

## CAPÍTULO 2

# ROTACIÓN

NURY GUTIÉRREZ, JUAN LONDOÑO, ADRIANA PARRA,  
TILIA QUIAZÚA Y SONIA CALDERÓN

### 1. Introducción y descripción del problema

En este capítulo, presentamos el informe final de la unidad didáctica sobre el tema de rotación. Basados en nuestra experiencia docente en el aula, observamos la dificultad de los estudiantes para realizar rotaciones haciendo uso correcto de sus elementos y para diferenciar este movimiento de otros movimientos. Por esta razón, decidimos realizar esta propuesta de trabajo que ofrece una alternativa metodológica y didáctica a docentes de matemáticas, incluye herramientas para que sus estudiantes logren superar las dificultades presentadas al usar la rotación para dar solución a una situación problema y promueve el desarrollo de capacidades matemáticas que contribuyan a la apropiación de este concepto y sus elementos.

Implementamos la unidad didáctica en la Institución Educativa Departamental Pompilio Martínez del municipio de Cajicá. La institución cuenta con 1500 estudiantes pertenecientes a los estratos socioeconómicos 1, 2 y 3. Estos estudiantes provienen de familias en su mayoría recompuestas y cuya actividad económica es comercial y agropecuaria (en una minoría). La institución presta servicio educativo desde el grado preescolar hasta la media técnica, con modalidad en gestión ambiental y se encuentra en el nivel superior de acuerdo con los resultados obtenidos por los estudiantes que cursan el último grado de educación media en las pruebas Saber 11.

El tema de nuestra unidad didáctica se ubica en la planeación del área de matemáticas de la institución y es acorde con los estándares de competencias del Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2006), así como con los lineamientos curriculares para matemáticas (MEN, 1998). Para desarrollar esta propuesta, seleccionamos el grado sexto. Los estudiantes de este grado vienen realizando desde el grado quinto el aprendizaje de la Geometría por medio de la teoría del aprendizaje por adaptación. Esta teoría propone que el estudiante sea quien construya su propio conocimiento mediante la interacción con un medio (software dinámico y situaciones problema, entre otros).

En este capítulo, detallamos el proceso de diseño, implementación y mejoras de la unidad didáctica sobre rotación. Iniciamos con la descripción, fundamentación y justificación del diseño previo (análisis de contenido, análisis cognitivo y análisis de instrucción). Después, presentamos los instrumentos y procedimientos utilizados para la recolección y análisis de la información producida durante la implementación. Luego, presentamos la descripción de la implementación con énfasis en los cambios que realizamos para dar lugar al nuevo diseño. Por último, presentamos el nuevo diseño de la unidad didáctica como resultado del análisis de las debilidades y fortalezas identificadas al realizar el análisis de los resultados obtenidos durante la implementación. Concluimos con algunas reflexiones sobre la experiencia vivida a lo largo del proceso.

## **2. Diseño previo: descripción, fundamentación y justificación**

El propósito del análisis didáctico es contribuir al diseño, implementación y evaluación de una unidad didáctica. Este análisis está dividido en cuatro apartados que corresponden a cada una de las dimensiones del currículo: (a) análisis de contenido, (b) análisis cognitivo, (c) análisis de instrucción y (d) análisis de actuación.

La información producida en el análisis de contenido nos permitió seleccionar los elementos más relevantes para nuestro tema desde la perspectiva conceptual, de representación y fenomenológica; el análisis cognitivo nos ayudó a definir y diferenciar las expectativas de nivel superior, medio e inferior, junto con las de tipo afectivo y las limitaciones de aprendizaje; el análisis de instrucción nos permitió diseñar las tareas de nuestra unidad didáctica y el análisis de actuación nos orientó en la planificación del seguimiento del aprendizaje

de los estudiantes y del proceso de enseñanza durante de la implementación de la unidad didáctica. En este apartado, presentamos los resultados de los análisis de contenido, cognitivo y de instrucción. En apartados posteriores, presentaremos los resultados del análisis de actuación.

## 1. Análisis de contenido

El análisis de contenido gira alrededor de la dimensión conceptual (Cañadas, Gómez y Pinzón, 2018). Consiste en revisar el contenido matemático para identificar y organizar los múltiples significados del tema. A continuación, presentamos este análisis de acuerdo con los siguientes conceptos pedagógicos: estructura conceptual, sistemas de representación y fenomenología.

### 1.1. Estructura conceptual

Con la estructura conceptual establecemos los conceptos, procedimientos y relaciones entre ellos (Cañadas, Gómez y Pinzón, 2018). Matemáticamente, la rotación es el movimiento de un cuerpo rígido que, a diferencia de la traslación, mantiene un punto fijo. El tema de nuestra unidad didáctica corresponde a este movimiento en dos dimensiones. En la figura 1, presentamos la estructura conceptual del tema, al identificar los conceptos que lo caracterizan, las relaciones entre ellos y los procedimientos a que dan lugar.

Nuestro tema se enmarca dentro de los lineamientos del documento de los estándares del MEN (2006, p. 84) que, en la sección de pensamiento espacial y sistemas geométricos para los grados sexto y séptimo, establece el estándar “Predigo y comparo los resultados de aplicar transformaciones rígidas (traslaciones, rotaciones, reflexiones) y homotecias (ampliaciones y reducciones) sobre figuras bidimensionales en situaciones matemáticas y en el arte”.

El campo conceptual se compone de los hechos, conceptos y estructuras conceptuales. Algunos de los conceptos son las nociones de giro, ángulo, área y números naturales y sus opuestos. Las estructuras conceptuales que identificamos son los polígonos y los elementos de la rotación. Dentro del campo procedimental están la construcción y medición de ángulos, la rotación positiva y negativa por los tres centros de rotación, y el cálculo del ángulo de rotación.

La rotación se puede realizar en el plano cartesiano conformado por los ejes de abscisas y ordenadas en los cuales se forman los pares ordenados. Los polígonos se clasifican según su número de lados o ángulos. Según la medida de sus lados y ángulos, se clasifican en regulares e irregulares. Los elementos de la rotación son (a) el centro de rotación, que puede ser interno, externo

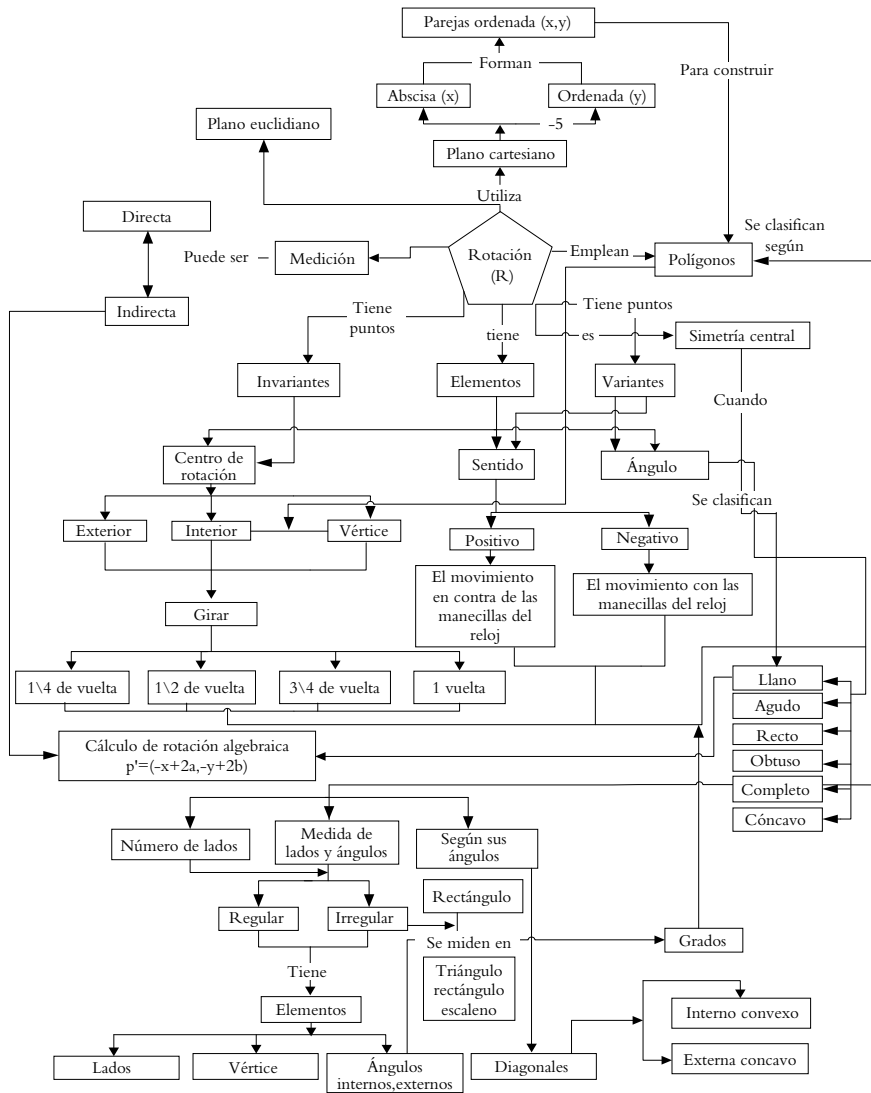


Figura 1. Mapa de la estructura conceptual de la rotación

o un vértice del polígono; (b) el sentido, que puede ser positivo o negativo de acuerdo con el movimiento de las manecillas del reloj y (c) el ángulo, que se mide en grados e indica la amplitud del giro del polígono rotado. La medición de la rotación puede hacerse de forma directa con el empleo del transportador o en forma indirecta por medio de la expresión algebraica  $p' = (-x + 2a - y + 2b)$  que aplica exclusivamente para simetría central.

### 1.2. Sistemas de representación

Los sistemas de representación son un conjunto de signos y normas que permiten designar un concepto (Cañadas, Gómez y Pinzón, 2018). Los sistemas de representación más relevantes en la rotación son el numérico, el simbólico, el gráfico, el geométrico, el verbal, el ejecutable y el manipulable. El sistema de representación numérico está compuesto por los números enteros que se utilizan para representar el valor del ángulo. Un ejemplo de una instrucción que incluye algunos elementos del sistema de representación simbólico es  $R.ABC: \alpha + 90^\circ$ . Esta expresión se traduce como rotar el triángulo ABC en un ángulo de  $90^\circ$  en sentido horario. El sistema de representación geométrico es el núcleo de nuestra unidad didáctica con la construcción de teselados. La plantilla, con una figura geométrica, que utilizamos para facilitar a los estudiantes la realización del movimiento de rotación es un ejemplo del sistema de representación manipulable. El sistema de representación gráfico que empleamos fue el plano euclidiano. Para el sistema de representación ejecutable utilizamos los programas Cabri o GeoGebra. En la figura 2, incluimos una ilustración de una figura rotada por el vértice en GeoGebra.

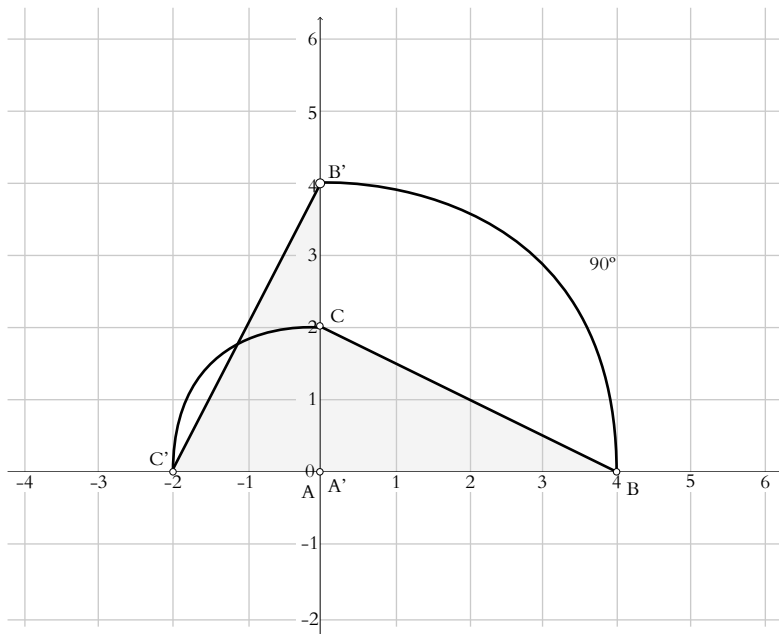


Figura 2. Sistema de representación ejecutable (GeoGebra)

En la figura 3, presentamos los diferentes sistemas de representación, un ejemplo y las traducciones entre ellos. En el centro del mapa conceptual se encuentra el tema de rotación y, dentro de óvalos, se encuentran los diferentes sistemas de representación que aplican para nuestro tema. En un tercer nivel, citamos algunos ejemplos. Representamos las relaciones entre sistemas de representación con flechas punteadas bidireccionales.

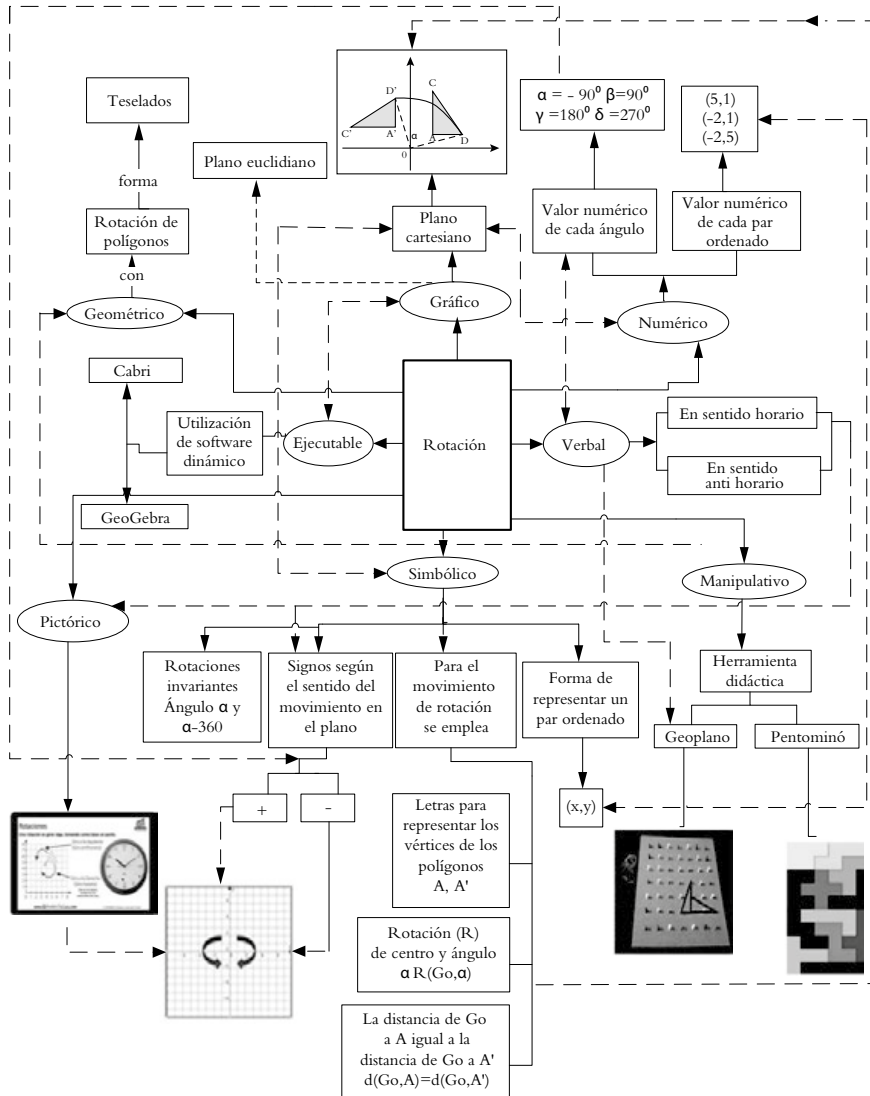


Figura 3. Mapa conceptual de los sistemas de representación para la rotación

### 1.3. Fenomenología

Definimos tres contextos fenomenológicos. El primero es el movimiento circular uniforme con fuerza centrípeta; el segundo es la generación de superficies por rotación; y el tercero es el movimiento circular uniforme con fuerza centrífuga y centrípeta. Categorizamos las subestructuras matemáticas de acuerdo con el centro de rotación: por un punto interior, por uno exterior y por el vértice. Estas subestructuras están relacionadas directamente con los contextos fenomenológicos, dan respuesta a preguntas relacionadas con el tema y se clasifican dentro de los contextos de PISA 2012. En la figura 4,

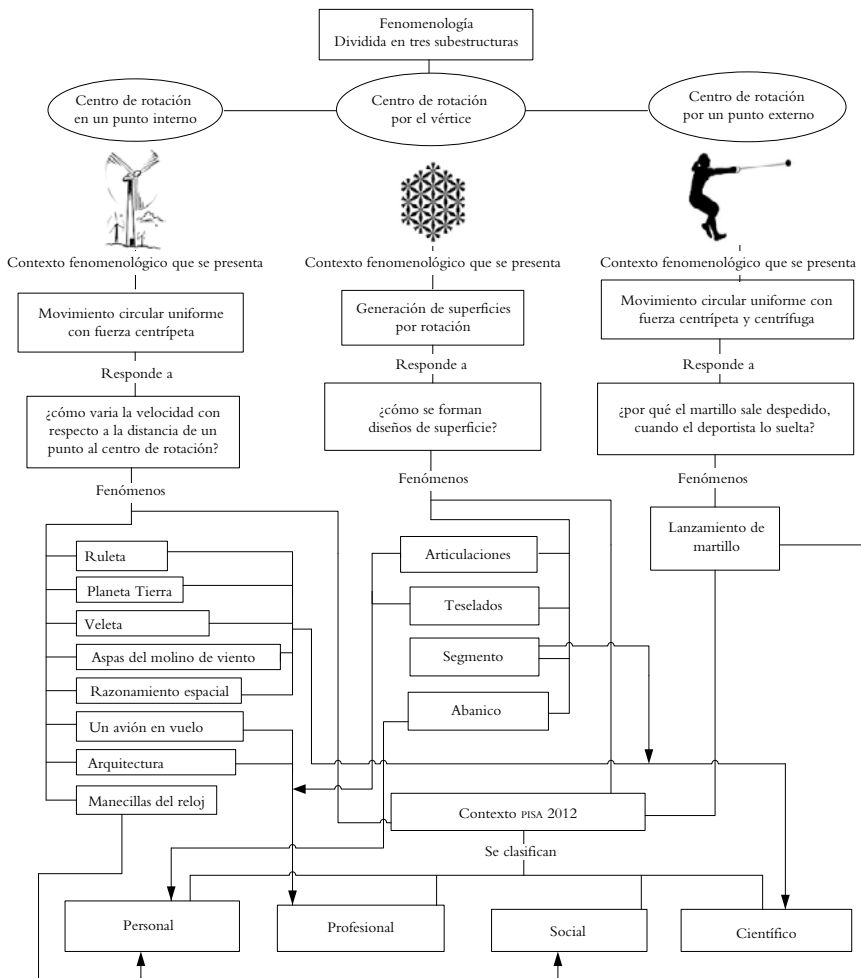


Figura 4. Mapa de la fenomenología de la rotación

presentamos los contextos fenomenológicos, las subestructuras matemáticas con las que clasificamos los fenómenos y algunos ejemplos.

## 2. Análisis cognitivo

En el análisis cognitivo, el foco de atención es el aprendizaje del estudiante (González y Gómez, 2018). Este análisis tiene que ver con las expectativas cognitivas y afectivas que buscamos desarrollar en los estudiantes y con sus limitaciones de aprendizaje a cuya superación esperamos contribuir. A continuación, establecemos las capacidades matemáticas fundamentales y los procesos matemáticos a los que pretendemos contribuir, los conocimientos previos que suponemos que los estudiantes deben tener para abordar la unidad didáctica, las capacidades que pueden activar y los errores en los que pueden incurrir. Después, formulamos y caracterizamos los objetivos de aprendizaje de la unidad didáctica y establecemos las expectativas de tipo afectivo.

### 2.1. *Capacidades matemáticas fundamentales y procesos matemáticos*

Con nuestra unidad didáctica, buscamos generar conciencia en el estudiante acerca de la presencia de la rotación en su entorno y de los fenómenos asociados a ella. También esperamos que la distinga de los demás movimientos isométricos y que desarrolle habilidades y herramientas que le permitan darle sentido en diversos contextos, de tal forma que genere una actitud favorable frente al tema.

Las capacidades matemáticas fundamentales en las que queremos hacer énfasis con las tareas de aprendizaje de la unidad didáctica son la comunicación, la representación, el razonamiento y la argumentación, el diseño de estrategias para solucionar problemas, la utilización de operaciones y lenguaje simbólico, formal y técnico, y la utilización de herramientas matemáticas. Por medio de la formulación de las tareas, esperamos que se activen los tres procesos matemáticos de formular, emplear e interpretar.

### 2.2. *Conocimientos previos y capacidades*

Algunos de los conocimientos previos más relevantes para nuestra unidad didáctica son la realización gráfica de giros, el manejo de la regla y el transportador para la medición, la representación y clasificación de ángulos y triángulos, el reconocimiento de circunferencias y sus elementos, y la habilidad



de hallar el punto medio de un segmento. Presentamos el listado completo de conocimientos previos en el anexo 1<sup>1</sup>.

Las capacidades que queremos activar en el estudiante buscan el desarrollo de habilidades y el manejo de herramientas que lo lleven a la adecuada contextualización del tema de rotación. Algunas de estas capacidades son el reconocimiento del movimiento de rotación y su trayectoria circular, la rotación de figuras por los tres centros de rotación (punto interno, punto externo y vértice), la realización de diseños por medio de la rotación, la determinación de un centro de rotación por medio del trazo de mediatrices o de circunferencias concéntricas, la solución a situaciones problema por medio del empleo de la rotación y el recubrimiento de superficies haciendo uso del movimiento de rotación. Presentamos el listado completo de capacidades en el anexo 2.

### *2.3. Limitaciones de aprendizaje*

Las dificultades se asocian a las circunstancias que impiden o entorpecen la consecución de los objetivos propuestos para nuestra unidad didáctica. Para cada dificultad, determinamos un listado de errores en los que consideramos que nuestros estudiantes podían incurrir. Agrupamos los errores en tres categorías que corresponden a la dificultad del manejo de los sistemas de representación, al uso irreflexivo de los conocimientos previos en la realización del movimiento de rotación, y a la interpretación alternativa de las instrucciones y asimilación inadecuada del uso de habilidades e instrumentos.

A continuación, presentamos tres ejemplos de errores asociados a la dificultad del manejo de sistemas de representación en la rotación. Presentamos el listado completo de errores en el anexo 2.

- Rota la figura sin tener en cuenta las características del polígono.
- Manifiesta ausencia de asociación entre el punto y su imagen.
- Evidencia desconexión entre rotación y trayectoria circular.

### *2.4. Objetivos*

Consideramos necesario crear una mayor conciencia en los estudiantes con respecto a la presencia de los fenómenos relacionados con la rotación que les permita, no solo reconocerlos y dar solución a situaciones que se resuelvan con la ejecución de este movimiento, sino también idear nuevas representaciones, como las diferentes creaciones artísticas a las que la rotación da

---

1 Los anexos se pueden consultar en <http://funes.uniandes.edu.co/8701/>

lugar, en el caso del contexto fenomenológico de generación de superficies por rotación. Teniendo en cuenta lo anterior, formulamos los dos objetivos siguientes para nuestra unidad didáctica.

*Objetivo 1.* Identificar el movimiento de rotación, sus elementos y representación, mediante el empleo de herramientas matemáticas para dar solución a diferentes situaciones problema.

*Objetivo 2.* Visualizar, representar y argumentar los resultados de girar figuras geométricas para dar solución a situaciones problema en contextos relevantes para el estudiante.

Cada uno de los objetivos que planteamos para nuestra unidad didáctica está orientado hacia una capacidad matemática y un proceso matemático. El objetivo 1 se relaciona con la capacidad matemática fundamental de representación y el proceso matemático de emplear. El objetivo 2 se relaciona con la capacidad matemática fundamental de argumentación y con el proceso matemático de interpretar. Diseñamos una tarea matemática representativa tal que, si el estudiante logra resolverla, nosotros consideramos que había logrado el objetivo (tarea prototípica). Con base en esa tarea, planteamos las capacidades que el estudiante debería activar para darle solución a la tarea y los posibles errores en los que el estudiante podría incurrir. De acuerdo con los contenidos matemáticos asociados a la rotación, agrupamos las capacidades en secuencias de capacidades que, a su vez, al agruparlas, forman los criterios de logro que configuran el grado de criterios de logro. En la figura 5, presentamos el grafo de criterios de logro del objetivo 1.

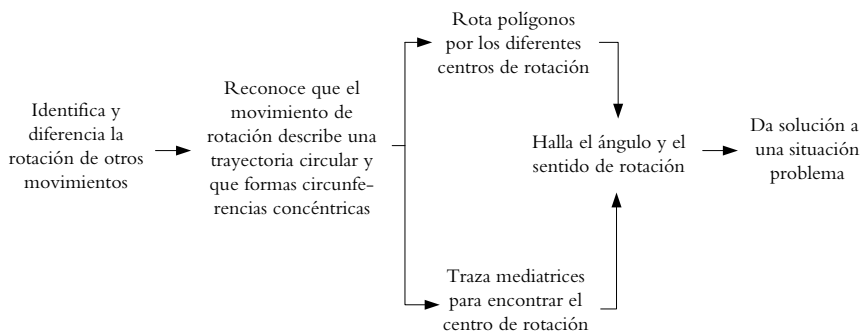


Figura 5. Grafo de criterios de logro del objetivo 1

El grafo de criterios de logro del objetivo 1 está compuesto por seis criterios de logro que muestran dos caminos de aprendizaje que el estudiante puede seguir. En el primer camino de aprendizaje, el estudiante identifica el movimiento de rotación, sus elementos y características. En ese momento, puede confundir la rotación con algún otro de los movimientos isométricos (E22-23). Luego, debe relacionar el movimiento de rotación con la trayectoria circular y el trazo de circunferencias concéntricas. Al hacerlo, el estudiante puede pasar por alto esta relación y llegar a interpretaciones incorrectas (E7-20). Después, debe rotar la figura por cualquiera de los tres centros de rotación, momento en el que puede pasar por alto las características de la rotación que le permiten hacerlo correctamente (E14-15-34). En seguida, debe hallar el ángulo y sentido de la rotación, momento en el que puede utilizar incorrectamente los instrumentos y los datos y llegar a un resultado equivocado (E6-10-16-15-30). Finalmente, utiliza la información conseguida para dar solución a la situación problema. Aquí el estudiante puede hacer una interpretación incorrecta de los resultados obtenidos o no estar seguro de saber qué puede hacer con ellos para darle solución al problema (E10-26-27). En el segundo camino de aprendizaje, el estudiante identifica la rotación, la asocia a la trayectoria circular y encuentra el centro de rotación por medio del trazo de mediatrices. Puede pasar por alto las características de las mediatrices, como la perpendicularidad (E12-19), para finalmente dar solución al problema planteado. En la figura 6, presentamos el grafo de criterios de logro del objetivo 2.

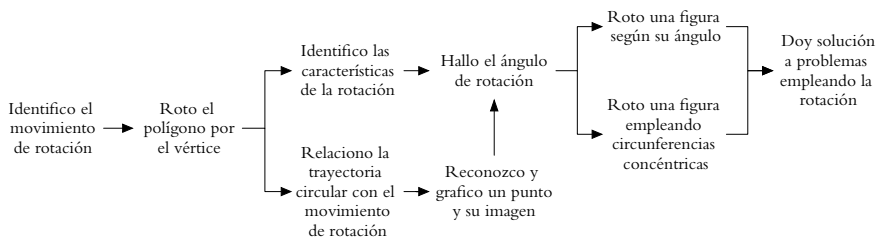


Figura 6. Grafo de criterios de logro del objetivo 2

El grafo del objetivo 2 (figura 6) está compuesto por nueve criterios de logro que muestran tres caminos de aprendizaje que el estudiante puede seguir. En el primer camino de aprendizaje, el estudiante identifica el movimiento de rotación. En este momento, puede confundir la rotación con algún otro de los movimientos isométricos (E22-23). Luego, debe rotar una figura por

el vértice e identificar las características de la rotación. Aquí, puede dejar de asociar el movimiento de la rotación con la trayectoria circular y con el trazo de circunferencias concéntricas (E1-10-26-27). Después, debe hallar el ángulo de rotación. En este momento, puede usar mal los instrumentos de medición y dejar de tener en cuenta el sentido de la rotación (E8-21-29-30-32). En seguida, debe rotar la figura según el ángulo y, al hacerlo, puede interpretar equivocadamente la magnitud del ángulo o su sentido (E9-14-15-28-30). Finalmente, debe dar solución a la situación problema. Aquí, el estudiante puede hacer una interpretación incorrecta de los resultados obtenidos o no estar seguro de saber qué puede hacer con ellos para darle solución al problema (E10-26-27). En el segundo y tercer camino, el estudiante identifica la rotación y, a diferencia del primero, da solución al problema al relacionar la rotación con la trayectoria circular. En este punto, puede pasar por alto esta relación y llegar a resultados inexactos (E7-18-31). Luego, debe reconocer y graficar un punto y su imagen, momento en el que puede pasar por alto las características de la rotación y utilizar inadecuadamente los instrumentos (E6-21). Es aquí donde el estudiante puede decidir por cuál de los dos caminos dar solución al problema: rotar la figura según un ángulo o por medio de circunferencias concéntricas. Aquí puede incurrir en el error de pasar por alto la magnitud y sentido del ángulo, y la trayectoria circular y el centro de rotación (E7-9-14-15-17-18-28-30).

### *2.5. Expectativas de tipo afectivo*

Con el propósito de mejorar el rendimiento de los estudiantes, surgen las expectativas de tipo afectivo y los aspectos que afectan la motivación. Con la creación de representaciones artísticas, pretendemos brindar al estudiante la posibilidad de expresarse y comunicar emociones, pensamientos e ideas en relación con una determinada situación. Esto creará en él hábitos tendientes a la pulcritud y sentimientos de confianza en sí mismo y elevará su autoestima, lo que permitirá que aumenten las posibilidades del empleo correcto y efectivo de las herramientas y habilidades requeridas para ejecutar el movimiento de rotación. A su vez, buscamos aumentar la confianza del estudiante para justificar, explicar y argumentar la presencia de ese movimiento en múltiples situaciones y en diferentes contextos.

Al diseñar las expectativas de tipo afectivo, buscamos dar oportunidades para que el estudiante tenga confianza en sí mismo y en sus conocimientos en el momento de presentar explicaciones y argumentos válidos cuando identifica los elementos de la rotación en diferentes contextos; promover una

actitud favorable frente a la creación de representaciones artísticas empleando el movimiento de rotación; desarrollar hábitos de exactitud y pulcritud en la elaboración de las diferentes representaciones de la rotación al igual que en el cálculo del centro de rotación y ángulo de giro; y predisponer al estudiante a reflexionar sobre la viabilidad de la solución de un problema por medio del empleo del movimiento de rotación. Los factores que afectan la motivación están relacionados con el propósito y la finalidad de resolver la tarea, el uso de los conocimientos para resolverla, el interés y curiosidad que la tarea genera, la posibilidad de reconocer los errores, el nivel de reto y la interacción con los compañeros. Estos factores nos permiten determinar el aporte que la motivación hace al aprendizaje de los estudiantes. Presentamos las expectativas afectivas en el anexo 4.

### **3. Análisis de instrucción**

El propósito al planificar e implementar la enseñanza consiste en contribuir al logro de las expectativas y a la superación de las limitaciones de aprendizaje. Brindamos esta oportunidad a los estudiantes a través de tareas de aprendizaje que les permitan usar los conocimientos adquiridos hasta ese momento, reconocer los errores en los que pueden incurrir e interactuar con sus compañeros y el profesor, en un proceso de construcción social del conocimiento matemático (Gómez, Mora y Velasco, 2018).

Una tarea de aprendizaje tiene siete elementos: los requisitos, las metas, la formulación, los materiales y recursos, el agrupamiento, la interacción y comunicación, y la temporalidad. El diseño de las cuatro tareas de aprendizaje de nuestra unidad didáctica contempla estos siete elementos. Para cada uno de nuestros dos objetivos diseñamos dos tareas de aprendizaje. A continuación, presentamos la descripción de cada una de ellas en términos de sus metas, contenidos y formulación. Además, presentamos la descripción detallada de la ficha de la tarea Encuentre la pista. Las fichas de las otras tareas se encuentran en el anexo 5.

#### ***3.1. Descripción del diseño previo de la unidad didáctica***

Describimos el diseño previo de la unidad didáctica con base en sus elementos.

##### ***Metas, contenidos y formulación***

En la tarea Blog, trabajamos el concepto del movimiento de rotación, sus características y elementos. La meta de esta tarea es que el estudiante logre

identificar el movimiento de rotación y sus elementos, lo diferencie de otros movimientos y lo realice por medio del uso de un software dinámico. Para ello, formulamos en el blog seis niveles. En los tres primeros niveles, el estudiante debe identificar y diferenciar el movimiento de rotación. En el cuarto nivel, debe rotar figuras por un vértice; en el quinto, rotar figuras con un centro de rotación interno; y, en el sexto, por un punto externo. Para llegar al último nivel, el estudiante debe superar los niveles anteriores. De manera paralela, el estudiante debe resolver la guía del estudiante.

En las tareas Logotipo y Bandera, el estudiante deberá poner en práctica los conocimientos adquiridos en las dos tareas anteriores. En la tarea Logotipo, buscamos que el estudiante emplee el movimiento de rotación para diseñar imágenes. Para ello, formulamos dos actividades. En la primera, el estudiante al hacer uso de una plantilla, reproduce un logotipo. En la segunda, él diseña su propio logotipo, para luego graficarlo en GeoGebra. Con la tarea Bandera, perseguimos que el estudiante se exprese artísticamente usando el movimiento de rotación y emplee el lenguaje matemático para realizar una traducción de su trabajo a través de una descripción del procedimiento que sigue para la elaboración de un teselado. En esta tarea, le solicitamos al estudiante que, por medio de una plantilla, diseñe el logotipo con el cual construirá el teselado. Luego deberá sustentar su propuesta.

### *Sesiones y temporalidad*

La unidad didáctica está diseñada para ser implementada en ocho sesiones de clase, de 120 minutos (dos horas de clase). La tarea diagnóstica, las tareas Blog, Encuentre la pista, Logotipo y Bandera, la realimentación de las tareas, la preparación para el examen final, la presentación del examen final y el cierre se desarrollarán, cada una, en una sesión de clase. En la tabla 1, resumimos la secuencia de tareas.

Tabla 1  
*Descripción de la secuencia de tareas*

Sesión	Objetivo	Tarea	Metas	Tiempo
1		Diagnóstica	Realimentación de la tarea diagnóstica y aplicación de ayudas y superación de dificultades	120
2	1	Blog	El estudiante conceptualiza el movimiento de la rotación y lo diferencia de otros movimientos	120

Sesión	Objetivo	Tarea	Metas	Tiempo
3	1	Encuentre la pista	El estudiante da solución a una situación problema mediante el cálculo del centro de rotación	120
4	2	Logotipo	El estudiante diferencia el movimiento de la rotación de otros movimientos isométricos y realiza diseños por medio de la rotación	120
5	2	Bandera	El estudiante identifica el movimiento de rotación y lo usa en la creación de diseños artísticos	120
6	1 y 2	Preparación del examen final	Realimentación de lo visto en las tareas de aprendizaje	120
7	1 y 2	Examen final	Verificar el nivel de comprensión del movimiento de rotación, sus elementos, representación y aplicación en la solución de situaciones problema	120
8	1 y 2	Cierre	Realimentación del examen final, definición de la nota de la unidad didáctica, formato de nivel de satisfacción y puesta en común	120

*Nota.* T1 = Blog; T2 = Encuentre la pista; T3 = Logotipo; T4 = Bandera

Las tareas se desarrollan de forma secuencial para garantizar el éxito de nuestra unidad didáctica. Sus requisitos y sus metas fueron diseñados de tal forma que cada una de las tareas abarcara los conceptos y conocimientos necesarios para abordar las tareas siguientes.

Las tareas fueron diseñadas buscando que cada una de ellas contribuyera al desarrollo de las capacidades matemáticas fundamentales y procesos matemáticos. En la tabla 2, podemos observar que las tareas del objetivo 1 contribuyen en mayor medida a las capacidades matemáticas fundamentales de comunicación, representación y uso de herramientas matemáticas y a los procesos de formular y emplear, y, en menor medida, a las capacidades matemáticas fundamentales de razonamiento y argumentación y al diseño de estrategias para resolver problemas. Las tareas del objetivo 2 contribuyen en mayor medida a la capacidad matemática fundamental de razonamiento y argumentación y a los procesos matemáticos de emplear e interpretar y, en menor medida, a la capacidad matemática fundamental de diseño de estrategias para resolver problemas.

En la tabla 3, presentamos la contribución de las tareas a las expectativas de tipo afectivo. Estas expectativas están orientadas a que el estudiante logre

Tabla 2  
*Contribución de las tareas a las expectativas de aprendizaje de nivel superior*

S	T	DRP			M			C			Ra			U			Re			H		
		F	E	I	F	E	I	F	E	I	F	E	I	F	E	I	F	E	I	F	E	I
Objetivo 1																						
2	1	✓			✓	✓		✓	✓	✓		✓	✓				✓	✓		✓	✓	
3	2	✓	✓		✓			✓	✓		✓	✓	✓	✓	✓		✓	✓		✓	✓	✓
Objetivo 2																						
4	3		✓	✓		✓	✓		✓	✓		✓	✓		✓		✓	✓		✓	✓	✓
5	4		✓			✓	✓		✓	✓	✓	✓	✓	✓		✓		✓			✓	

*Nota.* T1 = Blog; T2 = Encuentre la pista; T3 = Logotipo; T4 = Bandera; F = formular; E = emplear; I = interpretar y evaluar; DRP = diseño de estrategias para resolver problemas; M = matematización; C = comunicación; Ra = razonamiento y argumentación; U = utilización de operaciones y un lenguaje simbólico, formal y técnico; Re = representación; H = utilización de herramientas matemáticas

Tabla 3  
*Contribución de las tareas a las expectativas de tipo afectivo*

S	T	Expectativas de tipo afectivo				Demanda cognitiva	Aspectos que afectan la motivación			
		EA1	EA2	EA3	EA4		Reto	Errores	Interacción	Contexto
Objetivo 1										
2	1	✓		✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
3	2	✓		✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Objetivo 2										
4	3	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
5	4	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓

*Nota.* T = tarea; EA1 = Lograr confianza para presentar explicaciones y argumentos; EA2 = Actitud favorable hacia las representaciones artísticas; EA3 = Desarrollar hábitos de precisión y pulcritud; EA4 = Predisponer al estudiante hacia la reflexión sobre la viabilidad de una solución

confianza para presentar explicaciones y argumentos, al exponer al grupo en general o a un compañero, su trabajo para validar su propuesta de solución y, en menor medida, a promover una actitud favorable hacia las representaciones artísticas. Todas las tareas contribuyen a estos aspectos que afectan la motivación.



### 3.2. Tarea Encuentre la pista

La tarea Encuentre la pista es la segunda tarea del objetivo 1. Sus elementos son los siguientes.

*Requisitos.* Los estudiantes deben relacionar conceptos previos como medida de ángulos, trazo de segmentos, definición de rotación y sus elementos. Además, deben conocer el concepto de circunferencias concéntricas y arco.

*Meta.* Los estudiantes aprenderán la manera de trazar mediatrices y determinar su punto de intersección como el centro de rotación, reconocerán la relación que existe entre el punto y su imagen, y superarán el error de no asociar estos dos puntos.

*Formulación.* Presentamos una situación contextualizada en la que el estudiante, al hacer uso de los materiales concretos y una guía de trabajo, encuentra el centro de rotación por medio del trazo de circunferencias concéntricas o mediatrices.

*Materiales y recursos.* Para la solución de esta tarea emplearemos una serie de materiales y recursos que le permitirán al estudiante relacionar el movimiento de rotación con su entorno: la representación de la zona que se referencia por medio de un plano y cintas de colores que le permitirán diferenciar las mediatrices de los segmentos que unen los puntos con sus imágenes.

*Agrupamiento.* Se trabajará por parejas con el fin de que los estudiantes puedan intercambiar opiniones y conocimientos. Al finalizar la actividad, los estudiantes deben comunicar al grupo las estrategias de solución que emplearon para el último punto y luego, de forma individual, simular en GeoGebra la situación problema.

*Interacción y comunicación.* Las actividades propuestas se desarrollan por medio de la interacción entre parejas. Se espera que los estudiantes pongan en juego sus conocimientos y propongan alternativas de solución para el problema, con el propósito de llegar a un acuerdo. El profesor indaga acerca de las propuestas de los estudiantes y sus conclusiones, para determinar una solución en común. Además, orienta la actividad en GeoGebra para resolver dudas.

*Temporalidad.* Para el desarrollo de esta tarea se planifica una sesión de clase que corresponde a dos horas de 60 minutos.

En la figura 7 presentamos el grafo de criterios de logro de la tarea Encuentre la pista. En el grafo, podemos observar dentro de los cuadros, los criterios de

logro que se activan en los dos caminos de aprendizaje que los estudiantes pueden seguir para darle solución a la tarea de aprendizaje.

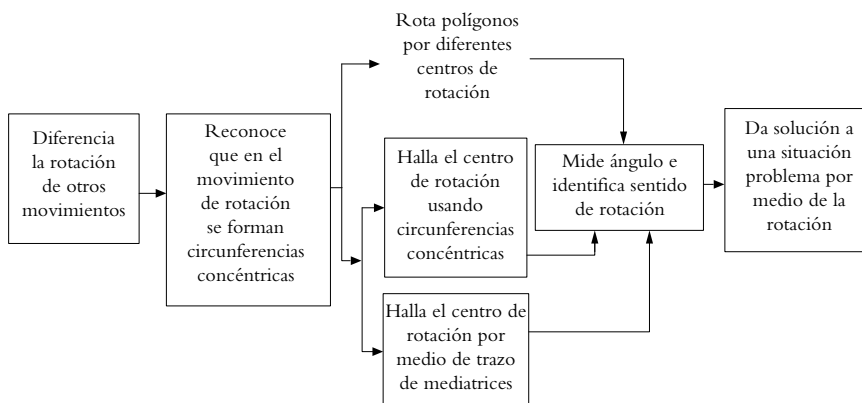


Figura 7. Grafo de criterios de logro de la tarea Encuentre la pista

Durante la solución de la tarea Encuentre la pista, el estudiante debe desarrollar la capacidad de reconocer que la rotación describe una trayectoria circular y que siempre se forma un arco entre un punto y su imagen rotada, sin importar el lugar en el que esté ubicado el centro de rotación. En este punto, el estudiante puede incurrir en el error de pasar por alto la conexión entre la rotación y una trayectoria circular (E7-20). Luego, el estudiante activa las capacidades relacionadas con encontrar el centro de rotación al trazar circunferencias concéntricas o mediatrices. Puede incurrir en el error de trazar la mediatriz sin tener en cuenta la perpendicularidad que debe tener con el segmento de recta trazado entre el punto y su imagen (E12), para luego determinar el ángulo de rotación e identificar el sentido en que se rotó la figura. En este punto, el estudiante puede incurrir en los errores E6-15-16-30: no asocia un punto y su imagen, y utiliza inadecuadamente el transportador para medir ángulos. Por último, da solución a situaciones problema por medio del empleo de la rotación.

La tarea Encuentre la pista desarrolla en los estudiantes las capacidades matemáticas fundamentales de representar y comunicar en el proceso de formular principalmente. El estudiante logra esto cuando emplea materiales concretos para hallar y representar el centro de rotación y cuando comunica a sus compañeros en una plenaria su solución y la argumenta empleando un lenguaje matemático adecuado.

### **3. Instrumentos y procedimientos de recolección de la información y análisis de datos**

El análisis de actuación está vinculado a la evaluación. Con este análisis se busca establecer la medida en que los estudiantes alcanzan los objetivos, al registrar no solo los cambios del estudiante en su aprendizaje sino también la actuación del profesor. Para llevar a cabo el registro de esta información, diseñamos varios instrumentos de recolección de información: la tarea diagnóstica, el diario del estudiante, el diario del profesor, las tareas de aprendizaje y el examen final. Posteriormente analizamos esta información por medio del sistema ACE (Análisis de Consecución de Expectativas), para identificar las debilidades y fortalezas de la unidad didáctica implementada y determinar los aspectos por mejorar en el diseño previo.

#### **1. Tarea diagnóstica**

La tarea diagnóstica tiene como propósito identificar en los estudiantes el nivel de dominio de los conocimientos necesarios para desarrollar las tareas de aprendizaje. Para nuestra unidad didáctica, esta tarea incluye cinco secciones que permiten detectar la presencia o ausencia de estos conocimientos. La primera sección se orienta al concepto de rectas paralelas y perpendiculares; la segunda a la construcción y medición de ángulos; la tercera al trazo de circunferencias concéntricas, mediatrices y determinación del punto medio; la cuarta a la identificación de los movimientos de traslación, reflexión y giros; y la última actividad a la realización de giros (anexo 6).

#### **2. Diario del estudiante**

El diario del estudiante es un instrumento que busca implicar al estudiante en el proceso de evaluación y promover en el aula de clase un ambiente de confianza y sinceridad. El estudiante diligencia el diario al finalizar cada una de las tareas de aprendizaje y en él debe registrar su percepción acerca de su dominio cognitivo y afectivo frente al tema trabajado. El diario consta de dos secciones. En la primera sección, se evalúa el aspecto cognitivo por medio del grafo de criterios de logro. El estudiante resalta en este grafo los criterios que se pretende activar con el desarrollo de la tarea propuesta. Estos criterios se encuentran acompañados del semáforo (óvalos), que el estudiante debe rellenar de color verde (“lo logré”), rojo (“no lo logré”) o amarillo (“lo logré”).

parcialmente”), según su sensación frente a su nivel aprendizaje. Por otra parte, el estudiante deberá registrar de su puño y letra las dificultades que evidenció en su trabajo durante el desarrollo de la tarea. La información que proporciona este diario permite al profesor determinar no solo si puede o no avanzar en su proceso de enseñanza al identificar los errores en que están incurriendo los estudiantes, sino también reconocer los estudiantes con mayores fortalezas, con el fin de que ellos ayuden a los que presentan mayores dificultades, y promover así el trabajo cooperativo y desarrollar motivación y confianza en el estudiante. De igual forma, el profesor puede identificar los criterios de logro que tuvieron un mayor nivel de activación. No obstante, este tipo de información es subjetiva. Es necesario contrastarla con la información de la evaluación de las tareas de aprendizaje. En la figura 8, presentamos un ejemplo del grafo de la tarea Encuentre la pista diligenciado por uno de los estudiantes.

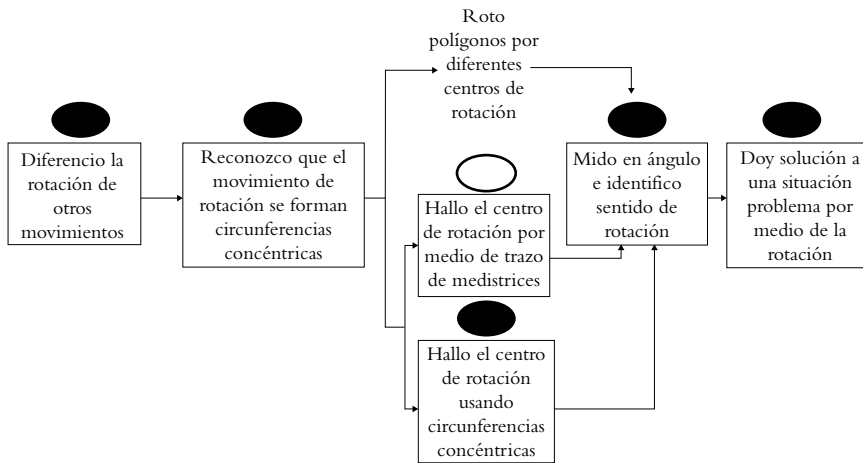


Figura 8. Semáforo tarea Encuentre la pista

El dominio afectivo se evalúa en la segunda sección del diario del estudiante. Para ello, incluimos un matematógrafo que permite registrar la percepción que el estudiante tuvo con respecto a la motivación al desarrollar la tarea. Este instrumento tiene en cuenta aspectos como la reacción a los errores, la adecuación de las demandas cognitivas de la tarea y su contribución a la interacción. Esta información permite al profesor determinar si las previsiones de la tarea fueron suficientes o adecuadas para motivar al estudiante. Esta información se contrasta con las observaciones del profesor. Para evidenciar este registro, el estudiante deberá colorear en cada columna la cantidad de

círculos necesarios hasta alcanzar el nivel que mejor representa la sensación que obtuvo frente a cada uno de los aspectos, como se muestra en el ejemplo de la figura 9. En el anexo 7, presentamos con detalle los diarios de los estudiantes para cada una de las tareas de nuestra unidad didáctica.



Figura 9. Matematógrafo

### 3. Tareas de aprendizaje

La corrección de las tareas de aprendizaje y su codificación proporcionan la información necesaria para establecer el nivel de activación de los criterios de logro, los errores en los que incurren los estudiantes, las capacidades matemáticas y procesos matemáticos que logran activar al desarrollarlas, y el nivel de contribución a las expectativas afectivas y los factores que afectan la motivación. También permiten que el profesor identifique el camino de aprendizaje que la mayoría de estudiantes eligió, el que generó mejores resultados y el que lograron desarrollar en su totalidad. Para nuestra unidad didáctica, diseñamos cuatro tareas. Las dos primeras, Blog y Encuentre la pista, están orientadas al logro del objetivo 1 y buscan promover la conceptualización del movimiento de la rotación, el reconocimiento de sus elementos, la rotación de puntos al tener en cuenta un ángulo dado, el trazo de mediatrices, la identificación de su punto de intersección como centro de rotación, y la relación entre la rotación y las circunferencias concéntricas. Las dos últimas tareas, Logotipo y Bandera, están orientadas al logro del objetivo 2 y promueven la habilidad

del estudiante para visualizar, representar y argumentar el uso de la rotación y aplicar estos conceptos por medio de expresiones artísticas.

#### 4. Diario del profesor

El diario del profesor permite realizar un registro de los efectos de la planificación y de lo acontecido durante la implementación, tanto en los aspectos cognitivo como afectivo. La comparación de estos dos aspectos le permitirá al profesor tomar decisiones frente a las acciones no previstas y los cambios que se hacen necesarios para la implementación de las siguientes tareas. El profesor lo diligencia al terminar cada clase o antes de iniciar cada nueva sesión.

El diario del profesor contiene tres apartados: aspecto cognitivo, aspecto afectivo y la toma de decisiones. En el aspecto cognitivo, el profesor encuentra en primer lugar el grafo de criterios de logro de la tarea y un listado de los criterios de logro que se pretende activar al desarrollar la tarea, acompañado cada uno de un ovalo que él deberá colorear de igual forma que lo hacen los estudiantes, al tener en cuenta su sensación frente a la activación de cada criterio del grupo en general. De igual forma, el diario cuenta con un espacio para registrar observaciones relacionadas directamente con cada criterio en cuanto a errores y precauciones para continuar o detener el proceso. Después del grafo, incluimos una tabla con los aspectos cognitivos de la tarea. En esta tabla, se registran el porcentaje de estudiantes que logró un nivel de activación determinado en cada criterio de logro, los indicadores de activación que relacionan los errores y sus posibles causas, y lo ocurrido durante la implementación. Por último, el diario cuenta con un lugar para registrar los resultados de la muestra de estudiantes a los que se revisará el trabajo escrito y el diario del estudiante. Para la dimensión afectiva, el diario cuenta con una tabla en la que se registra el porcentaje de estudiantes que alcanzó cada uno de los niveles de consecución de las expectativas de tipo afectivo. Luego se encuentra el matematógrafo que se diligencia de la misma manera que lo hace el estudiante. El último apartado, toma de decisiones, presenta tres secciones. En la primera sección, se registran las acciones no previstas que se debieron ejecutar durante el desarrollo de la tarea; en la segunda, las observaciones más relevantes encontradas en los trabajos de los estudiantes de la muestra; y, en la tercera, los cambios que se hacen necesarios para la implementación de las tareas siguientes. Presentamos el diario del profesor en el anexo 8.

## 5. Examen final

En la elaboración del examen final, tuvimos en cuenta dos elementos: los aspectos claves que deseábamos evaluar de los dos objetivos de la unidad didáctica y la experiencia del profesor en cuanto al grado de comprensión de los estudiantes y las principales dificultades que presentaron durante la implementación. Estos dos elementos nos ayudaron a determinar el nivel de complejidad del examen. Establecimos dos tareas de evaluación en un contexto cercano al estudiante. En la primera tarea, los estudiantes debían reconocer y diferenciar el movimiento de la rotación de otros movimientos y rotar diferentes figuras al tener en cuenta los elementos de la rotación (ángulo, sentido y centro de rotación). En la segunda, debían visualizar el movimiento de rotación en un teselado y hallar los elementos de la rotación. Cada tarea tuvo un valor ponderado del 50% y cada uno de los puntos tuvo un valor determinado.

Para evaluar este examen, construimos una rúbrica que guarda relación directa con el sistema de evaluación de la institución educativa en la que implementamos la unidad didáctica. Esta rúbrica está diseñada para identificar el nivel de logro alcanzado por cada uno de los estudiantes. Contiene los indicadores de activación de los criterios de logro, los errores en los que podrían incurrir para cada uno de los niveles (superior, alto, básico y bajo) y la equivalencia entre la nota que el estudiante obtiene al profesor otorgar una valoración a cada uno de los numerales del examen y el porcentaje de alcance del logro de la unidad didáctica. Presentamos el examen final y su rúbrica en el anexo 9.

## 6. Formato de nivel de satisfacción

Con el propósito de evaluar la metodología, el tiempo, los materiales, el lenguaje empleado en cada tarea, las ayudas utilizadas, el trabajo tanto de manera individual como grupal y la orientación del docente en cada una de las sesiones, diseñamos un formato de evaluación que permite al estudiante registrar su nivel de satisfacción. Presentamos el modelo de esta encuesta en el anexo 10.

## 7. Procedimiento para el análisis de la información

El sistema ACE, empleado en MAD 3 y diseñado por Pedro Gómez y Antonio Marín, es un conjunto de libros de Excel que permite obtener resultados sobre el aprendizaje, en términos del logro de las expectativas de aprendizaje

(objetivos y expectativas de aprendizaje de nivel superior), del desarrollo de las expectativas de tipo afectivo y de los factores que influyen en la motivación. ACE utiliza cuatro fuentes de información: la evaluación de las tareas de aprendizaje y del examen final y los diarios del estudiante y del profesor. El sistema permite establecer las comparaciones necesarias para el logro de los objetivos (resultados que surgen del nivel de consecución de los criterios de logro en las tareas de aprendizaje, la calificación del examen final, y los semáforos del estudiante y del profesor), para el logro de las expectativas de tipo afectivo (resultados que surgen del nivel de consecución de los criterios de logro y de la percepción del profesor en su diario), y, por último, para el desarrollo de los factores que influyen en la motivación (información del matematógrafo del estudiante y del profesor).

El sistema ACE, al registrar los resultados obtenidos por los estudiantes en cada una de las tareas, proporciona información sobre las veces en que los estudiantes incurrieron en errores por criterio de logro y el porcentaje de activación total, parcial, nula o no activación de cada criterio de logro. Esta información, junto con la información que surge del examen, permite establecer el porcentaje de consecución de cada objetivo de la unidad didáctica. ACE también provee resultados globales sobre el logro de objetivos en la unidad didáctica. Para ello, establecimos y registramos la ponderación de cada criterio de logro en los posibles caminos de aprendizaje de las tareas. En la figura 10, presentamos la ponderación para cada los criterios de logro del objetivo 1, de las tareas Blog (1) y Encuentre la pista (2).

		<b>Criterios de Logro. Ponderación por cada tarea</b>														
Tarea	Caminos ap.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	Suma
1	1 2 3 6 7	20	10	25			25	20								100
2	1 2 4 6 7	15	20		30		15	20								100
2	1 2 5 6 7	15	15			40	15	15								100
Suma puntos según tareas en las que interviene el CL		35	28	25	30	40	40	38								235

<b>Distribución porcentual por criterio de logro en el objetivo</b>															
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	Suma	
15	12	11	13	17	17	16								100	

Figura 10. Ponderación de los criterios de logro del objetivo 1

Al comparar los resultados del logro de objetivos de las dos fuentes de información (activación de criterios de logro en tareas y examen final) se



pueden establecer tres tipos diferentes de debilidades: (a) debilidades comunes (coincidencia en los errores y criterios de logro con activación reducida), (b) debilidades en el examen y no en las tareas y (c) debilidades en las tareas y no en el examen (Gómez y Castro, 2018). Esta información fue de gran importancia para proponer las mejoras al nuevo diseño de la unidad didáctica.

De igual forma, el sistema ACE calcula la contribución de cada tarea a cada expectativa de aprendizaje de nivel superior. Para ello, establecimos la contribución de los criterios de logro de cada tarea a esas expectativas. El sistema ACE también informa sobre el desarrollo de cada capacidad matemática fundamental en cada proceso matemático para cada estudiante y para todos los estudiantes.

En la dimensión afectiva, previmos la contribución de los criterios de logro de las tareas a las expectativas de tipo afectivo. Con base en estos datos, el sistema calcula el promedio del desarrollo de cada expectativa de tipo afectivo para las tareas del objetivo y las traduce a los niveles bajo, medio y alto. El sistema ACE también produce información sobre el desarrollo de los factores que afectan la motivación con base en la información proporcionada por el matematógrafo del diario del profesor y del estudiante. El sistema ACE promedia los valores de cada tarea y proporciona la impresión global por objetivo sobre la motivación en términos de los niveles bajo, medio, alto y muy alto.

#### 4. Descripción de la implementación

Implementamos la unidad didáctica con un grupo de 29 estudiantes de grado sexto en ocho sesiones de clase de 120 minutos. En las dos primeras sesiones, implementamos la evaluación diagnóstica y realizamos su realimentación para superar las dificultades que detectamos. En las sesiones tercera a séptima, implementamos las tareas de aprendizaje, presentamos a los estudiantes los grafos de los objetivos (sesión 3 y 6) y la forma de diligenciar el diario del estudiante. Al finalizar cada tarea, realizamos una puesta en común para que los estudiantes expusieran sus dudas, dificultades y aciertos durante el desarrollo de la tarea. En las dos últimas sesiones, realizamos el examen final y su realimentación. También explicamos, por medio de un ejemplo de un estudiante hipotético, la manera en que determinaríamos la nota final de la unidad didáctica y solicitamos a los estudiantes completar el formato de nivel de satisfacción.

## 1. Previsiones e implementación

El tema de nuestra unidad didáctica se ajustó al estándar previsto del MEN perteneciente al pensamiento espacial y sistemas geométricos, y relacionado con “conceptos y propiedades de los objetos en el espacio físico y de los conceptos y propiedades del espacio geométrico”. También atendió al marco PISA en la categoría de espacio y forma. Así mismo, como lo corroboran la percepción de estudiantes y profesores, las actividades y sus temáticas fueron cercanas y significativas para los estudiantes.

Las tareas del diseño previo no sufrieron cambios en las metas, contenidos y formulación, con excepción de la tarea Blog. Para esta tarea, tuvimos que formular, durante la implementación, un nuevo numeral en el que solicitamos a los estudiantes rotar figuras por los tres diferentes centros de rotación al hacer uso de herramientas matemáticas como compás y transportador. Decidimos incluir este cambio, porque, durante la realimentación de la tarea diagnóstica, identificamos que los estudiantes incurrieron frecuentemente en errores relacionados con el manejo de estas herramientas. Con esta modificación, buscamos que se activara en un mayor porcentaje la capacidad matemática de uso de herramientas matemáticas y el proceso de emplearlas.

Tuvimos que realizar ajustes en los materiales y recursos de la tarea Encuentre la pista. Decidimos cambiar el uso de las cintas por papel, compás, regla y colores debido a que la forma y tamaño de estas cintas no facilitaban el desarrollo de la tarea y causaban confusión en los estudiantes al trazar las mediatrices. En la tarea Bandera, cambiamos la plantilla física por una electrónica, por lo dispendioso de la elaboración y manejo de la primera. Esta modificación produjo un cambio en la comunicación e interacción entre el profesor y los estudiantes, pues el profesor tuvo que hacer una explicación más detallada del uso de la plantilla electrónica apoyado en el uso del proyector para ilustrar a los estudiantes acerca de las posibilidades que el programa les brindaba para ejecutar las rotaciones. El profesor incluyó ejemplos y posibles resultados.

Realizamos modificaciones en la temporalidad de la tarea diagnóstica, la presentación inicial del tema, la tarea Blog, el diligenciamiento de los diarios de los estudiantes y la preparación para el examen final, debido a los ajustes que realizamos en las tareas de aprendizaje durante la implementación y a situaciones no previstas, como el uso de la red de internet o del software.

Para el agrupamiento, propusimos una dinámica flexible mediante el plan padrino que permite a los estudiantes ser líderes en su grupo o beneficiarse

de un líder positivo, además de contribuirles estrategias de solución variada y enriquecerlos con ellas. Sin embargo, durante la implementación debimos permitir que uno de los estudiantes trabajara de manera individual a partir de la tarea Encuentre la pista. Este estudiante demostró un alto nivel de consecución del logro en la tarea diagnóstica y la tarea Blog, lo que nos llevó a tomar la decisión de que desarrollara sus tareas de manera individual y luego asumiera un papel de monitor dentro del trabajo en el aula. Esto propició que el estudiante se sintiera más motivado y fortaleciera no solo los conceptos, capacidades y procesos matemáticos, sino también su actitud de liderazgo dentro del grupo, al producirse un modo de interacción y comunicación diferente entre estudiantes. Finalmente, debemos mencionar que no hubo cambios en los instrumentos de recolección de información y evaluación dado que funcionaron satisfactoriamente. Presentamos los cambios realizados durante la implementación en el anexo 11.

## **5. Evaluación del diseño y la implementación**

La evaluación del diseño de la unidad didáctica es un procedimiento que le permite al docente no solo medir los alcances de su diseño sino también identificar sus debilidades y fortalezas para reconocer los aspectos que se pueden mejorar y potenciar. En este apartado, presentamos los resultados de la implementación de nuestra unidad didáctica. En primer lugar, exponemos la evaluación del aprendizaje y luego la evaluación de la enseñanza. Obtuvimos esta información del análisis de los resultados que nos proporcionó el sistema ACE.

Presentamos la evaluación del aprendizaje desde dos aspectos: el primero, el análisis de la dimensión cognitiva en el que presentamos el logro de los objetivos y el desarrollo de las expectativas de nivel superior; y, el segundo, el análisis de la dimensión afectiva en el que indicamos el desarrollo de las expectativas de tipo afectivo y de los factores que afectan la motivación.

### **1. Evaluación del aprendizaje: dimensión cognitiva**

En la evaluación de la dimensión cognitiva, analizamos el logro de los objetivos al tener en cuenta la activación de los criterios de logro, tanto en el resultado del examen final como en el desarrollo de las tareas. Luego, analizamos el desarrollo de las capacidades y procesos matemáticos, identificamos, para

cada objetivo, las expectativas de nivel superior más relevantes y establecimos la contribución de las tareas de aprendizaje a estas expectativas. En la tabla 4, presentamos, para cada uno de los objetivos, los resultados obtenidos con respecto a estos dos aspectos (logro de objetivos y expectativas de aprendizaje de nivel superior).

Tabla 4  
*Resumen y comparación de resultados*

Logros o desarrollo	Objetivo 1	Objetivo 2
Logro de los objetivos de aprendizaje		
Activación de criterios de logro	Alta	Alta
Expectativas de aprendizaje de nivel superior: capacidades matemáticas fundamentales		
Desarrollo de EANS por capacidades	Alta	Alta
Expectativas de aprendizaje de nivel superior: procesos matemáticos		
Formular	Alta	Alta
Emplear	Alta	Alta
Interpretar	Alta	Alta

### *1.1. Logro de objetivos*

El logro de objetivos nos permite visualizar los alcances de la unidad didáctica de acuerdo con las previsiones realizadas. A continuación, presentamos este análisis de acuerdo con la información obtenida de la activación de los criterios de logro en el desarrollo de las tareas de aprendizaje, la evaluación del examen final y las limitaciones del aprendizaje.

#### *Criterios de logro*

El objetivo 1 fue el de menor porcentaje de consecución y la tarea Blog la que contribuyó en menor medida al logro de este objetivo (véase anexo 12). Previmos que los criterios de logro CdL 1.3 y 1.6, relacionados con rotar figuras por diferentes centros y hallar el ángulo y sentido de rotación por diferentes centros, serían los de mayor contribución al alcance del logro. Sin embargo, al revisar la información arrojada por el sistema ACE, estos dos criterios de logro fueron los que obtuvieron un menor porcentaje de activación total durante la implementación de la tarea. Los errores en los que los estudiantes incurrieron en mayor medida fueron E10, E14 y E15, y están asociados con que el estudiante mide el ángulo de la rotación sin tener en

cuenta el sentido. La tarea Encuentre la pista fue la que más contribuyó al logro de este objetivo. Esta tarea incluía dos criterios de logro (CdL 1.4 y 1.5) que previmos contribuían de manera importante al objetivo. De ellos el CdL 1.4, halla el centro de rotación usando circunferencias concéntricas, fue el que se activó en menor medida con 10,3%, mientras que el criterio de logro CdL 1.5, que se refiere hallar el centro de rotación por medio de mediatrices, se activó en un 51,72%. Los criterios que más se activaron durante el desarrollo de esta tarea fueron CdL 1.1 (100%), CdL 1.2 (93,1 %) y CdL 1.7 (82,76%). Atribuimos el resultado de los dos primeros criterios a que estaban relacionados con el propósito de la tarea anterior. Aunque la activación de los criterios de logro de las dos tareas de este objetivo fue alta, de acuerdo con la percepción del profesor en la tarea Encuentre la pista, el CdL1.5 obtuvo un nivel de activación medio mientras que en el sistema ACE se obtuvo un porcentaje de activación alto con 48,3%.

El objetivo de aprendizaje 2 obtuvo un nivel de consecución del 88,4%. La tarea Logotipo fue la que menos contribuyó al logro de este objetivo con 85,7 %. Según nuestras previsiones, en esta tarea los criterios de logro que contribuirían en mayor porcentaje a la consecución del logro eran CdL 2.2 y 2.3, que estaban asociados a que los estudiantes rotaran un polígono teniendo en cuenta un ángulo y sentido, y a las características de la rotación. Aunque no fueron los que obtuvieron un menor porcentaje de activación, no contribuyeron en la manera en que lo habíamos previsto. Esto se debió a errores asociados con el manejo del transportador y el uso de la plantilla de forma incorrecta que cambiaron las características de la figura al rotarla. Los criterios relacionados con identificar el movimiento de la rotación y rotar figuras por circunferencias concéntricas fueron los que obtuvieron un mayor porcentaje de activación (CdL2.1 con 92,5% y CdL2.8 con 92,6%).

La tarea Bandera fue la que contribuyó en mayor medida al objetivo 2. De acuerdo con nuestras previsiones, los criterios de logro CdL 2.2, 2.7 y 2.8 eran los que contribuían en mayor medida al objetivo. Estos criterios de logro estaban relacionados con rotar polígonos por el vértice, dado un ángulo, con base en las circunferencias concéntricas. Según los resultados de ACE, de los tres criterios de logro, el que menor porcentaje de activación fue el CdL 2.8 con un 14,3%. Este criterio de logro corresponde al camino de aprendizaje que solo unos pocos estudiantes tomaron para resolver la tarea. El criterio de logro que más se activó, en concordancia con nuestras previsiones, fue el CdL 2.2 con un 100%. El CdL 2.7 obtuvo solamente un 60,71% debido al

que los estudiantes tuvieron dificultades en el manejo del transportador para medir los ángulos de rotación (véanse anexos 13 y 14).

### *Examen final*

Al comparar los resultados de las tareas con los del examen final en cada uno de los objetivos, observamos que, en el objetivo 1, 6 de los 29 estudiantes obtuvieron un mayor porcentaje en el examen final. Esto muestra que las ayudas y el proceso de realimentación funcionaron en su momento. La diferencia con los estudiantes cuyos porcentajes bajaron en comparación con las tareas se explica porque todas las actividades fueron desarrolladas con material manipulable y software, mientras que, en el examen, los estudiantes pudieron emplear solamente el compás y el transportador. La contribución de las tareas del objetivo 1 al logro fue de 88,1% y del examen final del 78,9%. Esto se debió a que el contenido del examen final se diferenciaba del de las tareas en su contexto. Esto llevó al estudiante a tener a su disposición un menor número de materiales y recursos que le permitieran relacionar el concepto de rotación con la solución del problema. En el objetivo 1, 6 de los estudiantes lograron un 100% en las tareas y ninguno obtuvo un 100% en el examen.

En el objetivo 2, observamos que aproximadamente la mitad del curso consiguió porcentajes más bajos en el examen que en las tareas, dado que, en el examen, se exigió un nivel mayor de interpretación. La contribución de las tareas al logro de este objetivo fue de 88,4% y del examen 82%. Solamente 10 estudiantes obtuvieron el 100% en el examen, incluido el estudiante con menor porcentaje en las tareas (66%). La contribución de un estudiante en el objetivo 2 a las expectativas en el examen final fue del 20%. Esto se debió a que no contestó los puntos del examen que se referían a este objetivo, aunque su trabajo durante las tareas había sido de nivel alto.

### *Limitaciones de aprendizaje*

Los porcentajes más altos de errores se presentaron en la tarea Logotipo (59,3%), cuando los estudiantes debían graficar un punto y su imagen, y encontrar el ángulo de rotación (CdL 2.5 y 2.6). El objetivo 2 fue en el que el mayor número de estudiantes incurrió en errores, con 7.6%. El mayor promedio de errores tuvo lugar cuando el estudiante mide el ángulo e identifica el sentido de rotación. Al hacerlo, el estudiante incurre en los errores relacionados con desconocer la simbología del punto y su imagen, y las propiedades de la rotación (E16-26-30). El 94,7% de los estudiantes no incurrió en errores en el objetivo 1 y el 92,4% en el objetivo 2. Aunque la diferencia es pequeña

entre un objetivo y otro, el hecho de que el porcentaje de estudiantes que no incurrieron en errores en el objetivo 2 sea menor que en el 1 cuando el desempeño obtenido en el 2 fue mayor que en el 1, nos indica que hay un exceso de confianza por parte de los estudiantes, que conocían el error, pero lo pasaron por alto. Esto implica que debemos hacer un mayor énfasis en la realimentación. Una vez detectados los errores por parte del profesor y aplicadas las ayudas correspondientes, los errores fueron superados en el momento de las tareas, pero volvieron a aparecer en el examen final.

En las tareas del objetivo 1, ningún estudiante presentó activación nula. El 22,4% de los estudiantes incurrió en el error de desconocer el significado de la simbología del punto y su imagen. En el objetivo 2, los errores relacionados con el manejo del transportador y las propiedades de la rotación ocasionaron una activación parcial del criterio de logro en el que los estudiantes miden el ángulo de rotación (CdL2.6). Podemos ver que el criterio de logro es el mismo en los dos objetivos, pero cada tarea apunta a metas diferentes por lo que los errores en que incurren son diferentes. Los errores que se manifestaron con mayor frecuencia corresponden a las dificultades relacionadas con la ausencia de conocimientos previos y al uso inadecuado de los instrumentos. Desde el inicio del análisis de la unidad didáctica, previmos estas dificultades y las corroboramos durante la implementación. Recogimos esta información durante algunas pruebas piloto que realizamos antes de la implementación.

### *1.2. Desarrollo de las expectativas de aprendizaje de nivel superior*

En el apartado anterior, describimos la manera en que los criterios de logro contribuyeron al alcance de cada uno de los objetivos. A continuación, describimos la contribución de la activación de los criterios de logro al desarrollo de las capacidades y procesos matemáticos que previmos para cada uno de los dos objetivos y el impacto que tuvieron en la consecución de la unidad didáctica.

Para el objetivo 1, buscábamos que el estudiante solucionara situaciones problema al identificar y representar el movimiento de la rotación. Las expectativas de aprendizaje de nivel superior que habíamos previsto que se desarrollarían en mayor medida eran la representación y la utilización de herramientas matemáticas, y las de menor desarrollo serían matematización y utilización de un lenguaje simbólico, formal y técnico. Según los resultados del sistema ACE, las capacidades matemáticas que se desarrollaron en mayor medida fueron representación (91,7%) y razonamiento y argumentación (88,8%). Las que se desarrollaron en menor medida fueron la utilización

de herramientas matemáticas (60,1 %) y la matematización (67,5%). Cabe anotar que la utilización de herramientas matemáticas y el razonamiento y argumentación se desarrollaron menos de lo previsto. En cuanto a los procesos matemáticos, los que mayor nivel de desarrollo tuvieron fueron formular (78,9%) e interpretar (92,7%). La tarea Blog contribuyó en mayor medida al desarrollo de las capacidades matemáticas fundamentales. El CdL1.3 y el CdL1.7 atados al proceso de emplear, obtuvieron igualmente un importante nivel de activación (70,4%). Desde el inicio del desarrollo de nuestra unidad didáctica, pudimos ver que nuestras tareas tendrían un elevado componente de representación y uso de herramientas matemáticas y que los estudiantes iban a tener que atender cuidadosamente a las instrucciones, así como justificar sus respuestas. En la figura 11, ilustramos este análisis.

Diseño est. RP %	Matematización %	Comunicación %	Raz. y Arg. %	Uso leng. y op. %	Representación %	Herramientas matemat. %	Promedio global
87,9	67,5	86,8	88,8	86,7	91,7	60,1	ALTA

Cont. CL a cada proceso		
	Númérico	Etiqueta
Formular	78,9	ALTA
Emplear	76,4	ALTA
Interpretar	92,7	ALTA

*Figura 11.* Contribución de las tareas del objetivo 1 a las expectativas de aprendizaje de nivel superior

Para el objetivo 2, buscábamos que el estudiante visualizara, representara y argumentara los resultados obtenidos al dar solución a situaciones problema en diferentes contextos al girar figuras geométricas. Las capacidades matemáticas fundamentales que habíamos previsto que tendrían una mayor contribución eran la utilización de herramientas matemáticas, la comunicación, el razonamiento y argumentación, y las que menos contribución tendrían serían la matematización y el diseño de estrategias para resolver problemas. Los resultados nos muestran que se desarrollaron en mayor medida las capacidades matemáticas de utilización de herramientas matemáticas (83,9%) y la comunicación (83,1%). Las capacidades que en menor medida se desarrollaron fueron la representación (75,6%) y el diseño de estrategias para resolver problemas (76,3%). Emplear fue el proceso matemático con menor nivel de desarrollo (77,4%) y el de mayor nivel fue formular (83,4%). La menor contribución al proceso de emplear está en la tarea Logotipo en el criterio de logro CdL2.6, pues los estudiantes se confundieron con la escala del transportador y el lado



inicial. El proceso con el mayor desarrollo fue interpretar con un 78,5%. Por lo anterior, las dos tareas de este objetivo presentan una gran similitud, porque ambas promueven las posibilidades artísticas y funcionales del tema. Esto nos permitió concluir que, por el diseño de las tareas de este objetivo, se brinda la oportunidad de expresión, comunicación y justificación de las propuestas que cada estudiante presenta y le permite conectar el aspecto artístico del tema con el matemático. En la figura 12, ilustramos el análisis anterior.

Diseño est. RP	Matematización	Comunicación	Raz.Y Arg.	Uso leng. y op.	Representación	Herramientas matem.	Promedio global
%	%	%	%	%	%	%	
76,3	80,4	83,1	77,7	80,5	75,6	83,9	ALTA

Cont. CL a cada proceso		
	Numérico	Etiqueta
Formular	83,4	ALTA
Emplear	77,4	ALTA
Interpretar	78,5	ALTA

Figura 12. Contribución de las tares del objetivo 2 a las expectativas de aprendizaje de nivel superior

En general, las tareas que menor contribución tuvieron al desarrollo de las expectativas de nivel superior fueron las primeras de cada objetivo. Consideramos que esta situación se debió a la secuencialidad en el diseño de nuestra unidad didáctica que pretendía ir activando capacidades y superando dificultades a medida que se avanzaba en el desarrollo de la unidad didáctica. También podemos concluir que las capacidades matemáticas que se activan en cada objetivo dependen de la meta que queremos alcanzar con cada uno, pues, en el objetivo 1, los estudiantes emplean los elementos de la rotación para dar solución a un problema usando herramientas matemáticas y, en el objetivo 2, usan los conocimientos adquiridos en el objetivo 1 para girar figuras y dar solución a un problema.

## 2. Evaluación de la dimensión afectiva

En nuestra unidad didáctica sobre rotación, diseñamos cuatro expectativas de tipo afectivo. La expectativa EA3, desarrollar hábitos de exactitud y pulcritud en la elaboración de las diferentes representaciones de la rotación y en el cálculo del centro de rotación y ángulo de giro, fue la de menor consecución durante la implementación. El objetivo 1 fue el que menos contribuyó a esta expectativa. De las tareas de este objetivo, la tarea Blog fue la que menos aportó,

puesto que el estudiante, durante su desarrollo, permaneció interactuando con el software. Esto no permitió el desarrollo de capacidades motrices en el manejo de las herramientas matemáticas. Durante el tiempo del que dispusieron para realizar lo propuesto en el punto 2 de la guía del estudiante, en el que trabajaron con herramientas matemáticas (transportador, compás, regla), pudimos observar que los estudiantes presentaban dificultades en la manipulación y utilización adecuada de estas herramientas, lo que llevó a que el criterio de logro CdL3 (rota polígonos por diferentes centros de rotación) se activara en menor medida con un menor aporte a la expectativa EA3. El nivel de consecución de las cuatro expectativas afectivas diseñadas para nuestra unidad didáctica fue el mismo en el objetivo 2. Podemos afirmar que esto se debió a que, por ser el objetivo final de nuestra unidad didáctica, los estudiantes habían venido desarrollando estas expectativas durante las tareas anteriores.

Al analizar la percepción de las expectativas afectivas por el profesor y la contribución de los criterios de logro a estas mismas para cada uno de los objetivos en el sistema ACE, no observamos diferencias significativas. La expectativa que más se destacó, con muy poca diferencia, fue la relacionada con predisponer al estudiante a reflexionar sobre la viabilidad de la solución de un problema por medio de la rotación. Los criterios de logro que más contribuyeron a la activación de las expectativas afectivas fueron los relacionados con el eje central de nuestra unidad didáctica (CdL 3, 4, 5, 6 y 7), y los que de menor contribución fueron los relacionados con los conocimientos previos (CdL 1 y 2). En la tabla 5, presentamos estos resultados.

Tabla 5  
*Resumen de las expectativas de tipo afectivo y los factores que influyen en la motivación*

	Factores que influyen en la motivación					
	Sabía por qué resolver la tarea	Sabía cómo hacerlo	Tema interesante	Detecté mis errores	Fue un reto motivante	Pude interactuar con los demás
Estudiantes	Muy Alta	Muy Alta	Muy Alta	Muy Alta	Alta	Muy Alta
Profesor	Muy Alta	Muy Alta	Alta	Muy Alta	Alta	Muy Alta
Expectativas de tipo afectivo						
	EA1	EA2	EA3	EA4		
Criterios de logro	Alta	Alta	Alta	Alta		
Percepción del profesor	Alta	Alta	Alta	Alta		

Los factores que afectan la motivación se pueden valorar haciendo uso de la información contenida en el matematógrafo. En el objetivo 1, los estudiantes percibieron, con un nivel muy alto, que el tema era interesante, mientras que el profesor percibió que al estudiante le causaba solo algo de interés. De acuerdo con las apreciaciones escritas por los estudiantes en sus diarios, las ayudas implementadas y la formulación de las tareas hizo que el interés por el tema fuera mayor. En el objetivo 2, el profesor dio una valoración de alto a la detección de errores; el estudiante, en cambio, registró un nivel muy alto. El profesor detectó que algunos estudiantes estaban incurriendo en errores a pesar de las ayudas, mientras que el estudiante no reconoció esta situación. Además, el hecho de que los estudiantes trabajaran en grupo, hizo que vieran la tarea como un reto y supieran para qué, de qué manera o cómo emplear sus conocimientos para dar solución a la situación. Esto ayudó a que los estudiantes lograsen un nivel alto en el alcance del logro, porque, al haber una alta participación en las plenarias y al tener un criterio matemático en el momento de realizar la coevaluación, progresaron en el conocimiento de los conceptos que se pretendía enseñar. Por otra parte, la tarea Blog fue la que menos contribuyó a la motivación, a pesar de que obtuvo un nivel muy alto. Tres de los seis aspectos que influyen en la motivación fueron valorados por los estudiantes solo en alto, debido a que, al solucionar la tarea, hubo problemas con la red de Internet y fallos imprevistos en el funcionamiento de algunos computadores. Desde la perspectiva del profesor, la tarea que menos contribuyó fue Encuentre la pista, debido a que involucraba en menor medida el uso de herramientas matemáticas. Presentamos estos resultados en el anexo 12.

### **3. Análisis de la enseñanza**

A continuación, exponemos la evaluación de la enseñanza, al presentar las debilidades y fortalezas de nuestro diseño y los aspectos que se pueden potenciar o mejorar.

#### ***3.1. Debilidades y fortalezas***

Al analizar los buenos resultados obtenidos al implementar nuestra unidad didáctica, podemos decir, en términos generales, que la cantidad de las fortalezas superó ampliamente a la cantidad de debilidades. Entre las primeras, encontramos que la forma en que se propuso la secuencia de tareas motivó el interés de los estudiantes en el tema, logró que realizaran cuestionamientos entre ellos o al profesor, les permitió argumentar sus respuestas al hacer uso de

un lenguaje matemático adecuado, y aumentó la confianza en el momento de presentar los resultados de sus experiencias. Otra fortaleza fue que los estudiantes se apropiaron de las actividades al participar activamente. Esto pone en evidencia que el contexto que se propuso fue cercano y motivante. La realidad en el aula estuvo en línea con valores como el respeto, la solidaridad y la autoestima propuestos en el Proyecto Educativo Institucional (PEI) de la institución, como pudimos constatar al revisar los resultados obtenidos en los factores que influyen en la motivación. En particular, en la variable 6 (pude interactuar con los demás), esto se convierte en otra fortaleza.

De igual forma, una de las fortalezas más importantes de la unidad didáctica fue lograr que las expectativas de aprendizaje de nivel superior se alcanzaran satisfactoriamente al enfrentar a los estudiantes con la necesidad de encontrar la solución a diferentes situaciones problema en las que debían identificar el movimiento de rotación, sus elementos y representación. En todo caso, fue en este último aspecto en el que se presentó la debilidad más evidente de la unidad didáctica: el uso correcto de herramientas como el transportador y el compás.

Otra fortaleza se refiere a que los estudiantes activaron el proceso de formular cuando identificaron el movimiento de rotación y lo emplearon en la solución de situaciones contextualizadas al traducir ejercicios, efectuados con material concreto, al lenguaje matemático, a través de Cabri o GeoGebra. Los estudiantes entendieron instrucciones y contextos, y justificaron suficientemente las soluciones encontradas, los procedimientos usados y la aplicación de los conceptos. Esto implicó que interpretar fuera el proceso con mayor desarrollo.

Por otra parte, la comunicación y el razonamiento y argumentación se lograron activar satisfactoriamente en el momento de interpretar los enunciados y cuando, al hacer preguntas para verificar la comprensión del tema, los estudiantes explicaron y justificaron correctamente el uso de la rotación. La representación y uso de herramientas matemáticas se hizo evidente cuando los estudiantes realizaron rotaciones de polígonos, diseñaron el logotipo y cubrieron la superficie.

Las expectativas de tipo afectivo se alcanzaron, pues los estudiantes demostraron seguridad al argumentar sus procedimientos y la viabilidad de una solución. Promovimos la creación de representaciones artísticas, aunque hay espacio para mejorar los hábitos de pulcritud y exactitud.

Otra fortaleza es que los diarios del estudiante y del profesor resultaron ser efectivos y ágiles en su aplicación y diligenciamiento. Los profesores

obtuvimos en ellos el espacio y los componentes necesarios para el registro de la información relevante de lo que acontecía en el desarrollo de las tareas.

A continuación, presentamos las debilidades y fortalezas relacionadas con el desarrollo de los objetivos, la contribución a las expectativas de nivel superior, de tipo afectivo y a los aspectos que influyen en la motivación.

#### *Debilidades y las fortalezas del desarrollo de los objetivos*

Una de las debilidades que encontramos en nuestra unidad didáctica fue que nos faltó diseñar criterios de logro más específicos relacionados con los dos caminos de aprendizaje de la tarea Encuentre la pista. Además, las actividades propuestas en esta tarea no estuvieron muy contextualizadas y no permitieron que el estudiante las relacionara para poder dar una solución adecuada. Una de las fortalezas de la unidad didáctica fue trabajar el movimiento de rotación por el vértice, ya que permitió que el estudiante identificara las características de la rotación.

#### *Debilidades y fortalezas de las expectativas de nivel superior*

Pudimos evidenciar que una de las debilidades fue la formulación de algunos puntos de la tarea Encuentre la pista que no permitió que se activaran algunas de las capacidades matemáticas fundamentales previstas. El diseño de las tareas del objetivo 1 tampoco contribuyó al desarrollo del proceso de formular. Dentro de las fortalezas tenemos que, aunque no teníamos previsto que el proceso matemático de interpretar se activara, obtuvo un nivel superior. El nivel alto de consecución de las capacidades matemáticas fundamentales permitió que la unidad didáctica consiguiera un resultado satisfactorio. El diseño de las tareas produjo que la capacidad de matematizar se activara, aunque no estaba previsto. El trabajo cooperativo contribuyó a una mayor activación de la capacidad de comunicación.

#### *Debilidades y fortalezas de las expectativas de tipo afectivo*

La principal fortaleza en cuanto a las expectativas de tipo afectivo fue que se logró predisponer al estudiante a reflexionar sobre la viabilidad de la solución de un problema por medio del empleo del movimiento de rotación. En cuanto a las debilidades, la temporalidad en la tarea Blog y la formulación de las preguntas del cuestionario propuesto en la tarea Encuentre la pista no permitieron que el estudiante se dispusiera a reflexionar sobre la solución del problema. La falta de motricidad de algunos estudiantes en el manejo del compás y el transportador no permitió que se desarrollaran adecuadamente hábitos de exactitud y pulcritud en el desarrollo de las diferentes tareas.

### *Debilidades y fortalezas de los aspectos que influyen en la motivación*

Dentro de las fortalezas que ayudaron a que los aspectos que contribuyen a la motivación alcanzaran buenos resultados se encuentran las formas de interacción y agrupamientos que se emplearon para el desarrollo de las tareas. Mientras que algunas debilidades radicarón en el uso poco novedoso del software debido a que los estudiantes ya venían usándolo desde años anteriores. La formulación de la tarea Logotipo no permitió que los estudiantes identificaran los errores en los que estaban incurriendo.

### *3.2. Ajustes de mejora*

Luego de analizar los resultados, podemos concluir que el diseño de nuestra unidad didáctica logró en gran medida las expectativas que nos habíamos propuesto. Logramos que los estudiantes se apropiaran de los conceptos gracias a la contextualización y secuencialidad del diseño y las ayudas les permitieron superar las dificultades previstas o detectadas durante la implementación. Por esta razón, nuestros ajustes y mejoras se centran en capitalizar los aspectos positivos, en el mejoramiento de los aspectos que pudieron haber funcionado mejor durante la implementación y en el impacto que tuvieron en la efectividad de las tareas para el logro de los objetivos. Es importante anotar que, a juzgar por los muy altos niveles de desempeño, creemos haber detectado un nivel de complejidad relativamente bajo, que pensamos se debe al alto nivel de manejo que los estudiantes tienen de los conocimientos previos. Esto nos lleva a proyectar ajustes en la formulación de las actividades que busquen un nivel más alto de complejidad en las tareas de aprendizaje. Para ello, debemos tener en cuenta el contexto social y académico de los estudiantes al igual que la teoría de aprendizaje por adaptación que manejan los estudiantes de la institución. Un aspecto que tenemos que mejorar es el tiempo planificado para algunas de las tareas, puesto que algunas de las actividades requieren de mayor intervención del profesor.

La información registrada por estudiantes y profesores en los semáforos y el matematógrafo, la percepción del profesor y los resultados consolidados nos indican que las expectativas de tipo afectivo, los aspectos que afectan la motivación y los instrumentos de recolección de información funcionaron adecuadamente y cumplieron las expectativas previstas; por lo tanto no realizaremos cambios en ellos.

*Expectativas y limitaciones de aprendizaje*

No realizamos cambios al diseño de nuestros dos objetivos debido a que satisfacen el alcance que queremos dar a nuestra unidad. Agregamos dos nuevos criterios de logro para la tarea Encuentre la pista relacionados con trazar circunferencias concéntricas y asociarlas al movimiento de la rotación, y con las características del trazo de mediatrices (CdL 2.10 y 2.11). Lo anterior, debido a que el criterio de logro CdL 2.2 original estaba diseñado de forma general y no permitía una aproximación clara al proceso de aprendizaje de los estudiantes. Con este cambio, abrimos al estudiante la posibilidad de evidenciar los dos caminos de aprendizaje y al docente la posibilidad de identificar si el estudiante está manejando los conocimientos básicos para abordar cada uno ellos. En la figura 13 presentamos el grafo del objetivo 1 con estos cambios.

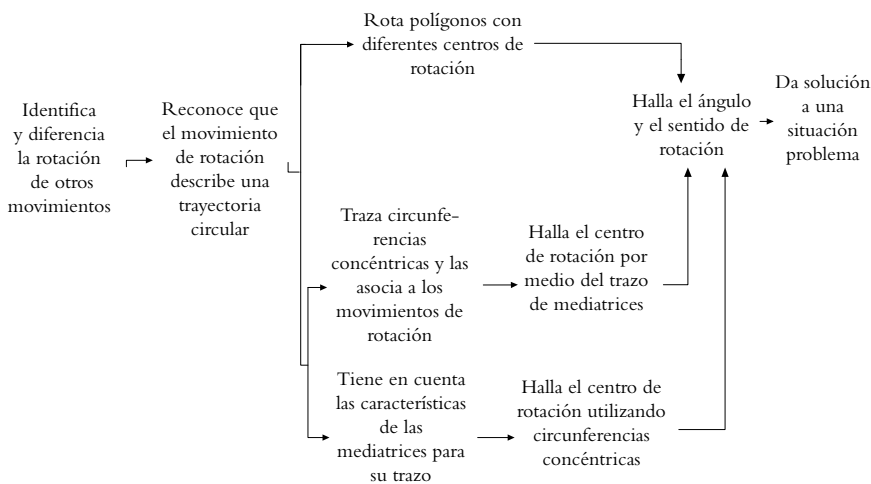


Figura 13. Grafo final de criterios de logro del objetivo 1

*Elementos de las tareas*

Los ajustes se centran en las tareas Blog y Encuentre la pista del objetivo 1. Con respecto a la tarea Blog, los cambios tienen que ver con la formulación, los materiales y recursos y la temporalidad. En cuanto a la formulación, agregamos una nueva sección en la guía del estudiante, en la que el estudiante rota figuras por diferentes centros de rotación. Introdujimos este cambio porque, durante la implementación, nos dimos cuenta de que, al trabajar solo con el software, los estudiantes no incurrierán en errores de medición de ángulos porque no tenían que usar herramientas como el transportador o el compás.

Esto implicó que, en la siguiente tarea, al tener que utilizar las herramientas físicas, incurrieron en múltiples errores. Adicionalmente, elevamos con esta nueva sección el nivel de exigencia de la tarea. Este cambio da la oportunidad al estudiante para manipular materiales concretos, apropiarse mejor de los conceptos asociados a la rotación y sus elementos, e incurrir en algunos errores que pueden convertirse en oportunidades de aprendizaje.

Modificamos la temporalidad con base en la experiencia durante la implementación y en la inclusión de la nueva actividad. De esta manera, creemos que lograremos que los estudiantes aprovechen plenamente las posibilidades de desarrollar los conocimientos y habilidades que buscamos lograr con esta tarea.

Las modificaciones que proponemos para la tarea Encuentre la pista se centran en la formulación y los materiales y recursos. La nueva formulación incluye un contexto más real y cercano a los estudiantes y propone que el estudiante explore la posibilidad de recorrer uno de los dos caminos de aprendizaje y decidir cuál quiere seguir para encontrar la solución. Realizamos un nuevo mapa más claro y evidente y un nuevo juego de preguntas, e incluimos un premio para aumentar la motivación, dado que, durante la implementación, evidenciamos que los estudiantes se vieron confundidos por la formulación de las preguntas y presentaban falencias en la motricidad al utilizar las herramientas que se proponían. Al pedirle al estudiante que describa el proceso matemático que siguió para encontrar la pista empleando un lenguaje adecuado, buscamos contribuir a la capacidad de uso de herramientas y, en mayor medida, al proceso de interpretar. Por otra parte, cambiamos las cintas por el compás y la regla porque las cintas no eran precisas y, por las características del mapa, no se prestaban para ejecutar adecuadamente la tarea. El cambio de materiales permitirá al estudiante encontrar el centro de rotación de una manera más precisa y formal, y contribuirá a que el uso de estas herramientas afiance una habilidad clave que identificamos como necesaria para las tareas posteriores.

## 6. Nuevo diseño de la unidad didáctica

La versión final de nuestra unidad didáctica responde a la identificación de fortalezas por potenciar y debilidades por superar encontradas en el análisis que presentamos en el apartado anterior. El nuevo diseño está basado en el análisis didáctico, la experiencia de la implementación en el aula y la información consolidada en ACE.



## 1. Nueva estructura del diseño

A continuación, concretamos los detalles de este nuevo diseño en cuanto a las tareas, el examen final y la secuencia de tareas. Indicamos los ajustes que realizamos.

### 1.1. Tarea y examen final

Como lo mencionamos en el apartado anterior, los cambios se centraron en las tareas Blog y Encuentre la pista del objetivo 1. Esto incluye los dos nuevos criterios de logro. Con respecto a la tarea Blog, los cambios tienen que ver con la formulación, los materiales y recursos y la temporalidad. Los detalles que no presentaron cambios se encuentran descritos en el apartado de diseño previo de este capítulo. Conservamos el examen final en su versión original porque respondió satisfactoriamente a nuestras expectativas.

### 1.2. Secuencia de tareas

En la nueva estructura del diseño de la unidad didáctica, la secuencia de desarrollo de la unidad didáctica es el siguiente: el profesor realizará una sesión cero de 120 minutos en la que se desarrollará la tarea diagnóstica, junto con una sesión de 120 minutos de realimentación e implementación de ayudas para superar las dificultades detectadas. En la segunda sesión, el profesor presentará un video introductorio al tema, acerca de los fenómenos relacionados con el movimiento de rotación y sus diferencias con los otros movimientos. Igualmente, dará a conocer los objetivos, la metodología y el sistema de evaluación. En las siguientes sesiones, para cada tarea, el profesor dará a conocer los objetivos y sus respectivos criterios de logro en los primeros 10 minutos. Al finalizar el desarrollo de cada tarea, en los últimos 25 minutos, los estudiantes realizarán la valoración de la consecución de los criterios de logro y el diligenciamiento y puesta en común de los diarios del estudiante. En la siguiente sesión, el profesor y el grupo harán una puesta en común en la cual reflexionarán y se realimentarán mutuamente acerca de las dificultades encontradas y lo aprendido, a manera de repaso y preparación para el examen final. Las últimas dos sesiones corresponden a la implementación del examen final y al cierre, que consiste en la realimentación del examen final a través de una plenaria en la que los estudiantes expondrán las alternativas de solución que emplearon. Ellos asignarán la nota a un estudiante hipotético a partir de los criterios de evaluación establecidos en el sistema de evaluación

y dados a conocer al inicio de la unidad didáctica. De la misma forma, ellos diligenciarán el formato de nivel de satisfacción.

En la tabla 6, ilustramos el desarrollo general de la unidad didáctica en la que incluimos el número de sesiones de clases necesarias, el orden en que presentamos las tareas a los estudiantes, el objetivo al que apunta, las metas que persigue cada una de ellas y el tiempo estimado para su desarrollo.

Tabla 6  
*Descripción de la secuencia de tareas*

Sesión	Objetivo	Tarea	Metas	Tiempo
0		Diagnóstica	Determinar las fortalezas y debilidades de los estudiantes en el dominio de los conceptos previos	120
1		Diagnóstica	Realimentación de la tarea diagnóstica, aplicación de ayudas y superación de dificultades	120
2	1	Blog	El estudiante conceptualiza el movimiento de la rotación, lo diferencia de otros movimientos	120
3	1	Blog	Rotar figuras teniendo en cuenta los elementos de la rotación	60
3	1	Encuentre la pista	Hallar el centro de rotación por medio del uso de circunferencias concéntricas o el trazo de mediatrices	60
4	1	Encuentre la pista	El estudiante da solución a una situación problema mediante el cálculo del centro de rotación	120
5	2	Logotipo	El estudiante diferencia el movimiento de la rotación de otros movimientos isométricos y realiza diseños por medio de la rotación	120
6	2	Logotipo	El estudiante identifica el movimiento de rotación y lo usa en la creación de diseños artísticos	120
7	1 y 2	Examen	Verificar el nivel de comprensión del movimiento de rotación, sus elementos, representación y aplicación en la solución de situaciones problema	120
8	1 y 2	Cierre	Realimentación del examen final, definición de la nota de la unidad didáctica, formato de nivel de satisfacción y compartir	120

### *1.3. Tarea ejemplo – Encuentre la pista*

A continuación, ejemplificamos el nuevo diseño de la tarea Encuentre la Pista. Esta fue la tarea de menor activación durante la implementación. La manera en que se formularon las preguntas de esta tarea llevaba al estudiante a tomar mayoritariamente uno solo de los caminos de aprendizaje. El material suministrado para la realización de esta tarea presentó inconsistencias en su uso e interpretación. Esto implicó que existiera más de una alternativa de resultado, razón por la cual se produjeron confusiones en el momento de responder los interrogantes planteados.

A continuación, presentamos la nueva ficha de la tarea Encuentre la pista. Con esta nueva versión, buscamos que el estudiante resuelva situaciones problema por medio del uso del movimiento de la rotación y sus elementos. Presentamos las fichas de las nuevas tareas en el anexo 15.

#### *Requisitos*

Los estudiantes darán solución a la tarea al ubicar sobre el plano los elementos que se indican. Esto requiere que el estudiante relacione conceptos previos como medida de ángulos, trazo de segmentos, definición de rotación y sus elementos. Además, debe conocer el concepto de circunferencias concéntricas y arco.

#### *Metas*

Con la tarea pretendemos contribuir a que los estudiantes aprendan la manera de trazar mediatrices y determinen el punto de intersección de estas como el centro de rotación. De igual forma, esperamos que el estudiante reconozca la relación que existe entre el punto y su imagen y que supere el error de no asociar estos dos puntos. También buscamos que tenga en cuenta la perpendicularidad que debe existir entre la mediatriz y el segmento de recta trazado entre el punto y su imagen.

#### *Formulación*

En el área de matemáticas, hemos diseñado una prueba que si la resuelves obtendrás un premio. La misión, si decides aceptarla es la siguiente.

Bajo estas líneas encontrarás un mapa del patio de un colegio con dos canchas de fútbol diseñadas de tal forma que compartieran la gradería para los espectadores (véase figura A). El ingeniero realizó este diseño la hacer uso del movimiento de la rotación. Los premios están repartidos por todo el lugar. Solo existe uno para ti y una posibilidad de que lo encuentres. La pista que

te permitirá ubicar tu premio se encuentra en el punto clave que le permitió al ingeniero realizar su diseño con éxito. Comparte el genio del ingeniero al encontrar este punto. Para lograrlo existen dos formas: por medio del trazo de mediatrices o por circunferencias concéntricas. Deberás elegir uno de ellos y trabajar con tu compañero empleando el compás o la regla para llevar a cabo cuidadosamente el procedimiento.

Una vez finalizada tu misión, debes superponer a tu mapa la plantilla que te entregará el profesor y encontrar el número que coincide con el punto que encontraste. Si tu punto coincide con uno de estos números, responde las siguientes preguntas. Una vez las respuestas, dirígete al profesor que te indicará dónde encontrar tu premio en algún lugar de las instalaciones del colegio.

1. Si una de las canchas se rotó en sentido positivo, indica en el gráfico, cuál era la cancha original y cuál su imagen.
2. Luego de ubicar el punto donde encontraste la pista, describe los pasos que seguiste para hallarlo.
3. ¿Cuál de los elementos de la rotación representa el punto en que encontraste la pista?
4. Determina la medida del ángulo que utilizó el ingeniero para rotar la cancha de fútbol.
5. Después de observar los videos que te presento tu profesor, explica la relación entre el procedimiento que tú realizaste para hallar el premio de la anterior actividad y el procedimiento que se presenta en el video.

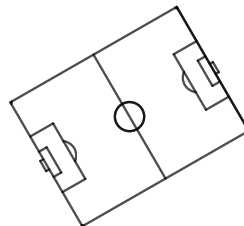
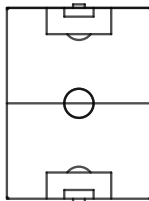


Figura A. Plano 1

La actividad presenta varias opciones de planos para que haya varios ganadores al encontrar la pista o centro de rotación. A continuación, presentamos uno de ellos. La totalidad de los planos se puede consultar en el anexo 15.

#### *Materiales y recursos*

Para la solución de esta tarea emplearemos una serie de materiales y recursos que le permitirán al estudiante relacionar el movimiento de rotación con su entorno. Estos son el video, el mapa de la zona de canchas, el compás, la regla y el transportador.

#### *Agrupamiento*

Se trabajará por parejas con el fin de que los estudiantes puedan intercambiar opiniones y conocimientos. Al finalizar la actividad, los estudiantes deben poner en común con el grupo las estrategias de solución que emplearon para el último punto.

#### *Comunicación e interacción en clase*

Durante el desarrollo de la actividad, esperamos que los estudiantes propongan alternativas de solución, las discutan entre ellos y lleguen a un acuerdo. Para los dos últimos puntos, los estudiantes interactúan en parejas y luego ponen en común su trabajo con el grupo. El profesor indaga acerca de las propuestas de los estudiantes y sus conclusiones, para determinar una solución en común.

#### *Temporalidad*

La tarea se desarrolla en cinco momentos. En el primero, los estudiantes desarrollan la actividad sobre el plano para encontrar la pista que se les solicita (20 minutos). Luego deben contestar las preguntas (25 minutos). En un tercer momento, por medio de un video, asocian la actividad que realizaron en el plano, con el procedimiento de encontrar el centro de rotación al trazar las mediatrices o circunferencias concéntricas (10 minutos). Se toman 15 minutos para explicar la relación entre el video observado y el procedimiento realizado por ellos. Durante el cuarto momento, sobreponen el mapa solucionado con la hoja de los números y revisan el proceso realizado, si no encuentran ninguna coincidencia (20 minutos). En el quinto momento, si han producido una solución correcta, deben ir a buscar el premio de acuerdo con el número que coincida con la pista o centro de rotación (20 minutos). Distribuimos los últimos 50 minutos de la siguiente manera: (a) 30 minutos

para las inquietudes, debate y resolución de inquietudes; (b) 10 minutos para el diligenciamiento del diario del estudiante; (c) 10 minutos para la puesta en común de los resultados del registro de la información en el diario; y (d) 10 minutos para recoger los diarios del estudiante y la tarea.

### Previsiones de la tarea

En la figura 14, presentamos el grafo final de la tarea Encuentre la pista. Este grafo incluye dos nuevos criterios de logro (CdL 2.10 y 2.11) que hacen posible los caminos alternativos relacionados con trazar circunferencias concéntricas y asociarlas al movimiento de la rotación y con las características del trazo de mediatrices. Ya realizamos la descripción detallada de este grafo cuando presentamos el diseño previo.

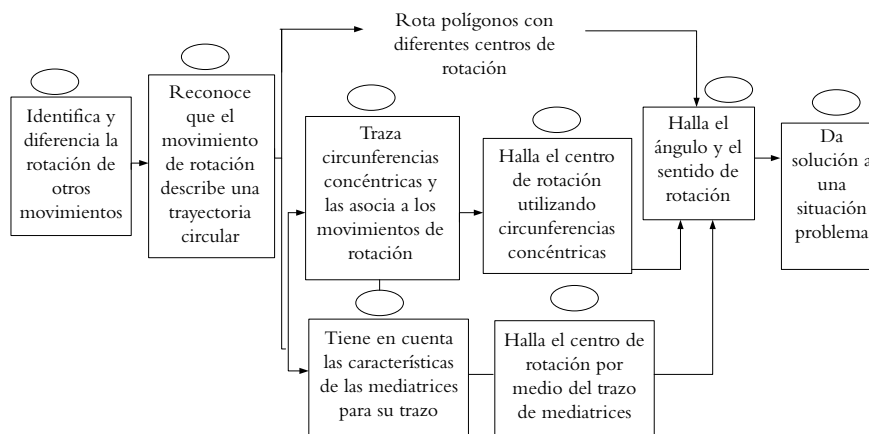


Figura 14. Grafo de la tarea Encuentre la pista

### Tabla de ayudas

En la tabla 7, describimos las ayudas que empleamos para superar los errores en los que los estudiantes pueden incurrir al solucionar la tarea.

Tabla 7

Descripción de las ayudas de la tarea encuentre la pista

E	A	Descripción
26	1	Representación gráfica de los polígonos rotados
6	2	Cintas de color amarillo con medidas exactas
12	3	¿Qué condiciones se deben cumplir para ubicar las cintas rojas?

E	A	Descripción
19	4	Indicación de la forma de ubicar las cintas
		Guía sobre los elementos de la circunferencia
7	5	En una actividad, responda la siguiente pregunta: si realizamos un giro completo, ¿qué figura geométrica se forma?
18	6	Si cambiamos el centro de rotación, identifique qué figura geométrica se forma
20	7	Al mover un determinado giro, ¿qué podemos ver que se forma entre cada vértice y su imagen?

*Nota.* E = error; A = ayuda.

## 2. Instrumentos y procedimientos de recolección y análisis

A continuación, describimos los instrumentos y procedimientos de recolección y análisis de información definitivos. Proporcionamos un ejemplo de diario del estudiante y diario del profesor para la tarea Encuentre la pista del objetivo 1. El formato de satisfacción no sufrió modificaciones.

### 2.1. Diario del estudiante

El diario del estudiante no cambió en su estructura. Realizamos cambios a la parte cognitiva, con respecto al grafo de criterios de logro del objetivo 1. Describimos estos cambios en la explicación del nuevo grafo de criterios de logro más arriba (anexo 16).

### 2.2. Diario del profesor

Realizamos cambios en el aspecto cognitivo del diario del profesor con respecto al grafo de criterios de logro del objetivo 1, por las mismas razones que en el diario del estudiante (anexo 17).

## 3. Sistema de evaluación

El sistema de calificación que definimos para nuestra unidad didáctica propone una evaluación diagnóstica que no incluye ponderación dentro del proceso; una evaluación formativa correspondiente al trabajo en clase en el proceso de enseñanza-aprendizaje que tiene una ponderación del 50 % definida mediante la valoración de cada una de las tareas de aprendizaje; y una evaluación sumativa que determina el nivel de aprendizaje de los objetivos propuestos con una valoración del 30 % determinada mediante la evaluación del examen final.

De igual forma, incluimos una autoevaluación y heteroevaluación, cada una con una valoración del 5%. La valoración de la autoevaluación se obtiene con base en el diligenciamiento de los diarios del estudiante. La heteroevaluación se basa en la valoración general al grupo por parte del docente, a partir de las observaciones registradas en los diarios del profesor. Para la coevaluación, con una ponderación del 10%, los estudiantes valoran el trabajo presentado por sus compañeros. En la tabla 8, ilustramos estos instrumentos.

Tabla 8  
*Sistema de calificaciones*

Componente cognitivo		
Requerimiento	Instrumentos	Ponderación
Evaluación diagnóstica	Tarea diagnóstica	0%
Evaluación formativa	Tareas de Aprendizaje	50%
Evaluación sumativa	Examen final	30%
Componente afectivo		
Requerimientos institucionales	Instrumentos	Ponderación
Autoevaluación	Diario del estudiante	5%
Coevaluación	Promedio de la valoración de los estudiantes a los teselados presentados por los compañeros	10%
Heteroevaluación	Observaciones registradas en el diario del profesor sobre el trabajo de los estudiantes	5%
Total		100%

En una sesión de clase posterior entregamos a cada estudiante su examen final calificado. Luego, en una plenaria, los estudiantes expondrán su solución a cada uno de los puntos. Esto permitirá que cada estudiante compare su trabajo con el de sus compañeros. Para determinar la evaluación total de la unidad didáctica, tomaremos como ejemplo las notas hipotéticas de un estudiante para explicar la forma de obtener la nota definitiva de la unidad didáctica, de acuerdo con los porcentajes establecidos anteriormente. Confrontaremos esta nota con la nota que el profesor ha determinado con anterioridad para cada estudiante.

Para los estudiantes que no alcancen el desempeño básico, entregaremos un plan de comprensión, como lo estipula el sistema de evaluación de la institución educativa. El plan contiene actividades de práctica independiente



tendientes al reconocimiento del movimiento de la rotación y sus elementos, junto con el diseño de teselados para recubrir superficies. Este taller auto-guiado contendrá algunas de las ayudas que se emplearon durante el desarrollo de la unidad didáctica.

## 7. Conclusiones

Este informe contiene los diferentes análisis que realizamos para diseñar, implementar y evaluar una unidad didáctica sobre rotación. Este trabajo aborda la dificultad que hemos constatado en los estudiantes para realizar rotaciones haciendo uso correcto de sus elementos y para diferenciar este movimiento de otros movimientos. En este sentido, nuestra propuesta proporciona herramientas para que sus estudiantes logren superar las dificultades presentadas al usar la rotación cuando abordan tareas que implican esa noción.

Esta unidad didáctica puede permitirle a un docente llevar a cabo una experiencia exitosa de la enseñanza del tema. Esta afirmación se sustenta en el hecho de que nuestra propuesta es el resultado de un trabajo que comenzó, primero, con la producción de un diseño previo y su implementación. Después, diseñamos múltiples instrumentos de recolección, registro y análisis de la información que pusimos en juego durante la implementación del diseño previo. En particular, el sistema ACE nos proporcionó información, proveniente de diversas fuentes, con la que pudimos establecer las debilidades y fortalezas del diseño implementado. Con base en esas debilidades y fortalezas, produjimos un nuevo diseño que aborda las primeras y potencia las segundas. De esta forma, pusimos en evidencia el papel de la evaluación para mejorar la enseñanza y, por consiguiente, para contribuir al aprendizaje de los estudiantes.

Partiendo del hecho de que los resultados después de la implementación de la unidad didáctica evidencian que fue exitosa, los ajustes que realizamos pretenden solventar los detalles que obtuvieron puntuaciones bajas y potenciar aquellos aspectos que funcionaron bien pero que podrían funcionar mejor. Es el caso, por ejemplo, de la tarea Logotipo, en la que el manejo del transportador y el uso de la plantilla de forma incorrecta cambiaron las características de la figura al rotarla. Algo similar sucedió con la tarea Encuentre la pista, para la que nos faltó diseñar criterios de logro más específicos relacionados con sus dos caminos de aprendizaje. Además, las actividades propuestas en esta tarea no estuvieron muy contextualizadas y no permitieron que el estudiante las

relacionara para poder dar una solución adecuada. Abordamos estas deficiencias en el nuevo diseño de la unidad didáctica.

El énfasis que hicimos en la dimensión afectiva, al orientar nuestro tema hacia el aspecto artístico y hacia la contextualización, dio como resultado un alto nivel de acogida y participación que redundaron a su vez en un alto nivel de logro de los objetivos, como lo mostraron los resultados de la evaluación del diseño y la implementación. No obstante, y con motivo de estos resultados, incluimos algunos ajustes para elevar el nivel de dificultad de las tareas. Para ello, incluimos puntos adicionales que, sumados a la flexibilidad y potencial que ofrece el diseño para aumentarlo todavía más, nos permiten pensar que el profesor que la implemente podrá contribuir al logro de objetivos de aprendizaje relevantes para sus estudiantes en este tema.

Descubrimos que hay muchas preconcepciones que tenemos que desechar y que debemos integrar los aportes que hacen los estudiantes. Es el caso, por ejemplo, de nuestra previsión con respecto a las herramientas tecnológicas que demostraron no ser tan novedosas ni productivas en términos de resultados medibles, mientras que las herramientas manipulables como el transportador y el compás resultaron ser más enriquecedoras en su contribución a las expectativas de aprendizaje.

Este estudio deja huellas en nuestro quehacer como profesores. Uno de sus principales aportes a nuestra práctica docente es la conciencia permanente de los múltiples aspectos que rodean la enseñanza y el aprendizaje de un tema. Entre ellos, mencionamos la necesidad de contextualizar las temáticas; la presencia de procesos matemáticos y capacidades matemáticas fundamentales que interactúan y las atraviesan; y la ubicación de un tema dentro de una estructura y la previsión de capacidades, errores y caminos de aprendizaje. Pudimos constatar, y la información que proporcionó el sistema ACE lo corrobora, un ejemplo claro de la diferencia que hace la contextualización en la motivación y los resultados que obtuvimos al subrayar el aspecto artístico de nuestro tema matemático. Con la creación de representaciones artísticas, logramos acercar el tema a los estudiantes y brindarles la posibilidad de expresarse y comunicar emociones, pensamientos e ideas. Esto les generó exigencia con la pulcritud, sentimientos de confianza en ellos mismos y una elevada autoestima, lo que, a su vez, permitió que aumentaran las posibilidades del empleo correcto y efectivo de las herramientas y habilidades requeridas para ejecutar el movimiento de rotación.

## 8. Referencias

- Cañadas, M. C., Gómez, P. y Pinzón, A. (2018). Análisis de contenido. En P. Gómez (Ed.), *Formación de profesores de matemáticas y práctica de aula: conceptos y técnicas curriculares* (pp. 53-112). Bogotá: Universidad de los Andes.
- Ministerio de Educación Nacional (MEN). (1998). *Lineamientos curriculares en matemáticas*. Bogotá: Autor.
- Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2006). *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas*. Bogotá: Autor.
- Gómez, P., Mora, M. F. y Velasco, C. (2018). Análisis de instrucción. En P. Gómez (Ed.), *Formación de profesores de matemáticas y práctica de aula: conceptos y técnicas curriculares* (pp. 197-268). Bogotá: Universidad de los Andes.
- Gómez, P. y Castro, P. (2018). Evaluación de la planificación y la implementación. En P. Gómez (Ed.), *Formación de profesores de matemáticas y práctica de aula: conceptos y técnicas curriculares* (pp. 371-411). Bogotá: Universidad de los Andes.
- González, M. J. y Gómez, P. (2018). Análisis cognitivo. En P. Gómez (Ed.), *Formación de profesores de matemáticas y práctica de aula: conceptos y técnicas curriculares* (pp. 113-196). Bogotá: Universidad de los Andes.

## 9. Anexos

Los siguientes son los anexos que acompañan este informe. Se pueden consultar en <http://funes.uniandes.edu.co/8701/>.

Anexo 1. Listado de conocimiento previos

Presentamos el listado de conocimientos previos.

Anexo 2. Listado de capacidades y dificultades y errores

Listados de capacidades y dificultades y errores para nuestra unidad didáctica del tema rotación.

Anexo 3. Características de los objetivos

Caracterización detallada de cada uno de los objetivos que conforman nuestra unidad didáctica

Anexo 4. Expectativas de tipo afectivo y factores que afectan la motivación

Tabla de las expectativas de tipo afectivo y su descripción.

Anexo 5. Ficha de tareas que conforman el diseño previo.

Descripción de las fichas de las tareas que conforman el diseño previo y su contribución a las expectativas. Presentación de las tareas de aprendizaje.

**Anexo 6. Tarea diagnóstica**

Presentamos la ficha de la tarea diagnóstica y su relación con los conocimientos previos.

**Anexo 7. Diario del estudiante del diseño previo**

Formato del diario del estudiante.

**Anexo 8. Diario del profesor del diseño previo**

Formato del diario del profesor.

**Anexo 9. Examen final y rúbrica**

Descripción del examen final. Presentación del examen final, la rúbrica y el sistema de evaluación.

**Anexo 10. Formato de encuesta de satisfacción**

Presentamos el formato de la encuesta de satisfacción.

**Anexo 11. Ficha de tareas de la implementación**

Fichas de tareas de aprendizaje desarrolladas durante la implementación de la unidad didáctica.

**Anexo 12. Evaluación del alcance del logro. Resultados que presenta el sistema ACE**

Tabla de resultados que presenta el sistema ACE en cuanto a la evaluación del alcance del logro.

**Anexo 13. Evaluación del objetivo 1. Resultados sistema ACE**

Tabla de resultados que presenta el sistema ACE en cuanto a la evaluación del objetivo 1.

**Anexo 14. Evaluación del objetivo 2. Resultados sistema ACE**

Tabla de resultados que presenta el sistema ACE en cuanto a la evaluación del objetivo 2.

**Anexo 15. Ficha de tareas del nuevo diseño**

Presentamos la ficha de tareas del nuevo diseño.

**Anexo 16. Diarios del estudiante. Nuevo diseño**

Nuevo diseño del diarios del estudiante.

**Anexo 17. Diarios del profesor. Nuevo diseño**

Nuevo diseño del diarios del profesor.