si $\sum_{i=1}^n c_i g_i \in \mathbb{C}G$,

$$\begin{aligned}
\Delta \otimes id \left(\Delta \left(\sum_{i=1}^n c_i g_i \right) \right) &= \Delta \otimes id \left(\sum_{i=1}^n c_i (g_i \otimes g_i) \right) \\
&= \sum_{i=1}^n c_i (\Delta(g_i) \otimes g_i) \\
&= \sum_{i=1}^n c_i (g_i \otimes g_i \otimes g_i) \\
&= id \otimes \Delta \left(\Delta \left(\sum_{i=1}^n c_i g_i \right) \right).
\end{aligned}$$

Así, Δ es coasociativa. También,

$$\begin{aligned}
id \otimes \epsilon \left(\Delta \left(\sum_{i=1}^n c_i g_i \right) \right) &= id \otimes \epsilon \left(\sum_{i=1}^n c_i (g_i \otimes g_i) \right) \\
&= \sum_{i=1}^n c_i (g_i \otimes \epsilon(g_i)) \\
&= \sum_{i=1}^n c_i (g_i \otimes 1) \\
&= \left(\sum_{i=1}^n c_i g_i \right) \otimes 1
\end{aligned}$$

y

$$\epsilon \otimes id \left(\Delta \left(\sum_{i=1}^n c_i g_i \right) \right) = 1 \otimes \left(\sum_{i=1}^n c_i g_i \right).$$

Por lo tanto ϵ cumple con la condición de la counidad.

Finalmente, $\mathbb{C}G$ es coconmutativa trivialmente. Nótese, sin embargo, que si dotamos a $\mathbb{C}G$ con la multiplicación $m\left(\sum_{i=1}^{n} c_i x_i, \sum_{j=1}^{r} d_j y_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{r} c_i d_j x_i y_j$ y la unidad $u(k) = ke$ donde e es la identidad de G, entonces $\mathbb{C}G$ no será en general un álgebra conmutativa. Lo será cuando el grupo G sea abeliano. A esta álgebra la llamamos el **álgebra de grupo compleja**.

Ejemplo 2.4. Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie y 1 su identidad. Entonces $U(\mathfrak{g})$ es una coálgebra coconmutativa con las siguientes operaciones:

- $\Delta(X) = X \otimes 1 + 1 \otimes X$, $\forall X \in \mathfrak{g}$,
- $\epsilon(X) = 0$, $\forall X \in \mathfrak{g} \setminus \{1\}$.

Gracias a la propiedad universal, estas operaciones se pueden extender de manera única a $U(\mathfrak{g})$ como homomorfismos de álgebra. De esta forma, $\Delta([X,Y]) = [\Delta(X), \Delta(Y)]$ para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$. Nótese que como Δ y ϵ son homomorfismos de álgebra, $\epsilon(1) = 1$ y $\Delta(1) = 1 \otimes 1$.

Sea $X \in \mathfrak{g}$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\Delta \otimes id(\Delta(X)) &= (\Delta \otimes id)(X \otimes 1 + 1 \otimes X)\\
&= \Delta(X) \otimes 1 + \Delta(1) \otimes X\\
&= X \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes X \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes X\\
&= X \otimes \Delta(1) + 1 \otimes (X \otimes 1 + 1 \otimes X)\\
&= id \otimes \Delta(\Delta(X)),
\end{aligned}$$

del mismo modo,

$$\begin{aligned}
\epsilon \otimes id(\Delta X) &= (\epsilon \otimes id)(X \otimes 1 + 1 \otimes X)\\
&= \epsilon(X) \otimes 1 + \epsilon(1) \otimes X\\
&= 1_{\mathbb{K}} \otimes X.
\end{aligned}$$

Además,

$$id \otimes \epsilon(\Delta X) = X \otimes 1_{\mathbb{K}}.$$

Finalmente, $U(\mathfrak{g})$ es coconmutativa pues para todo $X \in \mathfrak{g}$,

$$\Delta(X) = X \otimes 1 + 1 \otimes X = 1 \otimes X + X \otimes 1.$$

En el ejemplo 2.3 vimos una forma obvia de definir Δ y ϵ. De hecho, si tenemos un espacio vectorial V y definimos Δ y ϵ como en este ejemplo, entonces (V, Δ, ϵ) será una coálgebra. Pero la comultiplicación y la counidad no siempre van a estar definidas de esta manera. Sin embargo, pueden existir elementos en los que Δ y ϵ se comportan como en el ejemplo 2.3. Estos elementos son especiales y les damos un nombre en la siguiente definición.

Definición 2.5. Sea C una coálgebra y $c \in C$.

1. c es **grupal (group-like)** si $\Delta c = c \otimes c$ y $\epsilon(c) = 1$. El conjunto de elementos grupales de C se denota $G(C)$.

2. Para $g, h \in G(C)$, c es g, h**-primitivo** si $\Delta c = c \otimes g + h \otimes c$. El conjunto de elementos g, h-primitivos se denota por $P_{g,h}(C)$. Los elementos del conjunto $P(C) = P_{1,1}(C)$ se llaman simplemente **primitivos de** C.

Claramente todos los elementos de $\mathbb{C}G$ son grupales en $\mathbb{C}G$ y todos los elementos de $\mathfrak{g}$ son primitivos en $U(\mathfrak{g})$. Más adelante probaremos que $\mathfrak{g} \cong P(U(\mathfrak{g}))$.

Proposición 2.6. *Si (C, Δ, ϵ) es una $\mathbb{K}$-coálgebra entonces el espacio dual C^* de aplicaciones lineales de C en $\mathbb{K}$ es un $\mathbb{K}$-álgebra con multiplicación $m = \Delta^* : (C \otimes C)^* \to C^*$ restringida a $C^* \otimes C^* \subseteq (C \otimes C)^*$ y unidad $u = \epsilon^* : \mathbb{K}^* = \mathbb{K} \to C^*$.*

Demostración. Si $f \otimes g \in C^* \otimes C^*$, $f \otimes g : C \otimes C \to \mathbb{K}$ es tal que $f \otimes g(a \otimes b) = f(a)g(b)$ y así $f \otimes g \in (C \otimes C)^*$. Esto aclara la contenencia $C^* \otimes C^* \subseteq (C \otimes C)^*$. Entonces la multiplicación será $m = \Delta^*|_{C^* \otimes C^*} : C^* \otimes C^* \to C^*$.

Ahora, por definición de Δ^*, tenemos que

$$\Delta^*(f \otimes g)(c) = (f \otimes g)\Delta(c)$$

luego si $f, g, h \in C^*$, para todo $c \in C$ tenemos

$$\begin{aligned}
m \circ (id \otimes m)(f \otimes g \otimes h)(c) &= \Delta^* \circ (id \otimes \Delta^*)(f \otimes g \otimes h)(c) \\
&= \Delta^*(f \otimes \Delta^*(g \otimes h))(c) \\
&= f \otimes \Delta^*(g \otimes h)(\Delta(c)) \\
&= f \otimes \Delta^*(g \otimes h)(\sum c_1 \otimes c_2) \\
&= \sum f(c_1) \otimes \Delta^*(g \otimes h)(c_2)
\end{aligned}$$

y, usando la definición de Δ^*,

$$\begin{aligned} m\circ(id\otimes m)(f\otimes g\otimes h)(c) &= \sum f(c_1)\otimes(g\otimes h)(\Delta(c_2)) \\ &= \sum f(c_1)\otimes g(c_{2_1})\otimes h(c_{2_2}) \\ &= \sum f(c_{1_1})\otimes g(c_{1_2})\otimes h(c_2) \\ &= \sum (f\otimes g)(\Delta(c_1))\otimes h(c_2) \\ &= \sum \Delta^*(f\otimes g)(c_1)\otimes h(c_2) \\ &= (\Delta^*(f\otimes g)\otimes h)(\Delta c) \\ &= \Delta^*(\Delta^*(f\otimes g)\otimes h)(c) \\ &= \Delta^*\circ(\Delta^*\otimes id)(f\otimes g\otimes h)(c). \end{aligned}$$

Así, m es asociativa. Para la propiedad de la unidad, recordemos que las funciones lineales de $\mathbb{K}$ en $\mathbb{K}$ corresponen a multiplicar por un $k\in\mathbb{K}$. Por eso $\mathbb{K}^*=\mathbb{K}$. Teniendo esto en cuenta, sea $k\in\mathbb{K}$ y $f_k\in\mathbb{K}^*$ tal que $f_k(x)=kx$ para todo $x\in\mathbb{K}$. Entonces para todo $c\in C$ y para todo $g\in C^*$

$$\begin{aligned} m\circ(u\otimes id)(k\otimes g)(c) &= \Delta^*(u(k)\otimes g)(c) \\ &= \Delta^*(\epsilon^*(f_k)\otimes g)(c) \\ &= \epsilon^*(f_k)\otimes g(\Delta(c)) \\ &= \sum \epsilon^*(f_k)(c_1)\otimes g(c_2) \\ &= \sum f_k(\epsilon(c_1))\otimes g(c_2) \\ &= k(\epsilon\otimes g)(\Delta(c)) \\ &= k(id\otimes g)(\epsilon\otimes id)(\Delta(c)) \\ &= k(id\otimes g)(1\otimes c) \\ &= k(1\otimes g(c)) \\ &= kg(c). \end{aligned}$$

Así, u satisface la propiedad de la unidad y $(C^*,\Delta^*,\epsilon^*)$ es un álgebra.

□

Observación 2. Si trabajamos con un álgebra (A,m,u), puede que $A^*\otimes A^*$ sea un subconjunto propio de $(A\otimes A)^*$ y que $m^*:A^*\to(A\otimes A)^*$ no caiga en $A^*\otimes A^*$. Sin embargo, si A es de dimensión finita, tenemos igualdad entre $A^*\otimes A^*$ y $(A\otimes A)^*$, y (A^*,m^*,u^*) es una coálgebra.

2.2. Álgebras de Hopf

Para definir el concepto de álgebra de Hopf miremos primero qué pasa cuando a un álgebra (B, m, u) se le da estructura de coálgebra. Primero definimos la multiplicación y la comultiplicación en $B \otimes B$ por medio de $(a \otimes b)(c \otimes d) = (ac \otimes bd)$ y $\Delta_{B\otimes B}(a \otimes b) = \sum a_1 \otimes b_1 \otimes a_2 \otimes b_2$ (donde $\Delta_B(a) = \sum a_1 \otimes a_2$ y $\Delta_B(b) = \sum b_1 \otimes b_2$) respectivamente. También definimos $\epsilon_{B\otimes B}(a \otimes b) = \epsilon_B(a)\epsilon_B(b)$ y $u_{B\otimes B}(k) = u(k) \otimes u(k)$ para todo $k \in \mathbb{K}$. Así le damos estructura de álgebra y coálgebra a $B \otimes B$. Si la multiplicación respeta a la comultiplicación (ó viceversa), esta nueva estructura tiene un nombre especial como veremos en la siguiente definición.

Definición 2.7. $(B, m_B, u_B, \Delta_B, \epsilon_B)$ es una **biálgebra** si (B, m_B, u_B) es un álgebra, $(B, \Delta_B, \epsilon_B)$ es una coálgebra y se cumple alguna de las siguientes condiciones equivalentes:

1. Δ_B y ϵ_B son morfismos de álgebras.

2. m_B y u_B son morfismos de coálgebras.

Veamos la equivalencia de las condiciones. Supongamos que Δ y ϵ son morfismos de álgebras. Entonces para todo $a, b \in B$, $\Delta_B(ab) = \Delta_B(a)\Delta_B(b)$, $\Delta_B \circ u_B = u_{B\otimes B}$, $\epsilon(ab) = \epsilon(a)\epsilon(b)$, $\epsilon_B \circ u_B = u_{\mathbb{K}}$. Sea $a \otimes b \in B \otimes B$. Entonces

$$\begin{aligned}
m_B \otimes m_B(\Delta_{B\otimes B}(a \otimes b)) &= m_B \otimes m_B \left(\sum a_1 \otimes b_1 \otimes a_2 \otimes b_2\right) \\
&= \sum a_1 b_1 \otimes a_2 b_2 \\
&= \sum (a_1 \otimes a_2)(b_1 \otimes b_2) \\
&= \Delta_B(a)\Delta_B(b) \\
&= \Delta_B(ab) \\
&= \Delta_B \circ m_B(a \otimes b).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\epsilon_B \circ m_B(a \otimes b) &= \epsilon_B(a)\epsilon_B(b) \\
&= \epsilon_{B\otimes B}(a \otimes b).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_B \circ u_B(k) &= u_{B\otimes B}(k) \\
&= u(k) \otimes u(k) \\
&= u \otimes u(k \otimes k) \\
&= u \otimes u(\Delta_{\mathbb{K}}(k))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\epsilon_B \circ u_B(k) &= u_{\mathbb{K}}(k)\\ &= k = \epsilon_{\mathbb{K}}(k).\end{aligned}$$

La otra implicación es similar.

Lema 2.8. *Sea (C, Δ, ϵ) una coálgebra y (A, m, u) un álgebra. Entonces $Hom_{\mathbb{K}}(C, A) = \{f : C \to A | f \text{ es } \mathbb{K}-\text{lineal}\}$ es un álgebra con multiplicación definida por la* ***convolución****:*

$$\mu(f \otimes g)(c) = (f * g)(c) := m \circ (f \otimes g)(\Delta c)$$

para todo $f, g \in Hom_{\mathbb{K}}(C, A)$ y todo $c \in C$ y unidad $\eta(k) = u \circ \epsilon$ para todo $k \in \mathbb{K}$.

Con la notación $\Delta(c) = \sum c_1 \otimes c_2$ tenemos entonces que $f * g(c) = \sum f(c_1)g(c_2)$.

Demostración. Para probar la asociatividad de la convolución, sean $f, g, h \in Hom_{\mathbb{K}}(C, A)$ y $c \in C$. Entonces utilizando la notación anterior,

$$\begin{aligned}f * (g * h)(c) &= m \circ (f \otimes (g * h))(\Delta c)\\ &= m \circ (f \otimes (g * h))(\sum c_1 \otimes c_2)\\ &= \sum f(c_1)(g * h)(c_2)\\ &= \sum f(c_1)(m \circ (g \otimes h)(\Delta c_2))\\ &= \sum f(c_1)(g(c_2)h(c_3))\\ &= \sum (f(c_1)g(c_2))h(c_3)\\ &= \sum (m \circ (f \otimes g)(\Delta c_1))h(c_3)\\ &= m \circ ((f * g) \otimes h)(\Delta c)\\ &= (f * g) * h(c)\end{aligned}$$

Además, si $k \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned}\mu \circ (\eta \otimes id)(k \otimes f)(c) &= \mu((u \circ \epsilon) \otimes f)(c)\\ &= m \circ ((u \circ \epsilon) \otimes f)(\Delta(c))\\ &= m \circ ((u \otimes f) \circ (\epsilon \otimes id))(\Delta(c))\\ &= m((u \otimes f)(1 \otimes c))\\ &= u(1)f(c)\\ &= f(c).\end{aligned}$$

Entonces μ es asociativa y η cumple con la condición de la unidad y así $(Hom_{\mathbb{K}}(C, A), \mu, \eta)$ es un álgebra. $\square$

Finalmente, teniendo en cuenta todos los elementos introducidos anteriormente, llegamos a la definición más importante de este capítulo, la de álgebra de Hopf.

Definición 2.9. $(H, m, u, \Delta, \epsilon, s)$ es un **álgebra de Hopf** si $(H, m, u, \Delta, \epsilon)$ es una biálgebra y $s \in Hom_{\mathbb{K}}(H, H)$ es tal que $s * id_H = id_H * s = u \circ \epsilon$. El elemento s se llama **antípoda** de H.

Antes de mirar los ejemplos que nos interesan, veamos cómo dentro de un álgebra de Hopf siempre existe un álgebra de Lie.

Proposición 2.10. *Sea $(H, m, u, \Delta, \epsilon, s)$ un álgebra de Hopf. Entonces los elementos primitivos $L = \{x \in H : \Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x\}$ forman un álgebra de Lie.*

Demostración. Es claro que L es un subespacio de H. Definamos el corchete de Lie por medio de $[x, y] = xy - yx$. En el ejemplo 1.1 vimos que esta multiplicación es efectivamente un corchete de Lie. Lo único que hay que ver es que para todo $x, y \in L$, $[x, y] \in L$. Si $x, y \in L$,

$$\begin{aligned}
\Delta([x, y]) &= \Delta(xy - yx) \\
&= \Delta(x)\Delta(y) - \Delta(y)\Delta(x) \\
&= (x \otimes 1 + 1 \otimes x)(y \otimes 1 + 1 \otimes y) - (y \otimes 1 + 1 \otimes y)(x \otimes 1 + 1 \otimes x) \\
&= xy \otimes 1 + x \otimes y + y \otimes x + 1 \otimes xy - yx \otimes 1 - y \otimes x - x \otimes y - 1 \otimes yx \\
&= (xy - yx) \otimes 1 + 1 \otimes (xy - yx) \\
&= [x, y] \otimes 1 + 1 \otimes [x, y].
\end{aligned}$$

Por lo tanto L es una subálgebra de Lie de H. □

Terminamos este capítulo retomando los ejemplos anteriormente descritos e ilustrando cómo definir en ellos una estructura de álgebra de Hopf. También mostraremos algunas relaciones de *dualidad* entre ellos.

Ejemplo 2.11. Si G es un grupo finito, su álgebra de grupo compleja $\mathbb{C}G$ (Ejemplo 2.3) es además un álgebra de Hopf con antípoda $S(g) = g^{-1}$. En efecto, para ver que es una biálgebra veamos que Δ y ϵ son morfismos de álgebras.

Sean $\sum_{i=1}^{n} c_i g_i, \sum_{j=1}^{m} d_j h_j \in \mathbb{C}G$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\Delta\left(\sum_{i=1}^{n} c_i g_i \sum_{j=1}^{m} d_j h_j\right) &= \Delta\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_i d_j g_i h_j\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_i d_j \Delta(g_i h_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_i d_j (g_i h_j \otimes g_i h_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_i d_j (g_i \otimes g_i)(h_j \otimes h_j) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} c_i (g_i \otimes g_i)\right)\left(\sum_{j=1}^{m} d_j (h_j \otimes h_j)\right) \\
&= \Delta\left(\sum_{i=1}^{n} c_i g_i\right)\Delta\left(\sum_{j=1}^{m} d_j h_j\right).
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\epsilon\left(\sum_{i=1}^{n} c_i g_i \sum_{j=1}^{m} d_j h_j\right) &= \epsilon\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_i d_j g_i h_j\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_i d_j \epsilon(g_i h_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_i d_j \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} c_i\right)\left(\sum_{j=1}^{m} d_j\right) \\
&= \epsilon\left(\sum_{i=1}^{n} c_i g_i\right)\epsilon\left(\sum_{j=1}^{m} d_j h_j\right).
\end{aligned}$$

Finalmente veamos que s es realmente una antípoda:

$$\begin{aligned}
s * id\left(\sum_{i=1}^{n} c_i g_i\right) &= m \circ (s \otimes id)\left(\Delta\left(\sum_{i=1}^{n} c_i g_i\right)\right) \\
&= m \circ (s \otimes id)\left(\sum_{i=1}^{n} c_i (g_i \otimes g_i)\right) \\
&= m\left(\sum_{i=1}^{n} c_i (s(g_i) \otimes g_i)\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{n} c_i g_i^{-1} g_i = \sum_{i=1}^{n} c_i e = \sum_{i=1}^{n} c_i u(1) \\
&= u\left(\sum_{i=1}^{n} c_i\right) = u\left(\epsilon\left(\sum_{i=1}^{n} c_i g_i\right)\right).
\end{aligned}
$$

Miremos ahora cómo el álgebra $U(\mathfrak{g})$ del ejemplo 2.4 es también un álgebra de Hopf.

Ejemplo 2.12. $U(\mathfrak{g})$ es un álgebra de Hopf, con Δ y ϵ como en el ejemplo 2.4 y $s(X) = -X$ para todo $X \in \mathfrak{g}$. Ya sabemos que Δ y ϵ son homomorfismos de álgebras. Nuevamente podemos extender s a $U(\mathfrak{g})$ de forma única utilizando la propiedad universal. Para ver que s es una antípoda, sea $X \in \mathfrak{g}$. Entonces

$$
\begin{aligned}
s * id(X) &= m \circ (s \otimes id)(\Delta X) \\
&= m \circ (s \otimes id)(X \otimes 1 + 1 \otimes X) \\
&= m \circ (s(X) \otimes 1 + 1 \otimes X) \\
&= -X + X \\
&= 0 \\
&= u(\epsilon(X)).
\end{aligned}
$$

Así, s es una antípoda y $U(\mathfrak{g})$ es un álgebra de Hopf.

Ya vimos que el espacio dual de un álgebra de Hopf es un álgebra (Proposición 2.6). En el caso del álgebra de grupo compleja tenemos que su espacio dual también es una coálgebra ya que es de dimensión finita. Entonces tenemos operaciones de comultiplicación y counidad para $(\mathbb{C}G)^*$. Podemos extender estas operaciones al álgebra de funciones complejas de G, ya que para probar la coasociatividad y la counidad de m^* y u^* en la proposición 2.6, no se necesitó la linealidad de las funciones en el espacio dual. Ilustremos esto en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.13. Sea $C(G)$ el álgebra de funciones complejas de un grupo finito G. Identifiquemos a $C(G) \otimes C(G)$ con $C(G \otimes G)$. Entonces $C(G)$ es un álgebra de Hopf con comultiplicación definida por $(\Delta(f))(x \otimes y) = f(xy)$, counidad definida por $\epsilon(f) = f(e)$ y antípoda $(s(f))(x) = f(x^{-1})$. Además existe una relación de dualidad entre $\mathbb{C}G$ y $C(G)$ en el sentido de que existe $\mathbb{C}$-lineal sobre $C(G) \otimes \mathbb{C}G$ que respeta las cinco operaciones de ambas álgebras de Hopf.

Primero probemos que $C(G)$ es un álgebra de Hopf con las operaciones definidas. Llamemos m y u a la multiplicación y a la counidad en $\mathbb{C}G$ respectivamente.

Nótese que si restringimos Δ y ϵ a $(\mathbb{C}G)^*$, $\Delta = m^*$ y $\epsilon = u^*$. En efecto, si $f \in (\mathbb{C}G)^*$ y $x \otimes y \in G \otimes G$,

$$\Delta(f)(x \otimes y) = m^*(f)(x \otimes y) = f(xy).$$

Por otra parte, si $f \in (\mathbb{C}G)^*$ entonces para todo $x \in G$, $u^*(f) = f_k \cong k$ para algún $k \in \mathbb{C}$ y $\epsilon(f)(x) = u^*(f)(x) = kx$. Por otra parte, $\epsilon(f)(x) = f(u(x)) = f(xe) = xf(e)$, por lo tanto si igualamos los últimos términos de estas igualdades tenemos que $f(e) = k = u^*(f)$. Entonces $(\mathbb{C}G)^*$ es una coálgebra con estas operaciones. Como mencionamos anteriormente podemos extender Δ y ϵ a $C(G)$ y seguirán cumpliendo las propiedades de coasociatividad y counidad. Así, $C(G)$ es una coálgebra.

Para $f, g \in C(G)$ y $x \otimes y \in G \otimes G$, $\Delta(fg)(x \otimes y) = fg(xy) = f(xy)g(xy) = \Delta(f)\Delta(g)(x \otimes y)$. También $\epsilon(fg) = fg(e) = f(e)g(e) = \epsilon(f)\epsilon(e)$. Así $C(G)$ es una biálgebra. Para probar que s es una antípoda, sea $f \in C(G)$ y $g \in G$. Supongamos que $\Delta(f) = \sum f_1 \otimes f_2$ donde $f(xy) = \Delta(f)(x \otimes y) = \sum f_1(x)f_2(y)$ para todo $x, y \in G$. Entonces

$$\begin{aligned}
m \circ (s \otimes id)(\Delta(f))(g) &= m\left(\sum s(f_1) \otimes f_2\right)(g) \\
&= \left(\sum s(f_1) f_2\right)(g) \\
&= \sum f_1(g^{-1}) f_2(g) \\
&= f(e) \\
&= \epsilon(f) \\
&= u(\epsilon(f)).
\end{aligned}$$

Finalmente sea $\phi : C(G) \otimes \mathbb{C}G \to \mathbb{C}$ tal que $\phi(f, x) = f(x)$. Entonces,

$$\begin{aligned}
&\phi(f \otimes g, \Delta x) = f \otimes g(x \otimes x) = f(x)g(x) = \phi(fg, x) \\
&\epsilon(x) = 1 = \phi(1, x) \\
&\phi(\Delta(f), x \otimes y) = f(xy) = \phi(f, xy) \\
&\epsilon(f) = f(e) = \phi(f, e) \\
&\phi(s(f), x) = f(x^{-1}) = \phi(f, x^{-1}) = \phi(f, s(x)).
\end{aligned}$$

Así ϕ es una aplicación lineal en la primera componente que respeta todas las operaciones de las álgebras de Hopf $C(G)$ y $\mathbb{C}G$ y tenemos una relación de dualidad respecto a ϕ entre ellas.

Ejemplo 2.14. Sea $Poly(G)$ el álgebra de funciones polinomiales complejas sobre un grupo de Lie G e identifiquemos a $Poly(G) \otimes Poly(G)$ con $Poly(G \otimes G)$. Entonces $Poly(G)$ es un álgebra de Hopf con comultiplicación $\Delta(f)(x, y) = f(xy)$, counidad $\epsilon(f) = f(e)$ y antípoda $(s(f))(x) = f(x^{-1})$. Además $U(\mathfrak{g})$ y $Poly(G)$, están en dualidad en el sentido del ejemplo anterior, donde $\mathfrak{g}$ es el álgebra de Lie de G.

En el ejemplo anterior $C(G) \supset Poly(G)$ es un álgebra de Hopf con estas operaciones. Claramente $\Delta(Poly(G)) \subseteq Poly(G \otimes G)$ y la multiplicación de polinomios es también un polinomio. Entonces $Poly(G)$ es un álgebra de Hopf. Para ver la dualidad definamos la forma bilineal $\psi : Poly(G) \otimes U(\mathfrak{g}) \to \mathbb{C}$ asi:

$$\psi(f \otimes X) := Xf(1) = \frac{d}{dt}|_{t=0} f(e^{tX}).$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\psi(f \otimes g, \Delta X) &= \Delta(X)(f \otimes g)(1 \otimes 1) = (X \otimes 1 + 1 \otimes X)(f \otimes g)(1 \otimes 1) \\
&= Xf(1)g(1) + Xf(1)g(1) = \psi(fg, X). \\
\psi(1, X) &= \frac{d}{dt}|_{t=0} 1 = 0 = \epsilon(X). \\
\psi(\Delta(f), X \otimes Y) &= \frac{d}{dt}|_{t=0} \Delta(f)(e^{t(X \otimes Y)}) = \frac{d}{dt}|_{t=0} f(e^{tXY}) \\
&= \psi(f, XY). \\
\psi(f, 1) &= f(1) = \epsilon(f). \\
\psi(s(f), X) &= \frac{d}{dt}|_{t=0} f((e^{tX})^{-1}) = \frac{d}{dt}|_{t=0} f(e^{-tX}) = \psi(f, s(X)).
\end{aligned}$$

Por lo tanto ψ lineal en la primera componente y así las álgebras de Hopf están en dualidad respecto a ψ.

Ejemplo 2.15. Sea S^1 el círculo unitario conformado por elementos de la forma $e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi)$. Llamamos $C_0(S^1)$ al conjunto de funciones complejas sobre S^1 que son contínuas y que se desvanecen en el infinito (es decir, f se desvanece en el infinito si $\forall \epsilon > 0$ existe un compacto K de S^1 tal que $|f(x)| < \epsilon$ para todo $x \in S^1 \setminus K$). Definamos la multiplicación y la suma de dos funciones punto a punto. Así, $C_0(S^1)$ es un álgebra. En realidad las funciones de $C_0(S^1)$ son funciones de θ, por lo que $C_0(S^1)$ es en realidad $C_0([0, 2\pi))$. Podemos extender estas funciones periódicamente a todo $\mathbb{R}$, poniendo $f(2\pi) = f(0)$. Además, si f se desvanece en el infinito, $\int_{t_1}^{t_2} |f(t)|^2 \, dt < \infty$ para todo t_1, t_2 tales que $t_2 - t_1 = 2\pi$. Entonces, a estas funciones periódicas les podemos asociar su serie de Fourier

$$f(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\theta} \qquad \theta \in \mathbb{R},$$

donde $c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt \ \in \mathbb{C}$.

Identifiquemos a $C_0(S^1)$ con $\mathbb{C}[Z, Z^{-1}]$, el conjunto de estas series de Fourier, donde Z y Z^{-1} corresponden a $e^{i\theta}$ y $e^{-i\theta}$ respectivamente. Definimos

$$\Delta Z = Z \otimes Z, \ \epsilon(Z) = 1, \ s(Z) = Z^{-1},$$

$$\Delta Z^{-1} = Z^{-1} \otimes Z^{-1},\ \epsilon(Z^{-1}) = 1,\ s(Z^{-1}) = Z,$$

y es fácil ver que estas operaciones le dan estructura de álgebra de Hopf. La prueba es similar a las realizadas en los ejemplos 2.3 y 2.11.

Por otro lado, esta álgebra de Hopf tiene además la siguiente estructura.

Definición 2.16. Una C^***-álgebra** A es una $\mathbb{C}$-álgebra que además es un espacio de Banach junto con una función $* : A \to A$ tal que para todo $x, y \in A$:

1. $\|xy\| \leq \|x\|\,\|y\|$,
2. $(x+y)^* = x^* + y^*$,
3. $(xy)^* = y^* x^*$,

   para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ y todo $x \in A$,

4. $(\lambda x)^* = \bar{\lambda} x^*$,
5. $\|x^* x\| = \|x\|^2$.

A la función $*$ se le llama **involución**.

Entonces $C_0([0, 2\pi))$ es un espacio de Banach con la norma $\|f\| = \text{máx}_{\theta \in [0,2\pi)} |f(\theta)|$. Para $f \in C_0([0, 2\pi))$, definimos $f^* : [0,2\pi) \to \mathbb{C}$ por medio de $f^*(x) = \overline{f(x)}$. Entonces es fácil ver que $*$ satisface las condiciones para ser una involución. De esta manera, $C_0([0, 2\pi))$ es una C^*-álgebra.

Capítulo 3

Extensiones de Galois de Álgebras de Hopf

En este capítulo veremos qué es una extensión de Galois de un álgebra de Hopf y relacionaremos esta definición con las extensiones de Galois clásicas de un campo. Miraremos algunas extensiones de las álgebras de Hopf expuestas en los ejemplos del capítulo anterior. Para describir las extensiones de Galois de $U(\mathfrak{g})$ necesitaremos mirar su filtración coradical que será definida en la sección 3.1. Seguiremos [Mon] [Par].

Primero veamos la versión dual de un A-módulo. Si A es una $\mathbb{K}$-álgebra, un **A-módulo izquierdo (derecho)** M es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con una aplicación $\mathbb{K}$-lineal $\mu : A \otimes M \to M$ (resp. $\mu : M \otimes A \to M$) tal que los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \otimes M \arrow[r, "m\otimes id"] \arrow[d, "id\otimes\mu"] & A \otimes M \arrow[d, "\mu"] \\ A \otimes M \arrow[r, "\mu"] & M \end{tikzcd}$$

y

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K} \otimes M \arrow[r, "\eta\otimes id"] \arrow[dr] & A \otimes M \arrow[d, "\mu"] \\ & M \end{tikzcd}$$

En este caso, decimos que μ es una **acción izquierda (resp. derecha) de A sobre M**.

Nuevamente la noción de comódulo es dual a la definición de módulo y se obtiene invirtiendo las flechas de los diagramas anteriores.

Definición 3.1. Si C es una $\mathbb{K}$-coálgebra entonces un C**-comódulo derecho (izquierdo)** es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial M junto con una aplicación $\mathbb{K}$-lineal $\rho : M \to M \otimes C$ (resp. $\rho : M \to C \otimes M$)tal que los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\rho"] & M \otimes C \arrow[d, "id\otimes\Delta"] \\ M \otimes C \arrow[r, "\rho\otimes id"] & M \otimes C \otimes C \end{tikzcd}$$

y

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\rho"] \arrow[dr, "\otimes 1"'] & M \otimes C \arrow[d, "id\otimes\epsilon"] \\ & M \otimes \mathbb{K} \end{tikzcd}$$

A ρ la llamamos **coacción derecha (resp. izquierda) de C sobre M.**

Un subespacio N de un C-comódulo derecho M (con coacción ρ) es un **subcomódulo** de M si $\rho(N) \subseteq N \otimes C$.

3.1. Coradicales y Filtraciones

En esta sección definiremos la filtración coradical $\{C_n\}$ de una coálgebra C. Esta filtración describe a C de manera inductiva por lo que será de gran utilidad para realizar argumentos inductivos. Veremos su necesidad cuando construyamos las extensiones de Galois del álgebra envolvente universal.

Para un espacio vectorial V y un subespacio W de V, definimos el **subespacio ortogonal a W**:

$$W^\perp = \{f \in V^* : f(w) = 0, \forall w \in W\};$$

para un subespacio $U \subseteq V^*$, definimos el **subespacio ortogonal a U**:

$$U^\perp = \{v \in V : f(v) = 0, \forall f \in U\}.$$

Nótese que $W^{\perp\perp} = W$, pero no siempre $U^{\perp\perp} = U$. En general tenemos $U \subseteq U^{\perp\perp}$. Si V es de dimensión finita y $U_1, U_2 \subseteq V^*$ entonces $(U_1 \otimes U_2)^\perp = V \otimes U_2^\perp + U_1^\perp \otimes V \subseteq V \otimes V$.

Decimos que una coálgebra es **simple** si no tiene subcoálgebras propias no triviales y que un comódulo es **simple** si no tiene subcomódulos propios no triviales.

Lema 3.2. *Sea C una coálgebra. Entonces*

1. *Si D es un coideal derecho (izquierdo) de C, es decir $\Delta(D) \subseteq D \otimes C$ (resp. $\Delta(D) \subseteq C \otimes D$) entonces $D^{\perp}$ es un ideal derecho (resp. izquierdo) de C^*.*

2. *Si I es un ideal derecho (izquierdo) de C^*, entonces $I^{\perp}$ es un coideal derecho (resp. izquierdo) de C.*

3. *Si D es una subcoálgebra simple de C, entonces $D^{\perp}$ es un ideal maximal de C^* de codimensión finita.*

Nota. Recordemos que si C es una coálgebra, la multiplicación en C^* es $fg(c) = \Delta^*(f \otimes g)(c)$.

Demostración. 1. Supongamos que D es un coideal derecho de C. Sean $f \in D^{\perp}$ y $g \in C^*$. Entonces para todo $d \in D$,

$$\begin{aligned} fg(d) &= \Delta^*(f \otimes g)(d) = (f \otimes g)(\Delta d) \\ &= (f \otimes g) \sum d_1 \otimes d_2 = \sum f(d_1) \otimes g(d_2) \\ &= 0. \end{aligned}$$

La última igualdad se tiene porque $d_1 \in D$ ya que D es un coideal derecho. Así, $fg \in D^{\perp}$ y $D^{\perp}$ es un ideal derecho de C^*.

2. Sea I un ideal derecho de C^*. Para $c \in I^{\perp}$ y $f \in C^*$ definimos $f \rightharpoonup c = \sum f(c_2)c_1$, donde $\Delta(c) = \sum c_1 \otimes c_2$. Entonces $I^{\perp}$ es un C^*-módulo izquierdo bajo la acción $\rightharpoonup$. En efecto, si $f, g \in C^*$ y $c \in I^{\perp}$,

$$\begin{aligned} gf \rightharpoonup c &= \sum gf(c_2)c_1 = \sum \Delta^*(g \otimes f)(c_2)c_1 \\ &= \sum (g \otimes f)\Delta(c_2)c_1 = \sum g(c_{2_1})f(c_{2_2})c_1 = \sum g(c_{1_2})f(c_2)c_{1_1} \\ &= g \rightharpoonup \sum f(c_2)c_1 = g \rightharpoonup (f \rightharpoonup c). \end{aligned}$$

Para $f, g \in C^*$ y $c \in I^{\perp}$,

$$g(f \rightharpoonup c) = \sum f(c_2)g(c_1) = \sum g(c_1)f(c_2) = \Delta^*(g \otimes f)(c) = gf(c).$$

Además, para todo $h \in I, f \in C^*$ y $c \in I^{\perp}$, tenemos que $h(f \rightharpoonup c) = hf(c) = 0$ pues $hf \in I$. Entonces $C^* \rightharpoonup I^{\perp} \subseteq I^{\perp}$. Si $c \in C^{\perp}$ es tal que $\Delta(c) = \sum c_1 \otimes c_2$ y $h \in I$, $f \rightharpoonup c = \sum f(c_2)c_1 \in I^{\perp}$ para todo $f \in C^*$ y $\sum f(c_2)h(c_1) = hf(c) = 0$ para todo $f \in C^*$ por lo que $h(c_1) = 0$ y así $c_1 \in I^{\perp}$. Entonces $\Delta c \in I^{\perp} \otimes C$ por lo que $I^{\perp}$ es un coideal derecho.

3. Consideremos la función sobreyectiva $\psi : C^* \to D^*$ tal que $\psi(f) = f|_{D^*}$. Entonces
$$Ker(\psi) = \{f \in C^* |\ f(d) = 0\ \forall d \in D\} = D^*.$$
Entonces $C^*/D^\perp \cong D^*$ y así $D^\perp$ es maximal. En [Mon] se prueba que si D es simple entonces D es de dimensión finita, por lo que $D^\perp$ tiene codimensión finita.

$\square$

Definición 3.3. Sea C una coálgebra.

1. El **coradical** C_0 de C es la suma de todas las subcoálgebras simples de C.
2. C es **apuntada** si toda subcoálgebra simple es de dimensión 1 como subespacio de C.
3. C es **conexa** si C_0 es de dimensión 1 como subespacio de C.

Dado C_0 el coradical de C definimos inductivamente

$$C_n = \Delta^{-1}(C \otimes C_{n-1} + C_0 \otimes C).$$

La **filtración coradical** de C es $\{C_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Esta filtración tiene las siguientes propiedades:

Proposición 3.4. *Para todo* $n \geq 0$,

1. $C_n \subseteq C_{n+1}$ *y* $C = \bigcup_{n>0} C_n$
2. $\Delta C_n \subseteq \sum_{i=0}^{n} C_i \otimes C_{n-i}$

Demostración. Para dos subespacios X, Y de C definimos el producto cuña por medio de
$$X \wedge Y = Ker(C \xrightarrow{\Delta} C \otimes C \xrightarrow{\pi_X \otimes \pi_Y} C/X \otimes C/Y),$$
donde π_X y π_Y son las proyecciones canónicas. Entonces
$$X \wedge Y = \Delta^{-1}(C \otimes Y + X \otimes C).$$
En efecto,
$$(\pi_X \otimes \pi_Y)(\Delta(c)) = X \otimes Y$$
$$\Updownarrow$$
$$(\pi_X \otimes \pi_Y)\left(\sum c_1 \otimes c_2\right) = X \otimes Y$$
$$\Updownarrow$$
$$\sum (c_1 + X) \otimes (c_2 + Y) = X \otimes Y$$
$$\Updownarrow$$
$$\Delta(c) \in C \otimes Y + X \otimes C.$$

Sea $X^{\perp}Y^{\perp}$ el ideal generado por el conjunto $\{fg \in C^*|\ f \in X^{\perp},\ g \in Y^{\perp}\}$. Es fácil ver que $X \wedge Y = (X^{\perp}Y^{\perp})^{\perp}$ y que $(X \wedge Y) \wedge Z = X \wedge (Y \wedge Z)$.

Si X, Y son subcoálgebras de C, en particular son coideales derechos e izquerdos: $\Delta X \subseteq X \otimes C, \Delta X \subseteq C \otimes X, \Delta Y \subseteq Y \otimes C, \Delta Y \subseteq C \otimes Y$. Entonces por el lema 3.2, $X^{\perp}$ y $Y^{\perp}$ son ideales derechos e izquierdos de C^*. Esto implica que $X^{\perp}Y^{\perp}$ también es ideal por derecha y por izquierda de C^* pues si $fg \in X^{\perp}Y^{\perp}$ y $h \in C^*$, $gh \in Y^{\perp}$ y $fgh \in X^{\perp}Y^{\perp}$, $hf \in X^{\perp}$ y $hfg \in X^{\perp}Y^{\perp}$. Luego $X \wedge Y = (X^{\perp}Y^{\perp})^{\perp}$ es coideal derecho e izquierdo de C, lo que es equivalente a ser una subcoálgebra. Nótese además que $X + Y \subseteq X \wedge Y$: si $x + y \in X + Y$ y $f \in X^{\perp}, g \in Y^{\perp}$, entonces $fg(x+y) = fg(x) + fg(y) = f \otimes g(\Delta(x)) + f \otimes g(\Delta(y)) = 0$, luego $x + y \in (X^{\perp}Y^{\perp})^{\perp}$. Con esta notación,
$C_1 = \Delta^{-1}(C \otimes C_0 + C_0 \otimes C) = C_0 \wedge C_0$,
$C_2 = \Delta^{-1}(C \otimes C_1 + C_0 \otimes C) = \Delta^{-1}(C \otimes (C_0 \wedge C_0) + C_0 \otimes C) = C_0 \wedge C_0 \wedge C_0$, y así,
$C_n = \bigwedge^{n+1} C_0$.

Entonces se puede probar por inducción que $C_n \subseteq C_{n+1}$ para todo n. Como este producto cuña es asociativo, $C_n = (\bigwedge^i C_0) \wedge (\bigwedge^{n+1-i} C_0)$ para todo $0 \leq i \leq n+1$, luego $\Delta C_n \subseteq C \otimes (\bigwedge^{n+1-i} C_0) + (\bigwedge^i C_0) \otimes C = C \otimes C_{n-i} + C_{i-1} \otimes C$ para todo $0 \leq i \leq n+1$. Entonces

$$\Delta C_n \subseteq \bigcap_{i=0}^{n+1} (C \otimes C_{n-i} + C_{i-1} \otimes C) = \sum_{i=1}^{n+1} C_{i-1} \otimes C_{n+1-i} = \sum_{i=0}^{n} C_i \otimes C_{n-i}.$$

□

Cualquier familia de subespacios de una coálgebra $\{A_n\}$ que cumpla con estas condiciones se llama **filtración de coálgebra**. Si además la coálgebra es un álgebra de Hopf y la familia es una **filtración de álgebras** (es decir, $A_n A_m \subseteq A_{n+m}$ para todo $n, m \geq 0$) entonces se dice que $\{A_n\}$ es una **filtración de Hopf**.

Para terminar esta sección probemos un lema que nos ayudará cuando hallemos la filtración coradical de $U(\mathfrak{g})$.

Lema 3.5. *Sea C una coálgebra con filtración coradical $\{C_n\}$. Sea $J = C_0^{\perp} \subseteq C^*$. Entonces:*

1. *$J = Jac(C^*)$, el ideal de Jacobson de C^*, definido como $Jac(C^*) = \bigcap_\alpha M_\alpha$, donde M_α es ideal maximal de C^* de codimensión finita.*
2. *$C_n = (J^{n+1})^{\perp}$.*
3. *$\bigcap_{n>0} J^n = 0$.*

Demostración. 1. Por definición, $C_0 = \sum D_\alpha$, donde D_α son las subcoálgebras simples de C. Por el lema 3.2, $N_\alpha = D_\alpha^\perp$ es un ideal maximal de codimensión finita. Entonces

$$J = \left(\sum_\alpha D_\alpha\right)^\perp = \bigcap_\alpha D_\alpha^\perp = \bigcap_\alpha N_\alpha \supseteq \bigcap_\alpha M_\alpha.$$

Entonces $Jac(C^*) \subseteq J$. Para la otra contenencia probemos primero el numeral 2 por inducción.

2. Para $n = 0$, $C_0 = C_0^{\perp\perp} = J^\perp$. Esto nos da el caso base. Supongamos que $C_{n-1} = (J^n)^\perp$. Sean $c \in C$ y $fg \in J^{n+1}$, donde $f \in J$ y $g \in J^n$. Entonces

$$\begin{gathered} fg(c) = 0 \\ \Updownarrow \\ f \otimes g(\Delta(c)) = 0 \\ \Updownarrow \\ \Delta(c) \in (J \otimes J^n)^\perp \\ \Updownarrow \\ \Delta(c) \in C \otimes J^n + J^\perp \otimes C \\ \Updownarrow \\ \Delta(c) \in C \otimes C_{n-1} + C_0 \otimes C \\ \Updownarrow \\ c \in C_n. \end{gathered}$$

Entonces $C_n = (J^{n+1})^\perp$.

Ahora sí veamos la otra contenencia del numeral 1. Si $f \in J$ entonces $(\epsilon - f)^{-1} = \sum_{n=0}^\infty f^n \in C^*$. Por lo tanto $\epsilon - f$ es invertible en C^* lo que implica que $Jac(C^*) \subseteq J$ [Ati].

3. Como $J^n \subseteq (J^n)^{\perp\perp}$ y $C = \bigcup_{n\geq 0} C_n$,

$$0 = C^\perp = \left(\bigcup_{n\geq 0} C_n\right)^\perp = \left(\bigcup_{n\geq 0} (J^{n+1})^\perp\right)^\perp = \bigcap_{n>0} J^n.$$

□

3.2. Extensiones de Galois de Álgebras de Hopf

Ya conocemos las extensiones de Galois de campos clásicas. Esta teoría se puede generalizar cuando tenemos un álgebra de Hopf coactuando sobre un álgebra. En esta sección veremos una nueva noción de extensión de Galois y probaremos que coincide con la definición de extensión de Galois en la teoría clásica de campos. También veremos extensiones de Galois para las álgebras de Hopf vistas en los ejemplos 2.3 y 2.4.

Si M es un H-comódulo derecho, los coinvariantes de H en M son el conjunto

$$M^{coH} = \{m \in M | \rho(m) = m \otimes 1\}.$$

Si M es un álgebra H-comodular por derecha (es decir, un H-comódulo derecho con estructura de álgebra), el conjunto de los coinvarientes es una subálgebra de M ya que si $x, y \in M^{coH}$, $\rho(xy) = \rho(x)\rho(y) = (x \otimes 1)(y \otimes 1) = xy \otimes 1$ y así $xy \in M^{coH}$.

Definición 3.6. Sea A un álgebra H-comodular por derecha con coacción derecha $\rho : A \to A \otimes H$. Entonces $A^{coH} \subset A$ es una **extensión H-Galois a derecha** si la función

$$\beta : A \otimes_{A^{coH}} A \to A \otimes_{\mathbb{K}} H$$

dada por $\beta(a \otimes b) = (a \otimes 1)\rho(b)$ es una biyección. A β la llamamos **función de Galois**.

Veamos qué tiene que ver la teoría clásica de Galois con esta nueva definición.

3.2.1. Extensiones de Galois clásicas para campos

Sea G un grupo finito actuando como automorfismos sobre un campo $E \supset \mathbb{K}$. Sea F el subcampo de E conformado por los elementos de E que quedan fijos bajo la acción de G. Entonces el grupo de Galois de E sobre F es precisamente G.

Veamos que E/F es de Galois en el sentido clásico si y sólo si $F \subset E$ es $(\mathbb{K}G)^*$-Galois en el nuevo sentido:

Supongamos que E/F es una extensión de Galois clásica. Sea $[E : F]$ la dimensión de E/F y $\{E : F\}$ el número de automorfismos de E que dejan fijo a F. Sabemos que E/F es de Galois si y sólo si $[E : F] = \{E : F\} = |G|$. Sea $G = \{x_1, \dots, x_n\}$ y $\{b_1, \dots, b_n\}$ una base para E/F. Sea $\{x_1^*, \dots, x_n^*\} \subset (\mathbb{K}G)^*$ la base dual a $\{x_1, ..., x_n\} \subset \mathbb{K}G$. La acción de G en E determina la coación

$$\rho : E \to E \otimes_{\mathbb{K}} (\mathbb{K}G)^*$$

dada por $\rho(a) = \sum_{i=1}^{n} (ax_i) \otimes x_i^*$. Así, E es un $(\mathbb{K}G)^*$-comódulo derecho. Veamos que la aplicación $\beta : E \otimes_F E \to E \otimes_{\mathbb{K}} (\mathbb{K}G)^*$ definida por

$$\begin{aligned}\beta(a \otimes b) &= (a \otimes 1)\rho(b) \\ &= (a \otimes 1)\sum_{i=1}^{n}(bx_i) \otimes p_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} a(bx_i) \otimes p_i.\end{aligned}$$

es una biyección. Sea $w = \sum_j a_j \otimes b_j \in Ker(\beta)$, es decir,

$$\beta\left(\sum_j a_j \otimes b_j\right) = \sum_j \sum_{i=1}^{n} a_j(b_j x_i) \otimes p_i = 0.$$

Como $\{p_i\}$ es una base, entonces para todo i, $\sum_j a_j(b_j x_i) = 0$.

Consideremos la matriz $C = [b_j x_i]_{ij}$ de $n \times n$ y supongamos que las filas son linealmente dependientes. Entonces existen $r_1, \ldots, r_n \in E$ no todos nulos tales que para todo j, $\sum_{i=1}^{n} r_i(b_j x_i) = 0$. Sea k el número de términos no nulos. Para todo $e \in E$, $\sum_{i=1}^{k} r_i(ex_i) = 0$. Entonces $k \geq 2$ (de lo contrario existiría un elemento en G que manda a todos los elementos de E a cero, luego no deja fijo a F). Como los x_i son distintos, existe $y \in E$ tal que $yx_1 \neq yx_k$. Sea $e \in E$. Entonces

$$\sum_{i=1}^{k} r_i((ye)x_i) = \sum_{i=1}^{k} r_i(yx_i ex_i) = 0 \tag{3.1}$$

$$\sum_{i=1}^{k} r_i(ex_i) = 0 \tag{3.2}$$

Si multiplicamos la ecuación 3.2 por yx_1 y le restamos la ecuación 3.1 obtenemos

$$\sum_{i=1}^{k} r_i(yx_1 - yx_i)ex_i = \sum_{i=2}^{k} r_i(yx_1 - yx_i)ex_i = 0$$

Como esto vale para todo $e \in E$, tenemos una nueva combinación lineal con $k-1$ términos que anula a todo E, lo que contradice la escogencia de k. Entonces las filas son linealmente independientes y así C es invertible. Por lo tanto $a_j = 0\ \forall j$ y así $w = 0$. Entonces β es inyectiva. Como ambos productos tensoriales son de dimensión finita, β es sobreyectiva y por lo tanto biyectiva. Entonces $F = E^{co(\mathbb{K}G)^*} \subset E$ es $(\mathbb{K}G)^*$-Galois a derecha.

Si $F \subset E$ es $(\mathbb{K}G)^*$-Galois a derecha, entonces $E \otimes_F E \cong E \otimes_{\mathbb{K}} (\mathbb{K}G)^*$, por lo que $\{E : F\} = [E : F]$. Así, E/F es una extensión de Galois en el sentido clásico.

3.2.2. Extensiones de Galois del Álgebra de Grupo

En esta sección daremos una caracterización de las extensiones de Galois cuando el álgebra de grupo compleja coactúa sobre un álgebra G-graduada. Para esto veamos la noción de álgebra graduada.

Definición 3.7. Sea G un grupo. Un **álgebra G-graduada** A es un álgebra que admite una descomposición en subálgebras $A = \bigoplus_{x \in G} A_x$ tal que $A_x A_y \subseteq A_{xy}$, $\forall x, y \in G$. Decimos que A es **fuertemente G-graduada** si para todo $x, y \in G$, $A_x A_y = A_{xy}$.

Observación 3. Un álgebra graduada A es fuertemente graduada si y sólo si para todo $x \in G$, $A_x A_{x^{-1}} = A_1$ donde 1 es la identidad de G. En efecto, si $A_x A_{x^{-1}} = A_1$ para todo $x \in G$, $A_{xy} = A_{xy} A_1 = A_{xy} A_{y^{-1}} A_y \subseteq A_x A_y$. Entonces $A_x A_y = A_{xy}$. La otra implicación se tiene por definición.

Sea G un grupo finito y $A = \bigoplus_{g \in G} A_g$ un álgebra G-graduada. Si definimos la coacción $\rho : A \to A \otimes \mathbb{C}G$ por medio de $\rho\left(\sum_{g \in G} a_g\right) = \sum_{g \in G} a_g \otimes g$, entonces A es un $\mathbb{C}G$-comódulo. En efecto, para $\sum_{g \in G} a_g \in A$,

$$\begin{aligned}
id \otimes \rho\left(\rho\left(\sum_{g \in G} a_g\right)\right) &= id \otimes \rho\left(\sum_{g \in G} a_g \otimes g\right) \\
&= \sum_{g \in G} a_g \otimes g \otimes g \\
&= id \otimes \Delta\left(\rho\left(\sum_{g \in G} a_g\right)\right)
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
id \otimes \epsilon\left(\rho\left(\sum_{g \in G} a_g\right)\right) &= id \otimes \epsilon\left(\sum_{g \in G} a_g \otimes g\right) \\
&= \sum_{g \in G} a_g \otimes 1 \\
&= \left(\sum_{g \in G} a_g\right) \otimes 1.
\end{aligned}$$

Nótese que $A^{co\mathbb{C}G} = A_1$, donde 1 es la identidad de G.

Teorema 3.8. *$A_1 \subset A$ es una extensión $\mathbb{C}G$-Galois si y sólo si A es fuertemente graduada.*

Demostración. Sea $\beta : A \otimes_{A_1} A \to A \otimes \mathbb{C}G$ la función de Galois. Entonces

$$\beta(a \otimes b) = (a \otimes 1) \otimes \sum_{g \in G} b_g \otimes g = \sum_{g \in G} ab_g \otimes g.$$

Entonces β es sobreyectiva $\iff$ para todo $y \in G$ y todo $\sum_{g \in G} a_g \in A$, existen $c, b \in A$ tales que $(\sum_{g \in G} a_g) \otimes y = \sum_{g \in G} cb_g \otimes g \iff$ para todo $g \neq y$, $cb_g = 0$ y $cb_y = \sum_{g \in G} a_g$ $\iff (a_1 \in A_1 \Rightarrow \exists c, b \in A : cb = c_{y^{-1}} b_y = a_1 \Rightarrow a_1 \in A_{y^{-1}} A_y) \iff A_{y^{-1}} A_y = A_1 \iff$ A es fuertemente graduada.

Si A es fuertemente graduada veamos que β es inyectiva. Como para todo $g \in G$, $1 \in A_1 = A_{g^{-1}} A_g$ podemos escribir $1 = \sum a_{g^{-1}} b_g$, donde $a_{g^{-1}} \in A_{g^{-1}}, b_g \in A_g$. Definimos $\phi : A \otimes \mathbb{C}G \to A \otimes_{A_1} A$ por medio de $\phi(c \otimes g) = \sum c a_{g^{-1}} \otimes b_g$. Entonces $\phi \circ \beta = id$:

$$\begin{aligned}
\phi(\beta(c \otimes d)) &= \phi(\sum_{g \in G} cd_g \otimes g) \\
&= \sum_{g \in G} \sum cd_g a_{g^{-1}} \otimes b_g \\
&= \sum_{g \in G} \sum c \otimes d_g a_{g^{-1}} b_g \\
&= \sum_{g \in G} c \otimes d_g \\
&= c \otimes d.
\end{aligned}$$

Entonces β es inyectiva y por lo tanto biyectiva. □

Veamos ahora cómo son las extensiones de Galois del espacio dual del álgebra de grupo compleja $(\mathbb{C}G)^*$.

Ejemplo 3.9. Sea G un grupo finito actuando sobre un conjunto finito X. Sea $\mu : X \times G \to X$ tal acción. Consideremos la aplicación $\alpha : X \times G \to X \times X$ tal que $\alpha(x, g) = (x, \mu(x, g))$. Nótese que α es inyectiva si y sólo si μ es libre.

Sea $A = \mathbb{C}^X$ el álgebra de funciones de X en $\mathbb{C}$ y $H = (\mathbb{C}G)^*$. Entonces veremos que A es un H-comódulo y diremos cuando $A^{coH} \subset A$ es H-Galois. Consideremos la acción $\eta : \mathbb{C}G \times A \to A$ tal que

$$\eta\left(\sum_{i=1}^{n} c_i g_i, f\right)(x) = f\left(\mu\left(x, \sum_{i=1}^{n} c_i g_i\right)\right),$$

y la acción dual a μ extendida a $A \otimes A$, $\mu^* : A \to A \otimes \mathbb{C}G^*$ tal que $\mu^*(f)\left(x \otimes \sum_{i=1}^{n} c_i g_i\right) = \eta\left(\sum_{i=1}^{n} c_i g_i, f\right)(x)$. Entonces μ^* es una coacción de H sobre A.

Sea $B = \mathbb{C}^{X/G} \subseteq A$ el subconjunto de funciones constantes en las órbitas de G. Entonces $B = A^{coH}$. En efecto, $f \in B$ si y sólo si

$$\mu^*(f)(x \otimes g) = \eta(g, f)(x) = f(xg) = f(x) = f \otimes 1(x \otimes g)$$

si y sólo si $f \in A^{coH}$. Por otro lado, si dualizamos α obtenemos

$$\alpha^* : \mathbb{C}^{X \times X} \cong \mathbb{C}^X \otimes \mathbb{C}^X \to \mathbb{C}^{X \times G} \cong \mathbb{C}^X \otimes \mathbb{C}^G,$$

es decir, $\alpha^* : A \otimes_B A \to A \otimes H$. Ahora,

$$\begin{aligned}\alpha^*(f \otimes h)(x, g) &= f \otimes h(\alpha(x, g)) = f \otimes h(x, \mu(x, g)) = f(x)h(\mu(x, g)) \\ &= f(x)\mu^*(h)(x, g) = (f \otimes 1)\mu^*(h)(x, g)\end{aligned}$$

para todo $x \in X, g \in G$. Así, α^* es la función de Galois β. Como ya vimos antes, $\beta = \alpha^*$ es biyectiva si y sólo si α es biyectiva si y sólo si la acción es libre. Esto quiere decir que $(\mathbb{C}^X)^{co(\mathbb{C}G)^*}$ es una extensión de galois si y sólo si la acción de G sobre X es libre.

3.2.3. Extensiones de Galois de $U(\mathfrak{g})$

En esta parte estudiaremos las extensiones de Galois del álgebra envolvente universal. Para esto necesitamos estudiar cómo son los $U(\mathfrak{g})$-comódulos.

Primero fijemos una notación. Sea $\{x_i : i \in I\}$ una base para $\mathfrak{g}$. Consideremos todas las funciones $n : I \to \mathbb{Z}_+$ que tienen soporte finito. Entonces estas funciones se pueden ver como tuplas finitas ordenadas $(n(i_1), ..., n(i_m))$ donde $i_1 < ... < i_m$ son los valores donde no se anula n. Definimos $x^n := x_{i_1}^{n(i_1)} ... x_{i_m}^{n(i_m)}$. Entonces la base de Poincaré-Birkhoff-Witt está conformada por los x^n para n de soporte finito. Definamos también $|n| := \sum_{i \in I} n(i)$ y un orden parcial sobre estas funciones como sigue: $m \leq n \Leftrightarrow m(i) \leq n(i)$ para todo $i \in I$. Para $m \leq n$ definimos $\binom{n}{m} := \prod_{i \in I} \binom{n(i)}{m(i)}$. Con esta notación tenemos que [Mon]

$$\Delta(x^n) = \sum_{m \leq n} \binom{n}{m} x^m \otimes x^{n-m}.$$

Definición 3.10. Sea H una coálgebra con filtración coradical $H = \bigcup_{n=0}^{\infty} H_n$. Si M es un H-comódulo derecho definimos $M_n = \rho^{-1}(M \otimes H_n)$, donde ρ es la coacción de H sobre M. Para subespacios $N \subseteq M, C \subseteq H$ definimos el producto cuña entre N y C como $N \wedge C = \rho^{-1}(M \otimes C + N \otimes H)$.

Los M_n tienen muchas propiedades similares a las de la filtración coradical. Se pueden ver en el siguiente lema que está demostrado en [Par].

Lema 3.11. *Sea H una coálgebra y M un H-comódulo derecho. Entonces para todo $n \geq 0$ se cumple*

1. *M_n es un subcomódulo de M.*
2. *$M_{n+1} = M_n \wedge H_0$.*
3. *$M_n = \{m \in M : \rho(m) \in \sum_{i=0}^{n} M_i \otimes H_{n-i}\}$.*
4. *$M = \bigcup_{n=0}^{\infty} M_n$.*
5. *Si M tiene estructura de álgebra y H es una biálgebra tal que $H_i H_j \subseteq H_{i+j}$ para todo $i, j \geq 0$ entonces $M_i M_j \subseteq M_{i+j}$ para todo $i, j \geq 0$.*

Hallemos primero la filtración coradical de $U(\mathfrak{g})$ que, como ya dijimos, nos va a ser de gran utilidad para hallar extensiones de Galois. Necesitaremos el siguiente lema.

Lema 3.12. *Sea H un álgebra de Hopf que contiene subespacios $A_0 \subset A_1$ tales que:*

1. *A_1 genera a H como álgebra, $1 \in A_0$ y*
2. *$\Delta A_0 \subseteq A_0 \otimes A_0$ y $\Delta A_1 \subseteq A_1 \otimes A_0 + A_0 \otimes A_1$.*

Entonces si ponemos $A_n = (A_1)^n$ para todo $n \geq 1$, $\{A_n\}$ es una filtración de coálgebra de H y $A_0 \supseteq H_0$. Si además $A_0 = H_0$, entonces $A_n \subseteq H_n$ para todo n.[Mon]

La siguiente proposición nos dice cómo son $U(\mathfrak{g})_0$ y $U(\mathfrak{g})_1$.

Proposición 3.13.

1. *$H = U(\mathfrak{g})$ es conexa con $H_0 = \mathbb{K}1$.*
2. *Si $\mathbb{K}$ es de característica 0, entonces $H_1 = \mathfrak{g} \oplus \mathbb{K}1$.*

Demostración.

1. Sea $A_0 = \mathbb{K}1$ y $A_1 = \mathfrak{g} \oplus \mathbb{K}1$. Entonces $A_0 \subset A_1$ satisfacen las hipótesis del lema anterior luego $A_0 \supseteq H_0$. Pero claramente $A_0 \subseteq H_0$ por lo que $A_0 = H_0$ y así $U(\mathfrak{g})$ es conexa.

2. Supongamos que la característica de $\mathbb{K}$ es 0. Sean A_0 y A_1 como en el numeral anterior y $A_n = (A_1)^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Probemos por inducción en n que $A_n = H_n$ para todo n. El caso base $(n = 0)$ se probó en el numeral 1. Supongamos que $A_{n-1} = H_{n-1}$. Basta ver que $H_n \subseteq A_n$ pues la otra contenencia se tiene por el lema anterior. Sea $a \in H_n$. Entonces $\Delta a \in H \otimes H_{n-1} + H_0 \otimes H = H \otimes A_{n-1} + 1 \otimes H$. Pongamos a a en la base PBW, $a = \sum_m \alpha_m x^m$. Sea x^t un monomio en a de grado máximo $|t|$. Entonces

$$\Delta x^t = \sum_{0 < s \leq t} \binom{t}{s} x^s \otimes x^{t-s} + 1 \otimes x^t.$$

Como $\mathbb{K}$ es de característica 0, $\binom{t}{s} \neq 0$ luego en Δa, el término $\alpha_t \binom{t}{s} x^s \otimes x^{t-s}$ es no trivial. Si $|s| > 0$, este término no pertenece a $1 \otimes H$ por lo que debe estar en $H \otimes A_{n-1}$. Entonces $x^{t-s} \in A_{n-1}$ por lo tanto $|t - s| \leq n - 1$ para todo $0 < s < t$. En particular, si $|s| = 1$ tenemos que $|t| \leq n$. Por lo tanto $x^t \in A_n$, y como $|t|$ es el mayor grado que aparece en a, $a \in A_n$. Esto implica que $A_n = H_n$. En particular, $H_1 = A_1 = \mathfrak{g} \oplus \mathbb{K}1$.

□

Ya tenemos que si $H = U(\mathfrak{g})$, entonces $H_0 = \mathbb{K}1$ y $H_1 = \mathbb{K}1 \oplus \mathfrak{g}$. Podríamos intuir que $H_2 = \mathbb{K}1 \oplus \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ y así, que $H_n = \mathbb{K}1 \oplus \mathfrak{g} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g} \otimes \cdots \otimes \mathfrak{g}$. Este hecho es cierto y lo demostraremos por medio del siguiente lema.

Lema 3.14. *Sea $\mathfrak{g}$ una $\mathbb{K}$-álgebra de Lie de dimensión finita tal que la característica de $\mathbb{K}$ es 0. Sea $\{x_1, \ldots, x_d\}$ una base para $\mathfrak{g}$. Escojamos funciones $f_i \in (U(\mathfrak{g}))^*$ para $i = 1, \ldots, d$ tales que $f_i(x_j) = \delta_{ij}$ y $f_i = 0$ sobre todos los monomios de $U(\mathfrak{g})$ de grado distinto de 1. Entonces $(U(\mathfrak{g}))^* \cong \mathbb{K}[\![f_1, \ldots, f_d]\!]$ como álgebras, donde $\mathbb{K}[\![f_1, \ldots, f_d]\!]$ es el álgebra de series de potencias formales en los $\{f_i\}$.*

Demostración. Sea $\{x^n\}$ la base PBW para $U(\mathfrak{g})$. Definimos las funciones $g^n \in (U(\mathfrak{g}))^*$ por medio de $g^n(x^m) = \delta_{nm}$. Entonces

$$\begin{aligned} g^n g^m(x^t) &= m(g^n \otimes g^m)(\Delta(x^t)) \\ &= \sum_{0<s<t} \binom{t}{s} g^n(x^s) g^m(x^{t-s}) \\ &= \sum_{0\leq s\leq t} \binom{t}{s} \delta_{ns}\delta_{m(t-s)} \\ &= \binom{n+m}{n} g^{n+m}(x^t). \end{aligned}$$

Definimos ahora $f^n = n! g^n$. Entonces $f^n f^m = n! m! g^n g^m = (n+m)! g^{n+m} = f^{n+m}$. Sea n_i una función tal que $n_i(j) = \delta_{ij}$. Entonces $f_i = f^{n_i}$ son las funciones que estamos buscando:

$$f_i(x_j) = f^{n_i}(x_j) = n_i! g^{n_i}(x_j) = g^{n_i}(x_j) = \delta_{n_i 1} = \delta_{ij},$$

$$f_i(x^m) = f^{n_i}(x^m) = g^{n_i}(x^m) = \delta_{n_i m} = 0$$

pues $m \neq 1$. $(U(\mathfrak{g}))^* \cong \mathbb{K}[\![f_1, \ldots, f_d]\!]$. □

Entonces el ideal de Jacobson de $(U(\mathfrak{g}))^*$ es el generado por los $\{f_i\}$, luego J^n es generado por los monomios en los f_i de grado n. Además se puede observar que $(J^{n+1})^\perp$ es precisamente el subconjunto de $U(\mathfrak{g})$ de tensores de grado menor o igual que n. Entonces, por el lema 3.5 H_n está conformado por los tensores de grado menor que o igual que n, como habíamos supuesto.

Observación 4. Sea M es un $U(\mathfrak{g})$-comódulo con coacción ρ. Como $U(\mathfrak{g})_0 = \mathbb{K}$, $\rho(M_0) = M \otimes 1$, luego $M_0 = M^{coU(\mathfrak{g})}$.

Ahora sí probemos que el conjunto de los elementos primitivos de $U(\mathfrak{g})$ es $U(\mathfrak{g})_1 \cong \mathfrak{g}$.

Proposición 3.15. *El conjunto de elementos primitivos de $U(\mathfrak{g})$ es $\mathfrak{g}$*

Demostración. La contenencia $\mathfrak{g} \subseteq P(U(\mathfrak{g}))$ es obvia. Para la otra contenencia, sea $p = \sum_j c_j X_j^n$ un elemento primitivo de $U^n(\mathfrak{g}) = gen\{X^n | X \in \mathfrak{g}\}$. Supongamos que $n \geq 2$. Entonces

$$\Delta(p) = \sum_j c_j \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X_j^k \otimes X_j^{n-k} = p \otimes 1 + 1 \otimes p.$$

Por eso, para $0 < k < n$ debemos tener que $a_k := \sum_j c_j \binom{n}{k} X_j^k \otimes X_j^{n-k} = 0$, por lo que para $0 < k < n$ $\binom{n}{k}(p) = m(a_k) = 0 \in U^n(\mathfrak{g})$ lo que es una contradicción porque $\binom{n}{k} p \neq 0$ si $\mathbb{K}$ es de característica 0. Entonces $n = 1$ y así $P(U(\mathfrak{g})) = U^1(\mathfrak{g}) \cong \mathfrak{g}$. $\square$

Antes de empezar a caracterizar las extensiones de Galois de $U(\mathfrak{g})$ veamos la siguiente proposición.

Proposición 3.16. *Sea M un $U(\mathfrak{g})$-comódulo con estructura de álgebra. Entonces si M_0 conmuta, M_1 es una subálgebra de Lie de M y $[M_0, M_1] \subseteq M_0$.*

Demostración. Llamemos $H = U(\mathfrak{g})$ para simplificar la notación. Sean $a, b \in M_1$. Entonces por el numeral 3 del lema 3.11, $\rho(a), \rho(b) \in M_0 \otimes H_1 + M_1 \otimes H_0$. Como $H_0 = \mathbb{K}1$, pongamos $\rho(a) = \sum_i a_i \otimes h_i + a \otimes 1$ y $\rho(b) = \sum_i b_i \otimes h_i + b \otimes 1$, donde $a_i, b_i \in M_0$ y $h_i \in H_1 = \Delta^{-1}(H \otimes H_0 + H_0 \otimes H) = \Delta^{-1}(H \otimes \mathbb{K}1 + \mathbb{K}1 \otimes H)$. En otras palabras, $\Delta(h_i) = h_i \otimes 1 + 1 \otimes h_i$, por lo tanto $h_i \in P(H)$. Como ρ es en particular un homomorfismo de álgebras,

$$\begin{aligned}
\rho([a,b]) &= \rho(ab - ba) = \rho(a)\rho(b) - \rho(b)\rho(a) \\
&= \left(\sum_i a_i \otimes h_i + a \otimes 1\right)\left(\sum_i b_i \otimes h_i + b \otimes 1\right) \\
&\quad - \left(\sum_i b_i \otimes h_i + b \otimes 1\right)\left(\sum_i a_i \otimes h_i + a \otimes 1\right) \\
&= [a,b] \otimes 1 + \sum_i ([a, b_i] + [a_i, b]) \otimes h_i + \sum_{i,j} a_i b_j \otimes [h_i, h_j].
\end{aligned}$$

Como $P(H)$ es una subálgebra de Lie de H, entonces para todo i, j, $[h_i, h_j] \in P(H) = H_1$. Así, $\rho([a,b]) \in M \otimes H_1$, luego $[a,b] \in M_1$ lo que implica que M_1 es una subálgebra de Lie de M.

Para probar que M_0 es un ideal de M_1, sean a, b como arriba pero esta vez con $a \in M_0 = M^{coH}$. Entonces $\rho(a) = a \otimes 1$ lo que quiere decir que $a_i = 0$ para todo i. Entonces $\rho([a,b]) = [a,b] \otimes 1 + \sum_i [a, b_i] \otimes h_i = [a,b] \otimes 1 + \sum_i (ab_i - b_i a) \otimes h_i$. Como $b_i \in M_0$ para todo i, entonces b_i conmuta con a, luego $\rho([a,b]) = [a,b] \otimes 1$ y así $[a,b] \in M_0$. Por lo tanto $[M_0, M_1] \subseteq M_0$.

□

Recordemos que una extensión $M^{coH} \subset M$ es H-Galois si y sólo si la función de Galois β es biyectiva. En los siguientes dos lemas trataremos de dar condiciones para que β sea una biyección.

Lema 3.17. *Sea M un $U(\mathfrak{g})$-comódulo con estructura de álgebra y ρ la coacción de $U(\mathfrak{g})$ sobre M. Sea $P(U(\mathfrak{g})) = \mathfrak{g}$ el conjunto de elementos primitivos de $U(\mathfrak{g})$. La función $c : M_1 \to M_0 \otimes P(U(\mathfrak{g}))$ dada por $c(a) = \rho(a) - a \otimes 1$ es un homomorfismo de M_0-módulos con kernel M_0.*

Demostración. Para $a \in M_1$, $c(a) = 0$ si y sólo si $\rho(a) = a \otimes 1$ si y sólo si $a \in M^{coU(\mathfrak{g})} = M_0$. Luego $ker(c) = M_0$.
Veamos que c es un homomorfismo de M_0-módulos. Sean $a \in M_0, b \in M_1$. Entonces

$$\begin{aligned} c(ab) &= \rho(ab) - ab \otimes 1 = \rho(a)\rho(b) - ab \otimes 1 \\ &= (a \otimes 1)\rho(b) - (a \otimes 1)(b \otimes 1) = (a \otimes 1)(\rho(b) - b \otimes 1) \\ &= a \cdot c(b). \end{aligned}$$

□

Nótese que c se puede definir equivalentemente como $c(a) = \beta(1 \otimes a - a \otimes 1)$. Además, c induce un homomorfismo inyectivo natural $\bar{c} : A_1/A_0 \to A_0 \otimes P(H)$ dado por $\bar{c}(a + A_0) = c(a) = \rho(a) - a \otimes 1$.

Proposición 3.18. *Sea A un $U(\mathfrak{g})$-comódulo con estructura de álgebra. Si $A_0 \subseteq A$ es H-Galois y $\beta^{-1}(A \otimes H_1) = A \otimes A_1$ entonces $id \otimes \bar{c}$ es biyectiva.*

Demostración. Sea $\{x_i\}$ una base para $\mathfrak{g}$. Sea $a_i = \lambda(x_i)$, donde $\lambda : \mathfrak{g} \to A$ es una función tal que $\rho(\lambda(x)) = \lambda(x) \otimes 1 + 1 \otimes \lambda(x)$ (en [Par] se demuestra que existe y que $\{a_i\}$ es una base para A_1 sobre A_0). Entonces para cada i existe un $b_{ij} \in A$ tal que $\beta^{-1}(a \otimes x_i) = \sum_j ab_{ij} \otimes a_j$. Definamos $\gamma : A \otimes U(\mathfrak{g}) \cong A \otimes_{\mathbb{K}} \mathfrak{g} \to A \otimes_{A_0} (A_1/A_0)$ por medio de

$$\gamma(a \otimes x_i) = \sum_j ab_{ij} \otimes (a_j + A_0)$$

Para $b \in A_1$ supongamos que $\rho(b) = b \otimes 1 + \sum_i b_i \otimes x_i$ para algunos $b_i \in A_0$. Sea $a \in A$. Entonces

$$a \otimes b = \beta^{-1}(\beta(a \otimes b)) = \beta^{-1}\left(ab \otimes 1 + \sum_i ab_i \otimes x_i\right) = ab \otimes 1 + \sum_{i,j} ab_i b_{ij} \otimes a_j$$

Si aplicamos $id \otimes \pi$ (donde π es la proyección canónica de A_1 en A_1/A_0) a ambos lados de la igualdad tenemos que $a \otimes (b + A_0) = \sum_{i,j} ab_i b_{ij} \otimes (a_j + A_0)$. Probemos que $\gamma = (id \otimes \bar{c})^{-1}$. De hecho,

$$\begin{aligned} \gamma \circ (id \otimes \bar{c})(a \otimes (b + A_0)) &= \gamma\left(a \otimes \sum_i b_i \otimes x_i\right) \\ &= \sum_{i,j} ab_i b_{ij} \otimes (a_j + A_0) = a \otimes (b + A_0). \end{aligned}$$

Para probar que γ es la inversa por derecha, tenemos que

$$1 \otimes x_i = \beta \circ \beta^{-1}(1 \otimes x_i) = \beta\left(\sum_j b_{ij} \otimes a_j\right) = \sum_{i,j} b_{ij} a_j \otimes 1 + \sum_{j,k} b_{ij} a_{jk} \otimes x_k.$$

Entonces $\sum_j b_{ij} a_{jk} = \delta_{ik}$ y por lo tanto $\sum_{j,k} ab_{ij} a_{jk} \otimes x_k = a \otimes x_k$. Entonces

$$\begin{aligned} (id \otimes \bar{c}) \circ \gamma(a \otimes x_i) &= id \otimes \bar{c}\left(\sum_j ab_{ij} \otimes (a_j + A_0)\right) \\ &= \sum_{jk} ab_{ij} a_{jk} \otimes x_k \\ &= a \otimes x_i. \end{aligned}$$

Entonces $\gamma = (id \otimes \bar{c})^{-1}$ y así $id \otimes \bar{c}$ es una biyección. $\square$

Capítulo 4

Fibraciones Principales Cuánticas

En este capítulo recordaremos la noción de haz principal sobre una variedad suave en geometría diferencial y definiremos lo que es un haz principal cuántico. Finalmente, mostraremos que tal definición coincide con la de extensión de Galois para ciertas álgebras llamadas “grupos cuánticos". A manera de ejemplo, dualizando la construcción clásica de la fibración de Hopf sobre la 2-esfera, reconstruiremos la llamada fibración de Hopf cuántica y la identificaremos con la extensión de Galois del álgebra de Hopf de polinomios de Laurent sobre el círculo coactuando sobre el grupo cuántico $SU_q(2)$. Seguiremos principalmente [BM] (ver también [Bat] y referencias ciatadas allí).

4.1. Haces Principales

En esta sección veremos la definición de fibración de variedades o haz principal. Más adelante consideraremos el caso cuántico y su relación con las extensiones de Galois de las álgebras de Hopf. Ilustraremos la definición a través de la fibración de Hopf.

Recordemos del capítulo 1 que un grupo de Lie es un grupo con una topología tal que las operaciones de multiplicación e inversión son contínuas y que es variedad.

Dado un grupo de Lie G y una variedad M, decimos que G actúa sobre M si existe una función $\mu : M \times G \to M$ tal que $\mu(x, e) = x$ para todo $x \in M$ y $\mu(x, g_1 g_2) = \mu(\mu(x, g_2), g_1)$ para todo $x \in M$ y todo $g_1, g_2 \in G$. De ahora en adelante, denotaremos a $\mu(x, g)$ simplemente como xg.

Asociada a la acción tenemos la aplicación

$$\begin{aligned} \bar{\mu} : M \times G &\to M \times M \\ (x, g) &\mapsto (x, xg). \end{aligned}$$

Decimos que μ es **libre** si para todo $x \in M$, $xg = x$ implica que $g = e$. Nótese que μ es libre si y sólo si $\bar{\mu}$ es inyectiva. En efecto, si μ es libre y $(x_1, g_1), (x_2, g_2) \in M \times G$ son tales que $\bar{\mu}(x_1, g_1) = \bar{\mu}(x_2, g_2)$, entonces $(x_1, x_1g_1) = (x_2, x_2g_2)$, por lo tanto $x_1 = x_2$ y $x_1g_1 = x_2g_2$, luego $x_1g_1g_2^{-1} = x_1$. Entonces, como μ es libre, $g_1g_2^{-1} = e$ y $g_1 = g_2$. Así, $\bar{\mu}$ es inyectiva. Por otra parte, si $\bar{\mu}$ es inyectiva y $g \in G$ es tal que $xg = x$ para $x \in M$, entonces $\bar{\mu}(x, g) = (x, x) = \bar{\mu}(x, e)$, por lo que $g = e$ y así μ es libre.

Finalmente, decimos que μ es **propia** si $\bar{\mu}$ es una aplicación propia, es decir si para todo espacio topológico Y, la aplicación

$$M \times G \times Y \xrightarrow[\bar{\mu}\times id_Y]{} M \times M \times Y$$

es cerrada. Si G es compacto entonces su acción sobre cualquier variedad es propia [Bou].

Definición 4.1. Sea G un grupo de Lie, P y M variedades suaves y $\pi : P \to M$ una función. Decimos que (P, π, M, G) es un **haz principal** si satisface las siguientes condiciones:

1. π es contínua y sobreyectiva.
2. Existe una acción $\mu : P \times G \to P$ de G sobre P libre y propia.
3. $\pi(x) = \pi(y)$ si y sólo si existe $g \in G$ tal que $y = xg$.
4. La aplicación canónica $P/G \to M$ es un homeomorfismo.

Llamamos **espacio total** a P, **espacio base** a M, **grupo estructural** a G y **proyección** a π. Las **fibras** son todos los conjuntos de la forma $\pi^{-1}(x)$ con $x \in M$.

Si llamamos $G_x = \{y \in P |\ y = xg \text{ para algún } g \in G\}$ a la órbita de x entonces $y \in G_x$ si y sólo si existe $g \in G$ tal que $y = xg$ si y sólo si $\pi(x) = \pi(y)$ (por la tercera condición) si y sólo si x y y pertenecen a la misma fibra. Así las órbitas de P bajo la acción de G son las fibras del haz principal. Como la acción es libre, $G_x \cong G$ y podemos decir que cada fibra es una copia de G.

Nota. 1. En el numeral 4, P/G se refiere a las clases de equivalencia de la relación $x \sim y$ si y sólo si $x = yg$ para algún $g \in G$, que en un haz principal se cumple si y sólo si $\pi(x) = \pi(y)$. La aplicación canónica $\psi : P/G \to M$ tal que $\psi([x]_\sim) = \pi(x)$ está bien definida y es inyectiva.

2. Las propiedades de la acción que aparecen en la definición de haz principal dada anteriormente implican la trivialidad local que aparece usualmente en la definición de haces principales.

Ejemplo 4.2. En $\mathbb{R}^{n+1}$ definimos la n-esfera

$$S^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} | x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}.$$

Si identificamos a $\mathbb{R}^4$ con $\mathbb{C}^2$, entonces podemos ver que $S^3 \cong \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 | \left|z_1\right|^2 + \left|z_2\right|^2 = 1\}$. Similarmente, podemos identificar a S^2 con el conjunto $\{(z, r) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} | \left|z\right|^2 + r^2 = 1\}$ y $S^1 \cong \{e^{i\theta} \in \mathbb{C} | 0 \leq \theta < 2\pi\}$.
El círculo S^1 es un grupo con la operación $e^{i\theta} \cdot e^{i\phi} = e^{i(\theta+\phi)}$ y con inversos $(e^{i\theta})^{-1} = e^{-i\theta}$. Además tiene la topología de subespacio inducida por $\mathbb{C}$. Es claro que con esta topología la operación de inversión es contínua, puesto que la preimagen de un abierto va a ser su reflexión sobre el eje real que también es abierta. Si U es un abierto de S^1, U es unión de abiertos de la forma $U_\alpha = \{e^{i\theta} | a < \theta < b\}$ para $a, b \in [0, 2\pi)$. Encontrar la preimagen de U bajo la operación $\cdot$ se reduce a encontrar la preimagen de los abiertos (a, b) bajo la operación de suma en los reales, que es contínua. Por lo tanto la preimagen de U es abierta en $S^1 \times S^1$. Para la separabilidad consideremos la función contínua y sobreyectiva $h : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to S^1$ tal que $h(z) = z/\left|z\right|$. Como $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ es separable, $S^1 = h(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ es separable. Finalmente, para $e^{i\beta} \in S^1$, existe un abierto básico (un arco) $U_\beta = \{e^{i\theta} | a < \theta < b\}$ que lo contiene y que es difeomorfo al abierto (a, b) de $\mathbb{R}$. De esta forma creamos un atlas para S^1 y le damos estructura de variedad. Entonces S^1 es un grupo de Lie.

Definimos $\pi : S^3 \to S^2$ por

$$\pi(z_1, z_2) = (2\bar{z}_1 z_2, \left|z_1\right|^2 - \left|z_2\right|^2),$$

y $\mu : S^3 \times S^1 \to S^3$ por $\mu((z_1, z_2), e^{i\theta}) = (e^{i\theta} z_1, e^{i\theta} z_2)$. Veamos que ambas funciones están bien definidas. En efecto, si $(z_1, z_2) \in S^3$,

$$\begin{aligned}
\left|2\bar{z}_1 z_2\right|^2 + (\left|z_1\right|^2 - \left|z_2\right|^2)^2 &= 4\left|z_1\right|^2 \left|z_2\right|^2 + \left|z_1\right|^4 - 2\left|z_1\right|^2 \left|z_2\right|^2 + \left|z_2\right|^4 \\
&= (\left|z_1\right|^2 + \left|z_2\right|^2)^2 \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Así, $\pi(z_1, z_2) = (2\bar{z}_1 z_2, \left|z_1\right|^2 - \left|z_2\right|^2) \in S^2$. Por otra parte, si $((z_1, z_2), e^{i\theta}) \in S^3 \times S^1$,

$$\left|e^{i\theta} z_1\right|^2 + \left|e^{i\theta} z_2\right|^2 = \left|z_1\right|^2 + \left|z_2\right|^2 = 1$$

Así, $\mu((z_1, z_2), e^{i\theta}) = (e^{i\theta} z_1, e^{i\theta} z_2) \in S^3$.

Es claro que π es contínua, pues cada una de sus componentes es contínua. Sea $(re^{i\theta}, a) \in S^2$. Entonces

$$\pi^{-1}(re^{i\theta}, a) = \left\{ \left(\sqrt{\frac{a+1}{2}} e^{i\alpha}, \sqrt{\frac{1-a}{2}} e^{i(\theta+\alpha)} \right) \in S^3 \mid 0 \leq \alpha < 2\pi \right\}.$$

En efecto,

$$\pi\left(\sqrt{\frac{a+1}{2}}e^{i\alpha},\sqrt{\frac{1-a}{2}}e^{i(\theta+\alpha)}\right)=\left(\sqrt{(a+1)(1-a)}e^{i\theta},\frac{a+1}{2}-\frac{1-a}{2}\right)$$
$$=(\sqrt{1-a^2}\,e^{i\theta},a)$$
$$=(re^{i\theta},a).$$

Así, $\left(\sqrt{\frac{a+1}{2}}e^{i\alpha},\sqrt{\frac{1-a}{2}}e^{i(\theta+\alpha)}\right)\in\pi^{-1}(re^{i\theta},a)$.
Para la otra contenencia, sea $(r_1e^{i\theta_1},r_2e^{i\theta_2})\in\pi^{-1}(re^{i\theta},a)$. Entonces

$$\pi(r_1e^{i\theta_1},r_2e^{i\theta_2})=(re^{i\theta},a),$$

es decir,

$$(2r_1r_2e^{i(\theta_2-\theta_1)},r_1^2-r_2^2)=(re^{i\theta},a)$$

si y sólo si

$$2r_1r_1=r$$
$$\theta_2-\theta_1=\theta$$
$$r_1^2-r_2^2=a.$$

Si sumamos la última ecuación con la ecuación $r_1^2+r_2^2=1$, que se cumple porque $(r_1e^{i\theta_1},r_2e^{i\theta_2})$ debe estar en S^3, obtenemos

$$r_1=\sqrt{\frac{a+1}{2}}.$$

Despejando en cualquiera de estas dos ecuaciones,

$$r_2=\sqrt{\frac{1-a}{2}}.$$

Es fácil ver que r_1,r_2 cumplen con la ecuación $2r_1r_2=r$, pues $r^2+a^2=1$. Finalmente, si llamamos $\alpha=\theta_1$, entonces $\theta_2=\theta+\alpha$ y tenemos que

$$(r_1e^{i\theta_1},r_2e^{i\theta_2})=\left(\sqrt{\frac{a+1}{2}}e^{i\alpha},\sqrt{\frac{1-a}{2}}e^{i(\theta+\alpha)}\right).$$

Entonces π es sobreyectiva y $\pi^{-1}(z,r)\cong S^1$ para todo $(z,r)\in S^2$.

Sea $e^{i\theta}\in S^1$. Si $(e^{i\theta}(r_1e^{i\theta_1}),e^{i\theta}(r_2e^{i\theta_2}))=(r_1e^{i\theta_1},r_2e^{i\theta_2})$ para $(r_1e^{i\theta_1},r_2e^{i\theta_2})\in S^3$, entonces $\theta+\theta_k=\theta_k$ $(k=1,2)$. Entonces $\theta=0$ y así, $e^{i\theta}=1$. De esta forma, μ es libre. Por otra parte, como S^1 es compacta, μ es propia.

Para verificar la tercera condición que satisfacen los haces principales, supongamos que

$\pi(z_1,z_2)=\pi(z_3,z_4)$ para $(z_1,z_2),(z_3,z_4)\in S^3$. Entonces (z_1,z_2) y (z_3,z_4) están en una misma fibra, llamémosla $\pi^{-1}(re^{i\theta},a)$. Entonces

$$(z_1,z_2)=\left(\sqrt{\frac{a+1}{2}}e^{i\alpha_1},\sqrt{\frac{1-a}{2}}e^{i(\theta+\alpha_1)}\right)$$

y

$$(z_3,z_4)=\left(\sqrt{\frac{a+1}{2}}e^{i\alpha_2},\sqrt{\frac{1-a}{2}}e^{i(\theta+\alpha_2)}\right)$$

para algunos $\alpha_1,\alpha_2\in[0,2\pi)$. Llamemos $\gamma=\alpha_2-\alpha_1$ de tal forma que γ pertenezca a $[0,2\pi)$. Entonces

$$\begin{aligned}(z_3,z_4)&=\left(\sqrt{\frac{a+1}{2}}e^{i\alpha_2},\sqrt{\frac{1-a}{2}}e^{i(\theta+\alpha_2)}\right)\\&=\left(\sqrt{\frac{a+1}{2}}e^{i(\gamma+\alpha_1)},\sqrt{\frac{1-a}{2}}e^{i(\gamma+\theta+\alpha_1)}\right)\\&=\left(e^{i\gamma}\sqrt{\frac{a+1}{2}}e^{i\alpha_1},e^{i\gamma}\sqrt{\frac{1-a}{2}}e^{i(\theta+\alpha_1)}\right)\\&=\mu((z_1,z_2),e^{i\gamma}).\end{aligned}$$

Para la otra implicación, si $(z_3,z_4)=(e^{i\theta}z_1,e^{i\theta}z_2)$ para algún $e^{i\theta}\in S^1$, entonces

$$\begin{aligned}\pi(z_3,z_4)&=\pi(e^{i\theta}z_1,e^{i\theta}z_2)\\&=(2\bar{z}_1z_2,|z_1|^2-|z_2|^2)\\&=\pi(z_1,z_2).\end{aligned}$$

Finalmente, la aplicación canónica $\psi:S^3/S^1\to S^2$ tal que $\psi([(z_1,z_2)]_\sim)=\pi(z_1,z_2)$ es biyectiva y contínua. Su inversa $\psi^{-1}:S^2\to S^3/S^1$ tal que

$$\psi^{-1}(re^{i\theta},a)=\left[\left(\sqrt{\frac{a+1}{2}},\sqrt{\frac{1-a}{2}}e^{i\theta}\right)\right]_\sim$$

es contínua y así, ψ es un homeomorfismo.

Hemos visto entonces que (S^3,π,S^2,S^1) es un haz principal. A este haz se le llama **fibración de Hopf**.

4.2. Haces Principales Cuánticos

En esta sección veremos la versión "no conmutativa" de los haces principales de variedades. En los capítulos anteriores hemos visto los conceptos duales a los de álgebra y módulo. Vamos a utilizar estas dualidades para "dualizar" un haz principal. Al haz resultante lo llamaremos haz principal cuántico.

Recordemos que un haz principal (P, π, M, G) está conformado por un grupo de Lie G, que actúa libre y propiamente sobre una variedad P, que a su vez se proyecta sobre otra variedad M por medio de una aplicación contínua y sobreyectiva $\pi : P \to M$.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\mu"] & P \arrow[d, "\pi"] \\ & X \end{tikzcd}$$

La idea es reemplazar los espacios total y base por álgebras (que representan álgebras de funciones sobre un espacio) y el grupo de Lie por un álgebra de Hopf. En la versión dual de este haz no tendremos una acción de G sobre P sino una coacción $\rho : A \to A \otimes H$ de un álgebra de Hopf H sobre un álgebra (A, m, u). Si en un haz principal pedíamos que la acción μ fuera libre, es decir, que la función $\bar{\mu} : P \otimes G \to P \otimes P$ fuera inyectiva, en el nuevo haz pediremos que la función

$$\chi = (\mu \otimes id) \circ (id \otimes \rho) : A \otimes A \to A \otimes H$$

sea sobreyectiva.

En la versión clásica, las fibras del haz principal eran homeomorfas al grupo de Lie G y P/G era homeomorfo a M. Por otro lado, en el capítulo 1 vimos que existe una identificación del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ del grupo G con el álgebra de campos vectoriales sobre G invariantes a izquierda. En un haz principal, esto implica que $\mathfrak{g}$ sea isomorfa a la parte vertical de $T_u(P)$ para todo $u \in P$. En el caso no conmutativo necesitamos asegurarnos de que la imagen de los campos vectoriales invariantes a izquierda genere a todos los campos vectoriales verticales. Por esta razón se pide que $Ker(\chi) = P\Omega^1(M)P$ [Bat].

En un haz principal, a cada $x \in M$ le corresponde una órbita $\pi^{-1}(x)$ y la órbita no cambia bajo la acción de G. En un haz principal cuántico, el espacio base estará conformado por los elementos que no cambian bajo la coacción de H. Es decir, el espacio base será precisamente A^{coH}. Como A^{coH} es una subálgebra de A, hay una inyección canónica $j : A^{coH} \to A$, que hará el papel de π en el caso clásico.

Ahora que tenemos una noción de la versión dual al haz principal, definamos formalmente esta nueva fibración.

Definición 4.3. Sea P un álgebra, H un álgebra de Hopf y $\rho : P \to P \otimes H$ una coacción de H sobre P. Sea $M = P^{coH}$ la subálgebra de P de elementos coinvariantes de H en

P. Llamemos $\Omega^1(M)$ al kernel de la multiplicación $m : M \otimes M \to M$. Decimos que $P = P(M, H)$ es un **haz principal cuántico** con **grupo cuántico estructural** H, **base** M y cálculo diferencial universal si se satisfacen las siguientes condiciones:

1. La función $\chi : P \otimes P \to P \otimes H$, tal que

$$\begin{aligned}\chi(u \otimes v) &= (m \otimes id) \circ (id \otimes \rho)(u \otimes v)\\ &= m \otimes id(u \otimes (v_0 \otimes \rho(v)))\\ &= uv_0 \otimes \rho(v).\end{aligned}$$

   es sobreyectiva.

2. $Ker(\chi) = P\Omega^1(M)P$.

Inspirados en la libertad de la acción de G (en un haz principal clásico), diremos que ρ es **libre** si satisface la primera condición. También diremos que ρ es **exacta** si satisface la segunda. Esta definición es equivalente a decir que la suceción

$$0 \longrightarrow P\Omega^1(M)P \longrightarrow P \otimes P \xrightarrow{\chi} P \otimes H \longrightarrow 0$$

es exacta.

Ahora veamos cual es la versión cuántica de la fibración de Hopf.

Ejemplo 4.4. Primero probemos que S^3 es isomorfo a $SU(2)$. Para esto consideremos la función $f : S^3 \to SU(2)$ tal que

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{pmatrix} x_1 + ix_2 & x_3 + ix_4 \\ -x_3 + ix_4 & x_1 - ix_2 \end{pmatrix}.$$

Está bien definida pues

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x_1 + ix_2 & x_3 + ix_4 \\ -x_3 + ix_4 & x_1 - ix_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 - ix_2 & -x_3 - ix_4 \\ x_3 - ix_4 & x_1 + ix_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 & 0 \\ 0 & x_3^2 + x_4^2 + x_1^2 + x_2^2 \end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

y $\det \begin{pmatrix} x_1 + ix_2 & x_3 + ix_4 \\ -x_3 + ix_4 & x_1 - ix_2 \end{pmatrix} = x_1^2 + x_2^2 - (-x_3^2 - x_4^2) = 1.$

Claramente es inyectiva. Para la sobreyectividad sea $A = \begin{pmatrix} a_1 + ib_1 & a_2 + ib_2 \\ a_3 + ib_3 & a_4 + ib_4 \end{pmatrix} \in S^3$. Entonces la ecuación $\det A = 1$ junto con la ecuación $AA^* = I$ nos dicen que

$$a_1a_4 - b_1b_4 + b_2b_3 - a_2a_3 = 1 \tag{4.1}$$

$$a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2 = 1 \tag{4.2}$$

$$a_3^2 + b_3^2 + a_4^2 + b_4^2 = 1. \tag{4.3}$$

Si sumamos las dos últimas ecuaciones y restamos dos veces la primera (es decir (4.2)+(4.3)-2(4.1)), obtenemos

$$(a_1 - a_4)^2 + (b_1 + b_4)^2 + (b_2 - b_3)^2 + (a_2 + a_3)^2 = 0.$$

Entonces $a_1 = a_4$, $b_1 = -b_4$, $b_2 = b_3$ y $a_2 = -a_3$ y así f es sobreyectiva.

Es claro que f es de clase C^∞ y su inversa $f^{-1} : SU_q(2) \to S^3$ tal que

$$f^{-1}\begin{pmatrix} a_1 + ib_1 & a_2 + ib_3 \\ -a_2 + ib_2 & a_1 - ib_1 \end{pmatrix} = (a_1, b_1, a_2, b_2)$$

es también de clase C^∞. Así, S^3 es difeomorfo a $SU(2)$.

Para construir la versión cuántica de la fibración de Hopf necesitamos ver cómo es la versión cuántica de $S^3 \cong SU(2)$. Así, definimos $SU_q(2)$ como el álgebra de matrices de 2×2 con entradas en $\mathbb{C}$ generada por la matriz identidad y matrices de la forma $T = (t_{ij}) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ que satisfacen:

- $\alpha\beta = q\beta\alpha$,
- $\alpha\gamma = q\gamma\alpha$,
- $\alpha\delta = \delta\alpha + (q - q^{-1})\beta\gamma$,
- $\beta\gamma = \gamma\beta$,
- $\beta\delta = q\delta\beta$,
- $\gamma\delta = q\delta\gamma$,
- $\alpha\delta - q\beta\gamma = 1$,

donde $q \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Estas relaciones nos están diciendo, en cierta forma, que las entradas de las matrices casi conmutan, excepto por un factor q, y la última nos dice que algo parecido al determinante es igual a 1.

Esta álgebra tiene estructura de álgebra de Hopf dada por:

$$\Delta t_{ij} = \sum_{k=1}^{2} t_{ik} \otimes t_{kj},\ \ \epsilon(t_{ij}) = \delta ij,\ \ s(T) = \begin{pmatrix} \delta & -q^{-1}\beta \\ -q\gamma & \alpha \end{pmatrix}.$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
\Delta \otimes id(\Delta t_{11}) &= \Delta \otimes id(\Delta \alpha) \\
&= \Delta \otimes id(t_{11} \otimes t_{11} + t_{12} \otimes t_{21}) \\
&= \Delta \otimes id(\alpha \otimes \alpha + \beta \otimes \gamma) \\
&= \Delta\alpha \otimes \alpha + \Delta\beta \otimes \gamma \\
&= (\alpha \otimes \alpha + \beta \otimes \gamma) \otimes \alpha + (t_{11} \otimes t_{12} + t_{12} \otimes t_{22}) \otimes \gamma \\
&= (\alpha \otimes \alpha + \beta \otimes \gamma) \otimes \alpha + (\alpha \otimes \beta + \beta \otimes \delta) \otimes \gamma \\
&= \alpha \otimes \alpha \otimes \alpha + \beta \otimes \gamma \otimes \alpha + \alpha \otimes \beta \otimes \gamma + \beta \otimes \delta \otimes \gamma \\
&= \alpha \otimes (\alpha \otimes \alpha + \beta \otimes \gamma) + \beta \otimes (\gamma \otimes \alpha + \delta \otimes \gamma) \\
&= \alpha \otimes \Delta\alpha + \beta \otimes \Delta\gamma \\
&= id \otimes \Delta(\alpha \otimes \alpha + \beta \otimes \gamma) \\
&= id \otimes \Delta(\Delta\alpha) = id \otimes \Delta(\Delta t_{11}).
\end{aligned}$$

Similarmente,

$$\Delta \otimes id(\Delta t_{12}) = id \otimes \Delta(\Delta t_{12}),$$

$$\Delta \otimes id(\Delta t_{21}) = id \otimes \Delta(\Delta t_{21}),$$

$$\Delta \otimes id(\Delta t_{22}) = id \otimes \Delta(\Delta t_{22}).$$

Además,

$$\begin{aligned}
\epsilon \otimes id(\Delta t_{22}) &= \epsilon \otimes id(\Delta \delta) \\
&= \epsilon \otimes id(t_{21} \otimes t_{12} + t_{22} \otimes t_{22}) \\
&= \epsilon(t_{21}) \otimes t_{12} + \epsilon(t_{22}) \otimes t_{22} \\
&= 1 \otimes t_{22},
\end{aligned}$$

y

$$id \otimes \epsilon(\Delta t_{22}) = t_{22} \otimes 1.$$

Similarmente,

$$\epsilon \otimes id(\Delta t_{11}) = 1 \otimes t_{11} \ y \ id \otimes \epsilon(\Delta t_{11}) = t_{11} \otimes 1,$$

$$\epsilon \otimes id(\Delta t_{12}) = 1 \otimes t_{12} \ y \ id \otimes \epsilon(\Delta t_{12}) = t_{12} \otimes 1,$$

$$\epsilon \otimes id(\Delta t_{21}) = 1 \otimes t_{21} \ y \ id \otimes \epsilon(\Delta t_{21}) = t_{21} \otimes 1.$$

Así, $SU_q(2)$ es una coálgebra. Es fácil ver que Δ y ϵ respetan la multiplicación de matrices. Sólo es cuestión de escribir la definición de Δ y ϵ.

Finalmente,

$$\begin{aligned}
s * id(t_{11}) &= m \circ (s \otimes id)\Delta t_{11} \\
&= m \circ (s \otimes id)\Delta\alpha \\
&= m \circ (s \otimes id)(\alpha \otimes \alpha + \beta \otimes \gamma) \\
&= m \circ (s(\alpha) \otimes \alpha + s(\beta) \otimes \gamma) \\
&= \delta\alpha + (-q^{-1}\beta)\gamma \\
&= \alpha\delta - q\beta\gamma \\
&= 1 \\
&= u(\epsilon(t_{11})),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s * id(t_{12}) &= m \circ (s \otimes id)\Delta t_{12} \\
&= m \circ (s \otimes id)\Delta\beta \\
&= m \circ (s \otimes id)(\alpha \otimes \beta + \beta \otimes \delta) \\
&= m \circ (s(\alpha) \otimes \beta + s(\beta) \otimes \delta) \\
&= \delta\beta + (-q^{-1}\beta)\delta \\
&= 0 \\
&= u(\epsilon(t_{12})),
\end{aligned}$$

y

$$s * id(t_{21}) = u(\epsilon(t_{21})) \ y \ s * id(t_{22}) = u(\epsilon(t_{22})).$$

El grupo cuántico estructural del Haz Cuántico de Hopf debe ser la versión cuántica de S^1, que será el álgebra de Hopf $\mathbb{C}[Z, Z^{-1}]$ (ejemplo 2.15). Pasemos a definir la coacción de $\mathbb{C}[Z, Z^{-1}]$ sobre $SU_q(2)$.

Sea $\pi : SU_q(2) \to \mathbb{C}[Z, Z^{-1}]$ tal que

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} Z & 0 \\ 0 & Z^{-1} \end{pmatrix}.$$

π define una coacción derecha $\rho : SU_q(2) \to SU_q(2) \otimes \mathbb{C}[Z, Z^{-1}]$ dada por:

$$\rho = (id \otimes \pi) \circ \Delta$$

haciendo que $SU_q(2)$ sea un $\mathbb{C}[Z, Z^{-1}]$-comódulo derecho. En efecto,

$$\begin{aligned}
\rho(\alpha) &= (id \otimes \pi)(\Delta\alpha) \\
&= (id \otimes \pi)(\alpha \otimes \alpha + \beta \otimes \gamma) \\
&= \alpha \otimes \pi(\alpha) + \beta \otimes \pi(\gamma) \\
&= \alpha \otimes Z.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
id \otimes \Delta(\rho(\alpha)) &= id \otimes \Delta(\alpha \otimes Z) \\
&= \alpha \otimes \Delta(Z) \\
&= \alpha \otimes (Z \otimes Z) \\
&= (\alpha \otimes Z) \otimes Z \\
&= \rho(\alpha) \otimes Z \\
&= \rho \otimes id(\alpha \otimes Z) \\
&= \rho \otimes id(\rho(\alpha)),
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
id \otimes \epsilon(\rho(\alpha)) &= id \otimes \epsilon(\alpha \otimes Z) \\
&= \alpha \otimes \epsilon(Z) \\
&= \alpha \otimes 1.
\end{aligned}$$

Similarmente,

$$id \otimes \Delta(\rho(\beta)) = \rho \otimes id(\rho(\beta)), id \otimes \epsilon(\rho(\beta)) = \beta \otimes 1,$$

$$id \otimes \Delta(\rho(\gamma)) = \rho \otimes id(\rho(\gamma)), id \otimes \epsilon(\rho(\gamma)) = \gamma \otimes 1,$$

$$id \otimes \Delta(\rho(\delta)) = \rho \otimes id(\rho(\delta)), id \otimes \epsilon(\rho(\delta)) = \delta \otimes 1.$$

Definimos la dos-esfera cuántica S_q^2 como la subálgebra de $SU_q(2)$ generada por los elementos $\left\{\alpha\beta, \beta\gamma, \gamma\delta, \alpha\delta \mid \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in SU_q(2)\right\}$.

Por otro lado, los coinvariantes de $SU_q(2)$ bajo $\mathbb{C}[Z, Z^{-1}]$ son

$$\begin{aligned}
SU_q(2)^{co\mathbb{C}[Z,Z^{-1}]} &= \{T \in SU_q(2) | \rho(T) = T \otimes I\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in SU_q(2) \middle| \ \rho \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \otimes 1 & \beta \otimes 1 \\ \gamma \otimes 1 & \delta \otimes 1 \end{pmatrix} \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in SU_q(2) \middle| \ \begin{pmatrix} \alpha \otimes Z & \beta \otimes Z^{-1} \\ \gamma \otimes Z & \delta \otimes Z^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \otimes 1 & \beta \otimes 1 \\ \gamma \otimes 1 & \delta \otimes 1 \end{pmatrix} \right\}.
\end{aligned}$$

Veamos que $SU_q(2)^{co\mathbb{C}[Z,Z^{-1}]} = S_q^2$. Sea $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in SU_q(2)$. Si $\begin{pmatrix} \alpha\otimes Z & \beta\otimes Z^{-1} \\ \gamma\otimes Z & \delta\otimes Z^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\otimes 1 & \beta\otimes 1 \\ \gamma\otimes 1 & \delta\otimes 1 \end{pmatrix}$, entonces α, β, γ y δ son múltiplos de alguno de los siguientes elementos: $\alpha_0\beta_0$, $\gamma_0\delta_0$, $\alpha_0\delta_0$ ó $\beta_0\gamma_0$ donde $\begin{pmatrix} \alpha_0 & \beta_0 \\ \gamma_0 & \delta_0 \end{pmatrix} \in SU_q(2)$. De lo contrario sería imposible eliminar los Z, Z^{-1} de las segundas componentes y obtener 1. Entonces $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in S_q^2$ y así

$$SU_q(2)^{co\mathbb{C}[Z,Z^{-1}]} \subseteq gen\left\{\alpha\beta, \beta\gamma, \gamma\delta, \alpha\delta \mid \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in SU_q(2)\right\}.$$

Para la otra contenencia, si $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in SU_q(2)$,

$$\begin{aligned}
\rho(\alpha\beta) &= \rho(\alpha)\rho(\beta) \\
&= id\otimes\pi(\Delta(\alpha))id\otimes\pi(\Delta(\beta)) \\
&= id\otimes\pi(\alpha\otimes\alpha+\beta\otimes\gamma)id\otimes\pi(\alpha\otimes\beta+\beta\otimes\delta) \\
&= (\alpha\otimes Z)(\beta\otimes Z^{-1}) \\
&= (\alpha\beta\otimes 1),
\end{aligned}$$

y similarmente $\rho(\gamma\delta) = \gamma\delta\otimes 1$ y $\rho(\alpha\delta) = \alpha\delta\otimes 1$.

De esta manera, $S_q^2 = SU_q(2)^{co\mathbb{K}[Z,Z^{-1}]}$.

Sea $\chi = (m\otimes id)\circ(id\otimes\rho) : SU_q(2)\otimes SU_q(2) \to SU_q(2)\otimes\mathbb{C}[Z,Z^{-1}]$. Podemos inyectar a $\mathbb{C}[Z,Z^{-1}]$ en $SU_q(2)$ inyectando los generadores por medio de $\{Z, Z^{-1}\} \mapsto \begin{pmatrix} Z & 0 \\ 0 & Z^{-1} \end{pmatrix}$. Así, cualquier elemento de $\mathbb{C}[Z,Z^{-1}]$ es combinación lineal de Z y Z^{-1} y se puede ver en $SU_q(2)$. Para $\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \gamma_2 & \delta_2 \end{pmatrix} \in SU_q(2)$,

$$\begin{aligned}
\chi\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1 \end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \gamma_2 & \delta_2 \end{pmatrix} &= (m\otimes id)\circ(id\otimes\rho)\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1 \end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \gamma_2 & \delta_2 \end{pmatrix} \\
&= m\otimes id\left(\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1 \end{pmatrix}\otimes\left(\begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \gamma_2 & \delta_2 \end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix} Z & 0 \\ 0 & Z^{-1} \end{pmatrix}\right)\right) \\
&= \begin{pmatrix} \alpha_1\alpha_2+\beta_1\gamma_2 & \alpha_1\beta_2+\beta_1\delta_2 \\ \gamma_1\alpha_2+\delta_1\gamma_2 & \gamma_1\beta_2+\delta_1\delta_2 \end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix} Z & 0 \\ 0 & Z^{-1} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Entonces si $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} Z & 0 \\ 0 & Z^{-1} \end{pmatrix} \in SU_q(2) \otimes \mathbb{C}[Z, Z^{-1}]$,

$$\chi \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} Z & 0 \\ 0 & Z^{-1} \end{pmatrix}.$$

Esto prueba la sobreyectividad de χ.

Finalmente, recordemos que

$$\Omega^1(S_q^2) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \gamma_2 & \delta_2 \end{pmatrix} \in S_q^2 \otimes S_q^2 \middle| \begin{pmatrix} \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\gamma_2 & \alpha_1\beta_2 + \beta_1\delta_2 \\ \gamma_1\alpha_2 + \delta_1\gamma_2 & \gamma_1\beta_2 + \delta_1\delta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

luego —tras unos cálculos— obtenemos la identidad $SU_q(2)\,\Omega^1(S_q^2)\,SU_q(2) = Ker\chi$.

Terminamos este capítulo con el teorema que relaciona las extensiones de Galois de álgebras de Hopf con las fibraciones principales cuánticas.

Teorema 4.5. *Sea P un álgebra H-comodular. Entonces $M = P^{coH} \subset P$ H-Galois si y sólo si $P(M, H)$ es un haz principal cuántico con cálculo universal.*

Demostración. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P\Omega^1(M)P \arrow[r] \arrow[d, "\mathbf{0}"] & P \otimes P \arrow[r] \arrow[d, "\chi"] & P \otimes_M P \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & 0 \\
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & P \otimes H \arrow[r] & P \otimes H \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Entonces existe una sucesión exacta

$$0 \to Ker(\mathbf{0}) \to Ker(\chi) \to Ker(\beta) \to Coker(\mathbf{0}) \to Coker(\chi) \to Coker(\beta) \to 0.\text{[Ati]}$$

Es decir, una sucesión exacta

$$0 \to P\Omega^1(M)P \to Ker(\chi) \to Ker(\beta) \to 0 \to Coker(\chi) \to Coker(\beta) \to 0.$$

Supongamos que $M = P^{coH} \subset P$ es H-Galois. Entonces β es biyectiva, por lo que $Ker(\beta) = Coker(\beta) = 0$. Como la sucesión es exacta, debemos tener que $Coker(\chi) = 0$, luego χ es sobreyectiva. Por la misma razón debemos tener que $P\Omega^1(M)P \cong Ker(\chi)$. Entonces $P(M, H)$ es un haz principal cuántico.

Recíprocamente, supongamos que $P(M, H)$ es un haz principal cuántico. Entonces χ es sobreyectiva, lo que implica que $Coker(\chi) = 0$ por lo tanto, como la sucesión es exacta, $Coker(\beta) = 0$. También tenemos que $Ker(\chi) = P\Omega^1(M)P$. Entonces $Ker(\beta) = 0$ lo que lleva a que β es una biyección. Entonces $M = P^{coH} \subset P$ es H-Galois. □

Bibliografía

[AMR] Abraham R., Marsden J. E., Ratiu T. *Manifolds, Tensor Analysis and Applications.* Springer, 1988.

[Ati] Atiyah M.F., Macdonald I.G. *Introduction to Commutative Algebra.* Addison-Wesley Publishing Company, Addison-Wesley Series in Mathematics, 1969.

[Bat] Batista E. *Noncommutative Geometry: A Quantum Group Approach.* Mat. Contemp. 28, pp. 63–90, 2005.

[BM] Brzeziński T. Majid S. *Quantum group gauge theory on quantum spaces.* Comm. Math. Phys. **157**, no. 3, pp. 591–638, 1993.

[BG] Bishop R. L., Goldberg S. I. *Tensor Analysis on Manifolds.* Dover Publications, 1980.

[Bou] Bourbaki N. *General topology.* Elements of Mathematics. Springer-Verlag, 1998.

[Kas] Kassel C. *Quantum Groups.* Springer-Verlag, 1995.

[Kna] Knapp A. W. *Lie Groups Beyond an Introduction.* Birkhäuser, 2002.

[KT] Kreimer H. F.; Takeuchi M. *Hopf algebras and Galois extensions of an algebra.* Indiana Univ. Math. J. **30**, no. 5, pp. 675–692, 1981.

[Mon] Montgomery S. *Hopf Algebras and Their Actions on Rings.* American Mathematical Society, 1993.

[Par] Parker D. *$U(\mathfrak{g})$-Galois Extensions.* Preprint, 2005.