Proyecto de Grado en Matemáticas

Generalizaciones del principio Mín-Máx

Alejandro Hernández A.

Directora:
PhD. Monika A. Winklmeier

Índice

1. Introducción **3**

2. Preliminares **5**
2.1. Análisis Funcional y Teoría de Operadores 5
2.2. Principio Variacional Clásico 9
2.3. Operadores de Dirac y de Schrödinger 10

3. Generalizaciones del Principio Variacional **11**
3.1. Teorema Generalizado para Operadores Acotados 11
3.2. Teorema Generalizado para Operadores No Acotados 13

4. Aplicaciones **16**
4.1. Aplicación a Brechas Espectrales 16
4.2. Aplicación a Operadores de Dirac 20
4.3. Aplicación al Operador de Schrödinger, Pincipio Mín-Máx de Talman, Datta y Deviah 21

5. Conclusiones **28**

1. Introducción

En física, especialmente en Mecánica Cuántica, los operadores autoadjuntos son de gran importancia puesto que respresentan los observables de un sistema físico. En particular, es interesante estudiar el espectro de dichos observables en tanto que sus autovalores son interpretados como las energías del sistema y, en últimas, caracterizan los posibles estados en que podemos encontrar el sistema que estemos estudiando al momento de realizar mediciones sobre el mismo.

En general, no es una tarea fácil calcular los autovalores de un operador lineal de forma directa. Sin embargo, si el operador en cuestión es semiacotado, como por ejemplo el operador de Schrödinger, el principio Mín-Máx o principio variacional clásico es una herramienta muy versátil que puede ser aplicado para obtener información acerca de la existencia de autovalores así como estimativos de los mismos. El principio varicional cásico establece lo siguiente:

Teorema (Principio variacional clásico)**.** *Sea $\mathfrak{H}$ un espacio de Hilbert y sea $A : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ un operador semiacotado por abajo y autoadjunto con $\lambda_e := \min(\sigma_{ess}(A))$. Entonces los autovalores por debajo del espectro esencial forman una sucesión a lo sumo contable $\mu_1 \leq \mu_2 \leq ...$ cuyo único punto de acumulación posible es λ_e. Los autovalores por debajo del espectro esencial están dados por*

$$\mu_n = \inf_{\substack{M \subset X, \\ \dim(M)=n}} \sup_{\substack{x \in M, \\ \|x\|=1}} \langle Ax, x \rangle. \tag{1.1}$$

Si bien este teorema provee una caracterización sencilla de los autovalores de un operador A, es importante resaltar que dicho principio solo da información sobre los autovalores por debajo del espectro esencial. En particular, este teorema no puede ser utilizado para estudiar los autovalores en brechas del espectro esencial. Esta situación es típica para operadores de derivación que no son semiacotados por abajo, particularmente en el caso de operadores de Dirac. Dado lo anterior, es deseable tener una caracterización similar a (1.1) para poder calcular o estimar, bajo ciertas hipótesis, los autovalores de dichos operadores en brechas de su espectro esencial. Una caracterización así ya fue desarrollada por Griesemer, Lewis y Siedentop en [GS99, GLS99], más aún, los resultados hallados por estos autores aplican justamente para operadores no semiacotados que tengan brechas (gaps) en su espectro esencial. De ahí que el objetivo principal de este trabajo sea estudiar detallamente los artículos de estos autores, concretamente, se estudiarán sus resultados acerca del operador de Dirac. Este operador es de gran interés dado que aparece recurrentemente en Mecánica Cuántica y Física de Partículas.

De forma más específica, el propósito de este proyecto de grado es estudiar una generalización del principio variacional cásico para operadores que no son semiacotados y que poseen brechas en su espectro. Lo anterior con el fin de analizar sus posibles aplicaciones a Física, en particular a operadores de Dirac, los cuales aparecen naturalmente en Mecánica Cuántica y Física de Partículas.

La organización de este trabajo es la siguiente: en la Sección 2 se presentan algunos aspectos generales de Teoría de Operadores y se enuncia el principio variacional clásico de una forma rigurosa. En la Sección 3, se estudia y desarrolla la prueba de la generalización del principio Mín-Máx propuesta por Griesemer y Siedentop en [GS99]. En la Sección 4 se estudian diversas aplicaciones de dicha generalización, específicamente, a operadores de Dirac con brechas espectrales. En la Sección 4 se estudia otra versión de la generalización del principio Mín-Máx desarrollada por Griesemer y Siedentop, pero inicialmente propuesta por Talman, Datta y Deviah. Esta versión aplica específicamente a operadores de Dirac con potenciales acotados. Finalmente, en la Sección 5 se presentan algunos comentarios finales sobre el trabajo.

Finalmente, quiero agradecer a los miembros del comité de la Beca Yerli, pues sin el otorgamiento de la misma no habría sido posible finalizar mis estudios en matemáticas. También expreso mi profunda admiración y agradecimiento a la PhD. Mónika Winklmeier por su constante apoyo durante todo el pregrado y por creer en mí incondicionalmente.

2. Preliminares

2.1. Análisis Funcional y Teoría de Operadores

Definición 2.1 (Forma sesquilineal)**.** Sea X un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, donde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Un mapa $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{K}$ es una *forma sesquilineal* sobre X si para todos $x, y, z \in X,\ \lambda \in \mathbb{K}$

I. $\langle \lambda x + y, z\rangle = \lambda \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$,

II. $\langle x, \lambda y + z\rangle = \bar{\lambda}\langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$.

Se dice que la forma sesquilineal es

- *hermítica* $\iff \langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle},\ \forall x, y \in X$,
- *semidefinida positiva* $\iff \langle x, x\rangle \geq 0,\ \forall x \in X$,
- *definida positiva* $\iff \langle x, x\rangle > 0,\ \forall x \in X \setminus \{0\}$.

Definición 2.2 (Espacio con producto interno)**.** Una forma sesquilineal hermítica definida positiva es llamada *producto interno* sobre X y $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es llamado un *espacio con producto interno* (también conocido como espacio pre-Hilbert).

Lema 2.3. *Un espacio con producto interno* $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *se convierte en un espacio normado al definir* $\|x\| \coloneqq \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}},\ x \in X$.

Definición 2.4 (Espacio de Hilbert)**.** Un espacio con producto interno completo es llamado *espacio de Hilbert*.

Ejemplo 2.5. Algunos espacios de Hilbert usuales son

- $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{C}^n$ con el producto interno usual dado por

$$\langle x, y\rangle \coloneqq \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}, \qquad x, y \in \mathbb{R}^n \text{ ó } \mathbb{C}^n.$$

- $L^2(\mathbb{R})$ con el producto interno dado por

$$\langle f, g\rangle \coloneqq \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}\ \mathrm{d}x, \qquad f, g \in L^2(\mathbb{R}).$$

Definición 2.6 (Operadores lineales)**.** Sean X, Y $\mathbb{K}$-espacios normados. Un mapa $A : X \to Y$ es llamado un *operador lineal* de X a Y si

$$A(\alpha x_1 + x_2) = \alpha A x_1 + A x_2, \qquad x_1, x_2 \in X,\ \alpha \in \mathbb{K}.$$

Un operador lineal A es *acotado* con norma $\|A\|$ si

$$\|A\| \coloneqq \sup\{\|Ax\| : x \in X,\ \|x\| = 1\} < \infty.$$

De otra forma, se dice que A es un operador *no acotado*. El conjunto de todos los operadores acotados $A : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ de un espacio de Hilbert $\mathfrak{H}$ en sí mismo se denota por $\mathbf{B}(\mathfrak{H})$.

Ejemplo 2.7.

- Algunos ejemplos de operadores acotados son el right shift R y el left shift L.
  Considere el espacio de Hilbert $l^2(\mathbb{N})$. Los operadores *right shift* y *left shift* se definen de la siguiente manera

$$R(x_1, x_2, x_3, ...) \coloneqq (0, x_1, x_2, x_3, ...),$$
$$L(x_1, x_2, x_3, ...) \coloneqq (x_2, x_3, x_4, x_5, ...),$$

  para todo $(x_1, x_2, x_3, ..) \in l^2(\mathbb{N})$. Es fácil probar que R y L son operadores acotados con norma $\|R\|_2 = \|L\|_2 = 1$.

- Un ejemplo clásico de operadores no acotados son los operadores de derivación.
  Considere el espacio de Hilbert $\mathfrak{H} = L_2[-\pi, \pi]$ con la norma dada por

$$\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle_2}, \quad \langle f, g \rangle_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\overline{g(\theta)} \, \mathrm{d}\theta, \quad f, g \in L_2[-\pi, \pi].$$

  Defina el operador $D : L_2[-\pi, \pi] \to L_2[-\pi, \pi]$, $Df = -if'$ para todo $f \in L_2[-\pi, \pi]$. Si consideramos $f_n(\theta) = e^{in\theta}$ para $n \in \mathbb{Z}$, claramente tenemos que $\|f_n\|_2 = 1$ para todo n. No obstante, $\|Df_n\|_2 = |n|$, por tanto, el operador D no es acotado.

En este punto es preciso aclarar que a lo largo de este documento se va a trabajar con operadores denominados densamente definidos. Dados dos espacios de Hilbert $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$, un operador $A : \mathfrak{D}(A) \subset \mathfrak{H}_1 \to \mathfrak{H}_2$ se llama *densamente definido* si su dominio $\mathfrak{D}(A)$ es un subespacio denso de $\mathfrak{H}_1$.

Definición 2.8 (Operador Adjunto)**.** Sean $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2$ espacios de Hilbert y sea $A : \mathfrak{D}(A) \subset \mathfrak{H}_1 \to \mathfrak{H}_2$ un operador densamente definido. El *operador adjunto* se define por

$$\mathfrak{D}(A^*) \coloneqq \{y \in \mathfrak{H}_2 |\ x \to \langle Ax, y \rangle \text{ es un mapa acotado sobre } \mathfrak{D}(A)\},$$
$$A^* : \mathfrak{D}(A^*) \subset \mathfrak{H}_2 \to \mathfrak{H}_1, \qquad A^*y = y^*,$$

donde $y^* \in \mathfrak{H}_1$ es tal que $\langle Ax, y \rangle = \langle x, y^* \rangle$ para todo $x \in \mathfrak{D}(A)$.

Definición 2.9 (Espectro y Resolvente)**.** Sea X un espacio de Banach y $A : \mathfrak{D}(A) \subset X \to X$ un operador lineal cerrado. Se define

$$\rho(A) \coloneqq \{\lambda \in \mathbb{C} : A - \lambda \text{ es biyectivo}\} \qquad \textit{Conjunto resolvente} \text{ de } A,$$
$$\sigma(A) \coloneqq \mathbb{C} \setminus \rho(A) \qquad \textit{Espectro} \text{ de } A.$$

El espectro de A se divide de la siguiente manera $\sigma(A) = \sigma_p(A) \mathbin{\dot{\cup}} \sigma_c(A) \mathbin{\dot{\cup}} \sigma_r(A)$, donde:

$$\sigma_p(A) \coloneqq \{\lambda \in \mathbb{C} : A - \lambda \text{ no es inyectivo}\},$$
$$\sigma_c(A) \coloneqq \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \notin \sigma_p(A),\ \mathrm{Rango}(A - \lambda) \neq X,\ \overline{\mathrm{Rango}(A - \lambda)} = X\},$$
$$\sigma_r(A) \coloneqq \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \notin \sigma_p(A),\ \overline{\mathrm{Rango}(A - \lambda)} \neq X\}.$$

Los elementos de $\sigma_p(A)$ se llaman *valores propios* o *autovalores*. Dado un autovalor $\lambda \in \sigma_p(A)$, se dice que es de *dimensión finita* si $\dim(\ker(A - \lambda)) < \infty$, es decir, si la dimensión del espacio propio asociado a λ es finita. De otra forma se dice que el autovalor λ es de *dimensión infinita*.

Otras definiciones relevantes son las del *espectro discreto* $\sigma_d(A)$ y *espectro esencial* $\sigma_{ess}(A)$:

$$\begin{aligned}\sigma_d(A) &:= \{\lambda \in \sigma_p(A) : \ \lambda \text{ es de dimensión finita} \\ &\qquad\qquad \text{y no es un punto de acumulación de } \sigma(A)\}, \\ \sigma_{ess}(A) &:= \{\lambda \in \mathbb{C} : \ \lambda \text{ es un punto de acumulación de } \sigma(A) \\ &\qquad\qquad \text{o } \lambda \text{ es un autovalor de dimensión infinita}\}.\end{aligned}$$

En el caso en que $A = A^*$ se tiene $\sigma(A) = \sigma_d(A) \,\dot{\cup}\, \sigma_{ess}(A)$.

Observación. *Para cualquier operador A densamente definido tenemos las siguientes relaciones [Win15a]*

- $\lambda \in \sigma_p(A) \Longrightarrow \overline{\lambda} \in \sigma_p(A^*) \cup \sigma_r(A^*)$,
- $\lambda \in \sigma_r(A) \Longrightarrow \overline{\lambda} \in \sigma_p(A^*)$.

Ejemplo 2.10. Si consideramos nuevamente los operadores R y L, que son mutuos adjuntos, se puede demostrar que

$$\begin{aligned}&\sigma_p(R) = \emptyset, && \sigma_p(L) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}, \\ &\sigma_c(R) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}, && \sigma_c(L) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}, \\ &\sigma_r(R) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}, && \sigma_r(L) = \emptyset, \\ &\sigma_{ess}(R) = \sigma(R) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\}, && \sigma_d(L) = \sigma(L) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\}.\end{aligned}$$

Ahora bien, uno de los objetos matemáticos con los que se va a trabajar constantemente son las proyecciones espectrales cuya definición se da a continuación.

Definición 2.11 (Familias espectrales)**.** Sea $\mathfrak{H}$ un espacio de Hilbert. Una sucesión de operadores lineales $(E_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ se denomina *familia espectral* (también llamada resolución espectral) si y solo si para todo $x \in \mathfrak{H}$ se tiene que:

I E_λ es una proyección ortogonal para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

II $E_\lambda E_\mu = E_\mu E_\lambda = E_\mu$ para todo $\mu \leq \lambda$.

III $E_\mu x \to E_\lambda x$ si $\mu \searrow \lambda$.

IV $E_\mu x \to x$ para $\mu \to \infty$.

V $E_\mu x \to 0$ para $\mu \to -\infty$.

Lema 2.12 (Cálculo funcional)**.** *Sea $(E_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ una resolución espectral en un espacio de Hilbert $\mathfrak{H}$ con soporte en $[a,b]$ y sean f, g funciones continuas sobre el intervalo $[a,b]$. Entonces*

I $\left\langle \left(\int_a^b f(\lambda) \, \mathrm{d}E_\lambda \right) x, y \right\rangle = \int_a^b f(\lambda) \, \mathrm{d}\langle E_\lambda x, y\rangle\,,$ *para todos* $x,\ y \in \mathfrak{H}$.

II $E_\mu \int_a^b f(\lambda) \, \mathrm{d}E_\lambda = \int_a^\mu f(\lambda) \, \mathrm{d}E_\lambda,$ *para* $a \leq \mu \leq b$.

III $\left(\int_a^b f(\lambda) \, \mathrm{d}E_\lambda \right) \left(\int_a^b g(\lambda) \, \mathrm{d}E_\lambda \right) = \int_a^b (fg)(\lambda) \, \mathrm{d}E_\lambda$.

IV $\left(\int_a^b f(\lambda) \, \mathrm{d}E_\lambda \right)^* = \int_a^b \overline{f}(\lambda) \, \mathrm{d}E_\lambda$.

V $\left\| \int_a^b f(\lambda) \, \mathrm{d}E_\lambda \right\|^2 = \int_a^b |f(\lambda)|^2 \, \mathrm{d}E_\lambda$.

Corolario 2.13. *Sea $(E_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ una resolución espectral en un espacio de Hilbert $\mathfrak{H}$ con soporte en $[a,b]\subset\mathbb{R}$. Entonces*

$$A := \int_a^b \lambda \, \mathrm{d}E_\lambda, \tag{2.1}$$

es un operador acotado autoadjunto tal que $\|A\| = \text{máx}\{|a|,|b|\}$.

Observación.

- *Todo lo mencionado previamente acerca de resoluciones espectrales puede ser extendido a operadores autoadjuntos no acotados con ciertos ajustes, particularmente sobre los dominios de integración.*
- *Dado un operador acotado autoadjunto A existe una resolución espectral $(E_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ tal que la ecuación* (2.1) *es válida. Para más detalles al respecto, así como una definición precisa de las integrales en el Lema 2.12 y el Corolario 2.13, consultar [Tay86, Wei80, AG13].*

Otras definiciones importantes se dan a continuación.

Definición 2.14 (Proyecciones $P_+,\ P_-$)**.** Sea $\mathfrak{H}$ un espacio de Hilbert y sea $A : \mathfrak{D}(A)\subset\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}$ un operador lineal con resolución espectral $(E_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$. Se define el operador $P_+ : \mathfrak{H}\to\mathfrak{H}$ de la siguiente manera

$$P_+h := \int_{0^+}^{\infty} \mathrm{d}E_\lambda h = \left(\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_\epsilon^\infty \mathrm{d}E_\lambda\right) h, \quad h\in\mathfrak{H}. \tag{2.2}$$

Se puede demostrar que P_+ es un operador autoadjunto y que $P_+^2 = P_+$, de tal forma que P_+ es una proyección ortogonal. Además, se define el operador P_- mediante $P_- := 1 - P_+$ y se puede demostrar que P_- también es una proyección ortogonal.

Algunas propiedades importantes de estas proyecciones son las siguientes

- $\mathfrak{H} = \mathrm{Rango}(P_+)\oplus\ker(P_+) = \ker(1-P_+)\oplus\ker(P_+) = \ker(P_-)\oplus\ker(P_+)$. Las dos primeras igualdades son válidas para cualquier proyección sobre un espacio de Hilbert.
- $P_+,\ P_-$ conmutan con A sobre $\mathfrak{D}(A)$, es decir, $P_+Ax = AP_+x$ para todo $x\in\mathfrak{D}(A)$ y análogamente para P_-.
- El espectro del operador $A{\restriction}P_+\mathfrak{H} : P_+\mathfrak{H}\to P_+\mathfrak{H}$ corresponde a la parte positiva del espectro de A, es decir
$$\sigma(A{\restriction}P_+\mathfrak{H}) = \{\lambda\in\sigma(A) : \lambda > 0\}.$$
También se tiene que para el operador $A{\restriction}P_-\mathfrak{H}$
$$\sigma(A{\restriction}P_-\mathfrak{H}) = \{\lambda\in\sigma(A) : \lambda \le 0\}.$$

Definición 2.15 (form-domain de A, [Tes14] pág. 77)**.** Sea A un operador densamente definido y no negativo sobre un espacio de Hilbert $\mathfrak{H}$. Defina la forma cuadrática

$$q_A(\varphi) := \langle\varphi,\varphi\rangle_A := \langle\varphi, A\varphi\rangle, \qquad \varphi\in\mathfrak{D}(A).$$

Es claro que $\langle\cdot,\cdot\rangle_A$ es un producto interno sobre $\mathfrak{D}(A)$. Si $\mathfrak{H}_A$ es la completación de $\mathfrak{D}(A)$ en $\mathfrak{H}$ bajo el anterior producto interno, entonces $\mathfrak{D}(A)\subset\mathfrak{H}_A\subset\mathfrak{H}$. Dado que q_A es simétrica y semiacotada por abajo, se puede demostrar que q_A es clausurable y que $\mathfrak{H}_A$ es justamente el dominio de su clausura $\overline{q_A}$ [Sí17]. El conjunto $\mathfrak{Q}(A) := \mathfrak{D}(\overline{q_A}) = \mathfrak{H}_A$ se denomina *form-domain* de A.

Definición 2.16 (Convergencia débil)**.** Sea X un espacio normado. Una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge débilmente* a $x_0 \in X$ si y solo si

$$\lim_{n\to\infty} x'(x_n) = x'(x_0), \qquad \text{para todo} \quad x' \in X',$$

donde X' denota el espacio dual de X.

Definición 2.17 (Función semicontinua por arriba/abajo)**.** Sea X un espacio topológico. Una función $f : X \to \mathbb{R}$ se denomina *semicontinua por arriba* si

$$\limsup_{x_n\to x} f(x_n) \leq f(x).$$

Análogamente, la función se denomina *semicontinua por abajo* si

$$\liminf_{x_n\to x} f(x_n) \geq f(x).$$

2.2. Principio Variacional Clásico

En esta subsección se presenta el principio Mín-Máx en su forma clásica, es decir, que solo aplica para operadores semiacotados por abajo. Por tanto, antes de enunciar dicho teorema es necesaria la siguiente definición:

Definición 2.18 (Operador semiacotado por abajo)**.** Sea $\mathfrak{H}$ un espacio de Hilbert y sea $A : \mathfrak{D}(A) \subset \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ un operador lineal. Se dice que A es *semiacotado por abajo* si existe una constante $c \in \mathbb{R}$ tal que para todo $x \in \mathfrak{D}(A)$

$$c\|x\|^2 \leq \langle Ax, x\rangle\,. \tag{2.3}$$

Ahora bien, el Teorema del Máx-Mín establece lo siguiente [EE87, Teorema XI.1.2]:

Teorema 2.19 (Principio Variacional Clásico)**.** *Sea X un espacio de Hilbert y sea $A : \mathfrak{D}(A) \subset X \to X$ un operador autoadjunto acotado por abajo. Sea $\lambda_e(A) := \inf\{\lambda \in \sigma_e(A)\}$ y defina*

$$\mu_n(A) = \sup_{\substack{M\subset\mathfrak{H},\\ \dim(M)=n-1}} \; \inf_{\substack{\varphi\in\mathfrak{D}(A)\cap M^\perp,\\ \|\varphi\|=1}} \langle\varphi, A\varphi\rangle. \tag{2.4}$$

Entonces para cada n hay dos casos posibles

I $\mu_n(A) < \lambda_e(A) \iff A$ *tiene por lo menos n autovalores estrictamente menores que $\lambda_e(A)$. En este caso, μ_n es el n-ésimo autovalor de A y el ínfimo en* (2.4) *se alcanza cuando $M =$ span$\{e_1, ..., e_{n-1}\}$, donde e_j es el j-ésimo autovector de A correspondiente al j-ésimo autovalor.*

II $\mu_n(A) = \lambda_e(A) \iff A$ *tiene a lo sumo $n-1$ autovalores menores que $\lambda_e(A)$. En este caso $\mu_m(A) = \mu_n(A)$ para todo $m \geq n$.*

Dado que los teoremas y aplicaciones dados en este trabajo enfatizan en la forma Mín-Máx, es útil presentar a siguiente caracterización de los autovalores de un operador A.

Teorema 2.20 (Principio Mín-Máx clásico [WS72])**.** *Bajo las hipótesis del Teorema 2.19 tenemos que una caracterización alternativa de los autovalores de A por debajo del espectro esencial es*

$$\mu_n(A) = \inf_{\substack{M\subset\mathfrak{D}(A),\\ \dim(M)=n}} \; \sup_{\substack{\varphi\in M,\\ \|\varphi\|=1}} \langle\varphi, A\varphi\rangle.$$

2.3. Operadores de Dirac y de Schrödinger

Uno de los operadores de mayor relevancia en Física es el operador de Dirac. Como se verá más adelante, todas las aplicaciones que se desarrollan en este trabajo están enfocadas en este operador, más aún, al final se presenta un teorema que permite comparar los autovalores del operador de Dirac con el operador de Schrödinger correspondiente, de ahí que sea importante definir estos dos operadores en esta instancia.

Definición 2.21 (Operador de Dirac libre [RS78])**.** Considere el espacio de Hilbert $\mathfrak{H} \coloneqq L^2(\mathbb{R}^3) \otimes \mathbb{C}^4$. Sean $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3$ y β las matrices de Dirac

$$\alpha_k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix}, \qquad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

donde σ_i denota las matrices de Pauli:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Defina $D_0 : \mathfrak{D}(D_0) \subset \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$, $\mathfrak{D}(D_0) \coloneqq H^1(\mathbb{R}^3)^4$,

$$D_0\varphi \coloneqq -i\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla}\varphi + \beta m\varphi, \qquad \varphi \in \mathfrak{D}(D_0).$$

Entonces el operador D_0 se conoce como operador de Dirac libre. Se puede probar que D_0 es un operador autoadjunto y que $\sigma(D_0) = \sigma_{ess}(D_0) = (-\infty, -mc^2] \cup [mc^2, \infty)$. Para más detalles al respecto ver [Tha91].

Definición 2.22 (Operador de Schrödinger [HS12])**.** Sea $\mathfrak{H}_0 \coloneqq H^2(\mathbb{R}^3)$. El operador de Schrödinger libre $S_0 : \mathfrak{D}(S_0) \subset \mathfrak{H}_0 \to \mathfrak{H}_0$ se define formalmente por

$$S_0\varphi \coloneqq \left(-\frac{1}{2m}\nabla^2\right)\varphi, \qquad \varphi \in \mathfrak{D}(S_0).$$

Se puede demostrar que S_0 es un operador autoadjunto y que $\sigma(S_0) = \sigma_{ess}(S_0) = [0, \infty)$.
Ahora bien, sea $\mathfrak{H} \coloneqq L^2(\mathbb{R}^3)$ y sea $V : \mathfrak{D}(V) \subset \mathfrak{H} \to \mathbb{R}$. El operador de Schrödinger $S : \mathfrak{D}(S) \subset \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ se define formalmente por

$$S\varphi \coloneqq (S_0 + V)\,\varphi, \qquad \varphi \in \mathfrak{D}(S).$$

En este caso, la adición del potencial V modifica el espectro del operador de Schrödinger libre de tal forma que podrían aparecer autovalores en $\sigma(S)$.

3. Generalizaciones del Principio Variacional

En esta sección se presenta el teorema principal de este trabajo, a saber, un principio variacional generalizado. Siguiendo [GS99], tanto el enunciado como la prueba de este teorema se dividirá en dos casos, cuando el operador A es acotado y cuando A es no acotado.

3.1. Teorema Generalizado para Operadores Acotados

Para el caso de operadores acotados, la generaliación del principio Mín-Máx establece lo siguiente [GS99, Teorema 1].

Teorema 3.1 (Generalización del Mín-Máx para operadores acotados)**.**
Sea A un operador lineal acotado autoadjunto sobre un espacio de Hilbert $\mathfrak{H}$ y suponga que $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_+ \oplus \mathfrak{H}_-$ donde $\mathfrak{H}_+ \perp \mathfrak{H}_-$. Sean $P_+ := P_{(0,\infty)}(A)$, $P_- := 1 - P_+$ y defina

$$\lambda_n(A) = \inf_{\substack{M_+ \subset \mathfrak{H}_+, \\ \dim(M_+)=n}} \sup_{\substack{\varphi \in M_+ \oplus \mathfrak{H}_-, \\ \|\varphi\|=1}} \langle \varphi, A\varphi \rangle.$$

I *Si $\langle \varphi, A\varphi \rangle \leq 0$ para todo $\varphi \in \mathfrak{H}_-$, entonces*

$$\lambda_n(A) \leq \mu_n(A \restriction P_+\mathfrak{H}).$$

II *Si $\langle \varphi, A\varphi \rangle > 0$ para todo $0 \neq \varphi \in \mathfrak{H}_+$, entonces*

$$\lambda_n(A) \geq \mu_n(A \restriction P_+\mathfrak{H}).$$

Observación. *En ambos casos, $\mu_n(A \restriction P_+\mathfrak{H})$ son los autovalores positivos del operador A puesto que $\sigma(A \restriction P_+\mathfrak{H}) = \overline{\sigma(A) \cap (0,\infty)}$ por definición de P_+.*

Demostración. Sean Λ_+ y Λ_- las proyecciones ortogonales sobre $\mathfrak{H}_+$ y $\mathfrak{H}_-$ respectivamente, y defina $\lambda_n := \lambda_n(A)$, $\mu_n := \mu_n(A \restriction P_+\mathfrak{H})$ para facilitar la notación.

I Primero se demostrará que la restricción $\Lambda_+ : P_+\mathfrak{H} \to \mathfrak{H}_+$ es inyectiva. Sea φ un elemento en el kernel de la restricción de Λ_+, es decir, $\varphi \in \mathfrak{H}_- \cap P_+\mathfrak{H}$ tal que $\varphi \neq 0$. Entonces

$$0 \geq \langle \varphi, A\varphi \rangle = \langle P_+\varphi, AP_+\varphi \rangle = \int_0^\infty \lambda \,\mathrm{d}\langle E_\lambda \varphi, \varphi \rangle > 0.$$

La primera desigualdad se tiene por hipótesis sobre los elementos de $\mathfrak{H}_-$ y la segunda desigualdad se tiene por definición de P_+. No obstante, dicha cadena de desigualdades es una contradicción, por tanto $\Lambda_+ : P_+\mathfrak{H} \to \mathfrak{H}_+$ es inyectiva.

Dado lo anterior, sea $\epsilon > 0$ y defina $M := P_{(0,\mu_n+\epsilon)}(A)\mathfrak{H}$. Entonces $\dim(M) \geq n$ y como la restricción de Λ_+ es inyectiva, entonces $\dim(\Lambda_+ M) \geq n$. Por tanto

$$\lambda_n = \inf_{\substack{M_+ \subset \mathfrak{H}_+, \\ \dim(M_+)=n}} \sup_{\substack{\varphi \in M_+ \oplus \mathfrak{H}_-, \\ \|\varphi\|=1}} \langle \varphi, A\varphi \rangle \leq \sup_{\substack{\varphi \in \Lambda_+ M \oplus \mathfrak{H}_- \\ \|\varphi\|=1}} \langle \varphi, A\varphi \rangle.$$

Note que la desigualdad se tiene puesto que el supremo solo puede ser mayor cuando consideramos subespacios de dimensión igual o mayor a n. Ahora bien, es claro que $\Lambda_+ M \oplus \mathfrak{H}_- \subset M + \mathfrak{H}_-$, más aún, si $\varphi \in M + \mathfrak{H}_-$ tenemos que $\varphi = \varphi_M + \varphi_-$, donde $\varphi_M \in M$ y $\varphi_- \in \mathfrak{H}_-$. Como podemos descomponer $\varphi_M = \varphi_1 + \varphi_2$ donde $\varphi_1 = \Lambda_+ \varphi_M$ y $\varphi_2 = \varphi_M - \Lambda_+\varphi_M = \Lambda_-\varphi_M \in \Lambda_- M \subset \mathfrak{H}_-$, entonces tenemos que $\varphi = \varphi_1 + (\varphi_2 + \varphi_-) \in \Lambda_+ M \oplus \mathfrak{H}_-$. Se concluye que $M + \mathfrak{H}_- \subset \Lambda_+ M \oplus \mathfrak{H}_-$ y por tanto $M + \mathfrak{H}_- = \Lambda_+ M \oplus \mathfrak{H}_-$. Con esta igualdad de conjuntos tenemos que

$$\lambda_n \leq \sup_{\substack{\varphi \in M + \mathfrak{H}_- \\ \|\varphi\| = 1}} \langle \varphi, A\varphi \rangle.$$

Así, para comparar λ_n con μ_n, sea $\varphi \in M + \mathfrak{H}_-$ y considere la descomposición $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ donde $\varphi_1 \in M$ and $\varphi_2 \in M^\perp \cap (M + \mathfrak{H}_-)$. Adicionalmente considere la descomposición $\varphi_2 = \varphi_3 + \varphi_-$ donde $\varphi_3 \in M$ y $\varphi_- \in \mathfrak{H}_-$. Dado que $A\varphi_3 \in M$ y $\varphi_3 + \varphi_- \in M^\perp$ (pues A conmuta con las proyecciones ortogonales a subespacios de su espectro) entonces tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &= \langle A\varphi_3, \varphi_3 + \varphi_- \rangle = \langle A\varphi_3, \varphi_3 \rangle + \langle A\varphi_3, \varphi_- \rangle \\ &\Longrightarrow \langle A\varphi_3, \varphi_- \rangle = - \langle A\varphi_3, \varphi_3 \rangle . \end{aligned}$$

Usando esto junto con $\langle A\varphi_3, \varphi_3 \rangle \geq 0$, y $\langle \varphi_-, A\varphi_- \rangle \leq 0$ se obtiene la siguiente cadena de desigualdades

$$\begin{aligned} \langle \varphi, A\varphi \rangle &= \langle \varphi_1, A\varphi_1 \rangle + \cancelto{0}{\langle \varphi_1, A\varphi_2 \rangle} + \cancelto{0}{\langle \varphi_2, A\varphi_1 \rangle} + \langle \varphi_2, A\varphi_2 \rangle \\ &= \langle \varphi_1, A\varphi_1 \rangle + \langle \varphi_3, A\varphi_3 \rangle + \langle \varphi_3, A\varphi_- \rangle + \langle \varphi_-, A\varphi_3 \rangle + \langle \varphi_-, A\varphi_- \rangle \\ &= \langle \varphi_1, A\varphi_1 \rangle - \langle \varphi_3, A\varphi_3 \rangle + \langle \varphi_-, A\varphi_- \rangle \\ &\leq \langle \varphi_1, A\varphi_1 \rangle \leq (\mu_n + \epsilon) \langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle \leq (\mu_n + \epsilon) \langle \varphi, \varphi \rangle . \end{aligned}$$

Y como ϵ es arbitrario concluimos que $\lambda_n \leq \mu_n$.

II Primero demostraremos que $\Lambda_+ P_+ \mathfrak{H}$ es denso en $\mathfrak{H}_+$. Suponga por contradicción que no, entonces existe $\varphi \in \mathfrak{H}_+ \cap (\Lambda_+ P_+ \mathfrak{H})^\perp$ con $\varphi \neq 0$. Note que $\mathfrak{H}_+ \cap (\Lambda_+ P_+ \mathfrak{H})^\perp = \mathfrak{H}_+ \cap P_- \mathfrak{H}$ puesto que para todo $\varphi \in \mathfrak{H}_+$ tenemos que

$$\begin{aligned} \varphi \in \mathfrak{H}_+ \cap (\Lambda_+ P_+ \mathfrak{H})^\perp &\iff \forall h \in \mathfrak{H} \;\; \langle \varphi, \Lambda_+ P_+ h \rangle = 0 \iff \forall h \in \mathfrak{H} \;\; \langle \Lambda_+ \varphi, P_+ h \rangle = 0 \\ &\iff \forall h \in \mathfrak{H} \;\; \langle \varphi, P_+ h \rangle = 0, \end{aligned}$$

donde la última equivalencia se tiene porque $\Lambda_+ \varphi = \varphi$ ya que $\varphi \in \mathfrak{H}_+$. Por tanto tenemos que $\varphi \in \mathfrak{H}_+ \cap (P_+ \mathfrak{H})^\perp = \mathfrak{H}_+ \cap P_- \mathfrak{H}$.

Ahora, por hipótesis sobre $\mathfrak{H}_+$ tenemos que $0 < \langle \varphi, A\varphi \rangle$. Luego

$$0 < \langle \varphi, A\varphi \rangle = \langle P_- \varphi, A P_- \varphi \rangle \leq 0,$$

donde se usó el hecho que $\varphi = P_- \varphi$ puesto que $\varphi \in P_- \mathfrak{H}$. Por tanto, no puede existir dicho φ.

Ahora bien, se sigue que

$$\begin{aligned} \lambda_n &= \inf_{\substack{M_+ \subset \mathfrak{H}_+, \\ \dim(M_+) = n}} \sup_{\substack{\varphi \in M_+ \oplus \mathfrak{H}_-, \\ \|\varphi\| = 1}} \langle \varphi, A\varphi \rangle = \inf_{\substack{M_+ \subset \Lambda_+ P_+ \mathfrak{H}, \\ \dim(M_+) = n}} \sup_{\substack{\varphi \in M_+ \oplus \mathfrak{H}_-, \\ \|\varphi\| = 1}} \langle \varphi, A\varphi \rangle \\ &\geq \inf_{\substack{M \subset P_+ \mathfrak{H}, \\ \dim(M) = n}} \sup_{\substack{\varphi \in M, \\ \|\varphi\| = 1}} \langle \varphi, A\varphi \rangle = \mu_n. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Vale la pena mencionar que la segunda igualdad se tiene porque A es acotado y porque $\Lambda_+ P_+ \mathfrak{H}$ es denso en $\mathfrak{H}_+$. Ahora bien, para ver la desigualdad en la segunda línea note que para cada $M_+ \subset \Lambda_+ P_+ \mathfrak{H}$ con $\dim(M_+) = n$ existe $\widetilde{M} \subset (\Lambda_+)^{-1} P_+ \mathfrak{H}$ lo suficientemente grande tal que $\Lambda_+ \widetilde{M} = M_+$. Con base en lo anterior tenemos que $\widetilde{M} \subset \ker \Lambda_+ \oplus M$ para algún $M \subset P_+ \mathfrak{H}_+$, de tal forma que $\Lambda_+(M) = M_+$ pues $\ker(\Lambda_+)$ no aporta nada en el rango de Λ_+. Por la ecuación de rango-nulidad tenemos que

$$\begin{aligned} \dim \widetilde{M} &= \dim(\ker \Lambda_+ \restriction_M) + \dim M_+ = \dim(\ker \Lambda_+ \restriction_M) + \dim M \\ &\implies \dim M = \dim M_+ = n. \end{aligned}$$

Por tanto, en la ec. (3.1) se tiene que el ínfimo en la primera línea se está tomando sobre menos conjuntos que el ínfimo en la segunda línea, de ahí la desigualdad en estas cantidades. Además como $\Lambda_+ M \oplus \mathfrak{H}_- = M + \mathfrak{H}_- \supset M$, la desigualdad solo se refuerza con respecto a los supremos. □

Observación.

I *En el numeral [i] del Teorema 3.1 no se usó la hipótesis de que el operador A fuera acotado, de forma que puede ser fácilmente generalizada a operadores no acotados.*

II *En el numeral [ii] del Teorema 3.1 se usó fuertemente la hipótesis de que el operador A fuera acotado, al modificar los dominios de los ínfimos en la ecuación* (3.1)*.*

III *El Teorema 3.1 es una generalización del Teorema 2.20 puesto que al considerar un operador lineal acotado A sobre un espacio de Hilbert $\mathfrak{H}$ con $\mathfrak{H} = \mathfrak{H} \oplus 0$ se obtiene*

$$\lambda_n(A) = \inf_{\substack{M_+ \subset \mathfrak{H}, \\ \dim(M_+) = n}} \sup_{\substack{\varphi \in M_+ \oplus 0, \\ \|\varphi\| = 1}} \langle \varphi, A\varphi \rangle = \mu_n(A),$$

donde la última igualdad se tiene por la caracterización del Teorema 2.20.

3.2. Teorema Generalizado para Operadores No Acotados

En esta sección se enuncia y prueba el teorema más importante de este trabajo, a saber, una generalización del principio Mín-Máx para operadores no acotados [GS99, Teorema 3].

Teorema 3.2 (Generalización del Mín-Máx para operadores no acotados)**.** *Sea A un operador autoadjunto en un espacio de Hilbert $\mathfrak{H}$ y suponga que $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_+ \oplus \mathfrak{H}_-$ con $\mathfrak{H}_+ \perp \mathfrak{H}_-$. Sean $\Lambda_\pm$ las proyecciones ortogonales sobre $\mathfrak{H}_\pm$ y sea $\mathfrak{Q}$ un subespacio de $\mathfrak{H}$ con $\mathfrak{D}(A) \subset \mathfrak{Q} \subset \mathfrak{Q}(A)$ y $\Lambda_\pm \mathfrak{D}(A) \subset \mathfrak{Q}$, donde $\mathfrak{Q}(A)$ es el form-domain del operador A. Finalmente, defina $P_+ := P_{(0,\infty)}(A)$, $P_- := 1 - P_+$, $\mathfrak{Q}_\pm := \mathfrak{Q} \cap \mathfrak{H}_\pm$ y*

$$\lambda_n(A) = \inf_{\substack{M_+ \subset \mathfrak{Q}_+, \\ \dim(M_+) = n}} \sup_{\substack{\varphi \in M_+ \oplus \mathfrak{Q}_-, \\ \|\varphi\| = 1}} \langle \varphi, A\varphi \rangle.$$

I *Si $\langle \varphi, A\varphi \rangle \leq 0$ para todo $\varphi \in \mathfrak{Q}_-$, entonces*

$$\lambda_n(A) \leq \mu_n(A \restriction P_+ \mathfrak{H}).$$

II *Si $\langle \varphi, A\varphi \rangle > 0$ para todo $\varphi \in \mathfrak{Q}(A) \cap \mathfrak{H}_+$, y $(|A| + 1)^{1/2} P_- \Lambda_+ \in \mathbf{B}(\mathfrak{H})$, entonces*

$$\lambda_n(A) \geq \mu_n(A \restriction P_+ \mathfrak{H}).$$

Demostración. Defina λ_n y μ_n de forma análoga como en el Teorema 3.1.

I La prueba de este numeral es análoga al numeral [i] del Teorema 3.1.

II La prueba de este numeral es larga y complicada, razón por la cual se desarrollará en múltiples pasos.

Escoja $a > \mu_n$ y defina $f(x) := \min\{x, a\}$. Sea $\tilde{A} := f(A)$ definida mediante el cálculo funcional.

Paso 1: Veamos que $\Lambda_+ P_+ \mathfrak{D}(A)$ es denso en $\mathfrak{Q}_+$.

Por contradicción, suponga que no se tiene lo anterior. Entonces existe $\varphi_+ \in \mathfrak{Q}_+ \cap (\Lambda_+ P_+ \mathfrak{D}(A))^\perp$ tal que $\varphi_+ \neq 0$.

Note que $\mathfrak{Q}_+ \cap (\Lambda_+ P_+ \mathfrak{D}(A))^\perp \subset \Lambda_+ \mathfrak{H} \cap P_- \mathfrak{H}$ puesto que para todo $h \in \mathfrak{D}(A)$ se tiene que

$$\varphi \in \mathfrak{Q}_+ \cap (\Lambda_+ P_+ \mathfrak{D}(A))^\perp \Longrightarrow \langle \varphi, \Lambda_+ P_+ h \rangle = 0 \Longrightarrow \langle \Lambda_+ \varphi, P_+ h \rangle = 0. \tag{3.2}$$

Luego $\varphi_+ \in \mathfrak{Q}_+ \cap (\Lambda_+ P_+ \mathfrak{D}(A))^\perp \subset \Lambda_+ \mathfrak{H} \cap P_- \mathfrak{H}$. Con lo anterior tenemos que

$$0 < \overline{q_A}(\varphi_+) = \int_{-\infty}^{0} \lambda \, \mathrm{d}\langle E_\lambda \varphi_+, \varphi_+ \rangle \leq 0,$$

donde se usó el hecho de que $\varphi_+ \in \mathfrak{D}(\overline{q_A}) = \mathfrak{D}((|A|+1)^{1/2})$ dado que $(|A|+1)^{1/2} P_- \Lambda_+ \in \mathbf{B}(\mathfrak{H})$ es un operador autoadjunto y que $\varphi_+ \in \mathfrak{Q}_+ \subset Q(A)$. No obstante, la expresión anterior es una contradicción.

Sea $M_+ \subset \mathfrak{Q}_+$ con $\dim(M_+) = n$ y $\epsilon > 0$. Como $\Lambda_+ P_+ \mathfrak{D}(A)$ es denso en $\mathfrak{Q}_+$, se puede hallar un subespacio $M_+^\epsilon \subset \Lambda_+ P_+ \mathfrak{D}(A)$ con $\dim(M_+^\epsilon) = n$ tal que para cada $\varphi_+^\epsilon \in M_+^\epsilon$ con $\|\varphi_+^\epsilon\| \leq 1$, exista $\varphi_+ \in M_+$ con

$$\|\varphi_+ - \varphi_+^\epsilon\| \leq \epsilon \;\text{ y }\; \|\varphi_+\| = \|\varphi_+^\epsilon\|. \tag{3.3}$$

Para probar la existencia de M_+^ϵ podemos aproximar los elementos de una base de M_+ con elementos de $\Lambda_+ P_+ \mathfrak{D}(A)$.

Paso 2: Veamos que para cualquier $\varphi^\epsilon \in M_+^\epsilon \oplus \mathfrak{Q}_-$ con $\|\varphi^\epsilon\| = 1$ y $\left\langle \varphi^\epsilon, \tilde{A}\varphi^\epsilon \right\rangle \geq -1$ existe un $\varphi \in M_+ \oplus \mathfrak{Q}_-$ (el cual depende de φ^ϵ) con $\|\varphi\| = 1$ tal que

$$\left\langle \varphi^\epsilon, \tilde{A}\varphi^\epsilon \right\rangle - \left\langle \varphi, \tilde{A}\varphi \right\rangle \to 0 \quad (\epsilon \to 0) \tag{3.4}$$

uniformemente en φ^ϵ.

Sea φ^ϵ con dichas características y sea $\varphi_\pm^\epsilon := \Lambda_\pm \varphi^\epsilon$. Defina $\varphi := \varphi_+ + \varphi_-^\epsilon$ donde $\varphi_+ \in M_+$ satisface (3.3), de tal manera que $\|\varphi\| = \|\varphi^\epsilon\|$ y definimos una seminorma $|||\cdot|||$ sobre $\mathfrak{Q}(A)$ por $|||\psi|||^2 := \left\langle \psi, (a - \tilde{A})\psi \right\rangle$ con $a \in \mathbb{R}$ en la definición de $\tilde{A}$. Entonces

$$\begin{aligned}
\left| \left\langle \varphi^\epsilon, \tilde{A}\varphi^\epsilon \right\rangle - \left\langle \varphi, \tilde{A}\varphi \right\rangle \right| &= \left| |||\varphi^\epsilon|||^2 - |||\varphi|||^2 \right| = |(|||\varphi^\epsilon||| - |||\varphi|||) \cdot (|||\varphi^\epsilon||| + |||\varphi|||)| \\
&\leq |||\varphi^\epsilon - \varphi||| \cdot (|||\varphi^\epsilon||| + |||\varphi - \varphi^\epsilon + \varphi^\epsilon|||) \\
&\leq |||\varphi^\epsilon - \varphi||| \cdot (2|||\varphi^\epsilon||| + |||\varphi^\epsilon - \varphi|||).
\end{aligned}$$

En la anterior cadena de desigualdades tenemos que $|||\varphi^\epsilon|||^2 \leq a+1$ puesto que $\left\langle \varphi^\epsilon, \tilde{A}\varphi^\epsilon \right\rangle \geq -1$ y también

$$\begin{aligned}|||\varphi^\epsilon - \varphi|||^2 &= |||\varphi_+^\epsilon + \varphi_-^\epsilon - \varphi_+ - \varphi_-^\epsilon|||^2 = |||\varphi_+^\epsilon - \varphi_+|||^2 \\ &= a\|\varphi_+^\epsilon - \varphi_+\|^2 - \left\langle (\varphi_+^\epsilon - \varphi_+), \tilde{A}(\varphi_+^\epsilon - \varphi_+) \right\rangle \\ &\leq \|\varphi_+^\epsilon - \varphi_+\|^2 \leq \text{const} \cdot \epsilon^2,\end{aligned}$$

esto puesto que $(|A|+1)^{1/2}P_-\Lambda_+$ es un operador acotado. Esto concluye la prueba del **Paso 2**.

Paso 3: Teniendo en cuenta la notación previamente establecida y suponiendo que

$$\sup_{\substack{\varphi^\epsilon \in M_+^\epsilon \oplus \mathfrak{Q}_-, \\ \|\varphi^\epsilon\|=1}} \langle \varphi^\epsilon, \tilde{A}\varphi^\epsilon \rangle \geq 0,$$

probemos que

$$\sup_{\substack{\varphi \in M_+ \oplus \mathfrak{Q}_-, \\ \|\varphi\|=1}} \langle \varphi, \tilde{A}\varphi \rangle = \liminf_{\epsilon \to \infty} \sup_{\substack{\varphi^\epsilon \in M_+^\epsilon \oplus \mathfrak{Q}_-, \\ \|\varphi^\epsilon\|=1}} \langle \varphi^\epsilon, \tilde{A}\varphi^\epsilon \rangle. \tag{3.5}$$

Para ello, note que como el supremo en el lado derecho es no negativo, podemos restringirnos a vectores φ^ϵ con $\left\langle \varphi^\epsilon, \tilde{A}\varphi^\epsilon \right\rangle \geq -1$. Con lo anterior, (3.5) se sigue automáticamente del **Paso 2**.

Paso 4: Probemos que

$$\inf_{\substack{M_+ \subset \mathfrak{Q}_+, \\ \dim(M_+)=n}} \sup_{\substack{\varphi \in M_+ \oplus \mathfrak{Q}_-, \\ \|\varphi\|=1}} \langle \varphi, \tilde{A}\varphi \rangle = \inf_{\substack{M_+ \subset \Lambda_+ P_+ \mathfrak{D}(A), \\ \dim(M_+)=n}} \sup_{\substack{\varphi \in M_+ \oplus \mathfrak{Q}_-, \\ \|\varphi\|=1}} \langle \varphi, \tilde{A}\varphi \rangle, \tag{3.6}$$

donde se ha reemplazado $\mathfrak{Q}_+$ en el lado izquierdo por $\Lambda_+ P_+ \mathfrak{D}(A)$ en el lado derecho.

Con esa finalidad, note que por el **Paso 1** tenemos que $\Lambda_+ P_+ \mathfrak{D}(A)$ es denso en $\mathfrak{Q}_+$. Esto, junto con el hecho que el operador $\tilde{A}$ es semiacotado por arriba nos permite afirmar que los ínfimos en (3.6) son iguales. Más aún, por el paso **Paso 3** tenemos la igualdad de los supremos en (3.6), por tanto, esto finaliza la prueba del **Paso 4**.

Finalmente, como $A \geq \tilde{A}$ el lado izquierdo de (3.6) es acotado por arriba por λ_n mientras que el lado derecho de (3.6) es acotado por abajo por $\mu_n(\tilde{A}\restriction P_+\mathfrak{H})$ (esto se prueba de forma análoga a como se probó (3.1)). Ahora bien como $\tilde{A}$ y A tienen el mismo espectro en $(-\infty, a)$ se sigue que

$$\lambda_n \geq \mu_n(\tilde{A}\restriction P_+\mathfrak{H}) = \mu_n, \tag{3.7}$$

y esto finaliza la prueba del teorema. □

4. Aplicaciones

En esta sección se presentan algunas aplicaciones de la generalización del principio Mín-Máx para operadores no acotados, las cuales fueron desarrolladas por Griesemer y Siedentop en [GS99]. La primera usa el principio generalizado para estudiar el espectro de operadores no acotados con brechas en su espectro esencial, y la segunda usa el principio generalizado para estudiar el espectro de operadores de gran interés en física, tales como el operador de Dirac y el operador de Schrödinger, los cuales son claramente no acotados por ser operadores de derivación.

4.1. Aplicación a Brechas Espectrales

Teorema 4.1 (Perturbaciones relativamente compactas de un operador autoadjunto con una brecha espectral)**.** *Sea* $A_0 : \mathfrak{D}(A_0) \subseteq \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ *un operador autoadjunto,* $A_1 : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ *un operador acotado autoadjunto, donde* $\mathfrak{H}$ *es un espacio de Hilbert. Defina* $A : \mathfrak{D}(A) \subset \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$*,* $A := A_0 + A_1$*, donde* $\mathfrak{D}(A) := \mathfrak{D}(A_0)$*. Suponga que existen números reales* $a < b$ *tales que*

I $\sigma(A_0) \cap (a, b) = \emptyset$;

II $0 \geq A_1 > -(b - a)$;

III $A_1(A_0 + i)^{-1}$ *es compacto;*

y defina $\Lambda_+ = P_{(a,\infty)}(A_0)$ *y* $\Lambda_- = 1 - \Lambda_+$*. Entonces*

$$\mu_n(A \restriction P_{(a,\infty)}(A)\mathfrak{H}) = \inf_{\substack{M_+ \subset \Lambda_+ \mathfrak{D}(A_0),\\ \dim(M_+) = n}} \sup_{\substack{\varphi \in M_+ \oplus \Lambda_- \mathfrak{D}(A_0),\\ \|\varphi\| = 1}} \langle \varphi, A\varphi \rangle.$$

Antes de probar este teorema, es conveniente tener en cuenta el siguiente lema.

Lema 4.2. *Sea* A *un operador lineal autoadjunto con* $\alpha \in \mathbb{R} \cap \rho(A)$*. Sea* $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$*,* $\gamma(t) = \alpha + it$*. Entonces*

$$P_+ = P_{(\alpha,\infty)}(A) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \mathrm{d}\xi (\xi - A)^{-1}. \tag{4.1}$$

Demostración del Lema 4.2. Para demostrar la ec. (4.1) se probará que el operador $\frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \mathrm{d}\xi(\xi - A)^{-1}$ coincide con la definición dada en (2.2). Sea $(E_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ la resolución espectral de A. Entonces

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \mathrm{d}\xi(\xi - A)^{-1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \mathrm{d}\xi \left(\int_\mathbb{R} \mathrm{d}E_\lambda(\xi - \lambda)^{-1}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi i}\int_\mathbb{R} \mathrm{d}E_\lambda \left(\int_\gamma \mathrm{d}\xi(\xi - \lambda)^{-1}\right).$$

El cambio del orden de integración hecho en la última igualdad se justifica por [Win15b, Teorema 2.64], [HP96, Teorema 3.7.13]. Al recordar la parametrización $\gamma(t) = \alpha + it$ tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \mathrm{d}\xi(\xi - A)^{-1} =& \frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi i}\int_\mathbb{R} \mathrm{d}E_\lambda \left(\int_{-\infty}^{\infty} i\mathrm{d}t(\alpha + it - \lambda)^{-1}\right)\\ =& \frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi}\int_\mathbb{R} \mathrm{d}E_\lambda \left(\int_{-\infty}^{0} \mathrm{d}t(\alpha + it - \lambda)^{-1} + \int_0^\infty \mathrm{d}t(\alpha + it - \lambda)^{-1}\right).\end{aligned}$$

Al hacer el cambio de variable $t \mapsto -t$ en la primera de las integrales de la línea anterior tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \mathrm{d}\xi(\xi - A)^{-1} =& \frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}E_\lambda \left(\int_0^\infty \mathrm{d}t(\alpha - it - \lambda)^{-1} + \int_0^\infty \mathrm{d}t(\alpha + it - \lambda)^{-1}\right)\\
=& \frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}E_\lambda \left(\int_0^\infty \mathrm{d}t\left[(\alpha - it - \lambda)^{-1} + (\alpha + it - \lambda)^{-1}\right]\right)\\
=& \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}E_\lambda \left(\int_0^\infty \frac{\alpha - \lambda}{(\alpha - \lambda)^2 + t^2}\mathrm{d}t\right)\\
=& \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}E_\lambda \left(\frac{1}{\alpha - \lambda}\int_0^\infty \frac{1}{1 + (t/\alpha - \lambda)^2}\mathrm{d}t\right).
\end{aligned}$$

Como $\rho(A)$ es abierto, entonces existe $\delta > 0$ tal que $(\alpha - \delta, \alpha + \delta) \subset \rho(A)$. Luego, dado que la resolución espectral E_λ es constante sobre $\rho(A)$, en particular es constante sobre el intervalo $(\alpha - \delta, \alpha + \delta)$, por tanto tenemos que

$$\frac{1}{\pi}\int_{\alpha-\delta}^{\alpha+\delta} \mathrm{d}E_\lambda \left(\frac{1}{\alpha - \lambda}\int_0^\infty \frac{1}{1 + (t/\alpha - \lambda)^2}\mathrm{d}t\right) = 0.$$

Luego

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \mathrm{d}\xi(\xi - A)^{-1}\\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\alpha-\delta} \mathrm{d}E_\lambda \left(\frac{1}{\alpha - \lambda}\int_0^\infty \frac{1}{1 + (t/\alpha - \lambda)^2}\mathrm{d}t\right) - \frac{1}{\pi}\int_{\alpha+\delta}^{\infty} \mathrm{d}E_\lambda \left(\frac{1}{\alpha - \lambda}\int_0^\infty \frac{1}{1 + (t/\alpha - \lambda)^2}\mathrm{d}t\right)\\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\alpha-\delta} \mathrm{d}E_\lambda \left(\arctan\left(\frac{t}{\alpha - \lambda}\right)\Big|_0^\infty\right) - \frac{1}{\pi}\int_{\alpha+\delta}^{\infty} \mathrm{d}E_\lambda \left(\arctan\left(\frac{t}{\alpha - \lambda}\right)\Big|_0^\infty\right)\\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\alpha-\delta} \mathrm{d}E_\lambda \left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{\pi}\int_{\alpha+\delta}^{\infty} \mathrm{d}E_\lambda \left(-\frac{\pi}{2}\right)\\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{\alpha-\delta} \mathrm{d}E_\lambda - \int_{\alpha+\delta}^{\infty} \mathrm{d}E_\lambda\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{\alpha} \mathrm{d}E_\lambda - \int_{\alpha}^{\infty} \mathrm{d}E_\lambda\right)\\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(P_- - P_+) = \frac{1}{2}(1 - P_-) + \frac{1}{2}P_+ = \frac{1}{2}P_+ + \frac{1}{2}P_+ = P_+.
\end{aligned}$$

□

Demostración del Teorema 4.1. Note que si $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_+ \oplus \mathfrak{H}_-$, $\mathfrak{H}_\pm = \Lambda_\pm\mathfrak{H}$ y $\mathfrak{Q} = \mathfrak{D}(A) = \mathfrak{D}(A_0)$, podemos aplicar el Teorema 3.2 al operador $A - a$ con $\mathfrak{Q}_\pm = \Lambda_\pm\mathfrak{D}(A_0)$, de tal forma que

$$\lambda_n(A) = \inf_{\substack{M_+ \subset \mathfrak{Q}_+,\\ \dim(M_+) = n}} \sup_{\substack{\varphi \in M_+ \oplus \mathfrak{Q}_-,\\ \|\varphi\| = 1}} \langle\varphi, A\varphi\rangle = \inf_{\substack{M_+ \subset \Lambda_+\mathfrak{D}(A_0),\\ \dim(M_+) = n}} \sup_{\substack{\varphi \in M_+ \oplus \Lambda_-\mathfrak{D}(A_0),\\ \|\varphi\| = 1}} \langle\varphi, A\varphi\rangle.$$

Ahora bien, por definición de Λ_- y las hipótesis [i], [ii] tenemos que si $\varphi \in \Lambda_-\mathfrak{D}(A_0)$

$$\langle\varphi, (A - a)\varphi\rangle = \langle\varphi, (A_0 - a)\varphi\rangle + \langle\varphi, A_1\varphi\rangle \leq \langle\Lambda_-\varphi, (A_0 - a)\Lambda_-\varphi\rangle \leq 0. \tag{4.2}$$

Análogamente, por definición de Λ_+ y las hipótesis [i], [ii] tenemos que si $\varphi \in \Lambda_+\mathfrak{D}(A_0)$, $\|\varphi\| = 1$,

$$\langle\varphi, (A - a)\varphi\rangle = \langle\varphi, (A_0 - a)\varphi\rangle + \langle\varphi, A_1\varphi\rangle > \langle\Lambda_+\varphi, (A_0 - a)\Lambda_+\varphi\rangle - (b - a) > (b - a) - (b - a) = 0.$$

Luego, por el numeral [i] del Teorema 3.2 y la ecuación (4.2) tenemos que

$$\begin{aligned}&\mu_n((A-a)\restriction P_{(0,\infty)}(A-a)\mathfrak{H}) \geq \lambda_n(A-a) \geq 0\\ &\Longrightarrow \mu_n(A\restriction P_{(a,\infty)}(A)\mathfrak{H}) \geq \lambda_n(A) \geq a.\end{aligned} \tag{4.3}$$

Para mostrar la otra desigualdad, considere los siguientes casos

Caso 1: Los autovalores de A se acumulan por arriba en a.
En este caso tenemos que $\mu_n(A\restriction P_{(a,\infty)}(A)\mathfrak{H}) = a$ (puesto que $a \in \sigma_{ess}(A)$ y estamos caracterizando los autovalores en la brecha espectral) y por tanto, la ecuación (4.3) indica que $\mu_n(A\restriction P_{(a,\infty)}(A)\mathfrak{H}) = \lambda_n$.

Caso 2: Los autovalores de A no se acumulan por arriba en a.
En este caso existe $\epsilon > 0$ tal que $(a, a+\epsilon)$ no tiene autovalores de A. Note que por la hipótesis [iii] tenemos que $\sigma_{ess}(A) = \sigma_{ess}(A_0) \subset \mathbb{R}\backslash(a,b)$ porque A_1 es una perturbación relativamente compacta de A_0. Se sigue que $\sigma_{ess}(A)\cap(a,b) = \emptyset$, en particular, obtenemos que $\sigma(A)\cap(a,a+\epsilon) = (\sigma_d(A)\mathbin{\dot\cup}\sigma_{ess}(A))\cap(a,a+\epsilon) = \emptyset$. Veamos que $(|A|+1)^{1/2}P_-\Lambda_+$ es acotado. Como $(a,a+\epsilon) \subset \rho(A)\cap\rho(A_0)$, el camino $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = a+\epsilon/2 - it\epsilon/2$ está contenido en $\rho(A)\cap\rho(A_0)$. Por tanto, por el Lema 4.2 tenemos que

$$P_+ = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \mathrm{d}z(z-A)^{-1}, \tag{4.4}$$

y análogamente

$$\Lambda_+ = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \mathrm{d}z(z-A_0)^{-1}. \tag{4.5}$$

Por tanto, para $x \in \mathfrak{D}(A)$ tenemos que

$$\begin{aligned}(|A|+1)^{1/2}(\Lambda_+ - P_+)x &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \mathrm{d}z(|A|+1)^{1/2}[(z-A_0)^{-1} - (z-A)^{-1}]x\\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \mathrm{d}z(|A|+1)^{1/2}(z-A)^{-1}[(z-A)-(z-A_0)](z-A_0)^{-1}x\\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \mathrm{d}z(|A|+1)^{1/2}(z-A)^{-1}(-A_1)(z-A_0)^{-1}x.\end{aligned} \tag{4.6}$$

Note que

$$\begin{aligned}\|(|A|+1)^{1/2}(z-A)^{-1}(-A_1)(z-A_0)^{-1}\| &\leq \|(|A|+1)^{1/2}(z-A)^{-1/2}(z-A)^{-1/2}\|\cdot\|(-A_1)(z-A_0)^{-1}\|\\ &\leq \|(|A|+1)^{1/2}(z-A)^{-1/2}\|\cdot\|(z-A)^{-1/2}\|\cdot\|-A_1\|\cdot\|(z-A_0)^{-1}\|\\ &\leq \text{const.}\cdot\left\|(|A|+1)^{1/2}(z-A)^{-1/2}\right\|\cdot\|(z-A)^{-1/2}\|\cdot\|(z-A_0)^{-1}\|\end{aligned}$$

Ahora bien, si tomamos $z = a+\epsilon/2-it\epsilon/2$ para algún t, y denotamos por $(E_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ a la resolución espectral de A tenemos que

$$\begin{aligned}\|(z-A)^{-1/2}\| &= \left\|\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}E_\lambda\left(a+\frac{\epsilon}{2}-\frac{it\epsilon}{2}-\lambda\right)^{-1/2}\right\|\\ &= \left\|\int_{-\infty}^{a}\mathrm{d}E_\lambda\left(a+\frac{\epsilon}{2}-\frac{it\epsilon}{2}-\lambda\right)^{-1/2} + \int_{a+\epsilon}^{\infty}\mathrm{d}E_\lambda\left(a+\frac{\epsilon}{2}-\frac{it\epsilon}{2}-\lambda\right)^{-1/2}\right\|.\end{aligned}$$

Donde se tuvo en cuenta que la resolución espectral E_λ es constante sobre $\rho(A)$ y el hecho de que

$(a, a+\epsilon) \subset \rho(A)$. Y como para $\lambda \in (-\infty, a] \cup [a+\epsilon, \infty)$ tenemos que

$$\left\| \left(a + \frac{\epsilon}{2} - \frac{it\epsilon}{2} - \lambda \right)^{-1/2} \right\| = \left(\frac{1}{(a+\frac{\epsilon}{2}-\lambda)^2 + \left(\frac{t\epsilon}{2}\right)^2} \right)^{1/4} \leq \left(\frac{2}{\epsilon}\right)^{1/2} \left(\frac{1}{1+t^2} \right)^{1/4},$$

entonces

$$\left\| (z-A)^{-1/2} \right\| \leq \text{const.} \left(\frac{1}{1+t^2} \right)^{1/4} \left\| \int_{-\infty}^{a} \mathrm{d}E_\lambda + \int_{a+\epsilon}^{\infty} \mathrm{d}E_\lambda \right\| \leq \text{const.} \left(\frac{1}{1+t^2} \right)^{1/4}.$$

Análogamente tenemos que

$$\left\| (z-A_0)^{-1} \right\| \leq \text{const.} \left(\frac{1}{1+t^2} \right)^{1/2}.$$

Luego

$$\|(|A|+1)^{1/2}(z-A)^{-1}(-A_1)(z-A_0)^{-1}\| \leq \text{const.} \cdot \left\| (|A|+1)^{1/2}(z-A)^{-1/2} \right\| \cdot \left(\frac{1}{1+t^2} \right)^{3/4}.$$

Acotemos ahora el término $\left\| (|A|+1)^{1/2}(z-A)^{-1/2} \right\|$. Para ello, note que

$$(|A|+1)^{1/2}(z-A)^{-1/2} = \int_{-\infty}^{\infty} (|\lambda|+1)^{1/2}(z-\lambda)^{-1/2} \mathrm{d}E_\lambda \tag{4.7}$$

Veamos en detalle la integral en (4.7). Si consideramos $z = a + \epsilon/2 - it\epsilon/2$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{|\lambda|+1}{z-\lambda} \right|^{1/2} \mathrm{d}E_\lambda &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{|\lambda|+1}{a+\frac{\epsilon}{2}-\frac{it\epsilon}{2}-\lambda} \right|^{1/2} \mathrm{d}E_\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(|\lambda|+1)^{1/2}}{\left(\left(a+\frac{\epsilon}{2}-\lambda\right)^2 + \left(\frac{t\epsilon}{2}\right)^2 \right)^{1/4}} \mathrm{d}E_\lambda \\
&= \int_{-\infty}^{a} \frac{(|\lambda|+1)^{1/2}}{\left(\left(a+\frac{\epsilon}{2}-\lambda\right)^2 + \left(\frac{t\epsilon}{2}\right)^2 \right)^{1/4}} \mathrm{d}E_\lambda + \int_{a+\epsilon}^{\infty} \frac{(|\lambda|+1)^{1/2}}{\left(\left(a+\frac{\epsilon}{2}-\lambda\right)^2 + \left(\frac{t\epsilon}{2}\right)^2 \right)^{1/4}} \mathrm{d}E_\lambda \\
&\leq \int_{-\infty}^{a} \frac{(|\lambda|+1)^{1/2}}{\left(a+\frac{\epsilon}{2}-\lambda\right)^{1/2}} \mathrm{d}E_\lambda + \int_{a+\epsilon}^{\infty} \frac{(|\lambda|+1)^{1/2}}{\left(a+\frac{\epsilon}{2}-\lambda\right)^{1/2}} \mathrm{d}E_\lambda. \qquad (4.8)
\end{aligned}$$

Consideremos ahora la función $f : (-\infty, a] \cup [a+\epsilon, \infty) \to \mathbb{R}$ definida por

$$\lambda \mapsto f(\lambda) = \frac{(|\lambda|+1)^{1/2}}{\left(a+\frac{\epsilon}{2}-\lambda\right)^{1/2}}.$$

Dicha función satisface las siguientes propiedades

I f es continua sobre $(-\infty, a] \cup [a+\epsilon, \infty)$.

II $\lim_{|\lambda|\to\infty} |f(\lambda)| = 1$.

Por la propiedad II tenemos que existe $R \in \mathbb{R},\ R > 0$ lo suficientemente grande tal que $f(\lambda) \leq 2$ para todo $|\lambda| > R$. Además, como f es continua en el compacto $K := [-R, a] \cup [a+\epsilon, R]$, por la propiedad I tenemos que la restricción $f \restriction K$ tiene máximo. Llamemos m a este máximo y defina $M := \max\{2, m\}$. La constante M satisface

$$|f(\lambda)| \leq M, \qquad \lambda \in (-\infty, a] \cup [a+\epsilon, \infty).$$

Por tanto, a partir de (4.8) tenemos que

$$\left\| \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{|\lambda|+1}{z-\lambda} \right|^{1/2} \mathrm{d}E_\lambda \right\| \leq \left\| M \left(\int_{-\infty}^{a} dE_\lambda + \int_{a+\epsilon}^{\infty} \mathrm{d}E_\lambda \right) \right\| = \|M \cdot \mathbb{1}\| = M.$$

Lo anterior implica que

$$\|(|A|+1)^{1/2}(z-A)^{-1}(-A_1)(z-A_0)^{-1}\| \leq \text{const.} \cdot \frac{1}{(1+t^2)^{3/4}}.$$

Luego, la última integral en (4.6) converge absolutamente. Esto implica que $(|A|+1)^{1/2}(\Lambda_+ - P_+)$ es acotado, es decir, que el operador

$$(|A|+1)^{1/2} P_- \Lambda_+ = (|A|+1)^{1/2} P_- (\Lambda_+ - P_+) = P_- (|A|+1)^{1/2} (\Lambda_+ - P_+), \tag{4.9}$$

es acotado. Dado esto, por el numeral [ii] del Teorema 3.2 tenemos que

$$\begin{aligned} &\mu_n((A-a)\restriction P_{(0,\infty)}(A-a)\mathfrak{H}) \leq \lambda_n(A-a) \\ &\Longrightarrow \mu_n(A\restriction P_{(a,\infty)}(A)\mathfrak{H}) \leq \lambda_n(A). \end{aligned} \tag{4.10}$$

Finalmente, con (4.3) y (4.10) se concluye que $\mu_n(A\restriction P_{(a,\infty)}(A)\mathfrak{H}) = \lambda_n(A)$. □

4.2. Aplicación a Operadores de Dirac

Las aplicaciones del Teorema 3.2 a operadores de Dirac se van a presentar mediante tres teoremas. No obstante, antes de enunciar dichos teoremas es necesario establecer la notación que se usará en los mismos.

Sea $\mathfrak{H} = L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^4)$ y sea $D_0 = -i\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta m$ con $\mathfrak{D}(D_0) = H^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^4)$. Sea $V : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ un operador que satisface

$$0 \geq V(x) \geq -\frac{\kappa}{|x|}, \qquad \kappa < \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Se puede demostrar que el operador $D_0 + V$ es autoadjunto y semiacotado por abajo, por tanto es clausurable [Sch72]. Si denotamos por D a la clausura de $D_0 + V$, se puede mostrar que D es autoadjunto [Sch72], y que $\mathfrak{D}(D) = \mathfrak{D}(D_0)$ [LR79, LRK80]. Sea $\Lambda_+ := P_{(0,\infty)}(D_0)$ y considere la forma cuadrática

$$\varphi \longmapsto \langle \varphi, D\varphi \rangle, \qquad \varphi \in \Lambda_+ \mathfrak{D}(D_0).$$

Esta forma cuadrática es acotada por abajo (de hecho es positiva, como se muestra en [Tix98]) y clausurable, como se muestra en [EPS96]. La clausura define un único operador autoadjunto que denotamos por B, el cual está densamente definido sobre $\mathfrak{H}_+ := \Lambda_+ \mathfrak{H}$, esto es $B : \mathfrak{D}(B) \subset \mathfrak{H}_+ \to \mathfrak{H}_+$.

Teorema 4.3. *Con la notación establecida previamente tenemos que*

$$\mu_n(B) \leq \mu_n(D\restriction P_{(-m,\infty)}(D)\mathfrak{H}).$$

Demostración. Note que si $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_+ \oplus \mathfrak{H}_-$, $\mathfrak{H}_\pm = \Lambda_\pm \mathfrak{H}$ y $\mathfrak{Q} = \mathfrak{D}(D) = \mathfrak{D}(D_0)$, podemos aplicar el Teorema 3.2 al operador $A = D + m$. Además, con las anteriores definiciones tenemos que $\mathfrak{Q}_\pm = \Lambda_\pm \mathfrak{D}(D_0)$ de tal forma que si $\varphi \in \Lambda_- \mathfrak{D}(D_0)$ tenemos que

$$\langle \varphi, (D+m)\varphi \rangle \leq \langle \varphi, (D_0+m)\varphi \rangle = \langle \Lambda_- \varphi, (D_0+m)\Lambda_- \varphi \rangle \leq 0.$$

Entonces, por el numeral [i] del Teorema 3.2 tenemos que

$$\begin{aligned} &\mu_n(D+m\restriction P_{(0,\infty)}(D+m)\mathfrak{H}) \geq \lambda_n(D+m) \\ &\Longrightarrow \mu_n(D\restriction P_{(-m,\infty)}(D)\mathfrak{H}) \geq \lambda_n(D). \end{aligned} \tag{4.11}$$

Ahora bien

$$\lambda_n(D) = \inf_{\substack{M_+\subset\Lambda_+\mathfrak{D}(D_0),\\ \dim(M_+)=n}} \sup_{\substack{\varphi\in M_+\oplus\Lambda_-\mathfrak{D}(D_0),\\ \|\varphi\|=1}} \langle\varphi, D\varphi\rangle \geq \inf_{\substack{M_+\subset\Lambda_+\mathfrak{D}(D_0),\\ \dim(M_+)=n}} \sup_{\substack{\varphi\in M_+,\\ \|\varphi\|=1}} \langle\varphi, D\varphi\rangle = \mu_n(B). \tag{4.12}$$

Por tanto se concluye que

$$\mu_n(D\restriction P_{(-m,\infty)}(D)\mathfrak{H}) \geq \mu_n(B). \tag{4.13}$$

□

4.3. Aplicación al Operador de Schrödinger, Pincipio Mín-Máx de Talman, Datta y Deviah

En esta subsección se estudia otra versión de la generalización del principio Mín-Máx, la cual fue inicialmente postulada por Talman, Datta y Deviah, pero desarrollada rigurosamente por Griesemer y Siedentop específicamente para el operador de Dirac [GS99].

Definición 4.4. Sea Q un operador autoadjunto en un espacio de Hilbert $\mathfrak{H}$ y sea $m \in \mathbb{R}_+$. Sea β un operador acotado y autoadjunto con $\sigma(\beta) = \{\pm 1\}$. Si $\beta\mathfrak{D}(Q) \subset \mathfrak{D}(Q)$ y

$$\beta Q + Q\beta = 0 \quad \text{sobre} \quad \mathfrak{D}(Q),$$

entonces $Q + \beta m$ se llama *operador de Dirac con supersimetría*.

Observación. *Un operador de Dirac con supersimetría tiene una brecha espectral. Esto puesto que*

$$(Q+\beta m)^2 = Q^2 + (Q\beta + \beta Q)m + \beta^2 m^2 = Q^2 + m^2 \geq m^2,$$

por tanto, $Q + \beta m$ tiene una brecha espectral en el intervalo $(-m, m)$.

Para el siguiente teorema es útil establecer la siguiente notación:

$$\begin{aligned} \beta_\pm &:= \frac{1}{2}(1 \pm \beta), \\ \mathfrak{H}_\pm &:= \beta_\pm \mathfrak{H}, \\ V_{\pm\pm} &:= \beta_\pm V \beta_\pm \restriction \mathfrak{H}_\pm, \end{aligned}$$

para $V \in \mathbf{B}(\mathfrak{H})$.

Teorema 4.5 (Talman, Datta, Deviah). *Sea $D_0 := Q + \beta m$ un operador de Dirac con supersimetría en un espacio de Hilbert $\mathfrak{H}$ y sea $V \in \mathbf{B}(\mathfrak{H})$ con $V = V^*$. Sea $D := D_0 + V$, $P_+ := P_{(0,\infty)}(D)$ y*

$$\lambda_n := \inf_{\substack{M_+ \subset \beta_+ \mathfrak{D}(D), \\ \dim(M_+)=n}} \sup_{\substack{\varphi \in M_+ \oplus \beta_- \mathfrak{D}(D), \\ \|\varphi\|=1}} \langle \varphi, D\varphi \rangle.$$

I *Si $V_{--} \leq m$, entonces*

$$\lambda_n(D) \leq \mu_n(D \restriction P_+\mathfrak{H}).$$

II *Si $V_{++} > -m$ y $(V-a)D_0^{-1}$ es compacto para algún $a \in \mathbb{R}$ con $-m < a < m$, entonces*

$$\lambda_n(D) \geq \mu_n(D \restriction P_+\mathfrak{H}). \tag{4.14}$$

Demostración.

I Al considerar $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_+ \oplus \mathfrak{H}_-$, $\mathfrak{H}_\pm = \beta_\pm \mathfrak{H}$ podemos aplicar el Teorema 3.2 al operador $A = D$ de tal forma que si $\varphi \in \mathfrak{H}_-$ tenemos que

$$\begin{aligned}\langle \varphi, D\varphi \rangle = \langle \varphi, (Q + \beta m + V)\varphi \rangle &= \langle \beta_-\varphi, Q\beta_-\varphi \rangle + m \langle \beta_-\varphi, \beta\beta_-\varphi \rangle + \langle \beta_-\varphi, V\beta_-\varphi \rangle \\ &= \langle \varphi, \beta_- Q \beta_- \varphi \rangle - m \langle \varphi, \varphi \rangle + \langle \varphi, V_{--}\varphi \rangle \leq \langle \varphi, \beta_- Q \beta_- \varphi \rangle .\end{aligned}$$

Abora bien, note que

$$\beta_- Q \beta_- = \frac{1}{4}(1-\beta)Q(1-\beta) = \frac{1}{4}Q(1+\beta)(1-\beta) = \frac{1}{4}Q(1-\beta^2) = 0,$$

donde la última igualdad se tiene puesto que $\sigma(\beta) = \{\pm 1\}$. Luego

$$\langle \varphi, D\varphi \rangle \leq 0.$$

Entonces por el numeral [i] del Teorema 3.2 tenemos que

$$\lambda_n(D) \leq \mu_n(D \restriction P_+\mathfrak{H}).$$

II Dado que $(V-a)D_0^{-1}$ es compacto entonces $\sigma_{ess}(D) \cap (-m+a, m+a) = \emptyset$. Como dicho intervalo contiene al 0 entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $\sigma_{ess}(D) \cap (0, \epsilon) = \emptyset$. Ahora bien, hay dos casos.

Caso 1: Los autovalores de D se acumulan por arriba en 0.
En este caso tenemos que $\mu_n(D \restriction P_+\mathfrak{H}) = 0$, mientras que $\lambda_n \geq 0$ puesto que si $\varphi \in \mathfrak{H}_+$ tenemos que

$$\begin{aligned}\langle \varphi, D\varphi \rangle &= \langle \beta_+\varphi, Q\beta_+\varphi \rangle + m \langle \beta_+\varphi, \beta\beta_+\varphi \rangle + \langle \beta_+\varphi, V\beta_+\varphi \rangle = \langle \varphi, \beta_+ Q \beta_+ \varphi \rangle + m \langle \varphi, \varphi \rangle + \langle \varphi, V_{++}\varphi \rangle \\ &\geq \langle \varphi, \beta_+ Q \beta_+ \varphi \rangle = 0.\end{aligned}$$

Por tanto $\lambda_n(D) \geq \mu_n(D \restriction P_+\mathfrak{H})$.

Caso 2: Los autovalores de D no se acumulan por arriba en 0.
En este caso existe $\epsilon > 0$ tal que $(0, \epsilon)$ no tiene autovalores de D. Más aún podemos escoger $\epsilon \leq m$

de tal forma que $(0, \epsilon) \subset \rho(D)$. De esta manera, es suficiente demostrar que

$$\lambda_n(H) = \inf_{\substack{M_+ \subset \beta_+ P_+ \mathfrak{D}(D), \\ \dim(M_+) = n}} \sup_{\substack{\varphi \in M_+ \oplus \beta_- \mathfrak{D}(D), \\ \|\varphi\| = 1}} \langle \varphi, D\varphi \rangle, \tag{4.15}$$

puesto que al tener esto, la desigualdad (4.14) se sigue de forma análoga a como se probó la desigualdad del numeral [ii] del Teorema 3.2. Ahora bien, para probar (4.15) se probará que $\beta_+ P_+ \mathfrak{D}(D)$ es denso en $\beta_+ \mathfrak{D}(D)$ con respecto a la norma asociada a la forma de D_0. Para hacer esto procedemos por pasos:

Paso 1: Sea $P_+^0 := P_{(0,\infty)}(D_0)$. Entonces $|D_0|^{1/2}(P_+ - P_+^0)$ es un operador acotado.
La prueba de esta aseveración es análoga a lo hecho en la prueba del Teorema 4.1.

Paso 2: Sea $P_- = 1 - P_+$. Entonces $P_- \mathfrak{H} \cap \mathfrak{H}_+ \subset \mathfrak{Q}(D_0)$.
Sea $P_-^0 := 1 - P_+^0$ y sea $\varphi \in P_- \mathfrak{H} \cap \mathfrak{H}_+$. Entonces $\varphi = P_- \varphi = (P_- - P_-^0)\varphi + P_-^0 \varphi$ y además $\beta_- \varphi = 0$. Por tanto

$$\beta_- P_-^0 \varphi = \beta_-(P_-^0 - P_-)\varphi = \beta_-(P_+ - P_+^0)\varphi.$$

Como β_- conmuta con $|D_0|^{1/2}$, entonces

$$\beta_- |D_0|^{1/2}(P_+ - P_+^0) = |D_0|^{1/2} \beta_-(P_+ - P_+^0)$$

Por tanto tenemos que $\beta_-(P_+ - P_+^0)\varphi \in \mathfrak{D}(|D_0|^{1/2}) = \mathfrak{Q}(D_0)$. Luego $\beta_- P_-^0 \beta_+ \varphi = \beta_- P_-^0 \varphi \in \mathfrak{Q}(D_0)$. Ahora bien, al usar el hecho que

$$\begin{aligned} P_-^0 =& \frac{2}{2} \int_{-\infty}^0 \mathrm{d}E_\lambda^0 = \frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}E_\lambda^0 - \int_{-\infty}^0 (-1)\ \mathrm{d}E_\lambda^0 - \int_0^\infty \mathrm{d}E_\lambda^0 \right) \\ =& \frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}E_\lambda^0 - \int_{-\infty}^0 \frac{\lambda}{|\lambda|}\ \mathrm{d}E_\lambda^0 - \int_0^\infty \frac{\lambda}{|\lambda|}\ \mathrm{d}E_\lambda^0 \right) = \frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}E_\lambda^0 - \int_{-\infty}^\infty \frac{\lambda}{|\lambda|}\ \mathrm{d}E_\lambda^0 \right) \\ =& \frac{1}{2}\left[\int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}E_\lambda^0 - \left(\int_{-\infty}^\infty \lambda\ \mathrm{d}E_\lambda^0 \right) \left(\int_{-\infty}^\infty |\lambda|^{-1}\ \mathrm{d}E_\lambda^0 \right) \right] = \frac{1}{2}(1 - D_0|D_0|^{-1}), \end{aligned}$$

tenemos que

$$\begin{aligned} \beta_- P_-^0 \beta_+ \varphi =& \frac{1}{2}\beta_- \left(1 - D_0|D_0|^{-1}\right) \beta_+ \varphi = -\frac{1}{2}\beta_-(Q + \beta m)\beta_+ |D_0|^{-1}\varphi \\ =& -\frac{1}{2} Q\beta_+^2 |D_0|^{-1}\varphi = -\frac{1}{2} Q\beta_+ |D_0|^{-1}\varphi. \end{aligned}$$

Por tanto $-Q|D_0|^{-1}\varphi \in \mathfrak{Q}(D_0)$ y finalmente

$$\infty > \|Q|D_0|^{-1/2}\varphi\|^2 + \|m|D_0|^{-1/2}\varphi\|^2 = \left\langle \varphi, (Q^2 + m^2)|D_0|^{-1}\varphi \right\rangle = \langle \varphi, |D_0|\varphi \rangle .$$

Con lo cual se concluye lo que se deseaba.

Paso 3: La contenencia $\beta_+ P_+ \mathfrak{D}(Q) \subset \beta_+ \mathfrak{D}(Q)$ es densa con respecto a la norma $\varphi \to \||D_0|^{1/2}\varphi\|$.
Note que esto es equivalente a

$$\overline{\beta_+ |D_0|^{1/2} P_+ \mathfrak{D}(Q)} = \mathfrak{H}_+,$$

dado que β_+ conmuta con $|D_0|^{1/2}$. Por contradicción, suponga que existe $\varphi_+ \in \mathfrak{H}_+$, $\varphi_+ \neq 0$ tal que para todo $\varphi \in \mathfrak{D}(Q)$

$$\left\langle \varphi_+, \beta_+ |D_0|^{1/2} P_+ \varphi \right\rangle = \left\langle \varphi_+, |D_0|^{1/2} P_+ \varphi \right\rangle = 0.$$

Ahora, consideremos $P_+ = P_+ - P_+^0 + P_+^0$ y $\varphi = |D_0|^{-1/2}\psi$ con $\psi \in \mathfrak{Q}(D_0)$. Dicho ψ existe puesto que si $\varphi \in \mathfrak{D}(Q)$ entonces $\eta := Q\varphi = |Q|^{1/2}|Q|^{1/2}\varphi$ existe, luego, si definimos $\psi := |Q|^{-1/2}\eta \in \mathrm{Rango}(|Q|^{-1/2}) = \mathfrak{D}(|Q|^{1/2}) = \mathfrak{Q}(D_0)$ entonces $\varphi = |Q|^{-1/2}\psi$. Con lo anterior se tiene que

$$\begin{aligned} &\left\langle \varphi_+, \left(|D_0|^{1/2}(P_+ - P_+^0)|D_0|^{-1/2} + P_+^0\right)\psi \right\rangle = 0 \\ &\quad \Longrightarrow |D_0|^{-1/2} B^* \varphi_+ + P_+^0 \varphi_+ = 0, \end{aligned} \tag{4.16}$$

donde $B = |D_0|^{1/2}(P_+ - P_+^0) \in \mathbf{B}(\mathfrak{H})$ por el Paso 1. Por ende $P_+^0\varphi_+ \in \mathfrak{Q}(D_0)$ y así

$$\begin{aligned} 2\beta_+ P_+^0 \varphi_+ &= \beta_+(1 - D_0|D_0|^{-1})\varphi_+ = \beta_+\varphi_+ - (Q\beta_- + \beta m |D_0|^{-1}\beta_+)\varphi_+ \\ &= (1 - \beta m |D_0|^{-1})\varphi_+ \in \mathfrak{Q}(D_0), \end{aligned}$$

esto es, $\varphi_+ \in \mathfrak{Q}(D_0)$. Luego, por la ecuación (4.16) y el Paso 2 tenemos que $\psi_+ = |D_0|^{1/2}\varphi_+ \in P_-\mathfrak{H} \cap \mathfrak{H}_+ \subset \mathfrak{Q}(D_0)$. Esto conlleva a que

$$0 \leq \langle \psi_+, D\psi_+ \rangle = \langle P_-\psi_+, P_- P_- \psi_+ \rangle \leq 0,$$

lo cual es una contradicción. □

Corolario 4.6. *Sea $D = -i\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta m + V$ donde $V \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$. Suponga que $V(x) \xrightarrow{|x| \to \infty} 0$ y $-2m < V(x) \leq 0$ casi siempre. Entonces para todo n se tiene que*

$$\mu_n(D \restriction P_{(-m,\infty)}(D)\mathfrak{H}) = \inf_{\substack{M_+ \subset \beta_+ \mathfrak{D}(D), \\ \dim(M_+) = n}} \sup_{\substack{\varphi \in M_+ \oplus \beta_- \mathfrak{D}(D), \\ \|\varphi\| = 1}} \langle \varphi, D\varphi \rangle.$$

Una aplicación directa del Teorema 4.5 es la posibilidad de comparar el número de autovalores en $(-m, m)$ del operador de Dirac con el número de autovalores negativos del operador de Schrödinger con el mismo potencial. La comparación se establece mediante el siguiente teorema:

Teorema 4.7. *Sea $D_0 = Q + \beta m$ un operador de Dirac con supersimetría en un espacio de Hilbert $\mathfrak{H}$ y suponga que $V = V^* \in \mathbf{B}(\mathfrak{H})$ conmuta con β y que VD_0^{-1} es compacto. Sea $D = D_0 + V$. Si $V_{--} \leq 0$ y $V_{++} > -2m$, entonces*

$$\dim P_{(-m,m)}(D)\mathfrak{H} \geq \dim P_{(-\infty,0)}(Q^2/2m + V)\mathfrak{H}_+.$$

Observación. *Por el teorema de Weyl, el espectro de $D_0 + V$ en $(-m, m)$ es discreto puesto que $\sigma(D_0) \cap (-m, m) = \emptyset$ y VD_0^{-1} es compacto. Análogamente, el espectro de $Q^2/2m + V$ es discreto en $(-\infty, 0)$ puesto que $\sigma(Q^2/2m) \subset [0, \infty)$ y $V(Q^2 + m^2)^{-1} = VD_0^{-1}D_0^{-1}$ es compacto.*

Antes de probar el Teorema 4.7 es preciso probar un lema que hace uso de la siguiente notación:

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & Q_+^* \\ Q_+ & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{en} \quad \mathfrak{H} = \mathfrak{H}_+ \oplus \mathfrak{H}_- \tag{4.17}$$

donde $Q_+ = Q \restriction \beta_+ \mathfrak{D}(Q)$ [Tha91].

Lema 4.8. *Asumiendo las hipótesis del Teorema 4.7, defina*

$$E(\varphi_+) = \sup_{\varphi_- \in \beta_- \mathfrak{D}(Q)} \left. \frac{\langle \varphi, D\varphi \rangle}{\langle \varphi, \varphi \rangle} \right|_{\varphi = \varphi_+ + \varphi_-},$$

para $\varphi_+ \in \beta_+ \mathfrak{D}(Q) \setminus \{0\}$. *Si* $E(\varphi_+) > 0$ *entonces*

$$E(\varphi_+) = \left\langle \varphi_+, \left[Q_+^*(m + E(\varphi_+) - V_{--})^{-1} Q_+ + m + V_{++} \right] \varphi_+ \right\rangle \cdot \langle \varphi_+, \varphi_+ \rangle^{-1}. \tag{4.18}$$

Demostración. Como $V \in \mathbf{B}(\mathfrak{H})$ es tal que $V\beta = \beta V$ y $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_+ \oplus \mathfrak{H}_-$, entonces

$$\begin{pmatrix} V_{++} & V_{+-} \\ V_{-+} & V_{--} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{++} & V_{+-} \\ V_{-+} & V_{--} \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} V_{++} & -V_{+-} \\ V_{-+} & -V_{--} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{++} & V_{+-} \\ -V_{-+} & -V_{--} \end{pmatrix}$$

Por tanto, $V_{+-} = V_{-+} = 0$, es decir V es un operdor diagonal en $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_+ \oplus \mathfrak{H}_-$. Ahora bien, dado que Q es antidiagonal (4.17) para un $\varphi_+ \in \beta_+ \mathfrak{D}(Q) \setminus \{0\}$ fijo y para todo $\varphi_- \in \beta_- \mathfrak{D}(Q)$ tenemos que

$$\begin{aligned} \langle \varphi, D\varphi \rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} \varphi_+ \\ \varphi_- \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} V_{++} + m & Q_+^* \\ Q_+ & V_{--} - m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_+ \\ \varphi_- \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \langle \varphi_+, (V_{++} + m) \varphi_+ \rangle + \left\langle \varphi_+, Q_+^* \varphi_- \right\rangle + \langle \varphi_-, Q_+ \varphi_+ \rangle + \langle \varphi_-, (V_{--} - m) \varphi_- \rangle \\ &= \langle \varphi_+, (V_{++} + m) \varphi_+ \rangle + \langle Q_+ \varphi_+, \varphi_- \rangle + \langle \varphi_-, Q_+ \varphi_+ \rangle + \langle \varphi_-, (V_{--} - m) \varphi_- \rangle. \end{aligned} \tag{4.19}$$

El cálculo anterior demuestra que el mapa

$$\varphi_- \mapsto \langle (\varphi_+ + \varphi_-), D(\varphi_+ + \varphi_-) \rangle, \qquad \varphi_- \in \beta_- \mathfrak{D}(Q),$$

es continuo. Como la última expresión en (4.19) es válida para todo $\varphi_- \in \mathfrak{H}_-$, podemos extender continuamente $\langle \cdot, D \cdot \rangle$ a todo $\mathfrak{H}_-$. Por simplicidad, no se modificará la notación de dicho operador pero de ahora en adelante se entenderá $\langle \cdot, D \cdot \rangle$ como su entensión a $\mathfrak{H}_-$. Por todo lo anterior tenemos que

$$E(\varphi_+) = \sup_{\varphi_- \in \mathfrak{H}_-} \left. \frac{\langle \varphi, D\varphi \rangle}{\langle \varphi, \varphi \rangle} \right|_{\varphi = \varphi_+ + \varphi_-}. \tag{4.20}$$

Si existe $\varphi_- \in \mathfrak{H}_-$ tal que maximiza la expresión en (4.20), entonces dicho elemento satisface la ecuación de Euler-Lagrange correspondiente, esto es

$$\begin{aligned} 0 = \frac{d}{d\varphi_-} \left(\frac{\langle \varphi, D\varphi \rangle}{\langle \varphi, \varphi \rangle} \right) &= \frac{\left(\frac{d}{d\varphi_-} \langle \varphi, D\varphi \rangle \right) \langle \varphi, \varphi \rangle - \langle \varphi, D\varphi \rangle \frac{d}{d\varphi_-} \langle \varphi, \varphi \rangle}{\|\varphi\|^4} \\ &\Longrightarrow \left(\frac{d}{d\varphi_-} \langle \varphi, D\varphi \rangle \right) \langle \varphi, \varphi \rangle - \langle \varphi, D\varphi \rangle \frac{d}{d\varphi_-} \langle \varphi, \varphi \rangle = 0 \\ &\Longrightarrow \langle \varphi, \varphi \rangle \left(\left(\frac{d}{d\varphi_-} \langle \varphi, D\varphi \rangle \right) - E(\varphi_+) \frac{d}{d\varphi_-} \langle \varphi, \varphi \rangle \right) = 0 \\ &\Longrightarrow \left(\frac{d}{d\varphi_-} \langle \varphi, D\varphi \rangle \right) - E(\varphi_+) \frac{d}{d\varphi_-} \langle \varphi, \varphi \rangle = 0. \end{aligned}$$

Ahora bien, note que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\varphi_-}\langle\varphi, D\varphi\rangle &= \frac{d}{d\varphi_-}\left(\langle\varphi_+,(V_{++}+m)\,\varphi_+\rangle + \langle Q_+\varphi_+,\varphi_-\rangle + \langle\varphi_-,Q_+\varphi_+\rangle + \langle\varphi_-,(V_{--}-m)\,\varphi_-\rangle\right)\\
&= \langle Q_+\varphi_+,\cdot\rangle + \langle\cdot,Q_+\varphi_+\rangle + \langle\cdot,(V_{--}-m)\,\varphi_-\rangle + \langle\varphi_-,(V_{--}-m)\,\cdot\rangle\\
&= 2\Re\left\{\langle Q_+\varphi_+,\cdot\rangle + \langle(V_{--}-m)\,\varphi_-,\cdot\rangle\right\}.
\end{aligned}$$

Análogamente tenemos que

$$\frac{d}{d\varphi_-}\langle\varphi,\varphi\rangle = \frac{d}{d\varphi_-}\left(\langle\varphi_+,\varphi_+\rangle + \langle\varphi_-,\varphi_-\rangle\right) = \langle\cdot,\varphi_-\rangle + \langle\varphi_-,\cdot\rangle = 2\Re\left\{\langle\varphi_-,\cdot\rangle\right\},$$

por tanto

$$\begin{aligned}
0 &= \left(\frac{d}{d\varphi_-}\langle\varphi,D\varphi\rangle\right) - E(\varphi_+)\frac{d}{d\varphi_-}\langle\varphi,\varphi\rangle\\
&= 2\Re\left\{\langle Q_+\varphi_+,\cdot\rangle + \langle(V_{--}-m)\,\varphi_-,\cdot\rangle\right\} - 2E(\varphi_+)\Re\left\{\langle\varphi_-,\cdot\rangle\right\}\\
&= 2\Re\left\{\langle Q_+\varphi_+ + (V_{--}-m-E(\varphi_+))\,\varphi_-,\cdot\rangle\right\}\\
&\Longrightarrow \varphi_- = (m+E(\varphi_+)-V_{--})^{-1}Q_+\varphi_+.
\end{aligned}$$

De esta manera, al sustituir φ_- en (4.20) obtenemos que

$$\begin{aligned}
E(\varphi_+)\langle\varphi_+,\varphi_+\rangle &= \langle\varphi,D\varphi\rangle - E(\varphi_+)\langle\varphi_-,\varphi_-\rangle\\
&= \langle\varphi_+,(V_{++}+m)\,\varphi_+\rangle + \langle Q_+\varphi_+,\varphi_-\rangle + \langle\varphi_-,Q_+\varphi_+\rangle\\
&\quad + \langle\varphi_-,(V_{--}-m)\,\varphi_-\rangle - E(\varphi_+)\langle\varphi_-,\varphi_-\rangle\\
&= \left\langle\varphi_+,(V_{++}+m)\,\varphi_+ + Q_+^*\varphi_-\right\rangle + \langle\varphi_-,Q_+\varphi_+ + (V_{--}-m-E(\varphi_+))\,\varphi_-\rangle\\
&= \left\langle\varphi_+,\left[Q_+^*\,(m+E(\varphi_+)-V_{--})^{-1}Q_+ + V_{++}+m\right]\varphi_+\right\rangle + 0.
\end{aligned}$$

De esta manera, es suficiente probar la existencia del elemento $\varphi_- \in \mathfrak{H}_-$ que maximiza la expresión (4.20). Con dicha finalidad, escoja una sucesión $\varphi^n = \varphi_+ + \varphi_-^n$ tal que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\langle\varphi^n,D\varphi^n\rangle}{\langle\varphi^n,\varphi^n\rangle} = E(\varphi_+).$$

Como $E(\varphi_+) > 0$, entonces $\langle\varphi^n,D\varphi^n\rangle > 0$ para n lo suficientemente grande, además

$$\begin{aligned}
0 < \langle\varphi^n,D\varphi^n\rangle &= \langle\varphi_+,(m+V_{++})\varphi_+\rangle + 2\Re\left\langle Q_+\varphi_+,\varphi_-^n\right\rangle + \left\langle\varphi_-^n,(-m+V_{++})\varphi_-^n\right\rangle\\
&\leq \text{const.} + 2\|Q_+\varphi_+\|\|\varphi_-^n\| - m\left\langle\varphi_-^n,\varphi_-^n\right\rangle.
\end{aligned}$$

Lo anterior implica que $\sup_n\|\varphi_-^n\| < \infty$. Por tanto, existe $\varphi_-^* \in \mathfrak{H}_-$ y una sucesión débilmente convergente φ_-^n tal que $\varphi_-^n \xrightarrow{n\to\infty} \varphi_-^*$. Como $-m+V_{--} < 0$, el mapa $\varphi_- \mapsto \langle\varphi,D\varphi\rangle$, $\varphi_- \in \beta_-\mathfrak{D}(Q)$, es débilmente semicontinuo por arriba. Por otra parte, el mapa $\varphi_- \mapsto \langle\varphi,\varphi\rangle$, $\varphi_- \in \beta_-\mathfrak{D}(Q)$, es débilmente semicontinuo por abajo, luego

$$E(\varphi_+) = \lim_{n\to\infty}\frac{\langle\varphi^n,D\varphi^n\rangle}{\langle\varphi^n,\varphi^n\rangle} \leq \limsup_{n\to\infty}\langle\varphi^n,D\varphi^n\rangle\cdot\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{\langle\varphi^n,\varphi^n\rangle} \leq \frac{\langle\varphi^*,D\varphi^*\rangle}{\langle\varphi^*,\varphi^*\rangle} \leq E(\varphi_+),$$

donde $\varphi^* = \varphi_+ + \varphi_-^*$. Por tanto, las desigualdades del cálculo anterior son realmente igualdades, y por tanto φ^* es un elemento que maximiza (4.20). □

Demostración del Teorema 4.7. Dado que

$$P_{(-\infty,0)}\left(\frac{1}{2m}Q^2+V\right)\mathfrak{H}_+ = P_{(-\infty,0)}\left(\frac{1}{2m}Q_+^*Q_+ + V_{++}\right)\mathfrak{H}_+,$$

es suficiente probar que

$$\mu_n(D\restriction P_{(-m,\infty)}(D)\mathfrak{H}) \geq m \Longrightarrow \mu_n\left(\frac{1}{2m}Q_+^*Q_+ + V_{++}\right) \geq 0.$$

Para demostrar lo anterior, note que por el numeral [ii] del Teorema 4.5 aplicado a $V+m$ y $a=m$ tenemos que

$$\lambda_n(D) \geq \mu_n(D\restriction P_{(-m,\infty)}(D)\mathfrak{H}) \geq m.$$

Cabe aclarar que se requiere añadir la condición $\beta_+\varphi \neq 0$ en la definición de $\lambda_n(D)$ puesto que $\langle\varphi, D\varphi\rangle \leq 0$ si $\beta_+\varphi = 0$. Luego, por la desigualdad (4.3) y el Lema 4.8 tenemos que para todo subespacio $M_+ \subset \beta_+\mathfrak{D}(Q)$ con $\dim(M_+) = n$ se tiene que

$$\begin{aligned} m &\leq \sup_{\substack{\varphi\in M_+\oplus\beta_-\mathfrak{D}(Q),\\ \|\varphi\|=1}} \langle\varphi, D\varphi\rangle = \sup_{\substack{\varphi_+\in M_+,\\ \|\varphi_+\|=1}} E(\varphi_+) \\ &\leq \sup_{\substack{\varphi_+\in M_+,\\ \|\varphi_+\|=1}} \langle\varphi_+, [D^*(m+E(\varphi_+)-V_{--})^{-1}D + m + V_{++}]\varphi_+\rangle\langle\varphi_+,\varphi_+\rangle^{-1}. \end{aligned} \tag{4.21}$$

Vale la pena aclarar que el segundo y tercer supremo en la expresión anterior están restringidos a $\varphi_+ \in M_+$ con $E(\varphi_+) \geq m(1-2\epsilon)$ y $\epsilon > 0$ lo suficientemente pequeño. Es posible hacer dicha restricción puesto que $\sup_{\substack{\varphi_+\in M_+,\\ \|\varphi_+\|=1}} E(\varphi_+) \geq m$. Entonces $(m+E(\varphi_+)-V_{--})^{-1} \leq (2m(1-\epsilon))^{-1}$ y por tanto (4.21) implica que

$$0 \leq \mu_n\left(\frac{1}{2m(1-\epsilon)}D^*D + V_{++}\right) \qquad 0<\epsilon<1.$$

Esto prueba lo deseado si multiplicamos la expresión anterior por $(1-\epsilon)$ y usamos el hecho de que V_{++} es acotado. $\square$

Corolario 4.9. *Suponga que $V \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$, $V(x) \xrightarrow{|x|\to\infty} 0$ y $-2m < V(x) \leq 0$ casi siempre. Entonces, contando la multiplicidad, tenemos que el operador $-i\vec{\alpha}\cdot\vec{\bigtriangledown} + \beta m + V$ tiene por lo menos la misma cantidad de autovalores como el operador $-\bigtriangleup/(2m) + V$ en el dominio $L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)$.*

5. Conclusiones

En este trabajo se estudiaron fundamentalmente dos versiones de una generalización del principio Mín-Máx: ambas fueron demostradas rigurosamente por Griesemer y Siedentop [GS99], y una de ellas fue inicialmente propuesta por Talmann, Datta y Deviah. La primera versión, establecida en el Teorema 3.2, fue demostrada de forma rigurosa y esencialmente se usó para calcular los autovalores de operadores no semiacotados por abajo con brechas en su espectro esencial. La segunda versión, enunciada en el Teorema 4.5, fue específicamente desarrollada para el operador de Dirac, cuyo estudio detallado permitió estimar los autovalores del operador de Dirac supersimétrico además de comparar los autovalores del operador de Dirac con los del operador de Schrödinger.

En el estudio del Teorema 3.2, la idea fundamental fue aprovechar las propiedades de la form-domain con el fin de estimar los autovalores del operador de interés mediante la caracterización variacional. De igual manera, la expresión de las proyecciones espectrales en términos de la resolvente de los operadores de interés, fue crucial al momento de aplicar los resultados del susodicho Teorema 3.2 a perturbaciones relativamente compactas del operador de Dirac.

Por otra parte, en el estudio del Teorema 4.5 las herramientas desarrolladas en las secciones anteriores fueron de gran ayuda al momento de reproducir la prueba hecha por Griesemer y Siedentop en [GS99]. Nuevamente, la representación de las proyecciones espectrales en términos de los operadores de interés, además de las propiedades de la form-domain, jugaron un papel determinante en la demostración de las aplicaciones.

En general, en la prueba tanto de los teoremas principales, como de las aplicaciones, se utilizaron múltiples herramientas de Teoría de Operadores, tales como el Teorema espectral, proyecciones espectrales, teoría de perturbaciones entre otras. Además, también se usaron algunos conceptos de Análisis Complejo, en particular, la representación integral de proyecciones espectrales sobre caminos no acotados.

Ahora bien, existen múltiples aplicaciones en Física de la generalización del principio Mín-Máx, y en este trabajo solo se estudiaron algunas de ellas. Otras aplicaciones más específicas son

I Operadores de Schrödinger periódicos con perturbaciones localizadas. Este tipo de operadores aparecen en el formalismo matemático usado en la descripción de sistemas cristalinos.

II Operadores hamiltonianos de no-pair. Este tipo de operadores surgen en Química Cuántica al momento de estudiar átomos y moléculas pesadas.

Finalmente, es preciso notar que si bien el Teorema 4.5 admite múltiples tipos de operadores de Dirac sujetos a distintos tipos de potenciales, este teorema no cubre potenciales tipo Coulomb, los cuales son no acotados y, a la vez, los de mayor interés puesto que aparecen frecuentemente en la descripción de diversos sistemas físicos. Esto hace evidente la necesidad de una versión más fuerte del Teorema 3.2 o del Teorema 4.5 con la final de poder atacar operadores de Dirac con este tipo de potencial, el cual no es acotado. Esta versión ya fue desarrollada por Griesemer, Lewis y Siedentop y sería una posible ampliación del presente trabajo.

Referencias

[AG13] N.I. Akhiezer and I.M. Glazman. *Theory of Linear Operators in Hilbert Space*. Dover Books on Mathematics. Dover Publications, 2013.

[EE87] D.E. Edmunds and W.D. Evans. Spectral theory and differential operators. Oxford Math. Monogr. Oxford Sci. Publ Oxford: Clarendon Press. XVII, 574 p.; 70.00 (1987)., 1987.

[EPS96] W. D. Evans, P. Perry, and H. Siedentop. The spectrum of relativistic one-electron atoms according to bethe and salpeter. *Comm. Math. Phys.*, 178(3):733–746, 1996.

[GLS99] M. Griesemer, R. T. Lewis, and H. Siedentop. A minimax principle for eigenvalues in spectral gaps: Dirac operators with Coulomb potentials. *Doc. Math., J. DMV*, 4:275–283, 1999.

[GS99] M. Griesemer and H. Siedentop. A minimax principle for the eigenvalues in spectral gaps. *J. Lond. Math. Soc., II. Ser.*, 60(2):490–500, 1999.

[HP96] E. Hille and R.S. Phillips. *Functional Analysis and Semi Groups*. Colloquium Publications - American Mathematical Society. American Mathematical Soc., 1996.

[HS12] P. D. Hislop and I. M. Sigal. *Introduction to spectral theory: With applications to Schrödinger operators*, volume 113. Springer Science & Business Media, 2012.

[LR79] J. J. Landgren and P. A. Rejto. An application of the maximum principle to the study of essential self adjointness of Dirac operators. I. *J. Math. Phys*, 20(11):2204–2211, 1979.

[LRK80] J. J. Landgren, P. A. Rejto, and M. Klaus. An application of the maximum principle to the study of essential self adjointness of Dirac operators. II. *J. Math. Phys*, 21(5):1210–1217, 1980.

[RS78] M. Reed and B. Simon. Methods of modern mathematical physics. IV: Analysis of operators. New York - San Francisco - London: Academic Press. XV, 396 p. $ 34.00; 22.10 (1978)., 1978.

[SÍ7] D. Sánchez. On Dirac Operators and Variational Principles. Mathematics bachelor thesis, Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia, 2017.

[Sch72] U. W. Schmincke. Distinguished selfadjoint extensions of Dirac operators. *Math. Z*, 129(4):335–349, 1972.

[Tay86] Taylor, A. E. and Lay, D. C. *Introduction to Functional Analysis, 2Nd Ed.* Krieger Publishing Co., Inc., Melbourne, FL, USA, 1986.

[Tes14] G. Teschl. *Mathematical methods in quantum mechanics*, volume 157. American Mathematical Soc., 2014.

[Tha91] B. Thaller. *The Dirac equation.* Berlin: Springer-Verlag, 1991.

[Tix98] C. Tix. Strict Positivity of a Relativistic Hamiltonian Due to Brown and Ravenhall. *Bull. London Math. Soc.*, 30(3):283–290, 1998.

[Wei80] J. Weidmann. *Linear operators in Hilbert spaces*. Graduate texts in mathematics. Springer-Verlag, 1980.

[Win15a] M. Winklmeier. Lecture Notes on Functional Analysis, Enero 2015. https://matematicas.uniandes.edu.co/~mwinklme/teaching/FuncAna/FA-lecture_notes.pdf.

[Win15b] M. Winklmeier. Lecture Notes on Operator Theory, Julio 2015. https://matematicas.uniandes.edu.co/~mwinklme/teaching/OT/OTlecture_notes.pdf.

[WS72] A. Weinstein and W. Stenger. *Methods of intermediate problems for eigenvalues: theory and ramifications*. Academic Press New York, 1972.