



Universidad
de los Andes

Clasificación de los modos de polarización de ondas gravitacionales en teorías métricas

Julián David Calderón Gómez

Universidad de los Andes
Facultad de Ciencias, Departamento de Física
Bogotá, Colombia
2019

Clasificación de los modos de polarización de ondas gravitacionales en teorías métricas

Julián David Calderón Gómez

Monografía presentada como requisito parcial para optar al título de:
Físico

Director:
Doctor Pedro Bargueño de Retes

Línea de Investigación:
Ondas gravitacionales
Grupo de Investigación:
Gravitación

Universidad de los Andes
Facultad de Ciencias, Departamento de Física
Bogotá, Colombia
2019

Para Fercho

Agradecimientos

Me resulta imposible expresar todos aquellos sentimientos de agradecimiento hacia todas aquellas persona que me guiaron y acompañaron durante este proceso de formación. Sin embargo, deseo realizar un agradecimiento especial a quienes me motivaron de una manera especial a generar un desarrollo íntegro en el ámbito de la academia. En primer lugar, quiero agradecer a mi asesor, el Profesor Pedro Bagueño de Retes, quien me permitió introducirme y guiarme en esta maravillosa área de investigación. De manera especial quiero agradecerle por guiarme a través de todo este proyecto que me permitió extender mis conocimientos de una manera increíble. Asimismo, quiero agradecer al Profesor Andrés Fernando Reyes por guiarme en resultados importantes para el entendimiento de este trabajo de investigación. Finalmente, y no por ello menos importantes, quiero agradecer a mi madre, hermano y mi gran amigo por confiarme este amor a la física y acompañarme en aquellas situaciones difíciles a lo largo de la carrera. Mi mayor amor para ellos.

Resumen

En el presente documento se lleva a cabo una clasificación, desde un punto de vista geométrico y algebraico, sobre el tensor de Weyl para una teoría métrica propuesta sobre una variedad M que describe la estructura espacio - tiempo. Desde dichas perspectivas, se clasifica dicho tensor en componentes algebraicamente independientes de acuerdo a su tipo de Petrov y al modo en que transforman según Lorentz. De esta manera, se logra determinar si sobre tal teoría métrica una onda gravitacional se propaga en una dirección independiente del sistema de referencia \mathcal{O} y, asimismo, observar si es posible hablar de cuantización en estas componentes de Weyl según el Teorema presentado por Wigner sobre las representaciones unitarias del grupo de Poincaré \mathcal{P} .

Abstract

In the present document we perform, from a geometric and algebraic point of view, a classification on the Weyl tensor for a metric theory defined on a manifold M which describes the space - time structure. From these perspectives, we classify this tensor in algebraically independent components according to their Petrov's type and the behavior under Lorentz transformations. In this way, we can resolve if in this metric theory a gravitational wave propagates in an independent way of a reference system \mathcal{O} . Likewise, we observe if on the Weyl components we can quantize according to Wigner's theorem about unitary representations of the Poincaré group \mathcal{P} .

Contenido

Agradecimientos	vii
Resumen	ix
1 Introducción	2
2 Fundamentos	4
2.1 Variedad	4
2.1.1 Topología	4
2.1.2 Espacio Tangente	6
2.1.3 Tensores	9
2.2 Curvatura	11
2.2.1 Tensor métrico	11
2.2.2 Operador Derivada ∇	12
2.2.3 Curvatura	16
2.2.4 Propiedades Riemann	18
2.2.5 Geodésica	21
2.3 Relatividad General	23
2.3.1 Principio de equivalencia	23
2.3.2 Tensor Energía - Momento	24
2.3.3 Radiación Gravitacional	25
2.4 Tétradas	29
2.4.1 Representación de Tétradas	29
2.4.2 Formalismo de Newman - Penrose	31
2.5 Onda Gravitacional en Función de Riemann	33
3 Componente Algebraico	37
3.1 Clasificación de Petrov	37
3.1.1 Espacio de Bivectores	37
3.1.2 Clasificación a partir de Petrov	38
3.1.3 Clasificación a partir de Bel	40
3.2 Grupos de Lie	44
3.2.1 Grupo y álgebra de Lie	45
3.2.2 Representaciones de Grupos de Lie	49

3.3	Grupo de Poincaré	51
3.3.1	Grupo de Lorentz	51
3.3.2	Grupo de Poincaré	55
3.3.3	Representaciones unitarias de \mathcal{P} para masa cero	60
3.4	Escalares de Weyl	62
4	Clasificación	65
4.1	Formulación Lagrangiana de la Relatividad General	65
4.1.1	Clasificación para la ecuación de Einstein	68
4.2	Teoría de Brans - Dicke	68
4.2.1	Clasificación para Brans - Dicke	69
5	Conclusiones	71
	Bibliografía	72

1 Introducción

El entendimiento de la teoría de la relatividad general durante el siglo XX permitió la descripción de distintos fenómenos gravitacionales que, con el paso del tiempo, y aprovechando los avances tecnológicos, han sido corroborados desde un punto de vista experimental. El descubrimiento llevado a cabo por *LIGO* en el año 2015 resultó ser uno de los resultados más importantes anticipados por la teoría gravitacional propuesta por Einstein: *las ondas gravitacionales*. Aunque su descubrimiento no fue posible hasta nuestro siglo, el estudio de dichas ondas desde una perspectiva teórica fue de alta importancia durante el siglo XX, desde en la investigación en alternativas experimentales para su detección [1] como criterio para evaluar otras teorías que se extienden más allá de la relatividad general.

Estas teorías métricas extendidas han sido objeto de estudio desde el siglo pasado con el propósito de profundizar en algunos ámbitos gravitacionales que la relatividad general no permite, por sí misma, explicar en su totalidad. Un ejemplo de estas teorías extendidas corresponde a Brans - Dicke, la cual supone un ingrediente adicional en la interpretación de la gravedad que busca describir el comportamiento de fuerzas inerciales entre dos observadores en un escenario localmente sin materia [2]. Una característica de estas teorías extendidas es su indistinguibilidad respecto a la teoría de Einstein en el límite Post - Newtoniano, formalismo que permite analizar el comportamiento de dicha teoría métrica en el límite de un campo gravitacional débil y bajas velocidades [3].

Otro desarrollo importante durante el siglo XX viene dado por la mecánica cuántica y sus resultados en el entendimiento de partículas fundamentales. Naturalmente, surge el deseo de generar una teoría que permita describir simultáneamente estos dos aspectos. Así como la “unión” entre la mecánica cuántica y los fundamentos de la relatividad especial permitieron entender a un nivel fundamental las partículas presentes en la naturaleza, surgió el interés de describir, desde un punto de vista microscópico, la gravitación en el espacio - tiempo.

Hacia la década de los 60, Douglas Eardley, David Lee y Alan Lightman [3] introdujeron un método que permite realizar una clasificación sobre una onda gravitacional descrita a partir de una teoría métrica dada. Dicha clasificación estudia el comportamiento de una onda gravitacional en el vacío bajo un conjunto de observadores de Lorentz. Junto a algunos resultados provenientes de teoría de grupos asociados al estudio de partículas fundamentales, es posible determinar que, de acuerdo a la clase que pertenece la onda gravitacional descrita, se puede llevar a cabo un análisis cuántico sobre sus amplitudes o no. Así, al generar una teoría métrica que permita describir un problema de una forma más apropiada que desde el punto de vista de Einstein, surge la necesidad que esta teoría cumpla, adicionalmente, esta propiedad de cuantización intrínseca en sus modos de polarización.

En este trabajo de monografía hemos llevado a cabo dicha clasificación realizado por Eardley et al. para dos teorías métricas: relatividad general y Brans - Dicke. Sin embargo, para el entendimiento adecuado de dicha clasificación, hemos realizado un estudio sobre dos componentes distintas: un punto de vista geométrico y otro más algebraico. En la primera parte, condensada en el capítulo *Fundamentos*, realizamos una deducción del tensor de curvatura de Riemann para una variedad M que describe nuestro espacio - tiempo. Describimos la relación que existe entre este tensor y el tensor de Weyl, el cual contendrá la información de los modos de polarización (amplitudes) de las ondas gravitacionales. En el siguiente capítulo, *Componente Algebraico*, introducimos la descomposición de Petrov, la cual nos permitirá clasificar una teoría métrica de acuerdo al número de modos que se anulan. Tendremos también el enlace mencionado con la mecánica cuántica a través del grupo de Poincaré, el cual describe las transformaciones inhomogéneas entre dos observadores en el contexto de la relatividad especial. En este mismo capítulo, conectamos dicha componente algebraica con la componente geométrica según Petrov y las representaciones unitarias presentes en cada uno de dichos modos de polarización.

En el capítulo *Clasificación* llevamos a cabo dicha categorización de acuerdo a la teoría métrica a estudiar (relatividad general y Brans - Dicke).

Finalmente, en el capítulo *Conclusiones* mencionamos algunas discusiones generadas a lo largo de este trabajo monográfico y, de la misma manera, futuras rutas de trabajo generadas a partir de lo mencionado en este proceso de clasificación de ondas gravitacionales.

2 Fundamentos

En este capítulo desarrollamos los principios geométricos en el formalismo de la relatividad general. Para ello, se expone el concepto de *Variedad Riemanniana* y campos tensoriales [4] desde un punto de vista formalmente matemático. Preliminarmente, podemos entender el concepto de *variedad* como un conjunto de puntos que localmente poseen propiedades como \mathbb{R}^n . Así, se hace necesario estudiar el conjunto de planos tangentes a estas regiones y, a partir de ciertas propiedades, definir el concepto de curvatura, paralelismo y geodésica. Paso inmediato, introducimos el *Tensor de Riemann* conectándolo con las definiciones anteriores y desarrollando algunas propiedades de simetría y antisimetría sobre este objeto matemático.

2.1. Variedad

El entendimiento de nuestro universo lo podemos plantear a través de una estructura continua cuatro - dimensional, donde requerimos de cuatro coordenadas para etiquetar un evento [4]. Sin embargo, esta caracterización no es posible ejecutarla desde una perspectiva global. Una manifestación de este problema la podemos encontrar en la descripción geométrica de la superficie terrestre. Localmente ésta presenta características similares a un conjunto plano sobre \mathbb{R}^3 ; sin embargo, en un margen global se trata de una superficie curva. Aunque tengamos una descripción de la superficie por trozos (parches) localmente planos, no es posible reconstruir, conservando una noción de distancia, la esfera. De este modo, surge la necesidad de estudiar estructuras globalmente más complejas que el espacio plano. En primer lugar, especifiquemos algunas definiciones básicas matemáticas.

2.1.1. Topología

Definición: Espacio Topológico. Un espacio topológico (X, \mathcal{T}) consiste en un conjunto X junto con una colección $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ (Partes de X) que satisface las siguientes condiciones:

- Si $O_\alpha \in \mathcal{T}$ para todo $\alpha \in I$, entonces $\cup_{\alpha \in I} O_\alpha \in \mathcal{T}$.
- La intersección de una colección finita de conjuntos en \mathcal{T} está en \mathcal{T} , i.e, si $O_1, \dots, O_n \in \mathcal{T}$ entonces $\cap_{i=1}^n O_i \in \mathcal{T}$.
- El conjunto X y \emptyset pertenecen a \mathcal{T}

Así, \mathcal{T} es llamada una topología sobre X y los elementos de esta colección se llaman abiertos.

Dada la definición de un conjunto abierto es intuitiva la pregunta de cómo caracterizar, de manera sistemática, cualquiera de estos conjuntos dado un subconjunto de abiertos sobre el que tengamos mayor control.

Definición: Base para una topología. Sea X un conjunto. Una base \mathcal{B} para una topología sobre X es una colección de subconjuntos de X tales que:

- Para todo $x \in X$ existe al menos un elemento base $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$
- Si $x \in B_1 \cap B_2$, con $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, entonces existe un elemento $B_3 \in \mathcal{B}$ que contiene a x tal que $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$

Si \mathcal{B} satisface las condiciones anteriores podemos construir una topología \mathcal{T} generada por \mathcal{B} como: Dado $U \subseteq X$, decimos que U es un conjunto abierto si para todo $x \in X$ existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$ y $B \subseteq U$. Así, la noción de bolas en \mathbb{R}^n es un elemento de la base [5]. Otro concepto fundamental que necesitamos tiene que ver con la continuidad de una función f dados dos espacios topológicos.

Definición: Continuidad. Sean (X, \mathcal{T}_1) y (Y, \mathcal{T}_2) dos espacios topológicos. Sea $f : X \rightarrow Y$ una función. Decimos que f es continua si y sólo si para todo conjunto abierto V en Y , el conjunto $f^{-1}(V)$ es abierto en X .

Dada la definición de topología podemos introducirnos en el entendimiento de una variedad. Como mencionamos antes, ésta la podemos ilustrar como un conjunto de puntos que localmente se pueden modelar como \mathbb{R}^n . Esta idea la podemos traducir como: Un abierto sobre nuestra variedad se comportará como un conjunto abierto sobre \mathbb{R}^n .

Definición: Carta. Sea M un espacio topológico. Sea $O_\alpha \subseteq M$ un conjunto abierto. Sea $\Psi : O_\alpha \rightarrow U_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n$ (U_α abierto en \mathbb{R}^n) una función continua inyectiva con inversa continua. Decimos entonces que la pareja (O_α, Ψ_α) es una carta sobre el espacio topológico M .

Con estas definiciones podemos definir qué es una variedad.

Definición: Variedad. Una variedad real M n -dimensional C^∞ es un conjunto junto a una colección de cartas $\mathcal{A} = \{(O_\alpha, \Psi_\alpha)\}$ con las siguientes propiedades:

- Para todo $p \in M$ existe O_α tal que $p \in O_\alpha \subseteq M$. Es decir, la colección de abiertos en \mathcal{A} cubre M .
- Cada uno de los mapas $\Psi_\alpha : O_\alpha \rightarrow U_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n$ es una biyección con inversa continua.
- Dadas dos cartas $(O_\alpha, \Psi_\alpha), (O_\beta, \Psi_\beta)$, éstas deben ser C^∞ compatibles, i.e, si $O_\alpha \cap O_\beta \neq \emptyset$ los mapas:

$$\begin{aligned} \Psi_\alpha \circ \Psi_\beta^{-1} &: \Psi_\beta(O_\alpha \cap O_\beta) \rightarrow \Psi_\alpha(O_\alpha \cap O_\beta), \\ \Psi_\beta \circ \Psi_\alpha^{-1} &: \Psi_\alpha(O_\alpha \cap O_\beta) \rightarrow \Psi_\beta(O_\alpha \cap O_\beta) \end{aligned}$$

son C^∞ (en el sentido de funciones reales).

Cada una de estas cartas Ψ_α las llamaremos sistema de coordenadas[4]. Finalmente, dadas dos variedades M y M' y una función $f : M \rightarrow M'$, podemos definir la noción de diferenciabilidad y suavidad de la función.

Definición: S. sea $f : M \rightarrow M'$ una función entre dos variedades M y M' . Decimos que f es C^∞ si para todo α y β la función

$$\Psi'_\beta \circ f \circ \Psi_\alpha^{-1} : U_\alpha \rightarrow U'_\beta$$

es C^∞ .

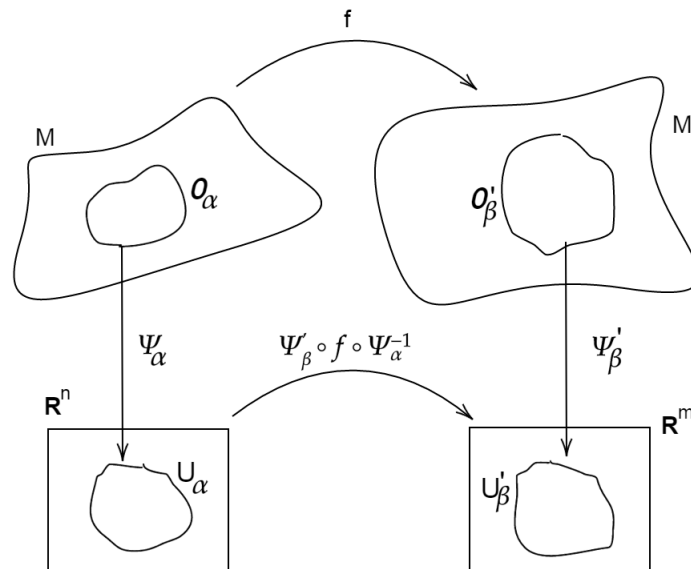


Figura 2-1: Diagrama de la definición de suavidad y diferenciabilidad de una función $f : M \rightarrow M'$

2.1.2. Espacio Tangente

El concepto de un espacio vectorial es ampliamente utilizado en diversos campos de la física. Desde un punto de vista clásico y en relatividad especial es posible dotar al espacio con una estructura de espacio vectorial una vez se haya definido un “origen” [4]. Sin embargo, cuando consideramos estructuras distintas al espacio euclídeo plano, esta estructura de un espacio vectorial generalmente no es posible ampliarla desde un punto de vista global. Considerando la esfera, dados dos puntos P y Q , no es posible garantizar que $P+Q$ sea un punto sobre ésta. Así, es necesario incluir un nuevo concepto: *Espacio Tangente*. Aquí es posible recuperar una estructura de espacio vectorial sobre un punto $P \in M$ en el límite infinitesimal.

Así mismo, existe otra consideración que debemos hacer. Es natural imaginar una variedad M como una superficie embebida en un espacio euclídeo \mathbb{R}^{n+1} (por ejemplo el caso de la esfera \mathbb{S}^2 , la cual es embebida en \mathbb{R}^3). Esta descripción suele ser matemáticamente precisa.

Sin embargo, en el caso de relatividad general, por ejemplo, consideramos una variedad M sin el embebimiento en \mathbb{R}^{n+1} . Esta situación nos restringe la noción sobre espacio tangente y se hace necesario definir éste a partir de la estructura misma de la variedad M [4].

Definición: Vector Tangente. Sea M una variedad y sea $p \in M$ un punto. Llamamos \mathcal{F} al conjunto de funciones C^∞ de M en \mathbb{R} . El vector tangente v en el punto p es un mapa $v : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$, el cual es lineal y cumple regla de Leibnitz:

- $v(af + bg) = av(f) + bv(g)$, para todo $f, g \in \mathcal{F}$ y $a, b \in \mathbb{R}$
- $v(fg) = f(p)v(g) + g(p)v(f)$

Llamamos V_p , espacio tangente sobre p , al conjunto de vectores tangentes v sobre el punto $p \in M$. Éste posee estructura de espacio vectorial con la regla de adición y multiplicación escalar: $(v_1 + v_2)(f) := v_1(f) + v_2(f)$ y $(av)(f) := av(f)$. Determinemos ahora la dimensión de este espacio tangente V_p ,

Teorema: Dimensión V_p . Sea M una variedad real n -dimensional. Sea $p \in M$ y sea V_p el espacio tangente en p . Entonces $\dim V_p = n$.

Demostración. Para demostrar que $\dim V_p = n$, basta encontrar n elementos linealmente independientes que generen V_p . Consideremos una carta $(O, \Psi) \in \mathcal{A}$ tal que $p \in O$. Sea $f \in \mathcal{F}$. Considerando la gráfica **2-1** y la definición de función suave, vemos entonces que $f \circ \Psi^{-1} : U \rightarrow \mathbb{R}$ es C^∞ (En este caso $M' = \mathbb{R}$ y $\Psi'_\beta = Id_{\mathbb{R}}$). Para $\mu = 1, \dots, n$ definamos:

$$X_\mu(f) = \left. \frac{\partial}{\partial x^\mu} (f \circ \Psi^{-1}) \right|_{\Psi(p)}$$

Donde x^μ son las coordenada cartesianas en \mathbb{R}^n . Por definición, tenemos que X_μ son vectores tangentes y por construcción son linealmente independientes: Consideremos

$$0 = a^1 X_1 + \dots + a^n X_n,$$

donde $a^i \in \mathbb{R}$. Sea $f_i : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $f_i \circ \Psi^{-1}(x^1, \dots, x^n) = x^i$. Aplicando los vectores tangentes X_i a la función f_i vemos que $a^i = 0$. Veamos ahora que este conjunto genera V_p . Del cálculo en \mathbb{R}^n tenemos el siguiente resultado para una función $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (Teorema de Taylor): Si F es una función C^∞ , entonces para todo $a \in \mathbb{R}^n$ existen funciones $H_\mu \in C^\infty$ tal que:

$$F(x) = F(a) + \sum_{\mu=1}^n (x^\mu - a^\mu) H_\mu(x),$$

con

$$H_\mu(a) = \left. \frac{\partial F}{\partial x^\mu} \right|_{x=a}.$$

Aplicando el resultado anterior a la función $F = f \circ \Psi^{-1}$ con $a = \Psi(p)$:

$$f(q) = f(p) + \sum_{\mu=1}^n [x^\mu \circ \Psi(q) - x^\mu \circ \Psi(p)] H_\mu(\Psi(q)),$$

donde $x^\mu \circ \Psi(q)$ se entiende como la coordenada μ -ésima de $\Psi(q) \in \mathbb{R}^n$. Sea $v \in V_p$. Apliquemos v a la expresión anterior dada para $f(q)$:

$$v(f) = v[f(p)] + \sum_{\mu=1}^n \left\{ [x^\mu \circ \Psi(q) - x^\mu \circ \Psi(p)] \Big|_{q=p} v(H_\mu \circ \Psi) + (H_\mu \circ \Psi) \Big|_p v[x^\mu \circ \Psi - x^\mu \circ \Psi(p)] \right\},$$

Nótese que de la definición de un vector tangente v , $v(c) = 0$, donde c es una constante. Así tenemos entonces:

$$v(f) = \sum_{\mu=1}^n [H_\mu \circ \Psi(p)] v(x^\mu \circ \Psi);$$

y por definición de los $H_\mu(x)$, tenemos entonces que $H_\mu \circ \Psi(p) = X_\mu(f)$. Así, para todo $f \in \mathcal{F}$, tenemos que:

$$v(f) = \sum_{\mu=1}^n v^\mu X_\mu(f),$$

con $v^\mu = v(x^\mu \circ \Psi)$. Por lo tanto, el conjunto de X_μ genera V_p . \square

Esta base la conocemos como *base coordenada*. Es necesario resaltar la escogencia sobre la carta Ψ . Así, para otra carta Ψ' , podemos realizar una transformación de base y obtener $B' = \{X'_\nu\}$. Podemos relacionar las dos bases a través de:

$$X_\mu = \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} \Big|_{\Psi(p)} X'_\nu.$$

Ésta última se ha obtenido realizando regla de la cadena sobre el mapa $f = \Psi' \circ \Psi^{-1}$. Así podemos entonces transformar las componentes de un vector v en la base B' :

$$v'^\nu = \sum_{\mu=1}^n v^\mu \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} \quad (2-1)$$

Ecuación 2-1 se conoce como *Ley de transformación* [6].

Con estas relaciones podemos pensar ahora cómo describir una curva suave Γ sobre nuestra variedad M . El entendimiento del comportamiento de las curvas sobre una variedad será de gran importancia como ya veremos posteriormente. En resumen, a partir de una curva Γ dada, podemos analizar cómo la curvatura de nuestra variedad afecta la curva y, así, medir este valor. Por otro lado, en el contexto físico, nuestras partículas de prueba seguirán trayectorias definidas sobre estas variedades las cuales serán objeto de estudio cuando estudiemos el tensor Energía - momento.

Definición: Curva Suave. Una curva suave Γ sobre una variedad M es un mapa C^∞ de \mathbb{R} en M . A cada punto $p \in M$, podemos asociar un vector tangente como: para todo $f \in \mathcal{F}$ definimos

$$T(f) := \frac{d(f \circ \Gamma)}{dt},$$

donde t es el parámetro que describe nuestra curva.

Nótese que, al escoger un sistema de coordenada Ψ , los vectores X_μ de la base coordenada son vectores tangentes a las curvas que mantienen todas las coordenadas constantes excepto x^μ . Por otro lado, la curva Γ será mapeada a una curva $x^\mu(t) \subseteq \mathbb{R}^n$. Con esto en mente, vemos entonces que:

$$T(f) = \frac{d}{dt}(f \circ \Gamma) = \sum_\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} (f \circ \Psi^{-1} \frac{dx^\mu}{dt}) = \sum_\mu \frac{dx^\mu}{dt} X_\mu(f).$$

Así, las componentes del vector T vienen dadas por:

$$T^\mu = \frac{dx^\mu}{dt}. \quad (2-2)$$

En los resultados anteriores, hemos definido un espacio tangente V_p dado un un punto $p \in M$. Sin embargo, dado otro punto $q \in M$, donde definimos el espacio tangente V_q , no hay una manera directa de relacionar los espacios V_p y V_q . Es necesario definir entonces una *conexión* sobre nuestra variedad M , lo que dará lugar al concepto de paralelismo. Necesitamos definir, por ahora, algunos nuevos conceptos sobre nuestros espacios tangentes dado un punto fijo $p \in M$.

Definición: Campo Tangente. Un campo Tangente, v , sobre una variedad M es una asignación de un vector tangente $v|_p \in V_p$ a cada punto $p \in M$. Sea $f \in C^\infty$, entonces para todo punto $p \in M$, $v|_p(f) \in \mathbb{R}$, i.e, $v(f) \in C^\infty$. Diremos que el campo v es suave si para toda función f suave, $v(f)$ también es suave.

Definición: Conmutador. Sean v y w dos campos tangentes sobre una variedad M . Definimos un nuevo campo tangente $[v, w]$, llamado el conmutador de v y w dado por:

$$[v, w](f) = v[w(f)] - w[v(f)]$$

Nótese que dado dos campos vectoriales X_μ y X_ν que pertenecen a una base coordenada, el conmutador es 0 (derivadas parciales conmutan).

2.1.3. Tensores

Al considerar algunas cantidades adicionales asociadas a un punto en el espacio, requerimos de un nuevo objeto matemático que contenga esta información. En nuestro caso, dada una variedad M , el concepto de curvatura estará asociado a una cantidad *tensorial* llamada tensor de Riemann. Haremos una breve introducción al lenguaje tensorial para, finalmente, asociar estos últimos resultados con situaciones físicas de nuestro interés.

Definición: Tensor. Sea V un espacio vectorial y V^* su espacio dual. Un tensor, de tipo (k, l) sobre V es un mapa multilinear

$$T : \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_k \times \underbrace{V \times \dots \times V}_l \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Dadas las reglas de suma y multiplicación por escalar, la familia $\mathcal{T}(k, l)$ de todos los tensores tipo (k, l) conforman un espacio vectorial. Dados $\{v_\mu\}$ y $\{v^{*\mu}\}$ las bases de los espacios V y V^* respectivamente, el conjunto $B = \{v_{\mu_1} \otimes \dots \otimes v_{\mu_k} \otimes v^{*\nu_1} \otimes \dots \otimes v^{*\nu_l}\}$ es una base para $\mathcal{T}(k, l)$. Por lo tanto, dado un tensor $T \in \mathcal{T}(k, l)$, tenemos que:

$$T = \sum_{\mu_1, \dots, \nu_l}^n T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} v_{\mu_1} \otimes \dots \otimes v^{*\nu_l}.$$

Veamos ahora la ley de transformación en las componentes de tensores dadas dos bases coordenadas. Tenemos que:

$$T'^{\mu'_1 \dots \mu'_k}_{\nu'_1 \dots \nu'_l} = \sum_{\mu_1, \dots, \nu_l}^n T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\mu_1}} \cdots \frac{\partial x'^{\nu_l}}{\partial x^{\nu_l}}.$$

Así como ecuación 2-1 nos presenta cómo transforman vectores, la ecuación anterior expresa la *Ley de transformación* para componentes de un tensor T . Antes de finalizar este tópico de tensores, vamos a introducir notación que se usará en el desarrollo de este documento. Hemos seguido la notación establecida en Wald en su libro *General Relativity* [4]. Hay dos maneras de estudiar y llevar a cabo cuentas con un tensor: a partir de sus componentes o sin especificar alguna base. Hay diferencias en estos dos modos. En el primero de ellos, al escribir las ecuaciones garantizaremos que éstas serán ecuaciones tensoriales independientes de la base, es decir, se cumplirán para toda base B de $\mathcal{T}(k, l)$. En el segundo caso, tenemos el inconveniente que, al escribir la ecuación, ésta será dependiente de la escogencia de nuestra base.

Para diferenciar cada uno de los casos adoptamos la siguiente notación: Un tensor $T \in \mathcal{T}(k, l)$ será denotado por:

$$T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l},$$

donde tenemos k vectores (tensor k *covariante*) y l duales (tensor l *contravariante*). Para introducir una ecuación que dependerá de la base, usaremos índices griegos. Por ejemplo, dado un tensor T^{abc}_{ed} , éste tendrá componentes $T^{\mu\nu\sigma}_{\alpha\beta}$.

Finalmente, definiremos la parte simétrica y antisimétrica (simetrización y antisimetrización) de un tensor $T_{a_1 \dots a_n}$ como:

$$T_{(a_1 \dots a_n)} = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} T_{a_{\sigma(a)} \dots a_{\sigma(n)}}, \quad (2-3)$$

$$T_{[a_1 \dots a_n]} = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma T_{a_{\sigma(a)} \dots a_{\sigma(n)}}, \quad (2-4)$$

donde S_n es el grupo de permutaciones de orden n y $(-1)^\sigma$ es el "signo" de la permutación. Con los resultados expresados en esta sección podemos entonces estudiar algunas propiedades geométricas sobre una variedad M y ligar con nuestro objeto de estudio en Relatividad General.

2.2. Curvatura

Como hemos mencionado antes, es de nuestro interés entender el concepto de curvatura en una variedad M . El primer acercamiento que tenemos en mención al concepto de curvatura es en relación a una superficie S bidimensional en \mathbb{R}^3 . Sin embargo, al estudiar nuestro espacio - tiempo tenemos que considerar que no poseemos tal embebimiento como ocurre en el caso de la superficie. Por lo tanto, se hace necesario construir el concepto de curvatura a través de otras propiedades intrínsecas de la variedad. ¿Cómo varía un vector v a través de una curva sobre el conjunto M ? ¿El vector, a través de una curva cerrada C , vuelve a su posición original? Por otra parte, en \mathbb{R}^n poseemos la noción el concepto de recta que une dos puntos p y q en el espacio. Surge entonces la pregunta de cómo generalizar esta idea para una estructura de variedad M . Las respuestas a estas preguntas nos introducirán el concepto de curvatura.

En primer lugar, debemos analizar un problema que surge en la variedad M . Hemos visto que dados dos puntos $p, q \in M$, podemos definir los espacios tangentes V_p y V_q . Sin embargo, no existe, a priori, ninguna conexión entre estos dos espacios y por lo tanto no podemos asociar un vector $v \in V_p$ en V_q . Surge entonces la necesidad de dotar a nuestra variedad M de alguna estructura diferencial que nos permita realizar esta conexión. Veremos que este operador diferencial estará asociado a un tensor g llamado *tensor métrico*; intuitivamente, este tensor métrico nos permitirá medir "distancias" dados dos puntos sobre nuestra variedad.

2.2.1. Tensor métrico

Una métrica g supone la posibilidad de medir distancias asociadas a desplazamientos infinitesimales. Dados dos puntos en el espacio podemos infinitesimalmente separados, podemos definir una estructura que nos determine un valor sobre qué tan desplazados se encuentran uno del otro. Así, vemos que esta métrica g será un tensor de tipo $(0, 2)$. Dados dos vectores $v_1, v_2 \in V_p$, podemos asociar un valor que relacionamos con la distancia entre éstos.

Definición: Tensor métrico. Sea M una variedad real n -dimensional. Sea $g \in \mathcal{T}(0, 2)$ tal que cumple las siguientes propiedades:

- *Simetría:* Para todo $v_1, v_2 \in V_p$ tenemos que $g(v_1, v_2) = g(v_2, v_1)$.
- *No degenerado:* Si $g(v, v_1) = 0$ para todo $v \in V_p$ entonces $v_1 = 0$

Este tensor métrico g resulta ser un producto interno sobre el espacio tangente V_p para todo $p \in M$. Dada una base coordenada, podemos expandir g en términos de componentes $g_{\mu\nu}$ como:

$$g = \sum_{\mu,\nu} g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu,$$

donde $\{dx^\mu\}$ denota la base dual coordenada tal que $dx^\mu(X_\nu) \equiv dx^\mu\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right) = \delta_\nu^\mu$. Dada la idea de distancias que representa el tensor métrico g , tenemos entonces:

$$ds^2 = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu.$$

Aunque hemos definido el tensor métrico g como un tensor de la familia $\mathcal{T}(0, 2)$, es posible ver a g como una función lineal de V_p a V_p^* . Tenemos:

$$\begin{aligned} g: V_p &\rightarrow V_p^* \\ v &\mapsto g(\cdot, v). \end{aligned}$$

De esta manera, dada una métrica g sobre una variedad, podemos relacionar vectores del espacio V_p con vectores del espacio dual V_p^* .

2.2.2. Operador Derivada ∇

Dada la definición de un operador derivada sobre una estructura de variedad M podremos estudiar entonces algunas propiedades de ésta tales como transporte paralelo y geodésicas, las cuales nos llevarán a la noción de curvatura.

Definición: Operador derivada. Un operador derivada ∇ sobre una variedad M es un mapa que toma un campo tensorial suave (o a lo sumo diferenciable) de tipo (k, l) y lo lleva a un campo tensorial suave de tipo $(k, l + 1)$:

$$\begin{aligned} \nabla: \mathcal{T}(k, l) &\rightarrow \mathcal{T}(k, l + 1) \\ T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} &\mapsto \nabla_c T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}. \end{aligned}$$

El operado ∇ cumple con las siguientes propiedades:

- *Linealidad:* Para todo $A, B \in \mathcal{T}(k, l)$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\nabla(\alpha A + \beta B) = \alpha \nabla A + \beta \nabla B.$$

- *Leibnitz:* Para todo $A \in \mathcal{T}(k, l)$ y $B \in \mathcal{T}(k', l')$:

$$\nabla(A B) = \nabla(A)B + A\nabla(B).$$

- *Commutatividad con la contracción:* Para todo $A \in \mathcal{T}(k, l)$:

$$\nabla_d (A^{a_1 \dots c \dots a_k}_{b_1 \dots c \dots b_l}) = \nabla_d A^{a_1 \dots c \dots a_k}_{b_1 \dots c \dots b_l}.$$

- Noción de campos tangentes como derivadas direccionales sobre campos escalares. Para todo $f \in \mathcal{F}$ y todo $t^a \in V_p$:

$$t(f) = t^a \nabla_a(f).$$

- *Libre de torsión*: Para todo $f \in \mathcal{F}$:

$$\nabla_a \nabla_b f = \nabla_b \nabla_a f$$

Dada esta definición de un operador derivada o usualmente llamada *derivada covariante*, podemos escribir el conmutador de dos campos vectoriales v, w en terminos del operador ∇ :

$$\begin{aligned} [v, w](f) &= v\{w(f)\} - w\{v(f)\} \\ &= v^a \nabla_a (w^b \nabla_b f) - w^a \nabla_a (v^b \nabla_b f) \\ &= \{v^a \nabla_a w^b - w^a \nabla_a v^b\} \nabla_b f. \end{aligned}$$

Así; tenemos entonces que:

$$[v, w]^b = v^a \nabla_a w^b - w^a \nabla_a v^b \quad (2-5)$$

La existencia del operador ∇ es trivial. Dado un sistema de coordenadas Ψ , podemos definir $\nabla_a \equiv \partial_a$. Este operador cumple las propiedades anteriores; sin embargo, resulta ser un operador dependiente de la base escogida. Buscamos un operador derivada que nos permita escribir ecuaciones tensoriales sin hacer mención a ninguna base.

Sean ∇_a y $\tilde{\nabla}_a$ dos operadores derivadas. Consideremos un campo escalar f y un vector covariante w_b . Veamos cómo se relacionan estos dos operadores:

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_a(fw_b) - \nabla_a(fw_b) &= \tilde{\nabla}_a(f)w_b + f\tilde{\nabla}_a(w_b) - \nabla_a(f)w_b - f\nabla_a(w_b) \\ &= w(f) + f\tilde{\nabla}_a(w_b) - w(f) - f\nabla_a(w_b) \\ &= f(\tilde{\nabla}_a w_b - \nabla_a w_b) \end{aligned}$$

Dado un punto $p \in M$ veremos que la diferencia $\tilde{\nabla}_a w_b - \nabla_a w_b$ sólo depende del valor de w_b en el punto p . Para ello, vamos a considerar dos duales w_b y w'_b iguales en p . Expandiendo en una base de vectores duales asociada al campo tangente V_p tenemos:

$$w_b - w'_b = \sum_{\mu=1}^n f_{(\mu)} v_b^{*(\mu)},$$

donde las funciones $f_{(\mu)}$ se anulan en el punto p . De este modo, aplicando el mismo procedimiento para la diferencia de los dos operadores derivadas evaluando en el punto p , tenemos:

$$\tilde{\nabla}_a(w'_b - w_b) - \nabla_a(w'_b - w_b) = \sum_{\mu=1}^n f_{(\mu)} \{\tilde{\nabla}_a v_b^{*(\mu)} - \nabla_a v_b^{*(\mu)}\} = 0.$$

Por lo tanto, $\tilde{\nabla}_a - \nabla_a$ define un mapa lineal de vectores duales en p (punto a punto) [4]. Así, tenemos entonces que:

$$\nabla_a w_b = \tilde{\nabla}_a w_b - C^c_{ab} w_c. \quad (2-6)$$

Aplicando la propiedad de torsión para un campo escalar f , observamos que el tensor $C^c_{ab} \in \mathcal{T}(1, 2)$ es simétrico sobre los índices b, c , i.e, $C^c_{ab} = C^c_{ba}$.

Bajo esta misma idea, podemos construir la derivada covariante de un tensor $T \in \mathcal{T}(k, l)$ como:

$$\nabla_a T^{b_1 \dots b_k}_{c_1 \dots c_l} = \tilde{\nabla}_a T^{b_1 \dots b_k}_{c_1 \dots c_l} + \sum_i C^{b_i}_{ad} T^{b_1 \dots d \dots b_k}_{c_1 \dots c_l} - \sum_i C^d_{ac_i} T^{b_1 \dots b_k}_{c_1 \dots d \dots c_l}. \quad (2-7)$$

Vemos entonces que la conexión entre dos operadores derivada ∇ y $\tilde{\nabla}$ está dada por este tensor C^c_{ab} . De este modo, podemos escoger el operador $\tilde{\nabla}_a = \partial_a$ y denotar $C^c_{ab} \equiv \Gamma^c_{ab}$, llamado *símbolo de Christoffel*.

De acuerdo a la definición de operador derivada obtenida anteriormente, podemos ahora estudiar cómo se mueve un vector v tangente a una variedad M . Dada una curva $C \subseteq M$, podemos estudiar cómo se transporta un vector en ella. Observaremos que cuando se trata de una curva cerrada, un vector moviéndose paralelamente a través de ella *paralelamente* no recuperará su orientación inicial. Con ello, podremos entonces asociar esta diferencia a la presencia de un tipo de estructura curva en la variedad M .

Definición: Transporte Paralelo. Sea ∇_a un operador derivada. Sea C una curva suave sobre la variedad M con campo tangente t^a . Un vector v^a asociado a cada plano tangente sobre todo punto p en la curva C decimos que es paralelamente transportado a través de la curva si:

$$t^a \nabla_a v^b = 0. \quad (2-8)$$

Para un tensor $T \in \mathcal{T}(k, l)$ decimos que es transportado paralelamente a través de C si:

$$t^a \nabla_a T^{b_1 \dots b_k}_{c_1 \dots c_l} = 0.$$

Para un sistema de coordenadas Ψ y describiendo la curva C mediante un parámetro t , podemos reescribir la ecuación 2-8 como:

$$\frac{dv^\mu}{dt} + \sum_{\nu, \lambda} t^\nu \Gamma^\mu_{\nu\lambda} v^\lambda = 0. \quad (2-9)$$

Nótese que con la definición dada para un operador derivada sobre una variedad M es posible encontrar distintos operadores que satisfagan estas propiedades. Sin embargo, no hemos asociado estos operadores con una métrica g dada a la variedad. Veamos que dada una métrica g_{ab} encontramos una nueva condición para la derivada covariante. Sean v^a y

w^a dos vectores que se transportan paralelamente a través de una curva C con con vector tangente t^a . Fijemos la condición extra de que el producto interno dado por el tensor métrico sea transportado paralelamente (invariante a través de toda curva). Esta condición es un requerimiento al operador, pues dada una métrica que nos relaciona distancia, buscamos que dados dos vectores, estos permanezca la misma longitud infinitesimal ds^2 . Así, tenemos entonces que:

$$\begin{aligned} 0 &= t^a \nabla_a (g_{bc} v^b w^c) = t^a v^b w^c \nabla_a g_{bc} \\ &\Rightarrow \nabla_a g_{bc} = 0. \end{aligned}$$

Donde hemos usado la propiedad de Leibnitz y transporte paralelo. Veamos que esta condición extra nos define un único operador que satisface esa condición.

Teorema: Unicidad ∇ . Sea g_{ab} una métrica para la variedad M . Entonces existe un único operador derivada ∇_a tal que $\nabla_a g_{bc} = 0$.

Demostración. Sea $\tilde{\nabla}_a$ un operador derivada asociado a un sistema de coordenadas Ψ . Veremos qué dada la hipótesis del teorema, podremos encontrar una relación entre el tensor C^c_{ab} y $\tilde{\nabla}_a$. Dada la ecuación 2-7, tenemos:

$$0 = \nabla g_{bc} = \tilde{\nabla}_a g_{bc} - C^d_{ab} g_{dc} - C^d_{ac} g_{bd},$$

lo que implica:

$$C_{cab} + C_{bac} = \tilde{\nabla}_a g_{bc}.$$

Permutando los índices, obtenemos además las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} C_{cba} + C_{abc} &= \tilde{\nabla}_b g_{ac} \\ C_{bca} + C_{acb} &= \tilde{\nabla}_c g_{ab}. \end{aligned}$$

Sumando las dos primeras y restando la última, obtenemos:

$$C^c_{ab} = \frac{1}{2} g^{cd} \{ \tilde{\nabla}_a g_{bc} + \tilde{\nabla}_b g_{ac} - \tilde{\nabla}_c g_{ab} \}. \quad (2-10)$$

Ecuación 2-10 establece la conexión entre un operador derivada $\tilde{\nabla}_a$ y el tensor C^c_{ab} , lo cual da por terminada la prueba. \square

De este modo, podemos escribir la conexión dada por los símbolo de Christoffel como:

$$\Gamma^c_{ab} = \frac{1}{2} g^{cd} \{ \partial_a g_{bc} + \partial_b g_{ac} - \partial_c g_{ab} \}. \quad (2-11)$$

2.2.3. Curvatura

En esta sección desarrollaremos el objeto matemático que describirá la noción de curvatura en una variedad M . Para dos puntos $p, q \in M$, la forma de transportar paralelamente dependerá de la escogencia de la curva C por la cual se transportarán los vectores. Para establecer entonces el canal entre transporte y paralelo veremos la relación de cómo varía un vector sobre una curva cerrada con el objeto matemático a estudio: *Tensor de Riemann*.

Sean ∇_a un operador derivada, w_a un campo vectorial dual y f una función suave. Consideremos la doble aplicación del operador derivada sobre $f w_c$:

$$\begin{aligned}\nabla_a \nabla_b (f w_c) &= \nabla_a (w_c \nabla_b f + f \nabla_b w_c) \\ &= (\nabla_a \nabla_b f) w_c + \nabla_b f \nabla_a w_c + \nabla_a f \nabla_b w_c + f \nabla_a \nabla_b w_c,\end{aligned}$$

De este modo, tenemos entonces que para la operación $\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a$:

$$(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a)(f w_c) = f (\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) w_c.$$

Nuevamente, realizando un análisis similar a como definimos la relación entre dos operadores derivada, tenemos entonces que el tensor $(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) w_c$ en un punto $p \in M$ depende únicamente del valor de w_c en p [4]. Definimos entonces:

$$(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) w_c \equiv R_{abc}{}^d w_d, \quad (2-12)$$

donde $R_{abc}{}^d$ es llamado el *tensor de curvatura de Riemann*.

Dada esta definición, veamos ahora cómo se puede relacionar este tensor con la idea de curvatura. Consideremos una curva cerrada suave $C \subseteq M$. Por conveniencia, consideremos esta curva un ciclo pequeño que comienza y termina en el punto p . Esta curva se encontrará sobre una superficie S que tendrá como parámetros coordenados (t, s) .

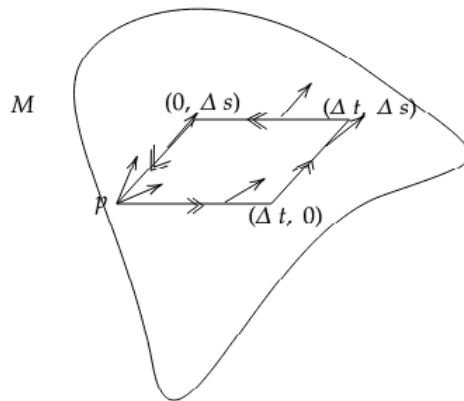


Figura 2-2: Camino cerrado sobre una superficie $S \subseteq M$. Se transporta paralelamente un vector a través de él con $\Delta t, \Delta s$ suficientemente pequeños.

Sea v^a un vector en $p \in S$, el cual será trasportado paralelamente a través del camino C , como ilustra la figura **2-2**. Sea w_a un vector dual cualquiera. Hallaremos el cambio de $v^a w_a$ a través de la curva. Para la primera parte del camino donde consideramos un cambio Δt tenemos:

$$\delta_1 = \Delta t \frac{\partial}{\partial t} (v^a w_a) \Big|_{(\Delta t/2, 0)},$$

donde hemos evaluado en el punto medio como observación a una variación de segundo orden en el desplazamiento. Podemos reescribir δ_1 en términos de T^a , tensor tangente a la curva con s constante, como:

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \Delta t T^b \nabla_b (v^a w_a) \Big|_{(\Delta t/2, 0)} \\ &= \Delta t v^a T^b \nabla_b w_a \Big|_{(\Delta t/2, 0)}, \end{aligned}$$

donde al aplicar Leibnitz se aplicó la hipótesis de transporte paralelo sobre v^a . Combinando las dos variaciones δ_1 y δ_3 en Δt con s constante, obtenemos el siguiente resultado:

$$\delta_1 + \delta_3 = \Delta t \{ v^a T^b \nabla_b w_a \Big|_{(\Delta t/2, 0)} - v^a T^b \nabla_b w_a \Big|_{(\Delta t/2, \Delta s)} \},$$

(de manera análoga para δ_2 y δ_4). Sin embargo, nótese que cuando $\Delta s \rightarrow 0$, la expresión tiende a cero también, por lo cual a primer orden en Δt ó Δs , no hay dependencia en el camino que se escoge para ser trasportado el vector v^a . De esta manera, vamos entonces a considerar el mismo análisis a segundo orden. Para ello, sea v^a el usual vector y el operador derivada aplicado al vector dual w_b $T^b \nabla_b w_a$. Variaremos el camino de la siguiente forma: consideraremos ahora la curva constante $t = \Delta t/2$ e iremos desde $s = 0$ hasta $s = \Delta s$. Como vimos líneas atrás, a primer orden el transporte paralelo es independiente de la curva, por lo cual nos centraremos en el segundo término. El vector dual $T^b \nabla_b w_a$ en $(\Delta t/2, \Delta s)$ diferirá por un valor de $\Delta s S^c \nabla_c (T^b \nabla_b w_a)$, donde como antes, S^c representa el vector tangente a la curva de t constante. Así, tenemos entonces que:

$$\delta_1 + \delta_3 = -\Delta t \Delta s v^a S^c \nabla_c (T^b \nabla_b w_a),$$

a lo cual, añadiendo las demás variaciones sobre el camino C tenemos que:

$$\begin{aligned} \delta(v^a w_a) &= \Delta t \Delta s v^a \{ T^c \nabla_c (S^b \nabla_b w_a) - S^c \nabla_c (T^b \nabla_b w_a) \} \\ &= \Delta t \Delta s v^a T^c S^b (\nabla_c \nabla_b - \nabla_b \nabla_c) w_a \\ &= \Delta t \Delta s v^a T^c S^b R_{cba}{}^d w_d, \end{aligned}$$

donde en la segunda igualdad hemos usado el hecho de que los campos tangentes S^a y T^b conmutan (hacen parte de una base coordenada) y por tanto, al aplicar Leibnitz éstos se anulan.

Este resultado expone la relación del tensor de Riemann con curvatura (dependencia de la curva en el transporte paralelo).

2.2.4. Propiedades Riemann

Presentaremos algunas propiedades que tiene el tensor de Riemann. Sea $T \in \mathcal{T}(k, l)$. Tenemos entonces que:

$$(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) T^{c_1 \dots c_k}_{d_1 \dots d_l} = - \sum_{i=1}^k R_{abe}{}^{c_i} T^{c_1 \dots e \dots c_k}_{d_1 \dots d_l} + \sum_{j=1}^l R_{abd_j}{}^e T^{c_1 \dots c_k}_{d_1 \dots e \dots d_l} \quad (2-13)$$

Veamos ahora algunas propiedades de simetría y antisimetría:

1. $R_{abc}{}^d = -R_{bac}{}^d$.
2. $R_{[abc]}{}^d = 0$.
3. Para el operador derivada asociado a la propiedad $\nabla_a g_{bc} = 0$, se tiene que: $R_{abcd} = -R_{abdc}$.
4. Identidad de Bianchi:

$$\nabla_{[a} R_{bc]d}{}^e = 0.$$

5. $R_{abcd} = R_{cdab}$

Demostración. Propiedad (1) se deduce fácilmente de la definición del tensor de Riemann (ecuación 2-12).

Para la propiedad (2) veamos primero que para un vector dual arbitrario w_a se tiene:

$$\nabla_{[a} \nabla_b w_{c]} = 0. \quad (2-14)$$

Obsérvese que:

$$\begin{aligned} \nabla_a (\nabla_b w_c) &= \partial_a (\nabla_b w_c) - \Gamma^d{}_{ab} (\nabla_d w_c) - \Gamma^d{}_{ac} (\nabla_b w_d) \\ &= \partial_a \partial_b w_c - \partial_a \Gamma^e{}_{bc} w_e - \Gamma^d{}_{ab} (\partial_d w_c) + \Gamma^d{}_{ab} \Gamma^e{}_{dc} w_e - \Gamma^d{}_{ac} (\partial_b w_d) + \Gamma^d{}_{ac} \Gamma^e{}_{bd} w_e. \end{aligned}$$

Al expandir la ecuación 2-14 tenemos:

$$6 \nabla_{[a} \nabla_b w_{c]} = (\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) w_c + (\nabla_b \nabla_c - \nabla_c \nabla_b) w_a + (\nabla_c \nabla_a - \nabla_a \nabla_c) w_b.$$

Tenemos así:

$$\begin{aligned} (\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) w_c &= -\partial_a \Gamma^e{}_{bc} w_e + \partial_b \Gamma^e{}_{ac} w_e - \Gamma^d{}_{ac} (\partial_b w_d) \\ &\quad + \Gamma^d{}_{bc} (\partial_a w_d) + \Gamma^d{}_{ac} \Gamma^e{}_{bd} w_e - \Gamma^d{}_{bc} \Gamma^e{}_{ad} w_e. \end{aligned} \quad (2-15)$$

Con la expansión vemos entonces que ecuación 2-14 se cumple. Reescribiendo la expresión, tenemos:

$$0 = R_{abc}{}^d w_d + R_{bca}{}^d w_d + R_{cab}{}^d w_d. \quad (2-16)$$

De este modo, tenemos el resultado a probar:

$$0 = 2\nabla_{[a}\nabla_b w_{c]} = \nabla_{[a}\nabla_b w_{c]} - \nabla_{[b}\nabla_a w_{c]} = R_{[abc]}{}^d.$$

Para la propiedad (3) usaremos la condición del operador derivada sobre la métrica:

$$(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a)g_{cd} = 0.$$

Así, usando ecuación 2-13, tenemos entonces:

$$\begin{aligned} &= R_{abc}{}^e g_{ed} + R_{abd}{}^e g_{ec} \\ \Rightarrow R_{abcd} &= -R_{abdc} \end{aligned}$$

Finalmente, para la propiedad (4) tenemos las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} (\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a)\nabla_c w_d &= R_{abc}{}^e \nabla_e w_d + R_{abd}{}^f \nabla_c w_f \\ \nabla_a(R_{bcd}{}^e w_e) &= w_e \nabla_a R_{bcd}{}^e + R_{bcd}{}^e \nabla_a w_e. \end{aligned}$$

Al antisimetrizar las ecuaciones anteriores sobre los índices $\{a, b, c\}$ tenemos que la parte izquierda de cada una son iguales, obteniendo así ($|d|$ denota que el índice d no se permuta):

$$R_{[abc]}{}^e \nabla_e w_d + R_{[ab|d]}{}^f \nabla_c w_f = w_e \nabla_{[a} R_{bc]d}{}^e + R_{[bc|d]}{}^e \nabla_a w_e,$$

Así tenemos entonces que

$$w_e \nabla_{[a} R_{bc]d}{}^e,$$

para todo w_e , por lo tanto se tiene la propiedad.

Para la propiedad (5) basta usar las tres primeras propiedades.

$$\begin{aligned} R_{abcd} - R_{cdab} &= -R_{bcad} - R_{cabd} - R_{cdab} \\ &= R_{cadb} - R_{bcad} - R_{cdab} \\ &= R_{cadb} - R_{cbda} - R_{dcba} \\ &= R_{cadb} - R_{dbca}; \end{aligned}$$

Permutando los índices $a \leftrightarrow b$ y $c \leftrightarrow d$, tenemos:

$$R_{abcd} - R_{cdab} = -(R_{cadb} - R_{dbca}),$$

por lo tanto

$$R_{abcd} - R_{cdab} = 0.$$

□

Dadas estas propiedades podemos hacer algunas observaciones al trazar sobre el tensor. Por propiedad (1) y (3) vemos que al trazar con el primer y segundo índice ó el tercer y el cuarto, vemos que es cero: $R_{aacd} = R_{abcc} = 0$. De esta manera definimos entonces el tensor de Ricci.

Definición: Tensor de Ricci y escalar de curvatura. El tensor de Ricci se define como:

$$R_{ac} \equiv R_{abc}^b.$$

El escalar de curvatura R se define:

$$R \equiv R_a^a$$

Dadas las propiedades del tensor de Riemann, vemos que el tensor de Ricci satisface: $R_{ac} = R_{ca}$.

Definición: Tensor de Weyl. Definimos ahora un nuevo tensor relacionado con el tensor de Riemann. Denotaremos el tensor de Weyl como C_{abcd} y esta relacionado con Riemann así:

$$C_{abcd} := R_{abcd} - \frac{2}{n-2} (g_{a[c}R_{d]b} - g_{b[c}R_{d]a}) + \frac{2}{(n-1)(n-2)} R g_{a[c}g_{d]b}, \quad (2-17)$$

donde n = dimensión de la variedad M

Teorema: Traza de Weyl. El tensor de Weyl es libre de traza en todos sus índices.

Demostración. Veamos las contracciones simples según las propiedades del tensor de Riemann.

$$\begin{aligned} C_{aacd} &= R_{aacd} - \frac{2}{n-2} (g_{a[c}R_{d]a} - g_{a[c}R_{d]a}) + \frac{2}{(n-1)(n-2)} R g_{a[c}g_{d]a} \\ C_{aacd} &= + \frac{1}{(n-1)(n-2)} R (g_{ac}g_{da} - g_{ad}g_{ca}) \\ C_{aacd} &= 0. \end{aligned}$$

Trazando sobre el tercer y cuarto índice tenemos:

$$\begin{aligned} C_{abcc} &= R_{abcc} - \frac{2}{n-2} (g_{a[c}R_{c]b} - g_{b[c}R_{c]a}) + \frac{2}{(n-1)(n-2)} R g_{a[c}g_{c]b} \\ C_{abcc} &= 0. \end{aligned}$$

Finalmente tenemos el caso no trivial: trazar sobre el primer y tercer índice o segundo y cuarto.

$$\begin{aligned} C_{abcd} g^{bd} &= R_{abcd} g^{bd} - \frac{2}{n-2} g^{bd} (g_{a[c}R_{d]b} - g_{b[c}R_{d]a} + \frac{1}{n-1} R g_{a[c}g_{d]b}) \\ C_{ac} &= R_{ac} - \frac{1}{n-2} (g_{ac}R + (n-2)R_{ac}) - \frac{1}{(n-1)(n-2)} R [(n-1) g_{ac}] \\ C_{ac} &= 0. \end{aligned}$$

□

Hay una última relación a mencionar sobre el tensor de Ricci. Dada la propiedad de Bianchi para Riemann, podemos construir una identidad similar para Ricci. Considerando la identidad de Bianchi y contaryendo tenemos:

$$\nabla_a R_{bcd}{}^a + \nabla_b R_{cd} - \nabla_c R_{bd} = 0 \quad (2-18)$$

$$\Rightarrow \nabla_a R_c{}^a + \nabla_b R_c{}^b - \nabla_c R = 0. \quad (2-19)$$

Definimos el *tensor de Einstein* como:

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab}. \quad (2-20)$$

Nótese que $\nabla^a G_{ab} = 0$.

2.2.5. Geodésica

Intuitivamente, una curva geodésica es aquella curva que sea lo "más recta posible". Veremos en secciones posteriores que el estudio de las geodésicas dada una variedad M es de importancia en relatividad general; veremos que toda partícula de prueba en caída libre seguirá la trayectoria de una geodésica.

Definición: Geodésica. Sea γ una curva sobre la variedad M . Dado un operador derivada ∇_a , decimos que γ es una curva geodésica si su vector tangente T^a es transportado paralelamente a lo largo de sí misma, i.e, si cumple:

$$T^a \nabla_a T^b = 0. \quad (2-21)$$

En términos generales, la idea de lo "más recta posible" no implica que la norma de nuestro vector tangente se mantenga constante. Sin embargo, bajo reparametrización, podemos encontrar un *parámetro afín* tal que la ecuación geodésica 2-21 se tenga.

Dada una base coordenada Ψ , veamos cómo se traduce la ecuación para las componentes de dicha base. Por componentes, tenemos que:

$$\frac{dT^\mu}{dt} + \sum_{\mu\nu} \Gamma^\mu{}_{\sigma\nu} T^\sigma T^\nu = 0.$$

Dada la ecuación 2-2, tenemos entonces para la carta Ψ :

$$\frac{d^2 x^\mu}{dt^2} + \sum_{\mu\nu} \Gamma^\mu{}_{\sigma\nu} \frac{dx^\sigma}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} = 0. \quad (2-22)$$

Nótese que la ecuación anterior corresponde a un sistema de n ecuaciones diferenciales acopladas de segundo orden. Por resultados en teoría de ecuaciones diferenciales, sabemos que dados unos valores iniciales para x^μ y dx^μ/dt se tiene una solución única.

Veamos ahora cómo, dadas dos curvas geodésicas, éstas se acercan o distancian la una de la otra. Llamaremos esta relación como *ecuación de desviación geodésica*. Sea $\gamma(s, t)$ una

familia de curvas geodésicas tal que para todo $s \in \mathbb{R}$, la curva $\gamma(s, t) \equiv \gamma_s(t)$ es una curva con parámetro afín t .

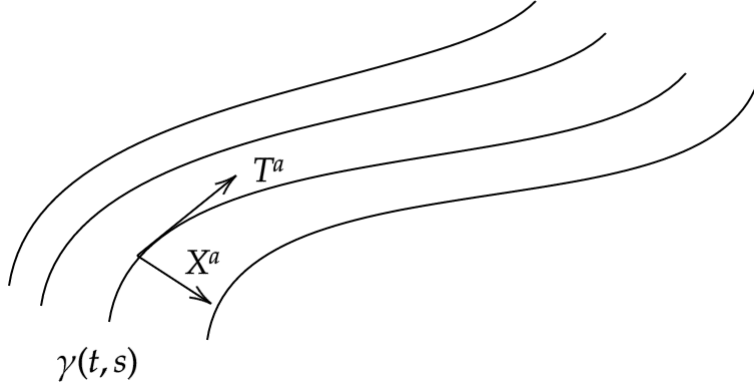


Figura 2-3: Familia de curvas geodésicas indexadas por un parámetro s . El vector T^a denota el vector tangente a la curva, y el vector X^a la desviación entre dos curvas.

Llamemos $\Sigma \subseteq M$ a la superficie bidimensional generada por los vectores T^a y X^a . Dada esta base, notamos entonces que:

$$T^a = \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^a, \quad X^a = \left(\frac{\partial}{\partial s} \right)^a;$$

donde el campo vectorial X^a representa el desplazamiento infinitesimal en un vecindario de geodésicas. Por otra parte, tomando el operador derivada asociado a la métrica g , es posible escoger el vector X^a ortogonal al vector tangente T^a . Podemos reescalar por un factor sobre s tal que el producto interior del vector tangente T^a consigo mismo no cambie (notése que este valor ya es constante dada una geodésica indexada por s'). Por otra parte, dado que pertenecen a un sistema coordenado, estos campos vectoriales conmutan. Así tenemos entonces:

$$\begin{aligned} T^b \nabla_b (T^a X_a) &= T_a T^b \nabla_b X^a \\ &= T_a X^b \nabla_b T^a \\ &= \frac{1}{2} X^b \nabla (T^a T_a) \\ &= 0; \end{aligned}$$

donde hemos usado la condición de conmutatividad de campos vectoriales 2-5 y transporte paralelo geodésico sobre T^a . Así, nuevamente bajo una renormalización de constantes, tenemos que $T^a X_a = 0$.

Sea $v^a := T^b \nabla_b X^a$. El campo vectorial v^a se define como la tasa de cambio a través de una geodésica del desplazamiento X^a de un vecindario de geodésicas infinitesimal [4]. De la

misma manera, podemos definir la aceleración en esa tasa de cambio como: $a^a := T^c \nabla_c v^a = T^c \nabla_c (T^b \nabla_b X^a)$. Usando propiedades de conmutación y geodésicas tenemos que:

$$\begin{aligned}
 a^a &= T^c \nabla_c (T^b \nabla_b X^a) \\
 &= T^c \nabla_c (X^b \nabla_b T^a) \\
 &= (T^c \nabla_c X^b) (\nabla_b T^a) + X^b T^c \nabla_c \nabla_b T^a \\
 &= (X^c \nabla_c T^b) (\nabla_b T^a) + X^b T^c \nabla_b \nabla_c T^a - R_{cbd}{}^a X^b T^c T^d \\
 &= X^c \nabla_c (T^b \nabla_b T^a) - R_{cbd}{}^a X^b T^c T^d \\
 &= -R_{cbd}{}^a X^b T^c T^d.
 \end{aligned}$$

Así, la ecuación de desviación geodésica viene dada por:

$$a^a = -R_{cbd}{}^a X^b T^c T^d. \quad (2-23)$$

2.3. Relatividad General

Con el desarrollo presentado en las secciones anteriores podremos ahora obtener las ecuaciones de movimiento de una partícula sobre una variedad M . De la misma manera, veremos que los efectos de curvatura y propiedades de la materia se relacionan a través de las ecuaciones de campo de Einstein. Este *approach* será importante para los capítulos posteriores donde plantearemos la acción Lagrangiana asociada a la ecuación de campo y, así, estudiar variaciones a esta acción que nos llevarán a teorías extendidas de la Relatividad General. Nuestro interés anterior de presentar algunas propiedades a nivel tensorial radica en el hecho de que nuestros observables físicos son valores en \mathbb{R} , por lo que exhibir las ecuaciones que modelan el estamento físico a través de mapas multilineales que van de cierto espacio vectorial atribuyendo un valor en \mathbb{R} es una ventaja. Por otro lado, tenemos el *principio de covarianza general* el cual postula que la métrica g es la única cantidad perteneciente al espacio que puede aparecer en las leyes de la física [4]. Éste afirma que no existe una base de preferencia propia a la estructura de la variedad que aparezca en nuestras leyes. Así, las leyes de la física, escritas de forma tensorial, resultan ser ciertas sea cual sea el marco de referencia que use un observador.

2.3.1. Principio de equivalencia

Para el desarrollo de la teoría de la relatividad general existe un principio que resulta ser fundamental para la descripción del movimiento de partículas cuando poseemos gravedad.

Principio de equivalencia: *Partículas en caída libre se moverán a través de geodésicas del espacio - tiempo curvo.*

A diferencia del movimiento pre-relativista y especial-relativista donde podemos distinguir marcos de referencia inerciales \mathcal{O} de las partículas de prueba que estarán sujetas a alguna

fuerza externa, en el contexto de relatividad general donde asumimos un espacio - tiempo curvo, no es posible ubicar un sistema de referencia inercial respecto a partículas de prueba. En efecto, nuestros observadores se moverán a través de geodésicas a su vez. Así, tomando este punto de vista, la gravedad no se entiende como un campo de fuerza externo sino que va ligado a la curvatura del espacio-tiempo. Podemos entonces estudiar como afecta esta situación leyendo la ecuación de desviación geodésica 2-23 la cual llamaremos *fuerza de marea*. Dado dos observadores “localmente inerciales” podemos entender cómo actúa la curvatura sobre ellos. Para un espacio - tiempo curvo las geodésicas acelerarán entre sí, lo cual describiremos como una gravedad relativa.

Para este estudio de Relatividad General necesitaremos dos principios [4]:

- Principio de covarianza general.
- Las ecuaciones deben reducirse a las ecuaciones entendidas en relatividad especial en aquellas regiones donde nuestra variedad M (espacio - tiempo) sea plano.

2.3.2. Tensor Energía - Momento

El tensor de energía - momento contiene la información de una distribución continua de materia y campos. Para un fluido perfecto, por ejemplo, tenemos que este tensor viene dado por [6]:

$$T_{ab} = \rho u_a u_b + P(g_{ab} + u_a u_b),$$

el cual satisface, **localmente**, la ecuación de movimiento:

$$\nabla^a T_{ab} = 0. \tag{2-24}$$

Decimos que localmente dado que se trata de una ecuación no de carácter tensorial dada la naturaleza del tensor: éste depende de la familia de observadores escogidos dado u^a la velocidad de éstos. Sin embargo, esta ecuación implica, en un carácter nuevamente local, la conservación de la energía.

Veamos ahora cómo se relacionan este tensor de energía con la geometría del espacio tiempo. Para ello, haremos una comparación respecto a la teoría de Newton. Considerando la fuerza de marea en en caso Newtoniano:

$$-(\vec{x} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\nabla} \phi,$$

(cómo se comportan geodésicas desde el punto de vista Newtoniano) y la ecuación de desviación geodésica dada por la ecuación 2-23, tenemos entonces una posible relación:

$$R_a b c^a v^c v^d \leftrightarrow \partial_b \partial_a \phi \leftrightarrow \rho,$$

donde en la última relación hemos usado la ecuación de Poisson y ρ es la densidad de materia. Así, siguiendo con esta designación y considerando

$$\rho \leftrightarrow T_{ab} v^a v^b,$$

tenemos la ecuación de campo de Einstein:

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2} Rg_{ab} = 8\pi T_{ab}; \quad (2-25)$$

donde el factor de 8 sale para garantizar la conservación de energía local.

2.3.3. Radiación Gravitacional

Establecida la formulación de la Relatividad General surgen algunos desarrollos para su entendimiento bajo diversos escenarios. Uno de ellos es considerar la gravedad como "débil". En este contexto, con gravedad débil nos referimos a la consideración del espacio tiempo aproximadamente plano. Ésta resulta ser una muy buena aproximación del comportamiento en la naturaleza exceptuando escenarios donde nos encontremos con colapsos gravitacionales, agujeros negros y púlsares [4].

Antes de introducir la noción de onda gravitacional (radiación gravitacional), estudiaremos cómo se transforman nuestras ecuaciones de curvatura y, en particular, el tensor de Riemann, bajo una ligera perturbación, a primer orden, de un espacio - tiempo plano η_{ab} . Estaremos entonces considerando una métrica de la forma:

$$g_{ab} = \eta_{ab} + h_{ab}, \quad (2-26)$$

donde h_{ab} representa esta pequeña variación sobre el espacio-tiempo plano. Por pequeño nos referimos a que las componentes del tensor h_{ab} son mucho menor que uno para algún marco inercial global correspondiente a η_{ab} . Denotaremos ∂_a al operador derivada asociada a la métrica η_{ab} . Así mismo, asumiremos que la perturbación h_{ab} no tendrá un comportamiento de campo tensorial usual como la métrica g_{ab} , por lo cual las transformaciones entre campos covariantes y contravariantes estarán dadas por la métrica asociada a la estructura plana η_{ab} .

Considerando la ecuación que relaciona los símbolos de Christoffel 2-11 junto a la ecuación de la métrica perturbada a primer orden 2-26 tenemos que:

$$\Gamma^c_{ab} = \frac{1}{2}\eta^{cd}(\partial_a h_{bd} + \partial_b h_{ad} - \partial_d h_{ab}), \quad (2-27)$$

y, así, el tensor de Riemann se reescribe como:

$$R_{abc}{}^d = \frac{1}{2}\eta^{cd} [\partial_b \partial_c h_{ad} + \partial_a \partial_d h_{bc} - \partial_b \partial_d h_{ac} - \partial_a \partial_c h_{bd}]. \quad (2-28)$$

De esta manera, el tensor de Einstein toma en términos de h_{ab} , considerando las correspondientes trazas, la siguiente forma:

$$G_{ab} = \partial^c \partial_{(b} h_{a)c} - \frac{1}{2} \partial^c \partial_c h_{ab} - \frac{1}{2} \partial_a \partial_b h - \frac{1}{2} \eta_{ab} (\partial^c \partial^d h_{cd} - \partial^c \partial_c h), \quad (2-29)$$

donde $h = h^c_c$. Definiendo ahora $\bar{h}_{ab} \equiv h_{ab} - \frac{1}{2}\eta_{ab}h$ podemos reescribir la ecuación anterior 2-29 como:

$$\partial^c \partial_{(b} \bar{h}_{a)c} - \frac{1}{2} \partial^c \partial_c \bar{h}_{ab} - \frac{1}{2} \eta_{ab} \partial^c \partial^d \bar{h}_{cd} = 8\pi T_{ab}. \quad (2-30)$$

La expresión anterior la podremos reducir considerando una propiedad adicional que estudiaremos a continuación: libertad gauge correspondiente a difeomorfismos sobre la variedad M . Para ello, incluiremos un breve resumen sobre difeomorfismos φ y *derivadas de Lie*.

Sean M y N dos variedades y $\varphi : M \rightarrow N$ un mapa C^∞ . Definimos el mapa $\varphi^* : V_p \rightarrow V_{\varphi(p)}$, el cual “lleva” vectores en V_p para un punto $p \in M$ a vectores tangentes en $V_{\varphi(p)}$ para $\varphi(p) \in N$, tal que para un vector $v \in V_p$ tenemos:

$$(\varphi^*v)(f) = v(f \circ \varphi),$$

para toda función suave $f : N \rightarrow \mathbb{R}$. Del mismo modo, podemos definir el mapa $\varphi_* : V_{\varphi(p)}^* \rightarrow V_p^*$, la cual transporta vectores duales en el espacio tangente sobre puntos en N a duales en M como sigue:

$$(\varphi_*w)_a v^a = w_a (\varphi^*v)^a.$$

Esta noción de “pull forward” y “pull back” las podemos extender a campos tensoriales sobre una variedad M . Siendo φ un difeomorfismo, podemos hacer uso de φ^{-1} y definir $(\varphi^*T)^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}$ en $\varphi(p)$ como:

$$(\varphi^*T)^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} (w_1)_{a_1} \dots (w_k)_{a_k} (u_1)^{b_1} \dots (u_l)^{b_l} = T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} (\varphi_* w_1)_{a_1} \dots ([\varphi^{-1}]^* u_l)^{b_l}. \quad (2-31)$$

De esta manera podemos entonces comparar, para un difeomorfismo de M en M , el tensor T con φ^*T . Si $T = \varphi^*T$, diremos que tendremos una transformación de simetría para el campo tensorial T [4]. Para el caso en que $T = g$, la métrica asociada a la variedad M , diremos que g es una *isometría*. Así, surge entonces la noción de libertad gauge. Para dos variedades M y N difeomorfas, las cantidades (M, T) y (N, φ^*T) describen la misma situación física. De este modo, las libertades gauge están almacenadas en la información que brinda un difeomorfismo φ entre M y N .

Definición: Grupo uniparamétrico de difeomorfismos. Un grupo de un parámetro de difeomorfismos ϕ_t es un mapa C^∞ de $\mathbb{R} \times M \rightarrow M$ tal que para $t \in \mathbb{R}$, tenemos un difeomorfismo $\phi_t : M \rightarrow M$. Por otro lado, para $s, t \in \mathbb{R}$, $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{s+t}$ [7].

Es posible asociar al mapa ϕ_t un campo vectorial v así: Sea $p \in M$, tenemos entonces $\phi_t(p) : \mathbb{R} \rightarrow M$ es una curva que pasa por el punto p en $t = 0$. Definimos entonces $v|_p$ el vector tangente a esta curva para $t = 0$. De este modo, podemos ver el campo vectorial v como un generador de estas transformaciones ϕ_t en M . Por otro lado, tenemos el converso a esta afirmación: para un campo vectorial v^a sobre nuestra variedad M podemos encontrar un grupo de un parámetro ϕ_t de curvas integrales dada por v^a (una familia de curvas integrales sobre M es un conjunto de curvas con la propiedad que para cada punto $p \in M$ solo pasa

una curva de esta familia con vector tangente $v|_p$) fijando una carta sobre un abierto $U \ni p$ cumpliendo el conjunto de ecuaciones diferenciales [4, 7]:

$$\frac{dx^\mu}{dt} = v^\mu(x^1, \dots, x^n),$$

donde v^μ resulta ser la μ -ésima componente del campo vectorial v^a en la base escogida $\{\partial/\partial x^\mu\}$. Este sistema tendrá una solución única dada por la condición inicial en $t = 0$. Esta condición inicial estará determinada por el punto $p \in M$ tal que se defina $\phi_t(p) : \mathbb{R} \rightarrow M$ con $\phi_0(p) \equiv \phi(0, p) = p$.

Definición: Derivada de Lie. Sea M una variedad y ϕ_t un grupo de difeomorfismos generado por un campo vectorial v . Definimos el mapa $L_v : \mathcal{T}(k, l) \rightarrow \mathcal{T}(k, l)$ como:

$$L_v T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\phi_{-t}^* T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} - T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}}{t}. \quad (2-32)$$

El mapa L_v lo llamaremos *derivada de Lie respecto a v*.

Nótese que, bajo esta definición, $L_v T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} = 0$ sí y sólo sí para todo t , ϕ_t es una transformación de simetría para $T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}$.

Tomando un sistema de coordenadas en M donde el parámetro t del grupo de difeomorfismos asociado al campo vectorial v^a es tomado como una de las coordenadas x^1 de la carta tal que $v^a = \left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)^a$ (dada por la asociación hecha entre el grupo y el campo v^a como generador de dichas transformaciones). Así, la acción ϕ_{-t} corresponde entonces a la transformación de coordenadas $x^1 \rightarrow x^1 + t$ manteniendo las demás coordenadas de la carta sin transformar. De esta manera, para un campo vectorial w^a , tenemos entonces que:

$$(\phi_{-t}^* w^\mu)(x^1, \dots, x^n) = w^\mu(x^1 + t, \dots, x^n).$$

Y, así, para un campo vectorial la derivada de Lie, componente a componente, viene dada por:

$$L_v w^\mu = \frac{\partial w^\mu}{\partial x^1}.$$

Por otro lado, considerando $v^a = (\partial/\partial x^1)^a$ y la expansión de w^a en componentes, al tomar el conmutador entre los campos v^a y w^a , tenemos que:

$$[v, w]^\mu = \sum_\nu \left(v^\nu \frac{\partial w^\mu}{\partial x^\nu} - w^\nu \frac{\partial v^\mu}{\partial x^\nu} \right) = \frac{\partial w^\mu}{\partial x^1}.$$

Por lo tanto, sin depender de una base tenemos que:

$$L_v w^a = [v, w]^a. \quad (2-33)$$

Un resultado importante que se obtiene desde la definición de la derivada de Lie es la respectiva derivada para una función $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Dado que, por definición, el campo vectorial v^a es tangente a través de las curvas dadas por ϕ_t , tenemos que:

$$L_v(f) = v(f).$$

De esta manera, podemos entonces considerar la derivada de Lie para un campo dual u_a de la siguiente manera:

$$L_v(u_a w^a) = v(u_a w^a) = v^b \nabla_b (u_a w^a),$$

relación dada por la ecuación 2-33 tomando un campo vectorial w^a arbitrario y teniendo en cuenta las propiedades del operador derivada. Por otro lado considerando la regla de Leibnitz tenemos que:

$$L_v(u_a w^a) = w^a L_v(u_a) + u_a L_v(w^a) = w^a L_v(u_a) + u_a v^b \nabla_b w^a - u_a w^b \nabla_b v^a.$$

Así, igualando estas expresiones, tenemos entonces que:

$$w^a L_v(u_a) + u_a v^b \nabla_b w^a - u_a w^b \nabla_b v^a = v^b w^a \nabla_b u_a + v^b u_a \nabla_b w^a.$$

Por tanto, obtenemos finalmente la expresión:

$$L_v u_a = v^b \nabla_b u_a + u_b \nabla_a v^b. \quad (2-34)$$

Generalizando para un campo tensorial $T \in \mathcal{T}(k, l)$ tenemos [4]:

$$L_v T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} = v^c \nabla_c T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} - \sum_{i=1}^k T^{a_1 \dots c \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} \nabla_c v^{a_i} + \sum_{i=1}^l T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots c \dots b_l} \nabla_{b_i} v^c. \quad (2-35)$$

Con estos resultados y las definiciones previas introduciremos la libertad gauge en el contexto de relatividad general. Como mencionamos antes, si $\varphi : M \rightarrow M$ es un difeomorfismo, tenemos entonces que (M, g_{ab}) y $(M, \varphi^* g_{ab})$ representan de manera física el mismo espacio - tiempo. De este modo, para un grupo uniparamétrico de difeomorfismos φ_τ asociada con una métrica $g_{ab}(\tau)$ respectivamente, tenemos entonces que $(M, g_{ab}(\tau))$ y $(M, \varphi_\tau^* g_{ab}(\tau))$ representan la misma estructura física. Si analizamos la ecuación 2-26 como una perturbación a primer orden en el parámetro τ , tenemos que:

$$h_{ab} = \left. \frac{dg_{ab}(\tau)}{d\tau} \right|_{\tau=0} \quad \text{y} \quad h'_{ab} = \left. \frac{d(\varphi_\tau^* g_{ab}(\tau))}{d\tau} \right|_{\tau=0}$$

representan la misma perturbación. Tomando la correspondiente derivada en la expresión de la derecha, respecto a la métrica g_{ab} y a la curva $\varphi_\tau^* g_{ab}(\tau)$ fijada por $g_{ab}(\tau)$ y generada por el campo tangente v^a , tenemos la siguiente expresión:

$$h'_{ab} = h_{ab} - L_v g_{ab}. \quad (2-36)$$

De esta manera, notamos que la libertad gauge sobre perturbaciones en la métrica viene dada por la correspondiente derivada de Lie. Así, para una linealización de la métrica según ecuación 2-26 podemos obtener una transformación gauge dada por:

$$h_{ab} \longrightarrow h'_{ab} = h_{ab} - \nabla_a v_b - \nabla_b v_a. \quad (2-37)$$

Así, definiendo $\bar{h}'_{ab} \equiv h'_{ab} - \frac{1}{2}\eta_{ab}h'$, por equivalencia en transformación gauge obtenemos de nuevo una expresión como 2-30 en términos de \bar{h}' . Al expandir esta definición en términos de \bar{h}_{ab} , obtenemos:

$$\bar{h}'_{ab} = \bar{h}_{ab} - \partial_a v_b - \partial_b v_a + \eta_{ab} \partial^c v_c.$$

Tomando el operador derivada y contrayendo en uno de sus índices, resulta la expresión:

$$\partial^b \bar{h}'_{ab} = \partial^b \bar{h}_{ab} - \partial^b \partial_b v_a.$$

Con esta libertad gauge, podemos entonces encontrar una transformación tal que $\partial^b \bar{h}'_{ab} = 0$. Esta observación es posible en el campo de ecuaciones diferenciales. Para este caso, solo basta estudiar la ecuación dada por:

$$\partial^b \bar{h}_{ab} = \partial^b \partial_b v_a, \quad (2-38)$$

donde el operador derivada, en este caso, es sencillamente el operador ∂_a asociado a la métrica plana η_{ab} . El campo vectorial v^a que da solución a esta ecuación de onda permite generar entonces una familia de curvas tangentes que, a su vez, nos genera el grupo uniparamétrico que asociamos con φ_τ (familia de difeomorfismos para una perturbación sobre la métrica)[4, 8]. De esta manera, la ecuación linealizada de Einstein 2-30 toma la forma:

$$\partial^c \partial_c \bar{h}'_{ab} = -16\pi T_{ab}. \quad (2-39)$$

2.4. Tétradas

Una de las maneras estándar de desarrollar las ecuaciones generadas por los elementos tensoriales que describen las características de una variedad M es generando un sistema de coordenadas que se adapte al problema de estudio [9]. Sin embargo, a comienzos de los años 60 surgió una manera alternativa de analizar estas ecuaciones usando el formalismo de las *tétradas* [10]. Este formalismo consiste en escoger una *base tétrada* de cuatro campos vectoriales linealmente independientes y proyectar sobre estos elementos las cantidades tensoriales a estudiar.

Al considerar una onda gravitacional viajando en una dirección arbitraria, la escogencia de la base dependerá de las simetrías presentes en esta consideración. Así, introduciremos el formalismo de las tétradas y, luego, una descripción sobre el formalismo de *tétradas nulas* presentado por Newman y Penrose [10].

2.4.1. Representación de Tétradas

A cada punto $p \in M$ asignamos una base ortonormal de campos vectoriales suaves $(e_\mu)^a$ que satisfacen la condición:

$$(e_\mu)^a (e_\nu)_a = \eta_{\mu\nu}, \quad (2-40)$$

donde los índices griegos $\mu\nu$ etiquetan el vector en la base tétrada y el índice latín a es el índice que hemos establecido para denotar que e_μ es un vector (y no componentes de él). La matriz η es constante y simétrica. De esta manera, tenemos las siguientes características asociadas a esta base de tétradas:

- La asignación a un vector covariante se sigue mediante la métrica g asociada a la variedad M , i.e, tenemos que:

$$(e_\mu)_a = g_{ab}(e_\mu)^b.$$

- La inversa $(e^\nu)_a$ de la matriz $[(e_\mu)^a]$ (donde el índice de la tétrada corre en las filas y en índice tensorial en las columnas) viene dada por:

$$(e_\mu)^a(e^\nu)_a = \delta_\mu^\nu \quad \& \quad (e_\mu)^a(e^\mu)_b = \delta_b^a.$$

- Dada la matriz η asociada a la base de tétradas, tenemos:

$$\eta^{\mu\nu}\eta_{\nu\lambda} = \delta_\lambda^\mu.$$

- Establecemos las condiciones de ortogonalidad de los elementos base a través de la matriz η asociada al sistema como:

$$\begin{aligned} \eta_{\mu\nu}(e^\mu)_a &= (e_\nu)_a, \\ \eta^{\mu\nu}(e_\mu)_a &= (e^\nu)_a. \end{aligned}$$

- Tenemos la relación respecto a la métrica g :

$$(e_\mu)_a(e^\mu)_b = g_{ab}.$$

Con las propiedades anteriores podemos establecer cómo se obtienen las proyecciones en elementos de tétradas dado un campo tensorial T :

$$\begin{aligned} T_{(\mu)(\nu)} &= (e_\mu)^a(e_\nu)^b T_{ab} = (e_\mu)^a T_{a(\nu)}, \\ T_{ab} &= (e^\mu)_a(e^\nu)_b T_{(\mu)(\nu)} = (e^\mu)_a T_{(\mu)b}. \end{aligned}$$

Así, observamos que podemos pasar de los índices tensoriales hacia los índices de tétradas libremente sin tener ambigüedad en cantidades donde aparezcan los dos tipos de índices (se establece, al trabajar en tétradas, todo en esta notación). Así, tenemos que el tensor de Riemman lo podemos reescribir como:

$$R_{(\rho)(\sigma)(\mu)(\nu)} = R_{abcd}(e_\rho)^a(e_\sigma)^b(e_\mu)^c(e_\nu)^d. \quad (2-41)$$

2.4.2. Formalismo de Newman - Penrose

El formalismo de Newman Penrose es un formalismo de tétradas con una escogencia especial de la base tétrada. La escogencia se realiza a partir de cuatro vectores nulos (decimos que un vector v es nulo sí y sólo sí $v_a v^a = 0$) k, l, m, \bar{m} , donde k, l son reales y m, \bar{m} son conjugados entre sí. Una de las principales motivaciones dadas por Penrose para la generación de este formalismo tiene que ver con su idea de que la información esencial de la estructura del espacio-tiempo se encontraba en el cono de luz [9]. Para nuestro caso, será importante al considerar una onda gravitacional plana, nula y en el vacío. Por la característica de nulidad, resultará importante el desarrollo en tétradas nulas como lo plantearon Newman y Penrose. Tenemos las condiciones de ortogonalidad dadas por:

$$k \cdot m = k \cdot \bar{m} = l \cdot m = l \cdot \bar{m} = 0, \quad (2-42)$$

y las condiciones de nulidad:

$$k \cdot k = l \cdot l = m \cdot m = \bar{m} \cdot \bar{m} = 0. \quad (2-43)$$

Como mencionamos antes, la separación en elementos reales y complejos cumple la condición de normalización:

$$-k \cdot l = m \cdot \bar{m} = 1. \quad (2-44)$$

Así, la matriz asociada a la base de tétradas η es una matriz simétrica de la forma:

$$[\eta_{\mu\nu}] = [\eta^{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2-45)$$

Con las condiciones en la base establecidas, podemos reescribir el tensor de Riemann en términos de los elementos de la base tétrada nula. Aplicando las propiedades para una base tétrada, vemos sencillamente que podemos reescribirlo como:

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = C_{\rho\sigma\mu\nu} + \frac{2}{n-2} \left(\eta_{\rho[\mu} R_{\nu]\sigma} - \eta_{\sigma[\mu} R_{\nu]\rho} \right) - \frac{2}{(n-1)(n-2)} R \eta_{\rho[\mu} \eta_{\nu]\sigma},$$

donde por facilidad en notación hemos escrito las proyecciones de las tétradas del tensor usando índices griegos. Durante esta sección, estos índices harán referencias a proyecciones en las tétradas y no a componentes del tensor como lo hemos establecido desde un inicio.

Del mismo modo, el tensor de Ricci viene dado por:

$$R_{\rho\mu} = \eta^{\sigma\nu} R_{\rho\sigma\mu\nu},$$

y el escalar de curvatura como:

$$R = \eta^{\rho\mu} R_{\rho\mu} = \eta^{12} R_{12} + \eta^{21} R_{12} + \eta^{34} R_{34} + \eta^{43} R_{43} = 2(R_{34} - R_{12}). \quad (2-46)$$

Dada la condición sobre el tensor de Weyl libre de traza tenemos entonces que:

$$-C_{1\sigma\mu 2} - C_{2\sigma\mu 1} + C_{3\sigma\mu 4} + C_{4\sigma\mu 3} = 0. \quad (2-47)$$

Así, al considerar $\sigma = \mu$, podemos obtener algunas componentes nulas del tensor de Weyl:

$$\begin{aligned} \sigma = \mu = 1 &\implies C_{1112} + C_{2111} - C_{3114} - C_{4113} = 0 \iff C_{1314} = 0, \\ \sigma = \mu = 2 &\implies C_{1222} + C_{2221} - C_{3224} - C_{4223} = 0 \iff C_{2324} = 0, \\ \sigma = \mu = 3 &\implies C_{1332} + C_{2331} - C_{3334} - C_{4333} = 0 \iff C_{1332} = 0, \\ \sigma = \mu = 4 &\implies C_{1442} + C_{2441} - C_{3444} - C_{4443} = 0 \iff C_{1442} = 0, \end{aligned}$$

donde hemos usado la propiedad simétrica heredada del tensor de Riemann $R_{abcd} = -R_{bacd}$. Por otro lado, considerando $\mu \neq \sigma$ y la propiedad 2 tomada nuevamente desde el tensor de Riemann $C_{1234} + C_{1342} + C_{1423} = 0$, tenemos que:

$$\begin{aligned} \mu = 2, \sigma = 3 &\implies C_{1232} + C_{2231} - C_{3234} - C_{4233} = 0, \\ &\implies C_{1232} = C_{2343}; \\ \mu = 3, \sigma = 4 &\implies C_{1342} + C_{2341} - C_{3344} - C_{4343} = 0, \\ &\implies C_{1342} + C_{1432} - C_{3434} = 0, \\ &\implies C_{1342} + C_{1234} + C_{1342} - C_{3434} = 0, \\ &\implies C_{1342} = \frac{1}{2}(C_{3434} - C_{1234}); \\ \mu = 1, \sigma = 3 &\implies C_{1132} + C_{2131} - C_{3134} - C_{4133} = 0, \\ &\implies C_{1231} = C_{1334}; \\ \mu = 1, \sigma = 4 &\implies C_{1142} + C_{2141} - C_{3144} - C_{4143} = 0, \\ &\implies C_{1241} = C_{1443}; \\ \mu = 2, \sigma = 4 &\implies C_{1242} + C_{2241} - C_{3244} - C_{4243} = 0, \\ &\implies C_{1242} = C_{2434}; \\ \mu = 2, \sigma = 4 &\implies C_{1242} + C_{2241} - C_{3244} - C_{4243} = 0, \\ &\implies C_{1242} = C_{2434}; \\ \mu = 2, \sigma = 1 &\implies C_{1212} + C_{2211} - C_{3214} - C_{4213} = 0, \\ &\implies C_{1212} - C_{1342} - C_{1432} = 0, \\ &\implies C_{1212} - 2C_{1342} + C_{1342} - C_{1432} = 0, \\ &\implies C_{1212} - C_{3434} + C_{1234} + C_{1342} - C_{1432} = 0, \\ &\implies C_{1212} = C_{3434}. \end{aligned}$$

Dadas las dependencias entre las componentes del tensor de Weyl anteriores, definiremos diez cantidades independientes de este tensor representadas por cinco escalares complejos

[3, 9]:

$$\begin{aligned}
\Psi_0 &= -C_{1313} \\
\Psi_1 &= -C_{1213} \\
\Psi_2 &= -C_{1342} \\
\Psi_3 &= -C_{1242} \\
\Psi_4 &= -C_{2424}.
\end{aligned} \tag{2-48}$$

Nótese que todas las componentes del tensor están especificadas por los escalares de la ecuación 2-48, ya sea bajo conjugación o mediante las relaciones anteriormente mencionadas. De manera similar, definiremos ahora las componentes del tensor de Ricci en términos de cuatro cantidades reales y tres escalares complejos [9]:

$$\begin{aligned}
\Phi_{00} &= -\frac{1}{2}R_{11}, & \Phi_{22} &= -\frac{1}{2}R_{22} \\
\Phi_{02} &= -\frac{1}{2}R_{33}, & \Phi_{20} &= -\frac{1}{2}R_{44} \\
\Phi_{11} &= -\frac{1}{4}(R_{12} + R_{34}), & \Phi_{01} &= -\frac{1}{2}R_{13} \\
\Phi_{10} &= -\frac{1}{2}R_{14}, & \Lambda &= \frac{1}{24}R \\
\Phi_{12} &= -\frac{1}{2}R_{23}, & \Phi_{21} &= -\frac{1}{2}R_{24}.
\end{aligned} \tag{2-49}$$

2.5. Onda Gravitacional en Función de Riemann

Dadas las secciones correspondientes a ondas gravitacionales y el formalismo de tétradas nulas desarrollado por Newman - Penrose, podemos ahora realizar unas especificaciones extras que nos reducirán algunas expresiones. Como vimos en la sección sobre radiación gravitacional, una onda estará determinada por la métrica asociada al espacio - tiempo. Una de las maneras de medir la presencia de una onda gravitacional es usando la ecuación de desviación geodésica 2-23 para dos masas en un marco de referencia con gravedad débil y, así, medir la fuerza de marea debida a la perturbación en la curvatura de la variedad [4, 3] (comportamiento de una onda gravitacional). Resulta entonces el tensor de Riemann como nuestro observable asociado a una onda gravitacional. De esta manera, daremos una nueva definición para una onda gravitacional de acuerdo a las observaciones previas [3]: Una onda plana, débil y nula en una teoría métrica sobre una variedad M es un campo gravitacional débil que se propaga en el vacío caracterizado, en un marco de referencia de Lorentz, por la linealización del tensor de Riemann cuyas componentes dependerán de un tiempo retardado $u \equiv t - z$:

$$R_{abcd} = R_{abcd}(u), \tag{2-50}$$

donde u es orientado de tal manera que las ondas viajen en la dirección $+z$ respecto al marco de referencia especificado. Tenemos, por otro lado, que el vector $\mathbf{u} \equiv \partial^a u$ resulta ser tangente

a la dirección de propagación de la onda plana [1], siendo así un vector nulo. Si considerásemos la otra dirección de propagación de la onda, i.e $-z$, podemos definir un vector $v \equiv \partial^a v$, donde $v = t + z$. Estos dos vectores, dadas sus definiciones, en un marco de Lorentz serán nulos respecto a esta métrica. Bajo esta descripción, podemos entonces trabajar bajo el formalismo de Newman - Penrose definiendo dos vectores complejos adicionales. Consideremos la tétrada definida en términos de la base cartesiana $\{e_{\hat{t}}, e_{\hat{x}}, e_{\hat{y}}, e_{\hat{z}}\}$ dada por [3]:

$$\begin{aligned} k &= \frac{1}{\sqrt{2}}(e_{\hat{t}} + e_{\hat{z}}), \\ l &= \frac{1}{\sqrt{2}}(e_{\hat{t}} - e_{\hat{z}}), \\ m &= \frac{1}{\sqrt{2}}(e_{\hat{x}} + ie_{\hat{y}}), \\ \bar{m} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(e_{\hat{x}} - ie_{\hat{y}}). \end{aligned} \tag{2-51}$$

Tenemos las condiciones especificadas en el formalismo de tétradas nulas y la matriz η resultante resulta ser exactamente la dada por 2-45. Ahora, al considerar la onda como plana, nula y débil, tenemos la siguiente relación para Riemann:

$$R_{abcd,p} = 0, \tag{2-52}$$

donde $\{a, b, c, d\}$ corre sobre $\{k, l, m, \bar{m}\}$ y los índices $\{p, q, r, \dots\}$ van sobre $\{k, m, \bar{m}\}$ solamente. Con esta consideración y tomando la identidad diferencial de Bianchi para el tensor de Riemann, tenemos que:

$$\begin{aligned} 0 = R_{ab[pq,l]} &= \frac{1}{6}(R_{abpq,l} + R_{abql,p} + R_{abl p,q} - R_{abqp,l} - R_{ablq,p} - R_{abpl,q}) \\ &= \frac{1}{3}R_{abpq,l}. \end{aligned} \tag{2-53}$$

Así, salvo por una constante, tenemos que $R_{abpq} = 0$. De este modo, es inmediato que las únicas componentes de Riemann no cero vienen dadas por R_{plql} .

Ahora, tomando en cuenta los coeficientes algebraicamente independientes del tensor de Weyl definidos en la ecuación 2-48, los reescribiremos en términos de Riemann usando las

simetrías adicionales resultantes al estudiar la onda definida en esta sección. Tenemos que:

$$\begin{aligned}
R_{1313} &= -\Psi_0 + \frac{1}{2}(\eta_{11}R_{33} - \eta_{31}R_{13} - \eta_{13}R_{13} + \eta_{33}R_{11}) - \frac{1}{6}(\eta_{11}\eta_{33} - \eta_{13}\eta_{31})R \\
&\iff \Psi_0 = -R_{1313} = 0; \\
R_{1213} &= -\Psi_1 + \frac{1}{2}(\eta_{11}R_{23} - \eta_{21}R_{13} - \eta_{13}R_{21} + \eta_{23}R_{11}) - \frac{1}{6}(\eta_{11}\eta_{23} - \eta_{13}\eta_{21})R \\
&\iff \Psi_1 = -R_{1213} = 0; \\
R_{1342} &= -\Psi_2 + \frac{1}{2}(\eta_{14}R_{32} - \eta_{34}R_{12} - \eta_{12}R_{34} + \eta_{32}R_{14}) - \frac{1}{6}(\eta_{14}\eta_{32} - \eta_{12}\eta_{34})R \\
&= -\Psi_2 + \frac{1}{2}(-R_{12} + R_{34}) - \frac{1}{6}R = -\Psi_2 \frac{1}{6}(R_{34} - R_{12}) \\
&= -\Psi_2 + \frac{1}{6}(\eta^{bd}R_{3b4d} - \eta^{bd}R_{1b2d}) = -\Psi_2 + \frac{1}{6}(R_{1221} + R_{1342}) \\
&\iff \Psi_2 = -\frac{1}{6}R_{1212}; \\
R_{1242} &= -\Psi_3 + \frac{1}{2}(\eta_{14}R_{22} - \eta_{24}R_{12} - \eta_{12}R_{24} + \eta_{22}R_{14}) - \frac{1}{6}(\eta_{14}\eta_{22} - \eta_{12}\eta_{24})R \\
&= -\Psi_3 + \frac{1}{2}R_{24} \\
&= -\Psi_3 + \frac{1}{2}(-R_{2142} - R_{2241} + R_{2344} + R_{2443}) = -\Psi_3 + \frac{1}{2}R_{1242} \\
&\iff \Psi_3 = -\frac{1}{2}R_{1242} \\
R_{2424} &= -\Psi_4 + \frac{1}{2}(\eta_{22}R_{44} - \eta_{42}R_{24} - \eta_{24}R_{42} + \eta_{44}R_{22}) - \frac{1}{6}(\eta_{22}\eta_{44} - \eta_{24}\eta_{42})R \\
&\iff \Psi_4 = -R_{2424}.
\end{aligned}$$

En resumen, tenemos:

$$\begin{aligned}
\Psi_0 &= 0 = \Psi_1, \\
\Psi_2 &= -\frac{1}{6}R_{lk lk}, \\
\Psi_3 &= -\frac{1}{2}R_{k l \bar{m} l}, \\
\Psi_4 &= -R_{\bar{m} l \bar{m} l}.
\end{aligned} \tag{2-54}$$

De manera similar, para los coeficientes definidos en 2-49 tenemos:

$$\begin{aligned}
\Phi_{00} &= -\frac{1}{2}(\eta^{bd}R_{1b1d}) = 0, & \Phi_{01} &= -\frac{1}{2}(\eta^{bd}R_{1b3d}) = 0, & \Phi_{02} &= -\frac{1}{2}(\eta^{bd}R_{3b3d}) = 0, \\
\Phi_{10} &= -\frac{1}{2}(\eta^{bd}R_{1b4d}) = 0, & \Phi_{20} &= -\frac{1}{2}(\eta^{bd}R_{4b4d}) = 0, & \Phi_{22} &= -\frac{1}{2}(\eta^{bd}R_{2b2d}) = -R_{2324}, \\
\Phi_{11} &= -\frac{1}{4}(\eta^{bd}R_{1b2d} + \eta^{bd}R_{3b4d}) = -\frac{1}{4}R_{1212}, & \Phi_{12} &= \bar{\Phi}_{21} = -\frac{1}{2}(\eta^{bd}R_{2b3d}) = -\frac{1}{2}R_{1232} = \bar{\Psi}_3.
\end{aligned}$$

Resumiendo de nuevo, tenemos:

$$\begin{aligned}
\Phi_{00} &= \Phi_{01} = \Phi_{02} = \Phi_{10} = \Phi_{20} = 0, \\
\Phi_{22} &= -R_{l m l \bar{m}}, & \Phi_{11} &= -\frac{1}{4}R_{1212} = \frac{3}{2}\Psi_2 \\
\Phi_{12} &= \bar{\Phi}_{21} = \bar{\Psi}_3.
\end{aligned} \tag{2-55}$$

Finalmente, siguiendo un procedimiento similar, observamos que el escalar Λ viene dado por:

$$\Lambda = \frac{1}{12}R_{1221} = \frac{1}{2}\Psi_2. \tag{2-56}$$

Dadas todas estas relaciones, resulta conveniente escribir los coeficientes en términos de la linealización de Riemann dada por la ecuación 2-28, donde la perturbación h_{ab} será función, como Riemann, de la dirección de propagación de la onda $u = t - z$.

$$\begin{aligned}
\Psi_2 &= -\frac{1}{6}R_{lklk} = -\frac{1}{12}(h_{lk,lk} + h_{kl,lk} - h_{l,kk} - h_{kk,l}) = \frac{1}{12}\ddot{h}_{kk}, \\
\Psi_3 &= -\frac{1}{2}R_{kl\bar{m}l} = -\frac{1}{4}(h_{l\bar{m},kl} + h_{kl,l\bar{m}} - h_{l,k\bar{m}} - h_{k\bar{m},l}) = \frac{1}{4}\ddot{h}_{k\bar{m}}, \\
\Psi_4 &= -R_{\bar{m}l\bar{m}l} = -\frac{1}{2}(h_{l\bar{m},\bar{m}l} + h_{\bar{m}l,l\bar{m}} - h_{l,\bar{m}\bar{m}} - h_{\bar{m}\bar{m},l}) = \frac{1}{2}\ddot{h}_{\bar{m}\bar{m}}, \\
\Phi_{22} &= -R_{lml\bar{m}} = -\frac{1}{2}(h_{ml,l\bar{m}} + h_{l\bar{m},lm} - h_{m\bar{m},l} - h_{l,m\bar{m}}) = \frac{1}{2}\ddot{h}_{m\bar{m}};
\end{aligned} \tag{2-57}$$

donde la expresión $\ddot{h} \equiv d^2h/du^2$ Todas estas expresiones nos serán útiles en los capítulos posteriores para encontrar los distintos valores de cada coeficiente en una teoría métrica dada.

3 Componente Algebraico

En este capítulo estudiaremos una parte fundamental respecto a propiedades algebraicas para introducir la noción de clasificación sobre los modos de polarización de las ondas gravitacionales y emplear dicha clasificación sobre alguna teoría métrica. Para ello, introduciremos el formalismo de *Petrov* para la clasificación de campos gravitacionales y ver cómo ésta permite realizar asociaciones sobre el tensor de Weyl respecto a las definiciones hechas en 2-48. Asimismo, se presentará el grupo de Poincaré y se describirá su *Little Group* $E(2)$. Dadas estas herramientas podremos entonces clasificar las ondas bajo las transformaciones presentes en el subgrupo $E(2)$ y relacionar con algún tipo de la clasificación de Petrov.

3.1. Clasificación de Petrov

El estudio de campos gravitacionales se puede resumir, de manera abstracta, en el análisis de un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden que describen la métrica de la variedad sobre la cual se supone el campo gravitacional. Éste resulta ser un problema altamente complejo para la solución analítica del sistema [11]. Mediante suposiciones adicionales sobre la variedad y sobre el comportamiento de la métrica algunas soluciones fueron encontradas para este sistema. Desde la postulación de la Relatividad General por Einstein en 1915 se dieron a conocer diversas posibles soluciones que generalizaban o “repetían” soluciones dadas debido a la complejidad en este campo de estudio. Durante los años 50, el físico ruso Petrov estableció un método para clasificar los diversos campos gravitacionales estudiando las características invariantes de éstos independientes de un sistema de coordenadas [12]. Esta clasificación se basa en el estudio de las propiedades algebraicas que posee el tensor de curvatura que, en el vacío, se reduce en el tensor de Weyl C_{abcd} .

Dicha clasificación ha sido realizada de diversas formas y métodos equivalentes entre sí por Penrose [13, 14], Bel [15], Debever [16]. Para llevar a cabo el entendimiento y la deducción de esta clasificación introduciremos el proceso llevado por Petrov [17] y, luego, el desarrollado por Bel, para el cual seguiremos la referencia [18]. Presentaremos algunos conceptos claves sin entrar a fondo en el componente matemático de éstos para, así, generar entonces dicha clasificación.

3.1.1. Espacio de Bivectores

Consideremos, para un punto dado $p \in M$, la familia de tensores $Q \subseteq \cup \mathcal{T}(k, l)$ con k y l pares y con la condición adicional que sus índices puedan ser agrupados en pares disjuntos

antisimétricos. Agruparemos cada uno de estos par de índices y se designarán a través de un índice griego. De esta manera, considerando el conjunto de los posibles valores que pueden tomar esta designación sobre los índices griegos, obtenemos una variedad de dimension $N = n(n-1)/2$ (6-dimensional cuando la dimensión de la variedad M es 4). Ordenando los índices colectivos y escogiendo solo un representante entre las dos posibilidades ij y ji obtenemos los 6 posibles índices dados con la siguiente numeración (una de las posibles) [17]:

$$1 - 1, 4; \quad 2 - 2, 4; \quad 3 - 3, 4; \quad 4 - 2, 3; \quad 5 - 3, 1; \quad 6 - 1, 2.$$

Llamemos A_c^c a la transformación en sistema de coordenadas sobre el punto p tal que para un bivector con componentes T^{ab} se tiene:

$$T^{a'b'} = A_{ab}^{a'b'} T^{ab}.$$

Definiendo $A_\alpha^{\alpha'} = 2A_{ab}^{[a'b]}$ obtenemos la transformación para estos índices colectivos:

$$T^{\alpha'} = A_\alpha^{\alpha'} T^\alpha. \quad (3-1)$$

La familia de elementos *bivectores* junto a esta propiedad de transformación lo definimos como *espacio de Bivectores*. Nótese que, bajo estas definiciones y condiciones, el tensor de Riemann R_{abcd} pertenece a este espacio y, así, será posible realizar entonces una clasificación a partir de este tensor.

Una propiedad adicional sobre este espacio es la construcción de una métrica $g_{\alpha\beta}$ a partir de la métrica g definida sobre la variedad M . Construyamos el siguiente elemento:

$$g_{abcd} = g_{ab}g_{cd} - g_{ad}g_{bc} \implies g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}. \quad (3-2)$$

Dada la formulación presentada en el capítulo anterior sobre tétradas, podemos realizar una lectura conveniente para este caso: en cada punto $p \in M$ podemos reconstruir una nueva base tal que sea, localmente, de Lorentz ($\eta^{\nu\mu}$). Así, para el tensor métrico g_{ab} transformado a esta forma, podemos entonces expresar matricialmente el tensor métrico en el espacio bivectorial como:

$$(g_{\alpha\beta}) = \text{diag}(-1, -1, -1, 1, 1, 1).$$

3.1.2. Clasificación a partir de Petrov

Como mencionamos antes, el tensor de Riemann (y dado que estamos en el vacío se traduce entonces en el tensor de Weyl) podremos realizar la clasificación de diversas estructuras M sobre las cuales se formula la teoría de la gravitación. Dadas las características de curvatura que tiene este tensor y la ecuación de campo dada por 2-25, podremos estudiar algunas propiedades algebraicas y analizar cómo éstas permiten realizar la clasificación que buscamos sobre los campos gravitacionales.

Consideremos una superficie bidimensional $\Sigma \subseteq M$ construida a partir de curvas geodésicas. Definimos su curvatura Gaussiana¹ K como:

$$K = \frac{R_{abcd}v^{ab}v^{cd}}{g_{pqrs}v^{pq}v^{rs}}, \quad (3-3)$$

donde, haciendo un abuso de notación, los bivectores v^{ij} están caracterizados por los vectores que definen el área sobre el cual está determinada la curvatura K v_a y v_b a través de $v^{ij} = v_{[1}^a v_{2]}^b$. Así; podemos reescribir dicha curvatura en términos de elementos del espacio de bivectores como:

$$K = \frac{R_{\alpha\beta}v^\alpha v^\beta}{g_{\alpha\beta}v^\alpha v^\beta}. \quad (3-4)$$

Consideremos el problema de valores críticos de la curvatura Gaussiana K definida en la ecuación anterior sobre el espacio de bivectores. Llamemos a aquellos valores críticos como *curvaturas estacionarias* y a los bivectores v^α que satisfagan la condición como secciones críticas de la variedad M . Resulta entonces la expresión:

$$\frac{\partial K}{\partial v^\alpha} = 0. \quad (3-5)$$

Al considerar el caso más general, que contempla la posibilidad que $g_{\alpha\beta}v^\alpha v^\beta = 0$, por continuidad y suavidad de la función K , se llega a la expresión [11]:

$$(R_{\alpha\beta} - K g_{\alpha\beta})v^\beta = 0. \quad (3-6)$$

En necesario, a este punto, realizar dos definiciones estándar en el contexto de álgebra lineal para continuar con la metodología propuesta por Petrov.

Definición: Clasificación de Segre [20]. Sea V un espacio vectorial sobre un campo algebraicamente cerrado F y $T : V \rightarrow V$ un mapa lineal. Sea $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r\}$ el conjunto de valores propios asociado al mapa T . Realizando la forma canónica de Jordan sobre la transformación T , podemos escribir, matricialmente respecto a una base B de V como:

$$[T] = \begin{pmatrix} T_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & T_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & T_r \end{pmatrix},$$

donde cada T_i corresponde a una matriz $n_i \times n_i$ (dimensión del subespacio propio) diagonal con entradas 1 o 0 en su diagonal superior y en la diagonal entradas igual a λ_i . Escribimos

¹La curvatura Gaussiana resulta ser una medida de curvatura localmente sobre una superficie bidimensional que permite categorizar dicha superficie en 3 regímenes posibles de acuerdo a su signo y establecer si se trata de geometría esférica, euclídea ó hiperbólica [19].

ahora cada matriz T_i como:

$$[T_i] = \begin{pmatrix} S_{i_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & S_{i_2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & S_{i_k(i)} \end{pmatrix},$$

con cada S_{i_j} es una matriz $m_{i_j} \times m_{i_j}$ con $m_{i_1} \geq m_{i_2} \geq \dots \geq m_{i_k(i)}$. Tenemos entonces la *característica de Segre* dada por:

$$[(m_{1_1} \dots m_{1_k(1)}), \dots, (m_{r_1} \dots m_{r_k(r)})].$$

La característica de la matriz $R_{\alpha\beta} - Kg_{\alpha\beta} \equiv K$ determinada a partir de su forma canónica de Jordan genera una clasificación sobre el tensor de curvatura sobre un abierto $U \subseteq M$, la cual permanece invariante.

Siguiendo el camino determinado por Petrov para llevar a cabo la clasificación enunciaremos dos teoremas importantes que permiten determinar los diferentes tipos de campos gravitacionales:

Teorema: 1. La matriz $[R_{\alpha\beta}]$, para un sistema de coordenadas ortogonal (tétradas) será doblemente simétrica, i.e, dicha matriz se puede reescribir como:

$$[R_{\alpha\beta}] = \begin{vmatrix} M & N \\ N & -M \end{vmatrix}, \quad (3-7)$$

donde las matrices M y N son matrices simétricas. Este teorema hace uso de la ecuación de campo 2-25 en el vacío y las simetrías de Riemann mapeadas en el espacio bivectorial.

Aplicando operaciones elementales sobre la matriz K , las cuales dejan invariantes su característica de Segre [20], es posible reducirla hasta obtener una matriz de la forma [17]:

$$\begin{vmatrix} m_{\alpha\beta} + in_{\alpha\beta} + K\delta_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & -m_{\alpha\beta} + in_{\alpha\beta} - K\delta_{\alpha\beta} \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} P(K) & 0 \\ 0 & -\bar{P}(K) \end{vmatrix}. \quad (3-8)$$

Teorema: 2. Existen solamente tres tipos de campos gravitacionales. La matriz $P(K)$ solo puede tener tres tipos de característica de Segre: $[1 \ 1 \ 1]$, $[2 \ 1]$, $[3]$, omitiendo multiplicidades en las raíces.

Para probar este último teorema se realiza la respectiva forma canónica de la matriz y se observa qué sucede con la matriz $[R_{\alpha\beta}]$.

3.1.3. Clasificación a partir de Bel

Veamos ahora el desarrollo establecido por Bel haciendo uso de vectores nulos. Haremos uso del formalismo de Newman - Penrose definiendo una base de tétradas nulas y los coeficientes

de Weyl 2-48. Al escoger un conjunto de tétradas en cada punto $p \in M$, podemos asignar al marco las transformaciones de Lorentz. En secciones posteriores estudiaremos el grupo de Lorentz, pero por el momento haremos uso de una de sus características. Dados los seis parámetros asociados a este grupo de transformaciones, tenemos entonces una correspondencia con seis grados de libertad para rotar de un sistema de tétradas a otro. Consideremos tres clases de transformaciones sobre la tétrada nula (k, l, m, \bar{m}) :

- Rotaciones de Clase I: El vector k permanece invariante.

$$\begin{aligned} k &\rightarrow k, \quad l \rightarrow l + a^*m + a\bar{m} + a^*ak, \\ m &\rightarrow m + ak, \quad \bar{m} \rightarrow \bar{m} + a^*k. \end{aligned} \tag{3-9}$$

- Rotaciones de Clase II: El vector l permanece invariante.

$$\begin{aligned} l &\rightarrow l, \quad k \rightarrow k + b^*m + b\bar{m} + b^*bl, \\ m &\rightarrow m + bl, \quad \bar{m} \rightarrow \bar{m} + b^*l. \end{aligned} \tag{3-10}$$

- Rotaciones de Clase III: Direcciones de los vectores l y k permanecen invariantes y los vectores m y \bar{m} son rotados por θ en el plano (m, \bar{m}) .

$$\begin{aligned} k &\rightarrow A^{-1}k, \quad l \rightarrow Al, \\ m &\rightarrow e^{i\theta}m, \quad \bar{m} \rightarrow e^{-i\theta}\bar{m}. \end{aligned} \tag{3-11}$$

Donde a y b son funciones complejas y A y θ funciones reales. Nótese que la condición de ortogonalidad y nulidad se conservan en cada uno de los marcos rotados. Veamos ahora cómo se transforman los coeficientes escalares 2-48 bajo cada tipo de rotación descrito.

Empecemos con la rotación de Clase I sobre Ψ_0 y Ψ_1 :

$$\Psi_0 = -C_{1313} \rightarrow -C_{pqrs}k^p(m^q + ak^q)k^r(m^s + ak^s) = -C_{pqrs}k^p m^q k^r m^s = \Psi_0.$$

Y para Ψ_1 tenemos:

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= -C_{1213} \rightarrow -C_{pqrs}k^p(l^q + a^*m^q + a\bar{m}^q + aa^*k^q)k^r(m^s + ak^s) = -C_{1213} - a^*C_{1313} - aC_{1413} \\ &= -C_{1213} - a^*C_{1313} = \Psi_1 + a^*\Psi_0. \end{aligned}$$

Bajo este esquema de transformación donde se consideran las simetrías del tensor de Weyl, resumimos a continuación los resultados para cada clase de rotación:

- Clase I:

$$\begin{aligned} \Psi_0 &\rightarrow \Psi_0, \quad \Psi_1 \rightarrow \Psi_1 + a^*\Psi_0, \quad \Psi_2 \rightarrow \Psi_2 + 2a^*\Psi_1 + (a^*)^2\Psi_0, \\ \Psi_3 &\rightarrow \Psi_3 + 3a^*\Psi_2 + 3(a^*)^2\Psi_1 + (a^*)^3\Psi_0, \\ \Psi_4 &\rightarrow \Psi_4 + 4a^*\Psi_3 + 6(a^*)^2\Psi_2 + 4(a^*)^3\Psi_1 + (a^*)^4\Psi_0. \end{aligned} \tag{3-12}$$

- Clase II:

$$\begin{aligned}\Psi_0 &\rightarrow \Psi_0 + 4b\Psi_1 + 6b^2\Psi_2 + 4b^3\Psi_3 + b^4\Psi_4, \\ \Psi_1 &\rightarrow \Psi_1 + 3b\Psi_2 + 3b^2\Psi_3 + b^3\Psi_4, \\ \Psi_2 &\rightarrow \Psi_2 + 2b\Psi_3 + b^2\Psi_4, \quad \Psi_3 \rightarrow \Psi_3 + b\Psi_4, \quad \Psi_4 \rightarrow \Psi_4.\end{aligned}\tag{3-13}$$

- Clase III:

$$\begin{aligned}\Psi_0 &\rightarrow A^{-2}e^{2i\theta}\Psi_0, \quad \Psi_1 \rightarrow A^{-1}e^{i\theta}\Psi_1, \quad \Psi_2 \rightarrow \Psi_2, \\ \Psi_3 &\rightarrow Ae^{-i\theta}\Psi_3, \quad \Psi_4 \rightarrow A^2e^{-2i\theta}\Psi_4.\end{aligned}\tag{3-14}$$

Teniendo en cuenta estas transformaciones realicemos la respectiva clasificación. Consideremos $\Psi_4 \neq 0$ (si es cero, bajo una rotación de tipo I podemos hacer que no lo sea.) Realicemos una rotación de tipo II respecto a un parámetro b (ecuación 3-13.) Dada una rotación de esta clase, podemos hacer que $\Psi_0 = 0$ encontrando las raíces a la ecuación:

$$\Psi_0 + 4b\Psi_1 + 6b^2\Psi_2 + 4b^3\Psi_3 + b^4\Psi_4 = 0.\tag{3-15}$$

Dado que b pertenece a los complejos (función compleja), tenemos entonces que la ecuación anterior tiene siempre 4 raíces (contando multiplicidad.) Se generan así cuatro nuevas direcciones asociadas al vector $k : k + b^*m + b\bar{m} + bb^*l$ llamadas *direcciones nulas principales* [9, 18]. Los distintos modos en que las raíces podrían coincidir generan lo que llamamos la clasificación de Petrov:

- *Petro Tipo I:* Las cuatro raíces de la ecuación 3-15 son distintas. Llamemos a las raíces b_1, b_2, b_3 y b_4 . De este modo, bajo una rotación de clase II, sin pérdida de generalidad bajo el parámetro $b = b_1$, Ψ_0 se hace cero. Ahora, bajo una rotación de tipo I donde Ψ_0 no se afecta, podemos entonces hacer que Ψ_4 sea cero. De esta manera, Ψ_1, Ψ_2 y Ψ_3 no se cancelarán y permanecerán invariantes los escalares $\Psi_1 \cdot \Psi_3$ y Ψ_2 bajo rotaciones de clase III.
- *Petrov Tipo II:* Dos raíces coinciden: $b_1 = b_2 \neq b_3 \neq b_4$. De este modo, dicho polinomio lo podemos reescribir como $f(b) = (b - b_1)^2g(b)$, donde $g(b)$ es un polinomio de grado a lo sumo 2. Nótese que b_1 es también raíz de $f'(b)$. Así, al derivar dicho polinomio en ecuación 3-15, obtenemos la expresión:

$$\Psi_1 + 3b\Psi_2 + 3b^2\Psi_3 + b^3\Psi_4,$$

la cual resulta ser la transformación del coeficiente Ψ_1 . Por lo tanto, siendo $b_1 (= b_2)$ raíz, los coeficientes Ψ_0 y Ψ_1 se harán cero simultáneamente. Ahora, bajo una rotación de clase I con parámetro $a = 1/b_3$, podemos hacer que Ψ_4 sea cero (se obtiene la ecuación anterior dividida por b_3 , por lo cual se hace cero Ψ_4) sin afectar Ψ_0 y Ψ_1 . Ψ_2 y Ψ_3 no se cancelarán y, más aún, Ψ_2 permanecerá invariante bajo transformaciones de clase III.

- *Petrov Tipo D*: Dos pares de raíces coinciden, $b_1 = b_2$ y $b_3 = b_4$, con $b_1 \neq b_3$. Nuevamente, bajo una rotación de clase II con parámetro $b = b_1$, vemos que Ψ_0 y Ψ_1 se hacen cero. Ahora, bajo una rotación de clase I con parámetro $1/b_3 (= 1/b_4)$, notamos nuevamente que, como en Petrov tipo II, Ψ_4 se hace cero, y por argumentos de doble multiplicidad como ocurre con Ψ_0 y Ψ_1 , la expresión para Ψ_3 resulta ser la derivada del polinomio asociado a la transformación de Ψ_4 , por lo cual se cancelan simultáneamente (en rotaciones de Clase I). Así, Ψ_2 será el único escalar que no se desvanece siendo a su vez invariante bajo rotaciones de clase III.
- *Petrov Tipo III* Tres de las raíces son iguales ($b_1 = b_2 = b_3 \neq b_4$.) Al derivar dos veces la expresión 3-15 se obtiene:

$$3(\Psi_2 + 2b\Psi_3 + b^2\Psi_4),$$

la cual es cero por tener una multiplicidad de orden 3. Así, observamos que podemos hacer cero simultáneamente Ψ_0 , Ψ_1 y Ψ_2 . Realizando una rotación de clase I con parámetro $a = 1/b_4$, notamos que Ψ_4 se hace cero. De este modo, Ψ_3 será el único escalar que no se hace cero.

- *Petrov Tipo N*: Las cuatro raíces son iguales ($= b$.) Así, para una rotación de Clase II con este parámetro b , nuevamente or el argumento de las derivadas, tenemos que Ψ_0 , Ψ_1 , Ψ_2 y Ψ_3 se hacen cero simultáneamente, siendo Ψ_4 el único escalar que no se cancela.

Por último tenemos otro resultado de acuerdo al planteamiento de Bel para que el vector k resulte siendo un *vector nulo principal* [18]:

$$k_{[h}C_{i]pq[j}k_f]k^pk^q = 0 \quad \text{para } \Psi_0 = 0, \quad (3-16)$$

y la segunda condición dada por:

$$C_{ipq[j}k_f]k^pk^q = 0 \quad \text{para } \Psi_0 = 0 = \Psi_1. \quad (3-17)$$

Podemos resumir las distintas correspondencias entre las distintas clasificaciones de Petrov a partir del siguiente diagrama:

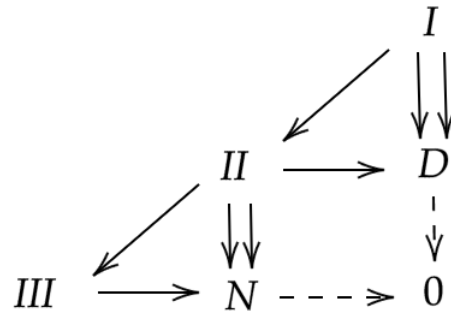


Figura 3-1: Inclusión de los tipos de Petrov según sus multiplicidades. Las flechas representan aumento en la multiplicidad en la respectiva inclusión. Cada flecha es el número de degeneramientos.

Dadas estas dos deducciones de la clasificación de Petrov, estableceremos en la siguiente tabla la equivalencia entre cada uno de los procedimientos:

Tabla 3-1: Equivalencia entre la multiplicidad de las raíces junto a la característica de Segre en la clasificación de Petrov [12]

Tipo de Petrov	Multiplicidades raíces (Bel)	Característica de Segre (Petrov)
I	(1 1 1 1)	[1 1 1]
D	(2 2)	[(1 1) 1]
II	(2 1 1)	[2 1]
III	(3,1)	[3]
N	(4)	[(2 1)]

3.2. Grupos de Lie

En esta sección introduciremos brevemente algunas nociones de teoría de grupos para definir los grupos de Lie y su respectiva álgebra. Estudiaremos algunas de sus propiedades sin especificar ningún ejemplo físico. En secciones posteriores se llevará a cabo dicho análisis para el grupo de Poincaré relacionado con las transformaciones isométricas en el espacio de Minkowski. Seguiremos las referencias a Reyes [7], Curtis [21] y Costa [22] durante esta sección. Dicha introducción a los grupos y álgebras de Lie nos permitirá comprender las nociones de mapa exponencial y cómo éstos dos conjuntos (álgebra y grupo) se relacionan entre sí. A partir de ello, realizaremos el estudio de su respectiva representación a través del álgebra, la cual resultará bastante conveniente para el estudio del grupo de Poincaré \mathcal{P} , el cual, junto a Petrov, nos permitirá realizar una clasificación extra sobre los escalares de Weyl.

3.2.1. Grupo y álgebra de Lie

Definición: Grupo de Lie. Un grupo de Lie es un grupo G que posee la estructura de variedad suave tal que los mapas $\mu : G \times G \rightarrow G$ dado por $\mu(g, h) = gh$ y el mapa $\alpha : G \rightarrow G$ dado por $\alpha(g) = g^{-1}$ sean suaves. Usaremos e como el elemento identidad del grupo G .

Como hemos mencionado durante el capítulo de fundamentos, más que estudiar la variedad misma G , resulta de gran interés estudiar los espacios tangentes V_g para $g \in G$. Realicemos unas definiciones extras que nos permitirán introducir algunas nociones importantes en el grupo de Lie.

Definición: Haz tangente. Sea M una variedad suave. Definimos el haz tangente de M como:

$$TM := \bigsqcup_{p \in M} V_p.$$

A partir de este momento, resultará útil usar una nueva convención para un vector tangente. A un vector $v \in V_p$ lo denotaremos como $v|_p$.

Definición: Mapa tangente. Sean M, N dos variedades suaves. Sea $\phi : M \rightarrow N$ un mapa suave entre ellas. Definimos el mapa tangente a ϕ , $T\phi$, como:

$$\begin{aligned} T\phi : TM &\rightarrow TN \\ v|_p &\mapsto (T\phi)(v|_p) : C^\infty(N) \rightarrow \mathbb{R} \\ &f \mapsto v|_p(f \circ \phi). \end{aligned}$$

Aplicando este mapa tangente punto a punto sobre la variedad M , definimos el *push forward* de ϕ como:

$$\begin{aligned} T_p\phi &\equiv (\phi_*)_p : V_pM \rightarrow V_{\phi(p)}N \\ v|_p &\mapsto (T\phi)(v|_p) : C^\infty(N) \rightarrow \mathbb{R} \\ &f \mapsto v|_p(f \circ \phi), \end{aligned}$$

donde V_pM se refiere al espacio tangente V_p en la variedad M , y $V_{\phi(p)}N$ al espacio tangente $V_{\phi(p)}$ sobre la variedad N .

Observación: Dada una variedad M , el conjunto TM por lo general no resulta ser un espacio vectorial. De esta manera, para un mapa $\phi : M \rightarrow N$, el mapa tangente $T\phi$ no resulta ser un mapa lineal. Hemos abusado de la notación en ambos casos, sin embargo, se puede seleccionar un vector $v|_q$ en $q \in M$. Al definir el mapa $T_q\phi$ hemos restringido $T\phi$ sobre el espacio V_q tal que tengamos un mapa lineal.

Generemos dos acciones suaves del grupo G sobre sí mismo dadas a partir de la suavidad de la multiplicación.

- Acción a izquierda:

$$l : G \times G \rightarrow G$$

$$(g, h) \mapsto l(g, h) \equiv l_g(h) := gh.$$

- Acción a derecha:

$$r : G \times G \rightarrow G$$

$$(g, h) \mapsto r(g, h) \equiv r_g(h) := hg.$$

Una manera adicional en la cual podemos ver la definición de mapa tangente es como una función que va entre los espacios de campos vectoriales $\mathfrak{X}(M)$ y $\mathfrak{X}(N)$: $\phi_* : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(N)$. De este modo, para $X \in \mathfrak{X}(G)$ y $g, h \in G$, tenemos que $(l_{g*}X)_{l_g(h)} := (l_{g*})_h(X_h)$. Diremos que el campo vectorial X es l_g invariante (ó invariante a izquierda) si y sólo si para todo $g \in G$, tenemos que $X(gh) = (l_g)_*(X(h))$ [23]. Es importante resaltar que realizar un estudio sobre el conjunto de los campos vectoriales sobre una variedad G resulta más complejo, pues en casos generales su dimensión no es finita [7]. Así, definiremos un nuevo conjunto sobre el cual estudiaremos ciertas propiedades que resultan más apropiadas para el entendimiento de los grupos de Lie.

Definición: Campos invariantes a izquierda. Definimos el conjunto de los campos vectoriales invariantes a izquierda como:

$$\mathcal{L}(G) := \{X \in \mathfrak{X}(G) \mid X \text{ es } l_g \text{ invariante}\}.$$

Definición: Álgebra de Lie. Diremos que una álgebra de Lie es un espacio vectorial G sobre un campo \mathbb{F} dotado con una operación $[\cdot, \cdot] : G \times G \rightarrow G$ llamada *bracket de Lie*. Éste satisface las propiedades:

- Bilineal. Sean $u, v, w \in G$ y $a \in \mathbb{F}$, entonces

$$[u + w, av] = a[u, v] + a[w, v].$$

- Anticonmutatividad. Sean $u, v \in G$, entonces:

$$[u, v] = -[v, u].$$

- Identidad de Jacobi. Sean $u, v, w \in G$. Tenemos:

$$[u, [v, w]] + [w, [u, v]] + [v, [w, u]] = 0.$$

Proposición: $(\mathcal{L}(G), [\cdot, \cdot])$ es una álgebra de Lie. Bajo la definición $[\cdot, \cdot] : \mathcal{L}(G) \times \mathcal{L}(G) \rightarrow \mathcal{L}(G)$ como $[u, v] := uv - vu$, tenemos que $(\mathcal{L}(G), [\cdot, \cdot])$ es un álgebra de Lie.

Demostración. Para probar la proposición anterior sólo basta mostrar que para $X, Y \in \mathcal{L}(G)$ se tiene que $[X, Y] \in \mathcal{L}(G)$. Sea $f \in C^\infty(G)$. Tenemos que:

$$T_m l_g([X, Y])(f) \equiv (l_{g*})_m([X, Y]|_m)(f) = [X, Y]|_m(f \circ l_g),$$

desarrollando entonces dicho conmutador, tenemos que:

$$\begin{aligned} &= X|_m(Y(f \circ \phi)) - Y|_m(X(f \circ \phi)) \\ &= X|_m((T l_g \circ Y)(f)) - Y|_m((T l_g \circ X)(f)), \end{aligned}$$

considerando ahora la hipótesis que $X, Y \in \mathcal{L}(G)$, resulta entonces:

$$\begin{aligned} &= X|_m(Y(f)) - Y|_m(X(f)) \\ &= [X, Y]|_m(f). \end{aligned}$$

Así, mostramos que $[X, Y] \in \mathcal{L}(G)$. □

Una propiedad adicional es sobre el valor que asume un campo vectorial invariante a izquierda. Éste resulta estar completamente determinado por el valor que asume sobre la identidad e . Sea $X \in \mathcal{L}(G)$, lo cual por definición implica:

$$X|_{l_g(m)} = (l_{g*})_m X|_m.$$

Si $m = e$, obtenemos:

$$X|_g = l_{g*}(X|_e).$$

Veamos un último teorema de por qué resulta útil trabajar directamente con el álgebra de Lie.

Teorema: $\mathcal{L}(G) \cong V_e G$. Sea $\Psi : \mathcal{L}(G) \rightarrow V_e G$, $X \mapsto \Psi(X) := X|_e \equiv X_e$, es un isomorfismo.

Demostración. Por construcción de Ψ resulta claro que es un mapa lineal. Veamos entonces que es inyectiva y sobreyectiva.

- Inyectividad. Supongamos $\Psi(X) = \Psi(Y)$. Así, $X_e = (l_{g^{-1}*})Y_g$ para todo $g \in G$. De esta manera, usando la propiedad de acción sobre l_g y que $Y \in \mathcal{L}(G)$, tenemos que $Y_g = l_{g*}X_e = X_g$.
- Sobreyectividad. Sea $A \in V_e G$. Definamos $X_g^A := (l_{g*})(A)$. Por construcción, es claro que $X^A : G \rightarrow TG$, i.e., $X \in \mathfrak{X}(G)$. Por otro lado, tenemos que $X^A \in \mathcal{L}(G)$ [23]. Para ver esto, tenemos:

$$\begin{aligned} (l_h)_*(X_g^A)(f) &= (l_{h*})_g(X_g^A)(f) = X_g^A(f \circ l_h) = (l_{g*})A(f \circ l_h) \\ &= A(f \circ l_h \circ l_g) = (l_{hg})_*A(f) = X^A(hg)(f) \\ \implies X^A &\in \mathcal{L}(G). \end{aligned}$$

Así, se tiene que $X_e^A = (l_e)_*(A) = A$. De esta manera, $\Psi(X^A) = X_e^A = A$.

□

Un resultado importante del último teorema viene dado por: $\dim \mathcal{L}(G) = \dim V_e G = \dim G$. Por otro lado, dada la definición anterior, es posible dotar al espacio $V_e G$ con un álgebra de Lie a través del siguiente corchete:

$$A, B \in V_e G \implies [A, B] := \Psi([X^A, X^B]).$$

Vamos a enunciar ahora un teorema que nos permite relacionar de una manera operacional el álgebra de grupo con el grupo en sí “infinitesimalmente”.

Teorema: Homomorfismo entre álgebras. Sean G, H grupos de Lie con álgebras de Lie $\mathcal{L}(G), \mathcal{L}(H)$ respectivamente. Sea $\phi : G \rightarrow H$ un homomorfismo de grupos de Lie (un homomorfismo de grupos suave). Entonces se tiene que:

$$d\phi \equiv T_e \phi : V_e G \rightarrow V_e H,$$

es un homomorfismo de álgebras de Lie [7].

De este resultado se obtiene la siguiente observación: Dado un homomorfismo de grupos de Lie $\phi : G \rightarrow H$, obtenemos una versión infinitesimal $d\phi : \mathcal{L}(G) \rightarrow \mathcal{L}(H)$ tal que se cumple:

$$d\phi([X, Y]) = [d\phi(X), d\phi(Y)].$$

Una última observación importante sobre los grupos de Lie hace referencia a los generadores infinitesimales, los cuales se encuentran fuertemente ligados con lo enunciado en el teorema anterior. Para introducir esta parte, necesitamos realizar el siguiente par de definiciones y un nuevo teorema:

Definición: Subgrupo a un parámetro. Subgrupo a un parámetro se designa a un homomorfismo $\phi : \mathbb{R} \times G \rightarrow G$ (viendo \mathbb{R} como un grupo aditivo.) Haremos la asociación $\phi(t, g) \equiv \phi_g(t)$.

Definición: Aplicación exponencial. Sea G un grupo de Lie y $\mathcal{L}(G)$ su respectiva álgebra de Lie. Definimos la aplicación exponencial como el mapa:

$$\begin{aligned} \exp : \mathcal{L}(G) &\rightarrow G \\ X &\rightarrow \exp(X), \end{aligned}$$

con las siguientes propiedades:

- $\exp(-X) = \exp(X)^{-1}$.
- $\exp(X + Y) = \exp(X) + \exp(Y)$ para $[X, Y] = 0$.

Teorema: Unicidad homomorfismo. Sean G y H dos grupos de Lie con álgebras de Lie $\mathcal{L}(G)$, $\mathcal{L}(H)$ respectivamente. Supongamos que G es un espacio simplemente conexo (i.e, entre todo par de puntos sobre la variedad G existe una única clase de homotopía de caminos. Dos caminos son homotópicos si uno se puede deformar continuamente en el otro [5].) Consideremos ahora $\Psi : \mathcal{L}(G) \rightarrow \mathcal{L}(H)$ un homomorfismo de álgebras de Lie. Entonces existe un único homomorfismo $\phi : G \rightarrow H$ tal que $d\phi = \Psi$ [7].

A partir de este teorema, es posible mostrar que el subgrupo a un parámetro es único [23]. Con ello, diremos que: $\exp(tX)(m) := \phi(t, m)$. Con estas definiciones junto al teorema, obtenemos un resultado muy importante que es usual en física, en el cual un elemento de un grupo de Lie lo podremos expresar como la exponencial de un generador infinitesimal $X \in \mathcal{L}(G)$.

Teorema: Generador infinitesimal. Sea G un grupo de Lie y $X \in \mathcal{L}(G)$. Definamos $e^{tX} := \exp(tX)(e)$. Tenemos entonces [23]:

- $\exp(tX)(m) = m e^{tX}$ (como producto de grupo).
- Sea $X \in \mathcal{L}(G)$ fijo. El mapa $\varphi(t) := e^{tX}$ es un mapa \mathbb{C}^∞ de \mathbb{R} en G que cumple:

$$\varphi(0) = e, \quad \varphi(s + t) = \varphi(s)\varphi(t).$$

- $X \Big|_{\phi(m,t)} = \dot{\phi}(m,t)$.

El ítem uno nos relaciona todo elemento $m \in G$ con la identidad. El segundo nos manifiesta el resultado que hemos anunciado antes: un elemento de un grupo de Lie lo podemos expresar como la exponencial de un elemento de su respectiva álgebra de Lie que, junto al tercer ítem observamos de qué generador se trata.

3.2.2. Representaciones de Grupos de Lie

En esta sección estudiaremos las representaciones para un grupo de Lie G . Veremos cómo es posible obtener una representación a partir de su álgebra de Lie. Para ello, seguiremos el desarrollo expresado por Kirillov [24]. Realizaremos un conjunto de definiciones y se enunciarán algunos teoremas propios de teoría de representaciones.

Definición: Representación. Sea G un grupo de Lie. Una representación ρ es un homomorfismo $\rho : G \rightarrow GL(V)$ para un espacio vectorial V , donde $GL(V) = \{T : V \rightarrow V \mid T \text{ lineal e invertible}\}$. Una representación del álgebra de Lie $\mathcal{L}(G)$ asociada a G se obtiene a partir de ρ como $\tilde{\rho} : \mathcal{L}(G) \rightarrow \mathcal{L}(GL(V))$. Por simplicidad en la notación, no haremos distinción entre ρ y $\tilde{\rho}$.

Definición: Subrepresentación. Sea (ρ, V) una representación para un grupo G . Una subrepresentación es un subespacio $W \subseteq V$ tal que, para todo $g \in G$, se tiene $\rho(g)W \subseteq W$ (de manera análoga para la subrepresentación del álgebra de Lie.) Diremos, de manera equivalente, que el espacio W es invariante bajo ρ .

Definición: Representación irreducible. Una representación (ρ, V) sobre un grupo G se llama irreducible si sus únicas subrepresentaciones (como espacios vectoriales) son 0 y V . De lo contrario, V se llama *reducible*.

Definición: Reducibilidad. Una representación (ρ, V) sobre un grupo G es llamada completamente reducible o semisimple si es isomorfa a una suma directa de representaciones irreducibles, i.e, si $V \cong \bigoplus n_i V_i$, donde V_i son representaciones irreducibles y n_i sus respectivas multiplicidades en tal descomposición.

A partir de estas definiciones surge la pregunta: ¿Toda representación es completamente reducible?. La respuesta resulta ser que no. Consideremos el siguiente ejemplo que muestra esta problemática en lo grupos de Lie. Sea $G = \mathbb{R}$. Para este grupo, resulta entonces que su álgebra de Lie $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ es \mathbb{R} . Una representación de esta álgebra sobre un espacio vectorial V definido sobre el campo \mathbb{C} es:

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} : \mathbb{R} &\rightarrow GL(V) \\ t &\mapsto tA, \end{aligned}$$

donde $A \in GL(V)$ es arbitrario. La correspondiente representación de un elemento del grupo viene dada entonces por: $\rho : t \mapsto \exp(tA)$ (viendo este espacio de representación como un grupo, y en el caso de la representación $\tilde{\rho}$ como su respectiva álgebra. Por lo tanto, bajo las definiciones de aplicación exponencial, esta asignación tiene sentido.) Sea v un vector propio del operador A . Así, el espacio generado por dicho vector, $\text{span}\{v\}$, es invariante bajo la representación $\tilde{\rho}$. Dado que estamos trabajando sobre el campo complejo, sabemos que todo operador lineal posee al menos un autovector, por lo que toda representación definida como lo hicimos resulta ser reducible. Las representaciones irreducibles de \mathbb{R} son entonces unidimensionales. Para el caso de la representación del grupo, ρ , escribir ésta como una suma de irreducibles deriva en el problema de diagonalizar el operador A . Dado que no todo operador es diagonalizable, tenemos entonces que no toda representación es completamente reducible. Dicha descomposición en representaciones irreducibles resulta ser siempre cierta cuando nuestro grupo G es finito; sin embargo, esta propiedad no la poseemos de manera general para un grupo de Lie.

Definición: Representación unitaria. Una representación (ρ, V) sobre \mathbb{C} de un grupo de Lie G es llamada unitaria si existe un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ G -invariante:

$$\langle \rho(g)u, \rho(g)v \rangle = \langle u, v \rangle,$$

para todo $g \in G$. Equivalentemente, si $\rho(g) \in U(V)$, donde $U(V) = \{T : V \rightarrow V \mid T \text{ es unitario}\}$. De manera análoga, decimos que una representación $(\tilde{\rho}, V)$ del álgebra de Lie $\mathcal{L}(G)$ es unitaria si existe un producto interno que sea $\mathcal{L}(G)$ -invariante, es decir, existe $\langle \cdot, \cdot \rangle$ tal que:

$$\langle \tilde{\rho}(X)u, v \rangle + \langle u, \tilde{\rho}(X)v \rangle = 0.$$

Observación: Sí la representación es unitaria, se cumple que $\rho(g)^\dagger = \rho(g^{-1})$.

Teorema: Reducibilidad y unitariedad. Toda representación unitaria es completamente reducible.

Demostración. Sea $W \subseteq V$ un subespacio invariante. Dado que la representación es irreducible, poseemos un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Definamos:

$$W^\perp = \{v \in V \mid \langle w, v \rangle = 0 \ \forall w \in W\}.$$

Veamos que W^\perp es un subespacio invariante. Sea $u \in W^\perp$. Veamos que, para todo $g \in G$, se tiene que $\rho(g)u \in W^\perp$. Sea $w \in W$. Tenemos entonces que:

$$\langle \rho(g)u, w \rangle = \langle \underbrace{u}_{W^\perp}, \underbrace{\rho(g^{-1})w}_W \rangle = 0.$$

Tenemos entonces que $V = W \oplus W^\perp$, y $\rho = \rho_W \oplus \rho_{W^\perp}$. La prueba continúa inductivamente realizando este procedimiento. \square

3.3. Grupo de Poincaré

Con el desarrollo llevado a cabo en la sección anterior sobre grupos de Lie y los últimos resultados obtenidos sobre sus generadores infinitesimales, vamos a estudiar el grupo de Lie asociado a las transformaciones inhógenas de Lorentz: El grupo de Poincaré. Empezaremos con el estudio del grupo de Lorentz y veremos cómo se define el grupo de Poincaré a través de éste. Estudiaremos su álgebra de grupo a partir de sus generadores infinitesimales, los cuales construiremos desde un punto de vista más físico. Dicho estudio sobre este grupo de Lie nos será de gran utilidad en el contexto de cuantización. El resultado final en esta sección será obtener las representaciones unitarias unidimensionales de éste grupo para una partícula no masiva. La importancia de obtener este tipo de representaciones sobre este grupo radica en el *teorema de Wigner* [25], el cual afirma que las operaciones de simetría en el contexto de mecánica cuántica son llevadas a cabo por operaciones unitarias o antiunitarias. Así, posteriormente veremos cómo nuestros escalares de Weyl y Ricci Ψ, Φ , bajo transformaciones de Lorentz, se pueden asociar con estos espacios de representaciones. Ésto nos llevará a discutir sobre cuantización para una teoría métrica que, junto a la clasificación llevada por Petrov, nos permitirá decidir si sobre una teoría métrica, dichos escalares, entendidos como amplitudes, se pueden analizar desde un punto de vista cuántico.

3.3.1. Grupo de Lorentz

El grupo de Lorentz está descrito por aquellas transformaciones de Lorentz entre marcos de referencias con una velocidad relativa constante en una variedad tipo Minkowski. Ilustrando un poco esta idea, consideremos la siguiente transformación:

$$x^\mu \mapsto x^{\mu'} = \Lambda^\mu{}_{\nu'} x^\nu, \quad (3-18)$$

junto a la restricción:

$$\Lambda\eta\Lambda = \eta, \quad (3-19)$$

donde dicha matriz $\Lambda \in M_4(\mathbb{R})$ y η corresponde a la métrica de Minkowski. Con estas condiciones, veamos cómo se imponen algunas restricciones sobre la forma que toma dicha matriz Λ . Reescribiendo la ecuación 3-19 como:

$$\Lambda^\mu{}_\sigma \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\tau = \eta_{\sigma\tau}.$$

Así, consideremos cada uno de los posibles casos:

- $\sigma = \tau = 0$. Tenemos entonces que:

$$-1 = -(\Lambda^0{}_0)^2 + \sum_{i=1}^3 (\Lambda^i{}_0)^2.$$

- Sea $\sigma = i, \tau = k$, con $ik \in \{1, 2, 3\}$. Tenemos:

$$\delta_{ik} = -(\Lambda^0{}_i)(\Lambda^0{}_k) + \sum_{j=1}^3 (\Lambda^j{}_i)(\Lambda^j{}_k).$$

- Para $\sigma = 0$ y $\tau = i$ tenemos la relación:

$$(\Lambda^0{}_0)(\Lambda^0{}_i) = \sum_{j=1}^3 (\Lambda^j{}_0)(\Lambda^j{}_i).$$

Por la primera de estas relaciones tenemos de inmediato que $(\Lambda^0{}_0) \geq 1$. Por otro lado, la restricción 3-19 implica que $\text{Det}\Lambda = \pm 1$. Definiremos el grupo de Lorentz de las transformaciones propias ortocronas como:

$$L_+^\uparrow := \{\Lambda \in M_4(\mathbb{R}) \mid \text{Det}(\Lambda) = 1 \text{ y } (\Lambda^0{}_0) \geq 1\}. \quad (3-20)$$

Un resultado importante sobre los elementos de este grupo es la manera en cómo lo podemos reescribir en términos de otros elementos de otros grupos. Tenemos el siguiente teorema [26]:

Teorema: $\Lambda \in L_+^\uparrow$. Sea $\Lambda \in L_+^\uparrow$, entonces existen $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ y $R \in SO(3)$ tal que $\Lambda = L(\vec{v})\mathcal{R}$, donde:

$$\mathcal{R} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & & \\ 0 & |\vec{\alpha}_1\rangle & |\vec{\alpha}_2\rangle & |\vec{\alpha}_3\rangle \\ 0 & & & \end{array} \right] \text{ y } L(\vec{v}) = \left[\begin{array}{c|c} \gamma & \gamma \langle \vec{v} | \\ \hline \gamma |\vec{v}\rangle & \mathbb{I}_3 + \frac{\gamma^2}{1+\gamma} |\vec{v}\rangle \langle \vec{v} | \end{array} \right],$$

donde hemos simplificado la notación de tal manera que $R = (\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3)$. En este caso, la matriz \mathcal{R} representa una matriz de rotación (nótese la invarianza sobre la coordenada temporal) y la matriz $L(\vec{v})$ representa un boost.

Demostración. Una manera de demostrar esta afirmación es asumir cierto el resultado y escribir explícitamente dichas matrices en términos de los elementos Λ^i_j . Observemos la siguiente relación matricial:

$$\Lambda = \left[\begin{array}{c|ccc} \Lambda^0_0 & \Lambda^0_1 & \Lambda^0_2 & \Lambda^0_3 \\ \Lambda^1_0 & & & \\ \Lambda^2_0 & & \Lambda^i_j & \\ \Lambda^3_0 & & & \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|ccc} \gamma & \gamma \langle \vec{v} | & & \\ \gamma |\vec{v}\rangle & \mathbb{I}_3 + \frac{\gamma^2}{1+\gamma} |\vec{v}\rangle \langle \vec{v}| & & \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |\vec{\alpha}_1\rangle & |\vec{\alpha}_2\rangle & |\vec{\alpha}_3\rangle \\ 0 & & & \end{array} \right]$$

$$= \left[\begin{array}{c|ccc} \gamma & \gamma \langle \vec{v} | \vec{\alpha}_1\rangle & \gamma \langle \vec{v} | \vec{\alpha}_2\rangle & \gamma \langle \vec{v} | \vec{\alpha}_3\rangle \\ \gamma |\vec{v}\rangle & & A^i_j & \end{array} \right].$$

Resultan entonces, asumiendo cierto el teorema, las respectivas correspondencias:

$$\gamma = \Lambda^0_0, \quad \gamma v^i = \Lambda^i_0 \quad y \quad \gamma \langle \vec{v} | \vec{\alpha}_i\rangle = \Lambda^0_i.$$

Para determinar los elementos restantes, A^i_j , nótese que resulta más conveniente escribirlo de la siguiente manera:

$$\left(\mathbb{I}_3 + \frac{(\Lambda^0_0)^2}{1 + \Lambda^0_0} |\vec{v}\rangle \langle \vec{v}| \right) |\vec{\alpha}_j\rangle = \begin{pmatrix} \Lambda^1_j \\ \Lambda^2_j \\ \Lambda^3_j \end{pmatrix}.$$

Realizando las operaciones en la expresión de la izquierda y usando las relaciones ya observadas, obtenemos para Λ^i_j :

$$\Lambda^i_j = R^i_j + \frac{(\Lambda^0_j)(\Lambda^i_0)}{1 + \Lambda^0_0}.$$

Bajo esta construcción, es fácil ver que la matriz $R = [R^i_j]$ es ortogonal ($R^T R = \mathbb{I}_3$) y su determinante es 1. Asimismo, para la matriz $L(\vec{v})$, basta realizar las identificaciones $\gamma = \Lambda^0_0$ y $v^i = \Lambda^i_0/\Lambda^0_0$. Más aún, usando las relaciones halladas para la matriz Λ , resulta la expresión conocida para $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2}$. \square

Este teorema resulta importante para entender cómo es posible escribir un elemento de grupo $\Lambda \in L_+^\uparrow$ a partir de los generadores infinitesimales. Asumiremos dichos generadores para el grupo $SO(3)$ [26], y obtendremos éstos para el factor relacionado con los boost.

Para el caso del grupo $SO(3)$, tenemos los generadores infinitesimales J_i dados por:

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3-21)$$

Así, asumiendo que toda rotación $R \in SO(3)$ se puede escribir en términos de un ángulo φ y un eje de rotación \hat{n} , tenemos que:

$$R = e^{-\varphi \hat{n} \cdot \vec{J}}. \quad (3-22)$$

Veamos ahora cómo se obtienen los generadores asociados a los boosts. Para ello, supondremos una dimensión espacial y extrapolaremos para el caso de tres dimensiones. Tenemos entonces que, en una dimensión con vector velocidad β , un boost viene dado por:

$$L(\beta) = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma \end{pmatrix},$$

donde hicimos uso de la relación:

$$1 + \frac{\gamma^2\beta^2}{1 + \gamma} = \gamma.$$

A partir de esta relación, podemos hacer uso de una parametrización hiperbólica como sigue:

$$\cosh \lambda = \gamma, \quad \sinh \lambda = \gamma\beta.$$

Nótese que bajo dicha parametrización se tiene que $\beta = \tanh \lambda < 1$ y $\gamma \geq 1$. Así, dicha parametrización no deja de satisfacer los resultados ya establecidos en sus definiciones anteriores. De esta manera, tenemos la matriz $L(\beta) \mapsto L(\lambda)$ como:

$$L(\lambda) = \begin{pmatrix} \cosh \lambda & \sinh \lambda \\ \sinh \lambda & \cosh \lambda \end{pmatrix}.$$

Tomando los argumentos que vimos en la definición de grupo de Lie y su aplicación exponencial, consideremos:

$$K := \left. \frac{d}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} L(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3-23)$$

Notemos lo siguiente:

$$e^{\lambda K} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda K)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2n}}{(2n)!} \mathbb{I}_2 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2n+1}}{(2n+1)!} K = \cosh \lambda \mathbb{I}_2 + \sinh \lambda K = L(\lambda).$$

Extrapolando al caso general, resultan entonces los generadores infinitesimales dados por:

$$K_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3-24)$$

De este modo, para un vector $\vec{\beta}$, el elemento asociado al boost lo podemos escribir como [27, 26]:

$$L(\beta) = e^{\lambda \hat{\beta} \cdot \vec{K}}. \quad (3-25)$$

Con estos resultados, afirmamos entonces que todo elemento $\Lambda \in L_+^\uparrow$ lo podemos escribir como:

$$\Lambda = e^{\lambda \hat{\beta} \cdot \vec{K}} e^{-\varphi \hat{n} \cdot \vec{J}}. \quad (3-26)$$

Todo este procedimiento resulta ser análogo probando que dicha relación entre un elemento $\Lambda \in L_+^\uparrow$ con un elemento $R \in SO(3)$ y $L(\beta)$ asociado a un boost no depende del orden (la demostración cambia ligeramente usando que $\Lambda\eta\Lambda^T = \eta$) [26]. De este modo, la ecuación 3-26 se puede escribir cómo:

$$\Lambda = e^{-\varphi\hat{n}\cdot\vec{J}}e^{\lambda\vec{K}\cdot\hat{\beta}}. \quad (3-27)$$

Vamos a redefinir los generadores infinitesimales de una forma más acorde a mecánica cuántica. Tendremos la definición:

$$\tilde{J}_k := iJ_k, \quad \tilde{K}_j = -iK_j. \quad (3-28)$$

Tenemos entonces que el elemento Λ toma la forma:

$$\Lambda = e^{i\varphi\hat{n}\cdot\vec{J}}e^{-i\lambda\hat{\beta}\cdot\vec{K}}.$$

Sin generar confusión de aquí en adelante, los operadores definidos en ecuación 3-28 los denotaremos sin la tilde con que se definieron. Estos operadores satisfacen:

$$[J_i, J_j] = i \varepsilon_{ijk} J_k, \quad [K_i, K_j] = -i \varepsilon_{ijk} J_k, \quad [J_i, K_j] = i \varepsilon_{ijk} K_k. \quad (3-29)$$

3.3.2. Grupo de Poincaré

En la sección anterior consideramos el grupo generado por las transformaciones homogéneas en el espacio de Minkowski. Sin embargo, podemos considerar un grupo más amplio que tenga en cuenta transformaciones inhomogéneas, tales como:

$$x^{\mu'} = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu.$$

Al conjunto anterior lo denotaremos como el *grupo de Poincaré*. Para este estudio seguiremos a Scheck [28], Tung [29], Costa [22] y Gasiorowicz [30].

En primer lugar, es necesario hallar los generadores infinitesimales asociados a la parte inhomogénea en el grupo de Poincaré denotado como \mathcal{P} . Veamos la respectiva regla de multiplicación para un elemento $g(\Lambda, a) \in \mathcal{P}$:

$$\begin{aligned} x^{\mu''} &= g(\Lambda', a')x^{\mu'} = \Lambda'^\mu{}_\nu x^{\nu'} + a^{\mu'} = \Lambda'^\mu{}_\nu g(\Lambda, a)x^\nu + a^{\mu'} \\ &= \Lambda'^\mu{}_\nu \Lambda^\nu{}_\sigma x^\sigma + \Lambda'^\mu{}_\nu a + a^{\mu'} \\ &= g(\Lambda'\Lambda, \Lambda'a + a')x^\mu. \end{aligned}$$

Introduzcamos una coordenada *homogénea* tal que, para un elemento del grupo actuando sobre un vector se obtiene:

$$y^{\mu'} = \Lambda^\mu{}_\nu y^\nu + y^4 a^\mu, \quad \text{con } \mu = 0, 1, 2, 3 \quad \text{y} \quad y^4 = y^4.$$

De esta manera, una transformación en el grupo de Poincaré \mathcal{P} toma la forma matricial:

$$\begin{pmatrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & & & b^0 \\ & & & & b^1 \\ & [\Lambda^\mu]_\nu & & & b^2 \\ & & & & b^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{pmatrix}.$$

De la forma matricial anterior y la regla de multiplicación obtenemos el siguiente resultado:

Proposición: Descomposición elemento de Poincaré. Sea $g(\Lambda, a) \in \mathcal{P}$, entonces dicho elemento lo podemos reescribir como: $g(\Lambda, a) = T(a)\Lambda$, con $T(a) = g(\mathbb{I}_4, a)$ y $\Lambda = g(\Lambda, 0)$. En este caso, el elemento $T(a)$ representa una traslación y Λ una transformación de Lorentz homogénea.

Teorema: Subgrupo invariante de traslaciones. Sea Λ una transformación homogénea de Lorentz y $T(a)$ una traslación. Tenemos entonces que:

- (1) $\Lambda T(a)\Lambda^{-1} = T(\Lambda a)$,
- (2) El grupo de traslaciones es un subgrupo normal del grupo de Poincaré.

Demostración. El numeral (1) resulta inmediato aplicando la definición del producto de grupo:

$$\Lambda T(a)\Lambda^{-1} = g(\Lambda, 0)g(\Lambda^{-1}, a) = g(\mathbb{I}_4, \Lambda a) = T(\Lambda a).$$

Para el numeral (2) consideremos un elemento $g(\Lambda, b) \in \mathcal{P}$ y una traslación dada por $T(a)$. Veamos que $g(\Lambda, b)T(a)g(\Lambda, b)^{-1}$ es una traslación también:

$$\begin{aligned} g(\Lambda, b)T(a)g(\Lambda, b)^{-1} &= g(\Lambda, b)g(\mathbb{I}_4, a)g(\Lambda, b)^{-1} = T(b)\Lambda T(a)\Lambda^{-1}T(b)^{-1} \\ &= g(\mathbb{I}_4, b)g(\mathbb{I}_4, \Lambda a)g(\mathbb{I}_4, -b) = T(\Lambda a). \end{aligned}$$

□

Veamos cómo son los generadores infinitesimales para dichas traslaciones. Considerando una traslación infinitesimalmente pequeña tenemos:

$$T(\delta b) = \mathbb{I} + i\delta b^\nu P_\nu.$$

De esta manera, resultan los operadores de una forma matricial dados por:

$$P_\mu = -i(0_{5 \times 4}, |e_\mu\rangle), \quad (3-30)$$

donde hemos simplificado la notación como: $0_{5 \times 4}$ una matriz 5×4 con entradas 0 y $|e_\mu\rangle$ el vector canónico en \mathbb{R}^4 . Como hemos visto, bajo la aplicación exponencial, resulta entonces que:

$$T(b) = e^{-ib^\mu P_\mu}.$$

Teorema: Transformación de Lorentz para P_μ [29]. Bajo el grupo de Lorentz L_+^\uparrow , los generadores infinitesimales $\{P_\mu\}$ transforman como cuadvectores de acuerdo a:

$$\Lambda P_\mu \Lambda^{-1} = \Lambda^\nu{}_\mu P_\nu.$$

Tenemos, asimismo, los generadores de forma contravariante dados por:

$$P^\nu = \eta^{\nu\mu} P_\mu.$$

Proposición: Reglas de conmutación [28]. Las reglas de conmutación entre los generadores infinitesimales para el grupo de Poincaré \mathcal{P} vienen dadas por:

$$\begin{aligned} [P^\mu, P^\nu] &= 0, & [J_i, P^j] &= i\varepsilon_{ijk} P^k, & [J_i, P_0] &= 0, \\ [K_i, P^j] &= -i\eta^{ij} P^0, & [K_j, P^0] &= iP^j. \end{aligned}$$

Dada la relación que posee este operador con los generadores de movimiento en mecánica cuántica y la relación energía-momentum en relatividad especial, surge naturalmente la definición del operador \mathbf{P}^2 dada por:

$$\mathbf{P}^2 = -(P_0)^2 + (\vec{P})^2. \quad (3-31)$$

Este nuevo operador generado a partir de los generadores infinitesimales $\{P_\mu\}$, satisface las condiciones de conmutación dadas por:

$$[\mathbf{P}^2, P_\mu] = 0, \quad [\mathbf{P}^2, J_i] = 0, \quad [\mathbf{P}^2, K_i] = 0.$$

Notamos entonces que, bajo un elemento de grupo de Poincaré, $g(\Lambda, a)$, el operador \mathbf{P}^2 resulta invariante. Como hemos mencionado arriba, este operador resulta tener relevancia física en el ámbito de momentum. Así, \mathbf{P}^2 representa el cuadrado de la masa: m^2 .

Aunque ya tenemos una descripción de los generadores infinitesimales para el grupo \mathcal{P} , es necesario resaltar un problema: sus respectivas definiciones suponen una separación del espacio y el tiempo, lo cual supone una idea con la idea de covarianza [28]. De este modo, surge necesario construir operadores que contengan la información de estos generadores con la propiedad adicional de mantener la idea de covarianza explícita en relatividad especial. Consideremos una transformación de Lorentz Λ alrededor de la identidad:

$$\Lambda^\mu{}_\nu \approx \delta^\mu{}_\nu + \alpha^\mu{}_\nu.$$

Para el caso de un boost a lo largo de una dirección o de una rotación sobre el eje z , se tiene respectivamente que:

$$\alpha^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon & 0 & 0 \\ \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & -\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En cada uno de aquellos casos, definimos el tensor: $\alpha_{\mu\nu} := \eta_{\mu\sigma}\alpha^\sigma{}_\nu$, el cual, por construcción resulta ser antisimétrico. De esta manera, podemos construir nuevos generadores que se comporten covariantemente bajo el grupo de Lorentz, i.e, que se transformen vía un elemento en L_+^\uparrow . Para ello, consideremos la familia de operadores $M^{\mu\nu}$ que satisfacen:

$$M^{\mu\nu} + M^{\nu\mu} = 0.$$

Retomando la transformación infinitesimal, la reescribimos como:

$$\Lambda \approx \mathbb{I} + \frac{i}{2}\alpha_{\mu\nu}M^{\mu\nu}.$$

Tomando en cuenta nuestra construcción, para esos dos casos específicos, de los tensores $\alpha_{\mu\nu}$, resulta entonces que:

$$\begin{aligned} \Lambda &\approx \mathbb{I} + i\varepsilon K_1 = \mathbb{I} + i\varepsilon M^{01} \text{ (boost),} \\ \Lambda &\approx \mathbb{I} + i\varepsilon J_3 = \mathbb{I} - i\varepsilon M^{12} \text{ (rotación).} \end{aligned}$$

Resultan entonces, bajo este desarrollo, las siguientes equivalencias:

$$K_j = M^{0j}, \quad J_k = -\frac{1}{2}\varepsilon_{kij}M^{ij}. \quad (3-32)$$

Teorema: Ley de transformación [29]. Sea $\Lambda \in L_+^\uparrow$ una transformación de Lorentz. Los generadores $M^{\mu\nu}$ transforman bajo Λ como:

$$\Lambda M_{\mu\nu} \Lambda^{-1} = M_{\lambda\sigma} \Lambda^\lambda{}_\mu \Lambda^\sigma{}_\nu.$$

Con dicho teorema, hemos entonces construido operadores covariantes bajo transformaciones de Lorentz. Por otro lado, una transformación de Lorentz, según la descomposición hecha en la ecuación 3-27, la podemos reescribir en términos de α y \mathbf{M} como:

$$\Lambda(\alpha) = e^{-\frac{i}{2}\alpha^{\mu\nu}M_{\mu\nu}}.$$

Teorema: Relaciones de conmutación [28]. El álgebra de Lie para el grupo de Poincaré viene dada por las siguientes relaciones de conmutación:

$$[P^\mu, P^\nu] = 0, \quad (3-33)$$

$$[P_\mu, M_{\lambda\sigma}] = i(P_\lambda\eta_{\mu\sigma} - P_\sigma\eta_{\mu\lambda}), \quad (3-34)$$

$$[M_{\mu\nu}, M_{\sigma\tau}] = i(M_{\mu\sigma}\eta_{\nu\tau} + M_{\nu\tau}\eta_{\mu\sigma} - M_{\mu\tau}\eta_{\nu\sigma} - M_{\nu\sigma}\eta_{\mu\tau}). \quad (3-35)$$

Tomaremos como postulado, en física de partículas, el siguiente enunciado:

Las partículas son clasificadas de acuerdo a sus autovalores de masa m y spín s , donde dicho spín toma valores enteros o semi-enteros [28, 30].

Hemos visto cómo el operador \mathbf{P}^2 se encuentra relacionado con el autovalor dado por la masa de la partícula. Surge entonces la pregunta de cómo generar tal operador que enlace el spín

de la partícula. Para ello, consideremos el espacio generado cuando el momentum lineal de la partícula es 0, i.e, $\vec{p} = 0$. En este caso, el valor del spín estará directamente relacionado con el valor del operador de momento angular J^2 . Buscamos un operador que cumpla los requisitos: (a) Invariante bajo traslaciones, (b) Es un escalar de Lorentz y (c) Logre reducirse a J^2 cuando la masa en reposo $M^2 > 0$. Para ello, se crea el siguiente operador:

Teorema: Pauli-Lubanski vector W_μ [28, 29]. El vector W_σ definido como:

$$W_\sigma := \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} M^{\mu\nu} P^\lambda,$$

satisface las siguientes propiedades:

- $W_\sigma P^\sigma = 0$.
- $[W_\sigma, P^\lambda] = 0$.
- $[W^\lambda, M^{\mu\nu}] = i(W^\mu \eta^{\lambda\nu} - W^\nu \eta^{\lambda\mu})$.
- $[W_\lambda, W_\sigma] = -i \varepsilon_{\lambda\sigma\alpha\beta} W^\alpha P^\beta$.

La demostración de este teorema se realiza mediante la definición de dicho vector, la anti-simetría del tensor ε y las reglas de conmutación de los operadores en el álgebra de Lie del grupo de Poincaré definidas arriba.

El operador que hemos descrito tal que sea un escalar de Lorentz viene dado por: $\mathbf{W}^2 := W_\sigma W^\sigma$. Este operador resulta conmutando con todos los elementos del álgebra de Lie de \mathcal{P} . Por el teorema anterior, es inmediato que conmuta con las traslaciones (generadas por los operadores P^μ). Por otro lado, al ser el cuadrado de un vector, resulta siendo invariante a las transformaciones de Lorentz y, por lo tanto, conmuta con los operadores $M^{\mu\nu}$.

Una manera de ganar intuición física sobre el operador W^μ es entendiendo cómo actúa sobre el espacio de vectores correspondiente a la representación (M, s) , tal cual enuncia el postulado que hemos presentado anteriormente. Para ello, consideremos una partícula con cuadri-momento p sobre la que actúa dicho operador. En este caso, el autovalor del operador P^μ estará dado por el valor del cuadri-momento en dicha componente. Así, resulta entonces que el operador W^λ en dicho espacio toma la forma:

$$W_\lambda = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\sigma\lambda} M^{\mu\nu} p^\sigma.$$

Si adicionalmente consideramos un vector sobre dicha órbita (aquel hiperboloide generado por $p^2 = m^2$) donde el vector momento $\vec{p} = 0$, tenemos que:

$$W_0 = 0 \quad y \quad W_i = \frac{m}{2} \varepsilon_{ijk} M^{jk} = m J_i.$$

Estos operadores vienen dados, para partículas masivas, proporcionales a las rotaciones. Un problema de nuestro interés será hallar las representaciones unitarias del grupo de Poincaré \mathcal{P} para partículas no masivas. La necesidad de usar representaciones unitarias va ligado al uso de operadores hermíticos en el cotexto de la mecánica cuántica. Para nuestro objeto de estudio, nos enfocaremos en aquellas representaciones cuya masa de la partícula es cero.

3.3.3. Representaciones unitarias de \mathcal{P} para masa cero

En esta sección estudiaremos las representaciones unitarias de una partícula de masa cero en el grupo de Poincaré. Veremos la conexión, en este caso, de estas representaciones con las del grupo Euclídeo $\mathbf{E}(2)$ (grupo de isometrías en el plano 2-dimensional.) De esta manera, veremos también cómo surge la idea de helicidad de una partícula y su significado. Con estos resultados, realizaremos la conexión con lo estudiado en el capítulo de fundamentos para los escalares del tensor de Weyl viendo cómo esta idea de helicidad surge en los escalares algebraicamente independientes.

Una partícula no masiva posee un cuadri-momento dado por $p := (E = |\vec{p}|, \vec{p})$. Es claro que, bajo esta definición, $p^2 = 0$. En este caso, el subgrupo de $L \uparrow_+$ que deja este cuadrivector “invariante” viene dado por las rotaciones a través del eje \hat{p} . Para estudiar las representaciones de una partícula no masiva, supondremos un valor arbitrario de momentum p fijo que será autovalor de los operadores P^μ . De este modo, nos enfocamos, según el postulado, en estudiar aquellas representaciones directamente asociadas al spín. Estas partículas no masivas no poseen un marco de referencia en reposo, su velocidad viene dada por $v = 1$ en cada uno de los sistemas de referencia. Dado que su componente temporal y espacial deben ser equivalentes, definimos este vector p como:

$$p = (\omega_0, 0, 0, \omega_0),$$

donde ω_0 es un valor arbitrario. Para obtener cuadri-vectores más generales de momentum de la forma $\tilde{p} = (\omega, \vec{p})$ con $\vec{p} = \omega \hat{p}$, basta con realizar un boost sobre nuestro cuadrivector inicial para llevar la energía de $\omega_0 \mapsto \omega$ y realizar una rotación sobre el eje \hat{p} (aplicar un elemento de $L \uparrow_+$ con estas propiedades.) Como hemos mencionado antes, este vector resultará siendo vector propio del operador P^λ , obteniendo así que nuestro operador vector de Pauli - Lubanski tome la forma:

$$W_\lambda = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\sigma\lambda} M^{\mu\nu} p^\sigma.$$

Hallando cada una de las componentes, tenemos:

$$W_0 = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\sigma 0} M^{\mu\nu} p^\sigma = \frac{1}{2} \omega_0 \varepsilon_{\mu\nu 30} M^{\mu\nu} = -\omega_0 M^{12} = \omega_0 J_3,$$

$$W_3 = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\sigma 3} M^{\mu\nu} p^\sigma = \frac{1}{2} \omega_0 \varepsilon_{\mu\nu 03} M^{\mu\nu} = \omega_0 M^{12} = -\omega_0 J_3,$$

$$W_1 = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\sigma 1} M^{\mu\nu} p^\sigma = \omega_0 \varepsilon_{2301} M^{23} + \omega_0 \varepsilon_{0231} M^{02} = \omega_0 (-J_1 + K_2),$$

$$W_2 = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\sigma 2} M^{\mu\nu} p^\sigma = \omega_0 \varepsilon_{1302} M^{13} + \omega_0 \varepsilon_{0132} M^{02} = -\omega_0 (J_2 + K_1).$$

Tenemos así que $\mathbf{W}^2 = (W_1)^2 + (W_2)^2$. El álgebra de Lie para este caso viene dada por (usando las relaciones determinadas anteriormente para los generadores J Y K):

$$[W_1, W_2] = 0, \quad [W_2, J_3] = iW_1, \quad [W_1, J_3] = -iW_2.$$

Esta álgebra resulta ser isomorfa al álgebra de Lie para el grupo Euclídeo en dos dimensiones $\mathbf{E}(2)$. En este grupo de isometrías encontramos dos generadores asociados a los posibles

desplazamientos del cuerpo rígido y un tercer generador asociado a rotaciones. Dadas nuestras relaciones de conmutación encontradas, podemos notar que los operadores W_1, W_2 son los análogos a los operadores de traslación en dicho grupo y, como se espera, el operador J_3 es asociado a las rotaciones. De este modo, estudiar las representaciones para una partícula no masiva se reduce en el problema de encontrar las representaciones unitarias del grupo Euclídeo. Más aún, este problema resulta ser más simple al realizar una consideración física importante: los vectores en un espacio de representación del grupo de Poincaré \mathcal{P} estarán etiquetados mediante dos índices principales $|p w\rangle$, uno asociado al operador momentum y otro al vector operador W que hemos construido, tal que se cumpla:

$$\mathbf{P}^2 |p w\rangle = p^2 |p w\rangle \quad y \quad \mathbf{W}^2 |p w\rangle = w^2 |p w\rangle .$$

En este caso, dada la conexión que hemos encontrado entre $\mathcal{L}(\mathcal{P})$ y $\mathcal{L}(\mathbf{E}(\mathbf{2}))$, notamos que el operador $\mathbf{W}^2 = (W_1)^2 + (W_2)^2$ resulta tener un espectro continuo, pues tales W_i estarán asociados a traslaciones rígidas sin ninguna restricción. Sin embargo, en el contexto físico, dada la conexión de dicho operador con el concepto de spín, sabemos que tal continuidad no es permitida. Así que nos enfocaremos en aquellos vectores con autovalor $w^2 = 0$ al operador \mathbf{W}^2 . Bajo esta idea, el *vector* w tendrán como componentes cero según los operadores W_i con $i = 1, 2$. De esta manera, sólo las rotaciones según el generador infinitesimal J_3 tendrán importancia. Dicho estudio de las representaciones de las rotaciones en $\mathbf{E}(\mathbf{2})$ (“parametrizados” con un ángulo de rotación θ y un vector de traslación rígida en el plano) vendrá dado por:

$$g(b, \theta) \in \mathbf{E}(\mathbf{2}) \implies U_h(b, \theta) = e^{-ih\theta}, \forall b \in \mathbb{R}^2,$$

donde el subíndice $h \in \mathbb{Z}$. Estas representaciones serán unidimensionales generadas por el vector $|p h\rangle$. En el álgebra de Lie del grupo tendremos entonces las representaciones dadas por:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(P^\mu) |p h\rangle &= p^\mu |p h\rangle, \\ \mathbf{U}(J_3) |p h\rangle &= h |p h\rangle, \\ \mathbf{U}(W_i) |p h\rangle &= 0, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Dicho parámetro h es el que denotaremos como *helicidad*. Aunque este análisis lo hemos realizado a partir del cuadrivector $p = (\omega_0, 0, 0, \omega_0)$, hemos notado cómo construir los demás vectores nulos \tilde{p} :

$$|\tilde{p} h\rangle = \mathcal{R} |\tilde{p}_z h\rangle = \mathcal{R}L(\beta) |p h\rangle,$$

donde \mathcal{R} es una rotación y $L(\beta)$ un boost. Éste resulta ser el vector base de la forma más general para un valor de helicidad h .

Teorema: Invarianza Lorentz [29, 30]. La helicidad es invariante bajo una transformación de Lorentz. Para un espacio vectorial de la forma $V = \text{span}\{|\tilde{p} h\rangle\}$, se tiene que:

$$\mathbf{U}(\Lambda) |\tilde{p} h\rangle = |\Lambda\tilde{p} h\rangle e^{-ih\theta}.$$

Nótese que, bajo la acción de la representación del elemento del grupo Λ sobre el espacio vectorial generado por $|\tilde{p} h\rangle$, éste cumple que:

$$\mathbf{U}(\mathbf{P}^2)\mathbf{U}(\Lambda)|\tilde{p} h\rangle = \mathbf{U}(\mathbf{P}^2)e^{-ih\theta}|\Lambda\tilde{p} h\rangle = (\Lambda\tilde{p})^2e^{-ih\theta}|\Lambda\tilde{p} h\rangle = (\tilde{p})^2e^{-ih\theta}|\Lambda\tilde{p} h\rangle.$$

Por otro lado, para un elemento de traslación se tiene que:

$$\mathbf{U}(T(b))|\tilde{p} h\rangle = |\tilde{p} h\rangle e^{-ib\cdot\tilde{p}}.$$

3.4. Escalares de Weyl

Durante todo este capítulo hemos llevado una descripción algebraica en dos temas aún no relacionados. Por un lado, hemos desarrollado la clasificación de Petrov para los escalares del tensor de Weyl (y el asociado a Ricci) según la cual, bajo transformaciones de Loretz sobre la tétrada nula observamos qué escalares se anulan. Luego de ello, hemos realizado un estudio sobre el grupo de Poincaré para poder introducir la noción de helicidad. A partir de estas dos clasificaciones, vamos a realizar una extra que nos permita categorizar los escalares de Weyl de acuerdo a ciertos requisitos que satisface cada clase según Petrov y helicidad.

Para llevar a cabo dicha categorización, consideremos una transformación de Loretz que mantiene fijo el vector nulo k (según la definición de tétrada que hemos estado usando):

$$\begin{aligned} k' &= k, \\ l' &= l + a^*m + a\bar{m} + aa^*k, \\ m' &= e^{i\phi}(m + ak), \\ \bar{m}' &= e^{-i\phi}(\bar{m} + a^*k). \end{aligned} \tag{3-36}$$

Según las rotaciones que hemos definido antes, la correspondencia anterior equivale a una rotación de clase I (3-9) seguida de una rotación de clase III (3-11). Esta composición de rotaciones resulta isomorfa al grupo $\mathbf{E}(\mathbf{2})$ [3]. Esta equivalencia resulta clara: traslaciones a lo largo del eje k y del generado por el plano (m, \bar{m}) (Clase I) y la rotación sobre dicho plano (Clase III). Aplicando estas transformaciones sobre el conjunto de escalares $\{\Psi_2, \Psi_3, \Psi_4, \Phi_{22}\}$ tenemos:

$$\begin{aligned} \Psi'_2 &= -C_{pqrs}k^p(m^q + ak^q)(\bar{m}^r + a^*k^r)(l^s + a^*m^s + a\bar{m}^s + aa^*k^s) \\ &= \Psi_2 + 2a^*\Psi_1 + (a^{*2})\Psi_0 = \Psi_2, \\ \Psi'_3 &= -e^{-i\phi}C_{pqrs}k^p(l^q + a^*m^q + a\bar{m}^q + aa^*k^q)(\bar{m}^r + a^*k^r)(l^s + a^*m^s + a\bar{m}^s + aa^*k^s) \\ &= e^{-i\phi}(\Psi_3 + 2a^*\Psi_2), \\ \Psi'_4 &= -e^{-2i\phi}C_{pqrs}(l^p + a^*m^p + a\bar{m}^p + aa^*k^p)(\bar{m}^q + a^*k^q)(l^r + a^*m^r + a\bar{m}^r + aa^*k^r)(\bar{m}^s + a^*k^s) \\ &= e^{-2i\phi}(\Psi_4 + H(a, a^*)), \\ \Phi'_{22} &= -R_{pqrs}(l^p + a^*m^p + a\bar{m}^p + aa^*k^p)(m^q + ak^q)(l^r + a^*m^r + a\bar{m}^r + aa^*k^r)(\bar{m}^s + a^*k^s) \\ &= \Phi_{22} + G(a, a^*); \end{aligned}$$

donde $G(a, a^*)$ y $H(a, a^*)$ son polinomios en esas variables sin coeficiente nulo (i.e coeficiente 0 para a^0, a^{*0} .) Resulta entonces conveniente realizar dicha transformación haciendo $a = 0$ y obtener una rotación (la cual se relaciona, con lo que hemos visto, con el concepto de helicidad.) De este modo obtenemos:

$$\Psi'_2 = \Psi_2, \quad \Psi'_3 = e^{-i\phi}\Psi_3, \quad \Psi'_4 = e^{-2i\phi}\Psi_4, \quad \Phi'_{22} = \Phi_{22}. \quad (3-37)$$

Nótese entonces que dichas amplitudes resultan ser autovectores de la rotación cuyos autovalores determinan la helicidad:

$$\Psi_2 : h = 0, \quad (3-38)$$

$$\Psi_3 : h = 1, \quad \overline{\Psi_3} : h = -1, \quad (3-39)$$

$$\Psi_4 : h = 2, \quad \overline{\Psi_4} : h = -2, \quad (3-40)$$

$$\Phi_{22} : h = 0. \quad (3-41)$$

Esta correspondencia con la helicidad para una partícula sin masa la podemos realizar de acuerdo al vector de propagación de la onda gravitacional. Sabemos que se trata de un vector nulo, por lo tanto resulta claro el por qué se llevó a cabo el estudio de representaciones unitarias del *little group* del grupo $\mathbf{E}(2)$, asociado a las transformaciones unitarias del subgrupo de Poincaré \mathcal{P} de partículas no masivas.

Clasificaremos las amplitudes $\{\Psi_2, \Psi_3, \Psi_4, \Phi_{22}\}$ de tal forma que sean $\mathbf{E}(2)$ invariante. Para ello, usaremos la clasificación de Petrov y el número máximo de amplitudes que no se desvanecen bajo las transformaciones en las ecuaciones definidas por 3-36. Esta correspondencia estará definida sin ningún problema para todo observador \mathcal{O} en el espacio, ya que, como hemos visto, poseemos invarianza Lorentz en Petrov y en helicidad. Tenemos entonces:

- *Clase II_6* : $\Psi_2 \neq 0$. En esta clase, Ψ_0 y Ψ_1 se hacen simultáneamente cero. Los observadores miden el mismo valor de Ψ_2 pero pueden diferir en la ausencia o presencia de los demás modos.
- *Clase III_5* : $\Psi_2 = 0 \neq \Psi_3$. En esta clase, Ψ_0, Ψ_1 y Ψ_2 se hacen simultáneamente cero. Los observadores miden la ausencia de Ψ_2 y la presencia de Ψ_3 ; sin embargo, pueden diferir en la ausencia o presencia de los demás modos.
- *Clase N_3* : $\Psi_2 = 0 = \Psi_3; \Psi_4 \neq 0 \neq \Phi_{22}$. En esta clase, Ψ_0, Ψ_1, Ψ_2 y Ψ_3 se hacen simultáneamente cero. La presencia o ausencia de los modos es independiente del observador.
- *Clase N_2* : $\Psi_2 = 0 = \Psi_3; \Psi_4 \neq 0 = \Phi_{22}$. En esta clase, Ψ_0, Ψ_1, Ψ_2 y Ψ_3 se hacen simultáneamente cero y se escoge $\Phi_{22} = 0$. La presencia o ausencia de los modos es independiente del observador.
- *Clase O_1* : $\Psi_2 = 0 = \Psi_3; \Psi_4 = 0 \neq \Phi_{22}$. En esta clase, Ψ_0, Ψ_1, Ψ_2 y Ψ_3 se hacen simultáneamente cero y se escoge $\Psi_4 = 0$. La presencia o ausencia de los modos es independiente del observador.

- *Clase O_0* : Representación trivial

Sobre esta clasificación obtenemos dos resultados importantes relacionados a dirección de propagación y posibilidad de cuantización. Al conocer la dirección de la onda por parte de un observador, podremos decir que esta dirección será invariante para todo observador si los escalares de Weyl pertenecen a las clases N o a las clases O .

Por otro lado, y como resultado del Teorema de Wigner [25] respecto a representaciones unitarias del grupo de Poincaré \mathcal{P} y cuantización, decimos que, para una teoría métrica de clase II_6 o III_5 , no obtendremos este resultado, i.e, no podremos hablar de cuantización. Esto se debe a que el espacio generado por tales escalares no nulos, sobre los cuales tendremos las helicidades 1, 2 y 0 (donde 0 corresponde a la representación trivial), no es posible escribirlo como una suma de representaciones irreducibles [3]. Por el teorema **Reducibilidad y unitariedad**, tenemos entonces que tal representación no puede ser unitaria.

4 Clasificación

En los capítulos anteriores hemos desarrollado la teoría pertinente para llevar a cabo una clasificación de los escalares de Weyl para una teoría métrica dada. Durante este capítulo introduciremos la acción de Einstein - Hilbert para desarrollar, desde una perspectiva Lagrangiana, la relatividad general y, así, poder comparar con la teoría métrica de Brans - Dicke. Una vez obtenidas las respectivas *ecuaciones de movimiento* en el vacío para la métrica (y del campo escalar asociado a Brans - Dicke), realizaremos la clasificación presentada anteriormente para los escalares según Petrov y su helicidad.

4.1. Formulación Lagrangiana de la Relatividad General

Aunque ya hemos obtenido la ecuación de campo de Einstein anteriormente, resulta conveniente estudiar su formulación Lagrangiana para, así, introducir la teoría de Brans - Dicke donde sus modificaciones se entienden desde este punto de vista. Durante esta sección, realizaremos un breve análisis sobre esta formulación tomando como referencia a Wald [4].

Sea M una variedad. Definimos el funcional S como una función del conjunto de espacios tensoriales que describen cierta teoría al campo \mathbb{F} sobre el que se ha definido la variedad M (en nuestro caso \mathbb{R}). Sea ψ_λ una familia uniparamétrica de campos con ψ_0 definido de tal modo que satisface las condiciones de frontera del sistema. Sea $d\psi_\lambda/d\lambda|_{\lambda=0} \equiv \delta\psi$. Suponiendo que $dS/d\lambda$ existe para $\lambda = 0$ y que existe un campo tensorial suave χ dual a la familia generada por el campo ψ tal que cumpla:

$$\frac{dS}{d\lambda} = \int_M \chi \delta\psi,$$

decimos entonces que S es un funcional diferenciable en ψ_0 . Llamamos χ la derivada funcional de S denotándola como:

$$\chi = \left. \frac{\delta S}{\delta\psi} \right|_{\psi_0}.$$

Consideremos un funcional de la forma:

$$S[\psi] = \int_M \mathcal{L}[\psi],$$

donde \mathcal{L} es una función de ψ dada por:

$$\mathcal{L}[\psi] = \mathcal{L}(\psi, \nabla\psi, \dots, \nabla^k\psi).$$

Suponiendo que el campo ψ *extremiza* el funcional S , decimos que es la solución del sistema. S la llamamos entonces como la acción y \mathcal{L} la densidad lagrangiana. Para resolver nuestro problema en este contexto de campos, nos concentramos en un abierto $U \in M$ tal que conozcamos la solución en la frontera ∂U .

En el caso de relatividad general (y para las teorías métricas extendidas que consideraremos posteriormente) el campo ψ para el cual buscamos su *ecuación de movimiento* es la métrica g_{ab} asociada a M . En este caso, es necesario considerar el elemento de volumen en la fórmula integral, dado que este vendrá de la forma $\epsilon = \sqrt{|g|}dx^1dx^2 \dots dx^n$, donde $g = \det(g_{ab})$ y $n = \dim M$ [4] (hay algunas discusiones extras sobre esta forma integral relacionadas con la orientabilidad de la variedad M que no consideramos en este estudio. Supondremos que siempre tendremos, para la construcción de la acción, tal elemento de volumen sobre la forma integral.) Nótese entonces que el elemento de volumen depende, a su vez, del campo variable g_{ab} . Para resolver esta situación, suponemos un elemento de volumen $e_{a_1a_2\dots a_n}$ sobre la variedad M de tal forma que:

$$\epsilon_{a_1a_2\dots a_n} = \sqrt{-g}e_{a_1a_2\dots a_n}.$$

Por otro lado, tenemos que dado un elemento de volumen \mathbf{e} sobre la variedad M , podemos definir una densidad tensorial en $\mathcal{T}(k, l)$ dada por:

$$T = \sqrt{-g}\tilde{T},$$

donde dicho tensor \tilde{T} no dependerá de esta escogencia del elemento de volumen. Para ello, definimos entonces el lagrangiano \mathcal{L}_G como un escalar dado por:

$$\mathcal{L}_G = \sqrt{-g}R. \quad (4-1)$$

Así, la acción toma la forma:

$$S[g^{ab}] = \int \mathcal{L}_G \epsilon \quad (4-2)$$

conocida como la acción de Hilbert. Definimos $dg^{ab}/d\lambda := \delta g^{ab}$. Tenemos entonces que:

$$\frac{d\mathcal{L}_G}{d\lambda} = \sqrt{-g}(\delta R_{ab})g^{ab} + \sqrt{-g}R_{ab}\delta g^{ab} + R\delta(\sqrt{-g}).$$

Para llevar a cabo el anterior cálculo, establecemos la siguiente relación:

$$\begin{aligned} g^{ac}g_{cd} = \delta_d^a &\implies (\delta g^{ac})g_{cd} = -g^{ac}(\delta g_{cd}) \\ &\implies \delta g_{cd} = -g_{cd}g_{ac}(\delta g^{ac}). \end{aligned}$$

Considerando entonces una familia de un parámetro para el campo g de la forma $g^{ab}(\lambda)$ definimos ${}^0\nabla_a$ como el operador derivada asociado a $\lambda = 0$ tal que ${}^0\nabla_a g_{bc} = 0$ y ${}^k\nabla_a$ el asociado a $g_{bc}(\lambda)$. En el capítulo de Fundamentos mostramos cómo se relacionan estos

operadores a trav3s de la conexi3n $C^a{}_{bc}$. De este modo, considerando la ecuaci3n de la conexi3n 2-10 tenemos que:

$$C^c{}_{ab}(\lambda) = \frac{1}{2}g^{cd}(\lambda)\{{}^0\nabla_a g_{bd}(\lambda) + {}^0\nabla_b g_{ad}(\lambda) - {}^0\nabla_d g_{ab}(\lambda)\}.$$

Escribiendo el tensor de Ricci en t3rminos de esta conexi3n, tenemos que [6]:

$$R_{ac}(\lambda) = -2{}^0\nabla_{[a}C^b{}_{b]c}(\lambda) + 2C^e{}_{c[a}C^b{}_{b]e}(\lambda).$$

N3tese, que, al aplicar el operador diferencial $d/d\lambda|_{\lambda=0}$ (de acuerdo a la definici3n de derivada funcional), el t3rmino cuadr3tico de $C^a{}_{bc}$ en Ricci se hace cero, pues se obtienen factores $C^a{}_{bc}(0)$, los cuales, por construcci3n y bajo la consideraci3n de ${}^0\nabla_a g_{bc} = 0$, se anulan. As3, obtenemos entonces que:

$$\begin{aligned} \delta R_{ab} &:= \left. \frac{dR_{ab}}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} = -2{}^0\nabla_{[a}\dot{C}^c{}_{c]b}, \quad \text{con} \quad \dot{C}^c{}_{ab} = \left. \frac{dC^c{}_{ab}}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} \\ &= g^{cd}\nabla_c\nabla_{(b}\delta g_{a)d} - \frac{1}{2}g^{cd}\nabla_c\nabla_d\delta g_{ab} - \frac{1}{2}g^{cd}\nabla_a\nabla_b\delta g_{cd} + \frac{1}{2}g^{cd}\nabla_a(\nabla_d\delta g_{cb} - \nabla_c\delta g_{db}) \\ &= g^{cd}\nabla_c\nabla_{(b}\delta g_{a)d} - \frac{1}{2}g^{cd}\nabla_c\nabla_d\delta g_{ab} - \frac{1}{2}g^{cd}\nabla_a\nabla_b\delta g_{cd}. \end{aligned}$$

N3tese que hemos hecho uso de la propiedad $\nabla_a g_{bc} = 0$. El 3ltimo t3rmino en la segunda igualdad se anula dada la contracci3n en los 3ndices $\{c, d\}$. Trazando esta 3ltima expresi3n obtenemos:

$$\begin{aligned} g^{ab}\delta R_{ab} &= \frac{1}{2}g^{cd}g^{ab}\nabla_c\nabla_b(\delta g_{ad}) + \frac{1}{2}g^{cd}g^{ab}\nabla_c\nabla_a(\delta g_{bd}) - \frac{1}{2}g^{cd}g^{ab}\nabla_c\nabla_d(\delta g_{ab}) - \frac{1}{2}g^{cd}g^{ab}\nabla_a\nabla_b(\delta g_{cd}) \\ &= \frac{1}{2}\nabla^d\{\nabla^a(\delta g_{ad}) + \nabla^b(\delta g_{bd})\} - \frac{1}{2}\nabla^d\{\nabla_d g^{ab}(\delta g_{ab}) + \nabla_d g^{cd}(\delta g_{cd})\} \\ &= \nabla^d\{\nabla^a(\delta g_{ad}) - g^{ab}\nabla_d(\delta g_{ab})\}. \end{aligned}$$

Reescribiendo la expresi3n anterior tenemos:

$$g^{ab}(\delta R_{ab}) = \nabla^c v_c, \quad \text{con} \quad v_c = \nabla^a\{\delta g_{ac} - g^{ab}\nabla_c(\delta g_{ab})\}. \quad (4-3)$$

Para el t3rmino $\sqrt{-g}$, tenemos que [4]:

$$\delta(\sqrt{-g}) = -\frac{1}{2}\sqrt{-g} g_{ab}(\delta g^{ab}). \quad (4-4)$$

Resulta entonces:

$$\int_M \frac{d\mathcal{L}_G}{d\lambda} \mathbf{e} = \int_M \nabla^c v_c \sqrt{-g} \mathbf{e} + \int_M \left(R_{ab} - \frac{1}{2}R g_{ab} \right) (\delta g^{ab}) \sqrt{-g} \mathbf{e}.$$

El primer t3rmino corresponde a la divergencia del campo vectorial v^a . Por teorema de Stokes, esta integral contribuye solamente en la frontera ∂M . Esta contribuci3n la ignoraremos. N3tese que con la segunda parte, recuperamos la ecuaci3n de Einstein en el vac3o.

4.1.1. Clasificación para la ecuación de Einstein

La ecuación estará dada por:

$$R_{ab} = 0.$$

Como hemos analizado en la ecuación 2-53, los elementos no ceros de Riemann serán: R_{plql} . De este modo, resulta que $0 = R_{ab} = \eta^{cd}R_{acbd} = -R_{akbl} - R_{albk} + R_{a\bar{m}bm} + R_{amb\bar{m}}$. Dada la restricción generada a partir de la ecuación 2-53, donde los únicos elementos no nulos del tensor de Riemann tienen la forma R_{albl} , consideremos, sin pérdida de generalidad, $a = l$:

$$0 = R_{klbl} + R_{l\bar{m}bm} + R_{lmb\bar{m}}$$

Considerando entonces las ecuaciones 2-54, se tiene que:

$$\Psi_2 = 0, \Psi_3 = 0, \Phi_{22} = 0.$$

Nótese que no tenemos ninguna restricción sobre el elemento $R_{l\bar{m}l\bar{m}}$. Así, el único modo que queda indeterminado es Ψ_4 . Por lo tanto, esta métrica es de clase N_2 .

4.2. Teoría de Brans - Dicke

Durante esta sección introduciremos la acción para teorías *scalar - Tensor* que luego dará lugar a la teoría extendida de Brans - Dicke. Para ello seguiremos a Clifford [1] y el artículo de Brans y Dicke [2]. Esta teoría difiere de relatividad general en la introducción de un campo escalar ϕ generadora, al igual que la métrica, de la gravitación. Esta teoría extendida se presenta a partir de dar una respuesta a uno de los problemas que la relatividad general no logra, desde su definición, dar explicación. Esta problemática evalúa la fuerza presente entre dos observadores acelerados uno del otro en un modelo de gravedad débil [2]. La densidad lagrangiana \mathcal{L} para esta métrica, en el vacío, está dada por:

$$\mathcal{L} = \left(\phi R - \omega(\phi) \frac{g^{ab} \phi_{,a} \phi_{,b}}{\phi} + 2\phi \lambda(\phi) \right) \sqrt{-g}.$$

Para el caso del escalar ϕ suponemos que conocemos su condición de frontera ϕ_0 . Nótese que esta acción difiere de la acción de Einstein - Hilbert para relatividad general en el segundo y tercer término, el cual condensa toda la información gravitacional pertinente a dicho escalar introducido. En el primer término, poseemos la información asociada a la geometría, y en los restantes la interacción del escalar introducido con la métrica asociada a la variedad M . El caso analizado por Brans - Dicke resulta más sencillo al considerar dicha función $\omega \equiv \text{cte}$ y el término λ , asociado a la constante cosmológica, nulo. Resulta entonces:

$$\mathcal{L}_{BD} = \left(\phi R - \omega \frac{g^{ab} \phi_{,a} \phi_{,b}}{\phi} \right) \sqrt{-g}. \quad (4-5)$$

Aplicando una variación sobre una acción de la forma $S[g^{ab}, \psi]$, donde ψ es un campo escalar, resulta entonces [4]:

$$\frac{dS}{d\lambda} = \int_M \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta g^{ab}} g^{ab} + \int_M \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \psi} \delta \psi.$$

De esta manera, dado el lagrangiano 4-5, tenemos las ecuaciones de movimiento [2]:

- Para el escalar ϕ :

$$\frac{2\omega}{\phi} \square_g \phi - \frac{\omega}{\phi^2} \phi^{,a} \phi_{,a} + R = 0, \quad (4-6)$$

donde el operador $\square_g \phi := \phi^{,a}{}_{;a}$. A partir de esta ecuación, la cual toma la forma de una ecuación de onda para el escalar ϕ , vemos cómo actúan algunos términos en la densidad lagrangiana. El término ϕR y la densidad asociada al escalar ϕ (segundo término) cumplen la función de generadores de ϕ ondas.

- Para la ecuación de campo:

$$R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R = \frac{\omega}{\phi^2} \left(\phi_{,a} \phi_{,b} - \frac{1}{2} g_{ab} \phi_{,c} \phi^{,c} \right) + \frac{1}{\phi} (\phi_{,a;b} - g_{ab} \square_g \phi). \quad (4-7)$$

La parte de la izquierda es la conocida desde relatividad general. La parte derecha, como es usual interpretar, corresponde a un factor energético. Aunque estamos en el vacío, dicho campo escalar ϕ se asocia a un término de energía - momentum que se observa en la ecuación.

Trazando la ecuación del campo, tenemos:

$$R = \frac{\omega}{\phi^2} \phi^{,a} \phi_{,a} + \frac{3}{\phi} \square_g \phi.$$

Reemplazando este valor de R en la ecuación de onda obtenemos:

$$\square_g \phi \left(2\omega + \frac{3}{\phi} \right) = 0 \implies \square_g \phi = 0.$$

4.2.1. Clasificación para Brans - Dicke

Dada la ecuación ϕ onda, tenemos una solución de la forma:

$$\phi = \phi_0 + \phi_1 e^{iq \cdot x},$$

donde q es un vector nulo y ϕ_0 y ϕ_1 son constantes asociadas a la condición de frontera del problema [3] (ϕ_1 siendo interpretada como una amplitud.) Con esta solución a una onda monocromática, tenemos entonces que:

$$\phi^{,a} = \phi_1 (iq^a) e^{iq \cdot x}.$$

Así, dada la nulidad del vector q , resulta entonces que $R = 0$. Por otro lado, en la aproximación de oscilaciones pequeñas, es decir, Φ_1 sobrevive a primer orden, tenemos que:

$$R_{ab} = -\phi_0^{-1} \phi_1 e^{iq \cdot x} q_a q_b.$$

Bajo el formalismo de tétradas, tenemos lo siguiente:

$$0 = q^a q_a = \eta^{ab} q_b q_a = \eta^{1b} q_b q_1 + \eta^{2b} q_b q_2 + \eta^{3b} q_b q_3 + \eta^{4b} q_b q_4.$$

De esta relación, obtenemos que:

$$q_k q_l = q_m q_{\bar{m}}.$$

Así, tenemos entonces que:

$$R_{lk} = -\phi_0^{-1} \phi_1 e^{iq \cdot x} q_l q_k = -\phi_0^{-1} \phi_1 e^{iq \cdot x} q_m q_{\bar{m}} = R_{m \bar{m}} = 0.$$

La última igualdad la conseguimos al expandir el elemento $R_{m \bar{m}}$ en Riemann y observar que no obtenemos ninguna componente de la forma R_{plql} . De esta misma manera observamos que el elemento $R_{kk} = 0$. Por lo tanto, vemos que los elementos $q_k = 0 = q_m$. Así, tenemos entonces que los elementos $R_{lm} = 0 = R_{l \bar{m}}$. El único elemento no cero de Ricci viene dado por $R_{ll} = 2R_{lml \bar{m}}$, por lo que $\Phi_{22} \neq 0$. De la misma manera, para el elemento de Riemann $R_{l \bar{m} l \bar{m}}$ no es posible determinar si es cero. En resumen, tenemos que: $\Psi_2 = 0 = \Psi_3$ y $\Phi_{22} \neq 0 \neq \Psi_4$. Por lo tanto, decimos que Brans - Dicke es de clase N_3 .

5 Conclusiones

A través de esta monografía hemos descrito, geoméricamente, el tensor de curvatura de Riemann y, con énfasis especial, su correspondiente sin traza: el tensor de Weyl. Dada su conexión con las ecuaciones de movimiento del campo gravitacional en el vacío, hemos visto su relación con las ondas gravitacionales, las cuales resultan en la aproximación de campo débil. Dados los escalares de Weyl, hemos añadido una simetría adicional sobre la dirección de propagación de las ondas y su relación con el formalismo de Newman - Penrose con las tétradas nulas, elemento que resulta apropiado para realizar dicha adición. De la misma manera, hemos introducido la descomposición llevada a cabo por Petrov que, bajo transformaciones de Lorentz, nos permite agrupar estos modos de polarización de acuerdo a cómo se anulan.

Por otro lado, hemos introducido parte del formalismo de grupos de Lie para analizar las representaciones unitarias del grupo de Poincaré \mathcal{P} las cuales expresan el concepto de helicidad de una partícula no masiva. Con ésto y junto a la descomposición de Petrov, hemos generado una clasificación que nos permite clasificar éstos escalares de Weyl de acuerdo a Petrov y su helicidad.

Un hecho fundamental en esta clasificación corresponde a la unitariedad de las representaciones con las que se identifica cada una de las clases II_6, III_5, N, O . Para el caso de II_6 y III_5 , donde tenemos dos helicidades distintas de sí no nulas, decimos que se trata de una representación no unitaria dado que no es posible descomponer dicho espacio generado como suma de representaciones irreducibles [3]. Esta prueba, la cual la hemos analizado a partir de la no-compacidad del subgrupo asociado, ha sido dejada como objetivo futuro de esta monografía. El resultado de esta conjetura nos permite hablar de no-cuantización (partiendo del teorema de Wigner) en los escalares de Weyl para teorías métricas extendidas que sean clasificadas en algunas de estas dos clases.

Hay dos observaciones adicionales que han surgido durante todo este estudio. La primera de ellas posee un carácter de continuación directa sobre este trabajo de monografía. En este caso, dada esta conexión que hemos analizado sobre la cuantización en los escalares de Weyl para una teoría métrica, resulta importante aplicar el procedimiento para una teoría métrica dependiente de escala, la cual posee un fundamento en relacionar algunos problemas gravitacionales con mecánica cuántica. La segunda observación, por otro lado, con un interés más particular y personal, corresponde a la descripción de esta clasificación para ondas gravitacionales donde no tengamos una propagación nula y para ondas provenientes de distintas fuentes.

Bibliografía

- [1] M. Clifford, *Theory and Experiment in Gravitational Physics*. Cambridge University Press, 1993.
- [2] C. Brans and R. H. Dicke, “Mach’s principle and a relativistic theory of gravitation,” *Phys. Rev.*, vol. 124, pp. 925–935, 1961.
- [3] D. M. Eardley, D. L. Lee, and A. P. Lightman, “Gravitational-wave observations as a tool for testing relativistic gravity,” *Phys. Rev. D*, vol. 8, pp. 3308–3321, Nov 1973.
- [4] R. Wald, *General Relativity*. Chicago y London: University of Chicago Press, 1984.
- [5] J. Munkres, *Topology*, 2nd ed. Pearson Education Limited, 2014.
- [6] B. Schutz, *A first course in General Relativity*. Reino Unido: Cambridge University Press, 1985.
- [7] A. Reyes, “Notas de clase: Mecánica analítica,” Universidad de los Andes, 2019.
- [8] M. Blau, “Lecture notes on general relativity,” CH-3012 Bern, Switzerland, 2019.
- [9] S. Chandrasekhar, *The Mathematical Theory of Black Holes*, 2nd ed., ser. International Series of Monographs on Physics. Oxford University Press, 1992.
- [10] E. Newman and R. Penrose, “An approach to gravitational radiation by a method of spin coefficients,” *Journal of Mathematical Physics*, vol. 3, no. 3, pp. 566–578, 1962.
- [11] A. Petrov, *Einstein spaces*, 1st ed. Pergamon, 1969.
- [12] D. Kramer and S. Ernst, *Exact solutions of Einstein’s field equations*, 2nd ed., ser. Cambridge monographs on mathematical physics. Cambridge University Press, 1980.
- [13] R. Penrose and W. Rindler, *Spinors and Space-Time: Two-spinor calculus and relativistic fields*, ser. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 1984, vol. 1.
- [14] —, *Spinors and Space-Time: Spinor and twistor methods in space-time geometry*. Cambridge University Press, 1988, vol. 2.

-
- [15] L. Bel, “Radiation States and the Problem of Energy in General Relativity,” *General Relativity and Gravitation*, vol. 32, pp. 2047–2078, Oct. 2000.
- [16] J. Plebański and A. Krasinski, *An Introduction to General Relativity and Cosmology*. Cambridge University Press, 2006.
- [17] A. Z. Petrov, “The classification of spaces defining gravitational fields,” *General Relativity and Gravitation*, vol. 32, no. 8, pp. 1665–1685, Aug 2000.
- [18] S. Hawking and W. Israel, *General Relativity: an Einstein Centenary Survey*. Cambridge University Press, 1975.
- [19] A. Pressley, *Elementary Differential Geometry*, 2nd ed., ser. Springer Undergraduate Mathematics Series. Springer, 2010.
- [20] G. Birkhoff and S. Mac Lane, *A Survey of Modern Algebra*, 5th ed., ser. Akp Classics. A K Peters/CRC Press, 2010.
- [21] W. Curtis and F. R. Miller, *Differential manifolds and theoretical physics*, first edition ed., ser. Pure and Applied Mathematics. Academic Press, 1985.
- [22] G. Costa and G. Fogli, *Symmetries and Group Theory in Particle Physics*, 1st ed., ser. Lecture Notes in Physics 823. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2012.
- [23] B. Simon, *Representations of finite and compact groups*. American Mathematical Society, 1996.
- [24] A. K. Jr, *An introduction to Lie groups and Lie algebras*, ser. Cambridge studies in advanced mathematics 113. Cambridge University Press, 2008.
- [25] Y. Ohnuki, *Unitary Representations of the Poincare Group and Relativistic Wave Equations*. World Scientific, 1988.
- [26] F. Scheck, *Mechanics*, 5th ed., ser. Graduate texts in physics. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2010.
- [27] A. Reyes, “Notas de clase: Teoría de grupos en mecánica cuántica,” Universidad de los Andes, 2019.
- [28] F. Scheck, *Quantum physics*, 2nd ed., ser. Graduate texts in physics. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2013.
- [29] W.-K. Tung, *Group Theory in Physics*. WORLD SCIENTIFIC, 1985.
- [30] S. Gasiorowicz, *Elementary Particle Physics*, corrected ed. John Wiley Sons, Inc., 1967.

- [31] G. S. Hall, “On the petrov classification of gravitational fields,” *Journal of Physics A: Mathematical, Nuclear and General*, vol. 6, no. 5, pp. 619–623, may 1973.
- [32] F. Scheck, *Classical Field Theory: On Electrodynamics, Non-Abelian Gauge Theories and Gravitation*, 1st ed., ser. Graduate texts in physics. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2012.

Declaración

Me permito afirmar que he realizado la presente monografía de manera autónoma y con la única ayuda de los medios permitidos y no diferentes a los mencionados en este documento. Todos los pasajes que se han tomado de manera textual o figurativa de textos publicados y no publicados, los he reconocido en el presente trabajo.

Bogotá, D.C., 12.11.2019

Julián David Calderón Gómez

Director: PhD. Pedro Barqueño de Retes