Leyes Cero-Uno en la lógica continua.

Trabajo de grado del departamento de matemáticas de la Universidad de Los Andes.

Autor: Carolina Upegui
Asesor: Alexander Berenstein

Departamento de matemáticas de la Universidad de Los Andes.

Agradecimientos

A mis papás.

Introducción

La teoría de Fraïssé fue definida por el matemático francés Roland Fraïssé en 1954. Su inspiración fue encontrar una forma de generar $(\mathbb{Q}, <)$ a partir de estructuras lineales finitas. Fraïssé generalizó esta construcción utilizando como objetos básicos estructuras finitas sobre un lenguaje $\mathcal{L}$ relacional finito, con el fin de construir una $\mathcal{L}$-estructura contable fuertemente ω-homogénea D. Esta estructura D es el límite de Fraïssé de la clase, su teoría $\mathrm{Th}(D)$ será ω-categórica y sus subestructuras finitas serán la clase de objetos básicos iniciales y en la mayoría de los casos será posible definirla por medio de las teorías $\{$ $\mathrm{Th}(A)$: A un elemento de la clase de Fraïssé$\}$.

Esta teoría tiene un análogo en lógica continua: la teoría de Fraïssé para estructuras métricas. En [1], Itaï Ben Yaacov estudia la construcción de las clases de Fraïssé para estructuras métricas finitamente generadas por medio de isometrías aproximadas. Esta construcción es análoga a la teoría de Fraïssé para estructuras finitas y requiere dos propiedades adicionales para obtener como límite una la estructura métrica: la propiedad de Continuidad y la propiedad polaca.

En algunos limites de Fraïssé es posible definir una ley Cero-Uno sobre las clases de Fraïssé tanto en estructuras finitas como en estructuras métricas finitamente generadas. Para esto es necesario definir una medida de probabilidad p_N sobre el conjunto de estructuras con N generadores, en este tipo de familias si φ es una sentencia en $\mathcal{L}$ tenemos que $\lim_{N\to\infty} p_N(\varphi) = 0$ o $\lim_{N\to\infty} p_N(\varphi) = 1$. La finalidad de este trabajo es estudiar ejemplos de la teoría de Fraïssé y la construcción de una ley cero-uno correspondiente. En este texto el ejemplo más relevante de estructuras métricas es la clase de las Álgebras medibles. Esta es una clase de Fraïssé para estructuras métricas, por lo tanto existe un límite de Fraïssé que es separable, ultrahomogeneo, y ω-categórico.

Sea $\mathcal{A}_n$ el conjunto de álgebras medibles con n átomos. Tome $B \in \mathcal{A}_n$ y sean $a_1, .., a_n$ los átomos de B, sin pérdida de generalidad podemos tomar $\mu(a_1) \leq \mu(a_2) \leq ... \leq \mu(a_n)$. La clase $\mathcal{A}_n$ puede representarse en el plano como el subconjunto convexo: $x_1 + x_2 + ... + x_n = 1$ donde x_i es la medida del i-ésimo átomo y $x_1 \leq ... \leq x_n$, por lo tanto podremos asignarle a $\mathcal{A}_n$ la medida de Lebegue que notaremos como m. El límite de Fraïssé de la clase $\{\mathcal{A}_n : n \in \mathbb{N}\}$ son las álgebras medibles medibles separables y sin átomos. Uno de los objetivos de la tesis es medir en cada $\mathcal{A}_n$ la probabilidad de tener un átomo con medida mayor o igual a $\frac{1}{l}$, esto nos dirá que tan probable es que una álgebra no tenga átomos.

Luego, para cada $l \in \mathbb{N}^+$ definimos φ_l una $\mathcal{L}$-sentencia sobre $\mathcal{A}_m$ donde $m \geq n$ tal que,

$$\varphi^l := \exists a[(\forall b\ [\mu(a \cap b) = 0 \vee \mu(a \cap b) = \mu(a)]) \wedge (\mu(a) \geq \frac{1}{l})].$$

Considere la medida de probabilidad p_n sobre $\mathcal{A}_n$, tal que la probabilidad del evento de satisfacer φ_l es,

$$p_n(\varphi_l) = \frac{m(\mathcal{B}_{n,l})}{m(\mathcal{A}_n)}.$$

Veremos que,

$$\lim_{n\to\infty} p_n(\varphi_l) = \lim_{n\to\infty} \frac{m(\mathcal{B}_{n,l})}{m(\mathcal{A}_n)} = 0.$$

Esto nos permite definir una ley Cero-Uno sobre las álgebras medibles,

$$\lim_{n\to\infty} p_n(\varphi_l) = 0.$$

Finalmente, sea $\varphi = 0$ una sentencia que se deduce a partir de la teoría de las álgebras medibles sin átomos. Entonces para todo $\epsilon > 0$ se tiene,

$$\lim_{n\to\infty} p_n(\varphi \leq \epsilon) = 1.$$

Índice

1. Preliminares

Los preliminares de lógica continua corresponden al texto [2]. El lector que tenga claro los conceptos de lógica continua puede proceder a la segunda sección.

1.1. Estructuras métricas.

Definición 1.1. Sea (M, d) un espacio métrico completo.

- Un predicado en M es una función uniformemente continua de M^n a $A \subseteq \mathbb{R}$ donde A es un intervalo acotado.
- Una función en M es una función uniformemente continua de M^n a M.

En cada caso n se nota como la aridad del predicado o la función.

Un espacio métrico $\mathcal{M}$ basado en (M, d) esta formado por un conjunto $(R_i)_{i \in I}$ de predicados en M, un conjunto $(f_j)_{j \in J}$ de funciones en M y un conjunto $(a_k)_{k \in K}$ de constantes en M. Entonces notamos,

$$\mathcal{M} = (M, R_i, F_j, a_k \text{ tales que } i \in I,\ j \in J,\ k \in K\}.$$

A cada estructura métrica $\mathcal{M}$ se asocia un lenguaje $\mathcal{L}$ tal que para cada predicado R de $\mathcal{M}$ asociamos un símbolo de predicado P y un entero positivo $a(P)$ que corresponde a la aridad de R, lo notamos $P^{\mathcal{M}}$. Para cada función F de $\mathcal{M}$ asociamos un símbolo de función f y un entero positivo $a(f)$ que corresponde a la aridad de F, lo notamos $f^{\mathcal{M}}$. Y para cada constante a de $\mathcal{M}$ asociamos un símbolo de constante c, la notamos $c^{\mathcal{M}}$.

Definición 1.2. Sean $\mathcal{L}$ un lenguaje métrico y $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ son $\mathcal{L}$-estructuras. Una inmersión de $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$ es una isométria de espacios métricos $T : (M, d^{\mathcal{M}}) \to (N, d^{\mathcal{N}})$ tal que,

- Si $P : M^n \to \mathbb{R}$ y $a_1, .., a_n \in M$ tenemos que
$$P^{\mathcal{N}}(T(a_1), ..., T(a_n)) = P^{\mathcal{M}}(a_1, ..., a_n).$$
- Si $f : M^n \to M$ y $a_1, .., a_n \in M$ tenemos que
$$f^{\mathcal{N}}(T(a_1), ..., T(a_n)) = T(f^{\mathcal{M}}(a_1, ..., a_n)).$$
- Si c es un símbolo de constante de $\mathcal{L}$, tenemos que
$$c^{\mathcal{N}} = T(c^{\mathcal{M}}).$$

Definición 1.3. Un isomorfismo es una inmersión sobreyectiva. $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ son $\mathcal{L}$-estructuras isomorfas si existe un isomorfismo de $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$.

Definición 1.4. $\mathcal{M}$ es una subestructura de $\mathcal{N}$ si $M \subseteq N$ y la inclusión de M a N corresponde a una inmersión de $\mathcal{L}$-estructuras.

1.2. Espacio de tipos en lógica continua.

Definición 1.5. Un conjunto p de $\mathcal{L}$ condiciones con variables libres $x_1, ..., x_n$ es un $n-$tipo sobre A si existe un modelo $(\mathcal{M}, A)$ de T_A y existen $e_1, .., e_n \in M$, tales que p es el conjunto de todas las condiciones $E(x_1, .., x_n)$, con $\mathcal{M}_A \models E(e_1, .., e_n)$. En tal caso se escribe $p = tp_{\mathcal{M}}(e_1, .., e_n\ /A)$.

Definición 1.6. La topología de la lógica sobre $S_n(T_A)$ es la topología generada por los conjuntos básicos,

$$[\varphi < \epsilon] = \{q\ \in S_n(T_A)| \text{ para algún } 0 \leq \delta \leq \epsilon, (\varphi \leq \delta) \in q\},$$

donde $\varphi(x_1, .., x_n) \in \mathcal{L}(A)$ y $\epsilon > 0$.

Lema 1.7. *La topología de la lógica es Hausdorff.*

Demostración. Tome $p \neq q \in S_n(T_A)$, entonces existe φ un $\mathcal{L}(A)$-fórmula tal que $\varphi = 0 \in p$ pero $\varphi = 0 \notin q$. Luego, existe $r > 0$ con $\varphi = r \in q$ y defina $\epsilon = \frac{r}{2}$. Tome la vecindad abierta $[\varphi < \epsilon]$ de p y $[\varphi > \epsilon]$ vecindad abierta de q. Es claro que las dos vecindades son disjuntas. $\square$

Un resultado interesante con respecto a la topología de la lógica es que para todo $n \in \mathbb{N}^+$, $S_n(T_A)$ es compacto. Lo anterior se sigue del teorema de compacidad en la lógica continua.

Otra observación importante, es la posibilidad de definir una topología sobre el espacio de tipos a partir de la métrica d asociada a la métrica de las estructuras que son modelos, la cual notamos por d-topología. Esta última es la definida por,

$$d(p, q) = \text{ínf}\{\max_{1 \leq j \leq n} d(b_j, c_j)|\mathcal{M}_A \models p(b_1, .., b_n) \text{ y } \ \mathcal{M}_A \models q(c_1, .., c_n),\ \mathcal{M}_A \models T_A\}.$$

Lema 1.8. *El espacio de tipos $(S_n(T_A), d)$ es un espacio completo.*

Demostración. Sea $\{p_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $(S_n(T_A), d)$, tal que

$$d(p_k, p_{k+1}) \leq \frac{1}{2^k}.$$

Vamos a mostrar que $\{p_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge y su límite se encuentra en $S_n(T_A)$. Para esto tome $\mathcal{N}$ un modelo $|A|$-saturado de T_A, luego, $\mathcal{N} = \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ para algún $\mathcal{M}$ modelo de T_A. Como $\mathcal{M}$ es

$|A|$-saturado, para todo $\overline{a} \in M^n$ que satisface p_k, existe un $\overline{b} \in M^n$ que realiza p_{k+1} tal que $d(\overline{a}, \overline{b}) = d(p_k, p_{k+1})$. Por inducción definimos la sucesión $\{\overline{b_k}\} \subseteq M^n$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$ $\overline{b_k}$ realiza p_k, y

$$d(\overline{b_k}, \overline{b_{k+1}}) = d(p_k, p_{k+1}) \leq \frac{1}{2^k}.$$

Por lo tanto, $\{\overline{b_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en M^n, y como $\mathcal{M}$ es un espacio completo, entonces existe $\overline{b}$ que corresponde al límite de $\{\overline{b_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ en M^n. Finalmente, $tp(\overline{b}/A)$ corresponde al límite de la sucesión $\{p_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ en el espacio de tipos $S_n(T_A)$. $\square$

1.3. Definibilidad de estructuras métricas.

Una noción que diferencia la lógica continua de la lógica de primer orden es la definibilidad tanto de predicados como de conjuntos. Así, decimos que $P : M^n \to [0,1]$ es un predicado definible en $\mathcal{M}$ sobre A si y solo si existe una sucesión $\{\varphi_k(\overline{x})\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{L}_A$-formulas que convergen uniformemente a $P(\overline{x})$. Es decir, para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k > N$ y para todo $x \in M^n$,

$$|\varphi_k^{\mathcal{M}}(\overline{x}) - P(\overline{x})| \leq \epsilon.$$

Lema 1.9. *Sea $A \subseteq M$, entonces $P : M^n \to [0,1]$ un predicado definible en $\mathcal{M}$ sobre A si y solo si existe $u : [0,1]^{\mathbb{N}} \to [0,1]$ función uniformemente continua y una sucesión $\{\varphi_k(\overline{x})\}_{k\in\mathbb{N}}$ de formulas, tal que para todo $\overline{x} \in M^n$,*

$$P(\overline{x}) = u((\varphi_k^{\mathcal{M}}(\overline{x}))_{k\in\mathcal{M}}).$$

Demostración. Primero, supongamos que existe $u : [0,1]^{\mathbb{N}} \to [0,1]$ función uniformemente continua y $\{\varphi_m^{\mathcal{M}}\}_{m\in\mathbb{N}}$ una sucesión de $\mathcal{L}$-fórmulas, tal que para todo $\overline{x} \in M^n$, $P(\overline{x}) = u((\varphi_k^{\mathcal{M}}(\overline{x}))_{k\in\mathcal{M}})$. Tenemos que $([0,1]^{\mathbb{N}}, P)$ es compacto y u es uniformemente continua. Entonces si fijamos $\epsilon > 0$, lo anterior implica la existencia de un $m \in \mathbb{N}$ tal que, $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ y $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sucesiones con $a_i = b_i$ para $i = 0,..,m$ entonces $|u((a_k)_{k\in\mathbb{N}}) - u((b_k)_{k\in\mathbb{N}})| \leq \epsilon$.

Ahora, sea $u_m : [0,1]^{m+1} \to [0,1]$ definida por $u_m(a_0, ..., a_m) = u(a_0, ..., a_m, 0, 0...)$. Luego, tome $\psi_m(\overline{x}) = u_m(\varphi_0^{\mathcal{M}}(\overline{x}), ..., \varphi_m^{\mathcal{M}}(\overline{x}))$. Así, tenemos,

$$|P(\overline{x}) - \psi_m^{\mathcal{M}}(\overline{x})| \leq |u((\varphi_m^{\mathcal{M}}(\overline{x}))_{m\in\mathbb{N}}) - u_m(\varphi_0(\overline{x}), ..., \varphi_m(\overline{x}))| \leq \epsilon.$$

Concluimos que P es definible por medio de la sucesión $\{\psi_m(\overline{x})\}_{m\in\mathbb{N}}$.

Para de mostrar la otra dirección, supongamos que P es definible. Por lo tanto existe una sucesión $\{\varphi_k(\overline{x})\}$ $\mathcal{L}$-formulas tales que

$$|\varphi_k^{\mathcal{M}}(\overline{x}) - P(\overline{x})| \leq \frac{1}{2^k}.$$

Definamos el conjunto,

$$C := \{(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in [0,1]^{\mathbb{N}} \text{ tal que dados } k,l \geq N+1,\ |a_k - a_l| \leq \frac{1}{2^N}\}.$$

Por definición, todos los elementos de C son sucesiones de Cauchy, y además para todo $\overline{x} \in M^n$, $\{\varphi_k^{\mathcal{M}}(\overline{x}) - P(\overline{x})\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq C$. Como $[0,1]$ es un espacio completo, entonces $\text{lím} : C \to [0,1]$ es una función continua donde $\text{lím}(a_k)_{k\in\mathbb{N}} = \text{lím}_{k\in\mathbb{N}}\, a_k$. Por el teorema de extensión de Tietze existe $u : [0,1]^{\mathbb{N}} \to [0,1]$ que corresponde al lím en C. Concluimos que $P(\overline{x}) = u((\varphi_k^{\mathcal{M}}(\overline{x}))_{k\in\mathbb{N}})$. □

Proposición 1.10. *Sean P un predicado definible, $\mathcal{N} \prec \mathcal{M}$ $\mathcal{L}(A)$ estructuras con $A \subseteq N$, entonces*

$$\inf_{\overline{x}\in M^n} P(\overline{x}) = \inf_{x\in N^n} P(x),$$
$$\sup_{\overline{x}\in M^n} P(\overline{x}) = \sup_{\overline{x}\in M^n} P(\overline{x})$$

Demostración. Como P es definible, existen $\{\varphi_k(\overline{x})\}_{k\in\mathbb{N}}$ tales que $|P(\overline{x}) - \varphi_k^{\mathcal{M}}(\overline{x})| \leq \frac{1}{k}$. Además, ya que $\mathcal{N}$ es una subestructura elemental de $\mathcal{M}$, entonces para todo $\overline{x} \in N^n$ y $k \geq 1$, $|P(\overline{x}) - \varphi_k^{\mathcal{N}}(\overline{x})| \leq \frac{1}{k}$. Luego,

$$\begin{aligned}\inf_{\overline{x}\in M^n} P(x) &= \lim_{k\to\infty} \inf_{\overline{x}\in M^n} \varphi_k^{\mathcal{M}}(\overline{x}) \\ &= \lim_{k\to\infty} \inf_{\overline{x}\in N^n} \varphi_k^{\mathcal{N}}(\overline{x}) \\ &= \inf_{x\in N^n} P(\overline{x}).\end{aligned}$$

La prueba para la igualdad de los supremos es similar a la anterior. □

Corolario 1.11. *Sean $(P_i)_{i=1,..,m}$, $P_i : M^n \to [0,1]$ predicados definibles en $\mathcal{M}$ sobre A. Considere $\mathcal{N} \preceq \mathcal{M}$ con $A \subseteq N$, y defina Q_i como la restricción de P_i en N^n. Entonces,*

$$(\mathcal{N}, Q_1, ..., Q_m) \preceq (\mathcal{M}, P_1, .., P_m).$$

Teorema 1.12. *Sean $\mathcal{M} \preceq \mathcal{N}$ $\mathcal{L}(A)$ estructuras y $P : M^n \to [0,1]$ un predicado definible en $\mathcal{M}$. Entonces existe un único predicado definible $Q : N^n \to [0,1]$ en $\mathcal{N}$, donde P es la restricción de Q en $\mathcal{M}$ con*

$$(\mathcal{M}, P) \preceq (\mathcal{N}, Q).$$

Demostración. Como P es definible entonces existe una sucesión $\{\varphi_k(x)\}_{k\in\mathbb{N}}$ que converge a $P(x)$, lo cual implica

$$\sup_{b\in N^n} \{|\varphi_k^{\mathcal{N}} - \varphi_l^{\mathcal{N}}|\} = \sup_{a\in M^n} \{|\varphi_k^{\mathcal{M}} - \varphi_l^{\mathcal{M}}|\}.$$

Luego, $\{\varphi_k(x)\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a una función $Q(x)$ en N. Finalmente, por construcción y por el teorema anterior P es la restricción de Q en M. $\square$

Inicialmente definimos los predicados definibles de la lógica continua a partir de fórmulas, más aún veremos que es posible definir ciertos predicados $P(x)$ a partir de un conjunto D como

$$\operatorname{dist}(x, D) = \inf_{y\in D}\{d(x, y)\}.$$

Precisemos las siguientes propiedades importantes sobre estos predicados definibles,

$$\sup_{x\in M^n} \inf_{y\in M^n} \{\ \max\ (P(x), |P(x) - d(x, y)|)\} = 0 \tag{1.1}$$

$$\sup_{x\in M^n} \{|P(x) - \inf_{y\in M^n}\ \{\min(P(y) + d(x, y), 1)\ \}|\ \} = 0. \tag{1.2}$$

Teorema 1.13. *Si tomamos $(\mathcal{M}, P)$ una $\mathcal{L}$ estructura que satisface las propiedades anteriores, y definimos $D := \{x \in M^n|\ P(x) = 0\}$. Entonces, para todo $x \in M^n$,*

$$P(x) = dist(x, D).$$

Demostración. Primero, veamos que $P(x) \leq \operatorname{dist}(x, D)$. Tenemos que P cumple la propiedad 2: $\sup_{x\in M^n}\{|P(x) - \inf_{y\in M^n}\ \{\min(P(y) + d(x, y), 1)\ \}|\ \} = 0$, es decir que para todo $y \in M^n$, $P(x) \leq P(y) + d(x, y)$. Lo cual implica $P(x) \leq \operatorname{dist}(x, D)$.
Así, falta probar que $P(x) \geq \operatorname{dist}(x, D)$. Por la propiedad 1, si fijamos $\epsilon > 0$ podemos construir recursivamente una sucesión $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de la siguiente manera: $y_1 = x$ y y_2 con $P(y_2) \leq \frac{\epsilon}{8}$ y $|P(x) - d(x, y_2)|\frac{\epsilon}{8}$. De forma inductiva definimos y_{k+1}, con $P(y_{k+1}) \leq \frac{\epsilon}{2^{k+1}}$ y $|P(y_k) - d(y_k, y_{k+1})| \leq \frac{\epsilon}{2^{k+1}}$. Note que $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy, pues,

$$d(y_k, y_{k+1}) \leq P(y_k) + |P(y_k) - d(y_k, y_{k+1}) \leq \frac{\epsilon}{2^k}.$$

Dado que M^n es un espacio completo entonces $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a $y \in M^n$. Por otro lado, la continuidad de P implica que $P(y) = 0$. Así,

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \lim_{k\in\mathbb{N}} d(y_1, y_{k+1}) \\ &\leq d(y_1, y_2) + \sum_{k=2}^{\infty} d(y_k, y_{k+1}) \\ &\leq P(x) + \epsilon. \end{aligned}$$

Finalmente, al enviar ϵ a 0 tenemos $d(x, y) \leq P(x)$. $\square$

Con el fin de definir los conjuntos definibles en la lógica continua, primero introduciremos los conjuntos cero. Así para $P : M^n \to [0,1]$ un predicado definible su conjunto cero correspondiente es

$$D := \{x \in M^n | P(x) = 0\}.$$

También pueden describirse de la siguiente manera: D es un conjunto cero si y solo si existe una sucesión $\{\varphi_k(x)\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{L}$-formulas, tales que,

$$D = \{x \in M^n | \varphi_k^{\mathcal{M}}(x) = 0, \ \forall x \in \mathbb{N}\}.$$

Decimos que $D \subseteq M^n$ es definible en $\mathcal{M}$ sobre A si y solo si $\operatorname{dist}(x, D)$ es un predicado definible en $\mathcal{M}$ sobre A.

Teorema 1.14. *Sea $D \subseteq M^n$ un conjunto. Entonces D es definible en $\mathcal{M}$ sobre A, si y solo si, para todo $P : M^n \to [0,1]$ predicado definible en $\mathcal{M}$ sobre A y $Q : M^n \to [0,1]$ un predicado que satisface la formula*

$$Q(x) = \inf_{y\in D}\{P(x,y)\},$$

tenemos que Q es definible en $\mathcal{M}$ sobre A.

Demostración. Primero, supongamos que D es definible y tome P un predicado definible. Por definición, P es uniformemente continuo, entonces defina $\alpha : [0,1] \to [0,1]$ tal que,

$$\begin{aligned} &\alpha(0) = 0, \\ &|P(x,y) - P(x,z)| \leq \alpha(d(y,z)). \end{aligned}$$

Luego,

$$P(x,y) \leq P(x,z) + \alpha(d(y,z)).$$

Ahora tome $Q(x) = \inf_{y\in D}\{P(x,y)\}$, por lo tanto,

$$\begin{aligned} P(x,y) \leq P(x,z) + \alpha(d(y,z)) &\Rightarrow \inf_{y\in D}\{P(x,y)\} \leq \inf_{y\in D}\{P(x,z) + \alpha(d(z,y))\}\} \\ &\Rightarrow Q(x) \leq \{P(x,z) + \inf_{y\in D}\{\alpha(d(z,y))\}\} \\ &\Rightarrow Q(x) \leq \{P(x,z) + \alpha(d(z,D))\} \\ &\Rightarrow \inf_{z\in M^n} Q(x) \leq \inf_{z\in M^n}\{P(x,z) + \alpha(d(z,D)) \ \} \\ &\Rightarrow Q(x) \leq \inf_{z\in M^n}\{P(x,z) + \alpha(d(z,D))\} \end{aligned}$$

Por otro lado, sabemos que $\inf_{z\in M^n}\{P(x,z) + \alpha(d(z,D))\} \leq Q(x)$, lo cual implica,

$$Q(x) = \inf_{z\in M^n}\{P(x,z) + \alpha(d(z,D))\}.$$

Finalmente, dado que tanto P y α son definibles entonces $\inf_{z \in M^n}\{P(x,z) + \alpha(d(z,D))\}$ es definible, implicando la definibilidad de Q. $\square$

1.4. Omitir tipos y ω-categoricidad

Definición 1.15. Sea $\kappa \geq \omega$ un cardinal. Decimos que T es κ-categórica, si y solo si para todo par de modelos $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ de T con carácter de densidad κ, se tiene $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$.

Definición 1.16. Sea $p \in S_n(T)$, p es principal si y solo si para todo $\mathcal{M}$ modelo de T, $p(\mathcal{M})$ es definible en $\mathcal{M}$ sobre $\emptyset$.

Teorema 1.17. *Sean T un teoría completa y $p \in S_n(T)$. Suponga que existe un modelo $\mathcal{M}$ de T tal que $p(\mathcal{M}) \neq \emptyset$ y $p(\mathcal{M})$ es definible en $\mathcal{M}$ sobre $\emptyset$. Entonces, para todo modelo $\mathcal{N}$ de T, $p(\mathcal{N}) \neq \emptyset$ y $p(\mathcal{N})$ es definible en $\mathcal{N}$ sobre $\emptyset$.*

Demostración. Como T es una teoría completa, entonces para todo par de modelos $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ de T existen $\mathcal{M}'$ y $\mathcal{N}'$ tales que $\mathcal{M} \preceq \mathcal{M}'$, $\mathcal{N} \preceq \mathcal{N}'$ y $\mathcal{M}' \cong \mathcal{N}'$. Así, basta probar el teorema en el caso en que $\mathcal{M} \preceq \mathcal{N}$ con $p(\mathcal{M}) \neq \emptyset$ definible en $\mathcal{M}$ sobre $\emptyset$. Tome P el predicado definido por

$$P(x) = \operatorname{dist}(x, p(\mathcal{M})),$$

por el teorema 1.9, P es definible. Ahora por 1.11, existe Q predicado definible en $\mathcal{N}$ tal que $(\mathcal{M}, P) \preceq (\mathcal{N}, Q)$. Tenemos que, Q satisface $Q(x) = \operatorname{dist}(x, D)$ con $D = \{x \in N$ tal que $Q(x) = 0\ \}$. Por definición, D es un conjunto definible en $\mathcal{N}$ sobre $\emptyset$, por lo tanto basta ver que $p(\mathcal{N}) = D$.
Primero, tome $\varphi(x)$ una $\mathcal{L}$-formula, tal que $\varphi(x) = 0 \in p$. Fije $\epsilon > 0$, luego existe $\delta > 0$ tal que dados $x, y \in M^n$ si $d(x,y) < \delta$ entonces $|\varphi^{\mathcal{M}}(x) - \varphi^{\mathcal{M}}(y)| < \epsilon$. Es decir, si $x \in M^n$ y $\operatorname{dist}(x, p(\mathcal{M})) < \delta$ entonces existe $y \in p(\mathcal{M})$ con $\operatorname{dist}(x,y) < \delta$, lo anterior implica que

$$\varphi^{\mathcal{M}}(x) = |\varphi^{\mathcal{M}}(x) - \varphi^{\mathcal{M}}(y)| \leq \epsilon.$$

Finalmente, tenemos que

$$\begin{aligned}
&(\mathcal{M}, P) \models \sup_{x \in M^n} (\min(\delta - P(x), \varphi^{\mathcal{M}}(x) - \epsilon)) = 0 \\
\Rightarrow\ &(\mathcal{N}, Q) \models \sup_{x \in N^n} (\min(\delta - Q(x), \varphi^{\mathcal{N}}(x) - \epsilon)) = 0 \\
\Rightarrow\ &D \subseteq p(\mathcal{N}).
\end{aligned}$$

Por otro lado, Q es definible entonces existe $\{\varphi_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que para todo $x \in N^n$

$$|Q(x) - \varphi_n(x)| \leq \frac{1}{n}.$$

Ahora, como $p(\mathcal{M}) \neq \emptyset$, existe $y \in M^n$ que realiza p. En este caso,

$$Q(x) = P(x) = \mathrm{dist}(x, p(\mathcal{M}) = 0.$$

Lo cual implica, $\{\varphi_n(x) \leq \frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq p(x)$, para todo $x \in p(\mathcal{N})$,

$$Q(x) \leq |Q(x) - \varphi_n^{\mathcal{N}}(x)| + \varphi_n^{\mathcal{N}}(x) \leq \frac{2}{n}.$$

Finalmente tenemos que $Q(x) = 0$ para todo $x \in p(\mathcal{N})$, concluimos que $p(\mathcal{N}) \subseteq D$. $\square$

Teorema 1.18. *Sea $p \in S_n(T)$. Entonces p es principal si y solo si la topología lógica y la topología métrica coinciden en p.*

Demostración. Primero, supongamos que p es principal. Como la topología de la métrica es más fina que la topología de la lógica, basta probar que para todo $m > 0$, $B_{\frac{1}{m}}(p)$ contiene una vecindad lógica de p. Por el teorema 1.3, $p(\mathcal{M})$ es definible en $\mathcal{M}$ sobre $\emptyset$. Luego usando el lema 1.6, existen $\{\varphi_m^{\mathcal{M}}(x)\}_{m\in\mathbb{N}}$ y $\{\delta_m\}_{m\in\mathbb{N}}$, tales que $\varphi_m = 0 \in p$, y dado $q \in S_n(T), \varphi_m \leq \delta_m \in q$ entonces $d(q,p) \leq \frac{1}{m}$. Fije $m \in \mathbb{N}$, y defina $[\varphi_m < \delta_m]$ una vecindad abierta de p en la topología de lógica. Por lo tanto,

$$[\varphi_m < \delta_m] \subseteq B_{\frac{1}{m}}(p).$$

$\square$

2. Teoría de Fraïssé.

2.1. Teoría de Fraïssé para estructuras discretas.

La teoría de Fraïssé fue propuesta por el matemático francés Rolan Fraïssé, esta estudia las $\mathcal{L}$-estructuras fuertemente ω-homogéneas donde $\mathcal{L}$ es un lenguaje relacional. Lo sorprendente de estos elementos es la posibilidad de construir una $\mathcal{L}$-estructura contable fuertemente ω-homogénea D a partir de $\mathcal{L}$-estructuras finitas. En esta sección seguimos la presentación de la teoría de Fraïssé de [3]. También presentamos el ejemplo del grafo aleatorio de [3] y [4].

2.1.1. Clases de Fraïssé.

Definición 2.1. Sea $\mathcal{L} = \{\{R_i\}_{i\in I},\ \{f_j\}_{j\in J},\ \{c_k\}_{k\in K}\}$ un lenguaje contable, entonces $\mathcal{M} = (M, \{R_i\}_{i\in\mathbb{N}}, \{f_i\}_{i\in\mathbb{N}})$ es una $\mathcal{L}$-estructura si $M \neq 0$, $R_i^{\mathcal{M}} \subseteq M^{n_i}$ y $f_i^{\mathcal{M}} : M^{m_j} \to M$ donde n_i es la aridad de R_i y m_j es la aridad de f_j.

Para definir una clase de Fraïssé de $\mathcal{L}$-estructuras, es necesario introducir las siguientes propiedades. Sea K una familia de $\mathcal{L}$-estructuras. Decimos que K tiene:

- Propiedad hereditaria (HP): Si $A \in K$ y $B \subseteq A$, entonces existe $B' \in K$ tal que $B \sim B'$.
- Propiedad de Inmersión Conjunta: Sean $A, B \in K$, entonces existe $C \in K$ tales que existen inmersiones elementales de A y B en C.
- Propiedad de Amalgamación: Sean A, B y C en K tal que existen $f : A \to B$ y $g : A \to C$ inmersiones elementales. Entonces, existen $D \in K$, $h : B \to D$ y $l : C \to D$ inmersiones elementales tales que $hf = lg$.

Definición 2.2. Una clase K de $\mathcal{L}$-estructuras finitamente generadas es una clase de Fraïssé si y solo si cumple con la propiedad hereditaria y las propiedades de inmersión conjunta y de amalgamación.

Definición 2.3. Sea D un $\mathcal{L}$ estructura fuertemente ω-homogenea, definimos la edad de D como la clase de estructuras finitas B tal que existe una subestructura finita A de D con A isomorfa a B.

Es claro ver que la edad de cualquier $\mathcal{L}$-estructura tiene la propiedad hereditaria y de inmersión conjunta. Más aún, la edad de una $\mathcal{L}$-estructura ω-homogenea y contable tiene la propiedad de amalgamación, implicando que es una clase de Fraïssé.

Definición 2.4. Una estructura D es débilmente homogenea si para A y B estructuras finitamente generadas de D, $A \subseteq B$ y $f : A \to D$ una inmersión, entonces existe una inmersión $g : B \to D$ que extiende a f.

Teorema 2.5. *Sea K un clase contable de $\mathcal{L}$-estructuras finitas, luego si K satisface la propiedad hereditaria y de inmersión conjunta entonces K es la edad de alguna $\mathcal{L}$-estructura D contable.*

Demostración. Primero sea $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una enumeración de K. Construimos de forma recursiva una cadena $(B_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{L}$-estructuras. Como base tomamos $B_0 = A_0$. Para el caso i-ésimo, suponiendo que ya se tiene B_i definimos B_{i+1} de la siguiente manera: Como K cumple la propiedad de inmersión conjunta existen $B'_{i+1} \in K$ e inmersiones de A_{i+1} y B_i en B'_{i+1}. Luego por la propiedad hereditaria, tome B_{i+1} isomorfo a B'_{i+1} y que extiende a B_i.
Finalmente, tomamos $C = \cup_{i\in\mathbb{N}} B_i$ que es una $\mathcal{L}$-estructura contable. Por construcción, cada estructura en K tiene una inmersión en C. Concluimos que K es la edad de C. □

Teorema 2.6. ***(Teorema de Fraïssé)*** *Sea K una clase de $\mathcal{L}$-estructuras finitas. Si K satisface la propiedad hereditaria, de inmersión conjunta y de amalgamación, entonces existe una única $\mathcal{L}$-estructura contable D tal que la Edad$(D) = K$ y D es fuertemente homogenea.*

Demostración. Primero mostremos la unicidad de D. Esta se da a partir de los siguientes lemas,

Lema 2.7. *Sean C y D $\mathcal{L}$-estructuras contables, si Edad(C) $\subseteq$Edad(D) y D es débilmente homogenea. Entonces existe una inmersión de C a D.*

Demostración. La idea es construir una sucesión de inmersiones $\{f_n\}_{n<\omega}$ de subestructuras finitamente generadas A_n de C en D. Sean A_0 una subestructura finitamente generada de C y $f_0 : A_0 \to D$ una inmersión. Como C es contable, podemos construir una cadena $\{A_n\}_{n<\omega}$ de subestructuras finitamente generadas tales que $C = \cup_{n<\omega} A_n$. Por inducción definimos la cadena creciente de inmersiones $\{f_n\}_{n<\omega}$. Para el caso $n+1$, como Edad(C) $\subseteq$Edad(D) entonces existe un isomorfismo $g : A_{n+1} \to B$ donde B es una subestructura finitamente generada de D. Luego, $f_n \cdot g^{-1}$ es una inmersión de $g(A_n)$ en D. Como D es débilmente homogenea $f_n \cdot g^{-1}$ se extiende a una inmersión $h : B \to D$. Entonces, se define $f_{n+1} : A_{n+1} \to D$ como hg, por lo tanto $f_n \subseteq f_{n+1}$. Finalmente, definimos $f : C \to D$ la inmersión dada por $\cup_{n<\omega} f_n$. □

Tenemos que la unicidad se sigue del siguiente lema,

Lema 2.8. *Sean C y D $\mathcal{L}$-estructuras contables,*

1. *Si Edad(C)=Edad(D) y tanto C como D son débilmente homogéneas, entonces C es isomorfa a D.*

2. *Una estructura contable es fuertemente homogenea si y solo si es débilmente homogenea.*

Demostración. Como C y D $\mathcal{L}$-estructuras contables tenemos que existen $\{C_n\}_{n<\omega}$ y $\{D_n\}_{n<\omega}$ cadenas de subestructuras finitamente generadas tales que $C = \cup_{n<\omega} C_n$ y $D = \cup_{n<\omega} D_n$. Definimos la cadena $\{f_n\}_{n<\omega}$ de isomorfismos entre las subestructuras finitamente generadas de C y D tales que para cada $n < \omega$, $\mathrm{dom}(f_{2n}) \subseteq C_n$ y $\mathrm{dom}(f_{2n+1}) \subseteq D_n$. Siguiendo la prueba del lema 2.7, tenemos que $f = \cup_{n<\omega} f_n$ es un isomorfismo de C en D. $\square$

Ahora para la existencia basta con siguiente lema,

Lema 2.9. *Sean J un conjunto de $\mathcal{L}$-estructuras finitamente generadas, y $(D_i)_{i<\alpha}$ una cadena de $\mathcal{L}$-estructuras. Si para cada $i < \alpha$ tenemos que Edad$(D_i) \subseteq J$, entonces $\bigcup_{i<\alpha} D_i \subseteq J$. Y si para cada $i < \alpha$, Edad$(D_i) = J$, entonces Edad$(\cup_{i<\alpha} D_i) = J$.*

La prueba del lema se puede encontrar en [3]. Ahora probemos la existencia usando el lema anterior. Si K tiene las propiedades de HP, JEP y Amalgamación, y suponemos sin pérdida de generalidad que K es cerrado modulo isomorfismo. Construimos la cadena $(D_i)_{i<\omega}$ de estructuras en K tal que si A y B están K con $A \subseteq B$, y existe $f : A \to D_i$ para algún $i < \omega$. Entonces existe $j > i$ y una inmersión $g : B \to D_j$ que extiende a f.
Tomando $D = \bigcup_{i<\omega} D_i$ tenemos por el lema anterior y por la propiedad de inmersión conjunta que $\mathrm{Edad}(D) = K$.
Para construir la cadena $(D_i)_{i<\omega}$, tome P el conjunto de pares (A, B) tales que $A,\ B \in K$ y $A \subseteq B$. Luego, defina la biyección $\phi : \times\omega \to \omega$ tal que $\phi(i, j) \geq i$ para todo $i,\ j \in \mathbb{N}$. Primero, tome D_0 cualquier elemento en K. Por inducción, al haber escogido D_k se enumera $(f_{kj}, A_{kj}, B_{kj})_{j<\omega}$ donde $(A_{kj}, B_{kj}) \in P$y $f_{kj} : A \to D_k$. Y defina a partir de la propiedad de amalgamación D_{k+1} tal que $k = \phi(i, j)$ y f_{ij} extiende la inmersión de B_{ij} en D_{k+1}. $\square$

2.2. Teoría de Fraïssé para estructuras métricas.

Es posible construir de forma similar una teoría de Fraïssé para estructuras métricas por medio de isometrías aproximadas. Para esto seguimos el artículo [1] en el cual se definen propiedades análogas a la propiedad hereditaria, de amalgamación y se definen nuevas propiedades como la propiedad de Continuidad y la propiedad polaca para generar un límite de Fraïssé en estructuras métricas.

Definición 2.10. Sean X, Y y Z espacios métricos. Tenemos que $\psi : X \times Y \to [0, \infty]$ es una isometría aproximada si para todo $x_1,\ x_2 \in X$ y $y_1,\ y_2 \in Y$, tenemos,

$$\psi(x_1, y) \leq d(x_1, x_2) + \psi(x_2, y)$$
$$\psi(x_1, y_1) \leq d(y_1, y_2) + \psi(x_1, y_2)$$

Además, definimos la composición entre dos isometrías aproximadas $\psi : X \times Y \to [0, \infty]$ y $\varphi : Y \times Z \to [0, \infty]$ como $\varphi\psi : X \times Z \to [0, \infty]$,

$$\varphi\psi(x, z) = \inf_{y \in Y} \psi(x, y) + \varphi(y, z).$$

Definición 2.11. Sean X y Y espacios métricos, definimos $\mathrm{Ap}_X(X, Y)$ como el espacio de isometrías aproximadas de X a Y con la topología inducida de $[0, \infty]^{X \times Y}$.

Ahora definiremos los equivalentes de la edad y de las propiedades: hereditaria y de amalgamación.

Definición 2.12. La edad $\mathrm{Edad}(A)$ de una $\mathcal{L}$-estructura A, es la clase de todas las estructuras finitamente generadas B tal que existe una inmersión de B en A.

Definición 2.13. Sea K un clase de estructuras finitamente generadas,

1. Propiedad hereditaria: K tiene la propiedad hereditaria si para todo $A \in K$ se tiene $\mathrm{Edad}(A) \subseteq K$.
2. Propiedad de amalgamación aproximada: K tiene la propiedad de amalgamación aproximada si para todo $A,\ B \in K$, todo isomorfismo parcial $f : A \to B$ y $\epsilon \geq 0$, existen $C \in K$, $g : A \to C$ y $h : B \to C$ inmersiones tales que para todo $a \in \mathrm{dom} f$,
$$d(g(a), hf(a)) \leq \epsilon.$$
3. Propiedad de amalgamación exacta: K tiene la propiedad de amalgamación exacta si se cumple la propiedad de amalgamación aproximada para $\epsilon = 0$.

Definición 2.14. Sea K una clase de estructuras finitamente generadas con la propiedad de Amalgamación. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos en K_n la pseudo distancia d^K tal que

$$d^K(a, b) = \inf_{\psi in Apx_K(a,b)} \{\max_i \{\psi(a_i, b_i)\}\}.$$

Si sabemos que M es el límite de Fraïssé de la clase (y en nuestros ejemplos el límite es claro). Entonces, d^K corresponde a la distancia en el espacio de n-tipos.

Definición 2.15. Sea K un clase de estructuras finitamente generadas, tenemos que K es una clase de Fraïssé métrica si cumple con las siguientes propiedades:

1. Propiedad hereditaria.
2. Propiedad de inmersión conjunta.

3. Propiedad de amalgamación aproximada.

4. Propiedad polaca: la pseudo-distancia d^K es separable y completa en K_n para cada $n \in \mathbb{N}$.

5. Propiedad de continuidad: Todo símbolo lógico es continuo en K.

Definición 2.16. Sea K una clase de Fraïssé métrica. $\mathcal{M}$ es el límite de Fraïssé de K si $\text{Edad}(\mathcal{M}) = K$, $\mathcal{M}$ es una estructura separable y ultrahomogenea.

Lema 2.17. *Toda clase de Fraïssé K tiene un límite de Fraïssé.*

Demostración. La prueba del lema se puede encontrar en [1]. □

3. Algunos ejemplos de leyes Cero Uno.

3.1. El grafo aleatorio: un ejemplo de ley cero uno en lógica de primer orden.

Un ejemplo interesante de una ley 0-1 en lógica de primer orden es el Grafo Aleatorio. Este fue definido por primera vez por Erdos y Rényi en 1963.

Sea $\mathcal{L} = \{R\}$, donde R es un símbolo de relación binario. Una $\mathcal{L}$-estructura $(X, R(X^2))$ es un grafo si $R(X^2)$ es antireflexiva y simétrica. Llamamos a X el conjunto de vértices, y decimos que el par (x, y) es una arista si se tiene $R(x, y)$. Estas propiedades se pueden axiomatizar a través de las sentencias $\forall x \neg R(x, x)$ y $\forall x \forall y R(x, y) \to R(y, x)$.

Teorema 3.1. *Sea K la clase de todos los grafos finitos. Entonces K es una clase de Fraïssé.*

Demostración. Basta ver que K cumple la propiedad hereditaria, la propiedad de inmersión conjunta y la propiedad de amalgamación.
Primero veamos la propiedad hereditaria: Tome $A \in K$ un grafo finito y B una subestructura de A. Entonces, B es un subgrafo finito de A. Es claro que B es un grafo finito y por lo tanto $B \in K$.
Para probar la propiedad de inmersión conjunta tome A y B dos grafos finitos disjuntos y defina $C := A \cup B$ con la estructura de grafo inducida. Es claro que existen inmersiones elementales de A y B en C.
Finalmente probemos la propiedad de amalgamación. Sean A, B y C en K tales que existen inmersiones elementales $f : A \to B$ y $g : A \to C$, sin perdida de generalidad B y C son disjuntos sobre A. Defina $D := B \cup C$ con la estructura de grafo inducida, existen inmersiones elementales de B y C en D que completan el diagrama. $\square$

Así, K es una clase de Fraïse, por lo tanto tiene un límite de Fraïssé G que llamamos Grafo Aleatorio. Este último es una estructura universal, ω-categórica, ultahomogenea y además pseudofinita.

Teorema 3.2. *Sea A un grafo contable, las siguientes afirmaciones son equivalentes,*

- *A es el grafo aleatorio G.*
- *Sean $X = \{x_1, .., x_n\}$ y $Y = \{y_1, ..., y_m\}$ subconjuntos finitos disjuntos de vértices en A; entonces existe $z \notin X \cup Y$ satisface,*

$$[\bigwedge_{i=1}^{n} (x_i R z)] \wedge [\bigwedge_{j=1}^{m} \neg(y_j R z)].$$

Demostración. Sean X y Y grafos finitos disjuntos con vértices en A. Entonces existe Z un grafo finito tal que sus vértices corresponden con los vértices de $X \cup Y$ y un vértice adicional z donde z se relaciona con todos los elementos de X y no se relaciona con ningún elemento de Y. Como A es el limité de Fraïssé de la clase de grafos finitos, tenemos que existe una inmersión $f : Z \to A$. □

Entonces vamos a tener que la teoría del grafo aleatorio se puede axiomatizar al añadirle a la teoría de grafos el siguiente esquema de sentencias $\{\psi_n | n \in \mathbb{N}\}$,

$$\psi_n := \forall x_1 ... \forall x_n \forall y_1 ... \forall y_n \big(\bigwedge_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=1}^{n} x_i \neq y_j \to \exists z \bigwedge_{i=1}^{n} (R(x_i, z) \wedge \neg R(y_i, z)\big).$$

La teoría T del grafo aleatorio revela información asintótica sobre los grafos finitos. Sea G_N el conjunto de grafos finitos con N vértices módulo isomorfismo, y considere la medida de probabilidad p_N sobre G_N con distribución uniforme. Luego, para ψ_n una sentencia en $\mathcal{L}$ la probabilidad de que un elemento A de G_N satisfaga ψ_n es

$$p_N(\psi_n) = \frac{|\{A \in G_N : A \models \psi_n\}|}{|G_N|}.$$

Teorema 3.3.

$$\lim_{N\to\infty} p_N(\psi_n) = 1.$$

Demostración. Probemos que $\lim_{N\to\infty} p_N(\neg\psi_n) = 0$. Sea G un grafo de tamaño N, y fijemos $x_1, ..., x_n$ y $y_1, ..., y_n$. Sea $\{z_k\}_{k=1,..,N-2n}$ con $z_k \neq x_1, .., x_n, y_1, ..., y_n$, entonces existen $\frac{1}{2^{2n}}$ posibilidades que $z_k R x_i$ $\forall i = 1, ..., n$ y $z_k R y_j$ $\forall j = 1, ..., n$. Entonces la probabilidad que ninguno de los posibles $\{z_k\}_{k=1,..,N-2n}$ tenga la conexión correcta con $x_1, .., x_n, y_1, ..., y_n$ es de $(1 - \frac{1}{2^{2n}})^{N-2n}$.

Por otro lado, existen $\frac{N!}{(N-2n)!}$ formas de escoger $\{x_1, .., x_n, y_1, .., y_n\} \subseteq G$ y cada una tiene probabilidad $(1 - \frac{1}{2^{2n}})^{N-2n}$ de que exista $z \in G$ tal que $x_i R z$ y $y_i R z$ para todo $i = 1, .., n$. Finalmente tenemos,

$$p_N(\neg\psi_n) = \frac{N!}{(N-2n)!}(1 - \frac{1}{2^{2n}})^{N-2n}$$
$$\implies \lim_{N\to\infty} p_N(\neg\psi_n) = \lim_{N\to\infty} \frac{N!}{(N-2n)!}(1 - \frac{1}{2^{2n}})^{N-2n} = 0$$

□

Así, es posible definir una ley Cero-Uno sobre el grafo aleatorio: para toda sentencia φ en L tenemos que $\lim_{N\to\infty} p_N(\varphi) = 0$ o $\lim_{N\to\infty} p_N(\varphi) = 1$. Más aún, T es axiomatizable por el conjunto $\{\varphi : \lim_{N\to\infty} p_N(\varphi) = 1\}$.

3.2. Ley cero uno sobre espacios de Hilbert.

Definición 3.4. Un preespacio de Hilbert H sobre $\mathbb{R}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ con un producto interno $\langle\ ,\rangle$. Así, para todo par $r, s \in \mathbb{R}$ y x, y y $z \in H$ se cumple,

$$1.\ \langle rx + sy, z\rangle = r\langle x, z\rangle + s\langle y, z\rangle$$
$$2.\ \langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$$
$$3.\ \text{Si } x \neq 0,\ \text{entonces } \langle x, x\rangle \in (0, \infty)$$

Dado este producto interno es posible construir una norma en H a través de la fórmula $||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$, y esto a su vez induce una métrica $d(x, y) = ||x - y||$. Definimos la estructura de un preespacio de Hilbert como,

$$\mathcal{M}(H) := \{(B_n(H))_{n\in\mathbb{N}}, 0, (I_{mn})_{m>n}, (\Delta_r)_{r\in\mathbb{R}}, +, -, \langle\ ,\rangle)$$

donde para cada $n \in \mathbb{N}$, $B_n(H) = \{x \in H|\ ||x|| \leq n\}$, $I_{mn} : B_n \to B_m$ la inclusión, y Δ_r es la multiplicación escalar por $r \in \mathbb{R}$.

Definición 3.5. Un espacio de Hilbert es un preespacio de Hilbert completo.

Las propiedades anteriores nos dan el conjunto de axiomas para los espacios de Hilbert que notamos como EH. Existen espacios de Hilbert de dimensión finita y de dimensión infinita. Para el primer caso, tenemos que si $\dim(H) = n$, entonces H es isomorfo a $\mathbb{R}^n$. Sea $\mathcal{C}$ la clase de espacios de Hilbert con dimensión finita.

Lema 3.6. *La clase $\mathcal{C}$ es una clase de Fraïsse.*

Demostración. Basta ver que $\mathcal{C}$ cumple las siguientes propiedades,

1. Propiedad hereditaria: Si $H \in \mathcal{C}$ y $H' \subseteq H$, como H' es una subestructura de H, en particular es un espacio de Hilbert de dimensión finita, y por lo tanto esta en $\mathcal{C}$.

2. Propiedad de Inmersión Conjunta: Sean $H_1, H_2 \in \mathcal{C}$ y tome $m = \max\{\dim(H_1), \dim(H_2)\}$. Luego, existe una inmersión de H_1 y H_2 en H_3 espacio de Hilbert de dimensión m.

3. Propiedad de amalgamación para estructuras métricas: Sean H_1, H_2 y H_3 en $\mathcal{C}$ tales que existen $f : H_1 \to H_2$ y $g : H_1 \to H_3$ inmersiones elementales. Entonces vamos a tener que las inmersiones son exactas, se tienen $H_2' = H_1^{\perp}$ en H_2 y $H_3' = H_1^{\perp}$ tales que $H_2 = H_1 \oplus H_2'$ y $H_3 = H_1 \oplus H_3'$. Luego, tome $H_4 = H_1 \oplus H_2' \oplus H_3'$, entonces existen inmersiones $h : B \to D$ y $l : C \to D$ tales que $hf = lg$.

4. Propiedad polaca: Se sigue por el hecho que el espacio de tipos de un espacio de Hilbert con dimensión contable es completo y separable.

5. Propiedad de continuidad: Es claro que la suma, la resta y el producto punto son uniformemente continuas en los espacios de Hilbert.

□

Concluimos que la clase de espacios de Hilbert con dimensión finita es una clase de Fraïssé, por lo tanto existe $\mathcal{H}$ el límite de Fraïssé de esta clase. Es claro que el límite de Fraïssé de esta clase tiene dimensión $\aleph_0$. Sea $\mathcal{H}_n$ el único espacio de Hilbert de dimensión n, y considere el esquema de sentencias,

$$\varphi_k := \exists x_1 ... \exists x_k [\big(\bigwedge_{i=1}^{k} \|x_i\| = 1\big) \wedge \big(\bigwedge_{i=1}^{k} \bigwedge_{j\neq i} < x_i, x_j >= 0\big)].$$

Así, para todo $N \geq k$, $\mathcal{H}_N \models \phi_k$. Ahora, considere la medida de probabilidad p_N sobre $\mathcal{H}_N$. La probabilidad que $\mathcal{H}_N$ satisfaga φ_k para $N \geq k$ es $p_N(\varphi_k) = 1$ y la probabilidad para $N < k$ es $p_N(\varphi_k) = 0$. Lo anterior nos permite definir directamente una ley cero uno sobre los espacios de Hilbert de dimensión finita,

$$\lim_{N\to\infty} p_N(\varphi_k) = 1.$$

Teorema 3.7. *Dado un espacio de Hilbert H con dimensión infinita es posible axiomatizar $Th(H)$ a partir de EH y el esquema de sentencias $\{\phi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Esta teoría se denota EHI.*

Teorema 3.8. *Si $\varphi = 0$ un sentencia que se deduce a partir de EHI. Entonces para todo $\epsilon > 0$ se tiene,*

$$\lim_{N\to\infty} p_N(\varphi \leq \epsilon) = 1.$$

Demostración. Supongamos que $\varphi = 0$ es una sentencia que se deduce de EHI, es decir $EHI \vdash \varphi = 0$. Sea $\epsilon > 0$ tenemos que $EHI \cup \{\varphi \geq \epsilon\}$ es inconsistente. Por el teorema de compacidad en lógica continua tenemos que existen sentencias $\theta_1, ..., \theta_n \in EHI$ tales que $\{\theta_1, ..., \theta_n\} \cup \{\varphi \geq \epsilon\}$ es inconsistente. Entonces,

$$\{\theta_1, ..., \theta_n\} \vdash \varphi \leq \epsilon.$$

Concluimos que para todo $\epsilon > 0$ se tiene,

$$\lim_{N\to\infty} p_N(\varphi \leq \epsilon) = 1.$$

□

3.3. Ley cero uno sobre álgebras medibles.

Definición 3.9. Un álgebra booleana es una familia de conjuntos $\mathcal{B} \subseteq P(C)$, que es cerrado bajo intersecciones, uniones y complementos.

Un álgebra medible (A, μ) es un álgebra booleana A dotada de una medida de probabilidad μ que es finitamente aditiva. Consideremos el vocabulario $\mathcal{L} = \{\cup, \cap, \cdot^c, \emptyset, \mu\}$, un álgebra medible la interpretamos como una $\mathcal{L}$-estructura donde los símbolos se entienden de forma natural.

Para a y b en A definimos la relación $\sim$ dada por $a \sim b$ si y solo si $\mu(a \triangle b) = 0$.

Lema 3.10. *Para a, b y c en A tenemos que*

$$a \triangle c \subseteq a \triangle b \cup b \triangle c.$$

Demostración.

$$\begin{aligned} a \triangle c &= a \backslash c \cup a \backslash c \\ &= [(a \cap b) \cup (a \cap b^c) \backslash c] \cup [(c \cap b) \cup (c \cap b^c) \backslash a] \\ &= [(a \cap b) \backslash c] \cup [(a \cap b^c) \backslash c] \cup [(c \cap b) \backslash a] \cup [(c \cap b^c) \backslash a] \\ &\subseteq (b \backslash c) \cup (b^c \backslash c) \cup (b \backslash a) \cup (b^c \backslash a) \\ &= (b \triangle c) \cup (b \triangle c). \end{aligned}$$

□

Lema 3.11. *Para a, a', b y b' en A tenemos que,*

1. $(a \cup b) \triangle (a' \triangle b') \subseteq (a \triangle a') \cup (b \triangle b')$
2. $(a \cap a') \triangle (b \cap b') \subseteq (a \triangle a') \cup (b \triangle b')$
3. $a^c \triangle b^c = a \triangle b$

Demostración. Sean a, a', b y b' en A,

1. En el caso de la unión tenemos,

$$\begin{aligned} (a \cup b) \triangle (a' \cup b') &= [(a \cup b) \backslash (a' \cup b')] \cup [(a' \cup b') \backslash (a \cup b)] \\ &\subseteq (a \backslash (a' \cup b')) \cup (b \backslash (a' \cup b')) \cup (a' \backslash (a \cup b)) \cup (b' \backslash (a \cup b)) \\ &\subseteq (a \triangle a') \cup (b \triangle b'). \end{aligned}$$

2. Para la intersección,

$$(a \cap b)\triangle(a' \cap b') = [(a \cap b)\backslash(a' \cap b')] \cup [(a' \cap b')\backslash(a \cap b)] \subseteq (a\triangle a') \cup (b\triangle b')$$

3. Para el complemento tenemos,

$$a^c\triangle b^c = a^c\backslash b^c \cup b^c\backslash a^c = b\backslash a \cup a\backslash b = a\triangle b$$

□

Lema 3.12. *La relación $\sim$ es una relación de equivalencia.*

Demostración. Sea $a \in A$. Tenemos que $\mu(a\triangle a) = \mu(\emptyset) = 0$ luego $a \sim a$, y $\sim$ es reflexiva. Sean a y b en A tales que $a \sim b$, es decir, $\mu(a\triangle b) = 0$. Dado que $a\triangle b = b\triangle a$, es claro que $b \sim a$ y por lo tanto $\sim$ es simétrica.
Veamos que $\sim$ es transitiva. Sean a, b y c en A tales que $a \sim b$ y $a \sim c$, luego $\mu(a\triangle b) = 0$ y $\mu(b\triangle c) = 0$. Entonces, por el lema 3.9,

$$\mu(a\triangle c) \leq \mu(b\triangle b) + \mu(b\triangle c) = 0.$$

Concluimos que $\sim$ es una relación de equivalencia. □

Esta relación de equivalencia nos permite definir un espacio métrico en el cociente. Sea $d : A/\sim \times A/\sim \to \mathbb{R}$ definida por,

$$d([a], [b]) = \mu(a\triangle b).$$

La función d esta bien definida pues dados $a \sim a'$ y $b \sim b'$ tenemos,

$$\mu(a\triangle b) = \mu(a'\triangle b').$$

Lema 3.13. *El espacio $(A/\sim, d)$ es un espacio métrico.*

Demostración. Primero, si $d([a], [b]) = 0$, por definición de la métrica $\mu(a\triangle b) = 0$ por lo tanto $a \sim b$ lo que implica $[a] = [b]$.
Además, tenemos que $d([a], [b]) = \mu(a\triangle b) = \mu(b\triangle a) = d([b], [a])$, concluimos que d es simétrica.

Finalmente, veamos que d cumple con la desigualdad triangular, por el lema 3.9,

$$\begin{aligned} d(a,c) &= \mu(a\triangle c) \\ &\leq \mu(a\backslash b \cup b\backslash b) + \mu(c\backslash b \cup b\backslash c) \\ &= d(a,b) + d(b,c). \end{aligned}$$

Concluimos que $(A/\sim, d)$ es un espacio métrico. $\square$

Teorema 3.14. *El espacio $(A/\sim, d)$ es un espacio métrico completo.*

Demostración. Supongamos que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy. Definamos recursivamente la siguiente sucesión $b_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} a_n$ y $b_k = \bigcup_{n=k}^{\infty} a_n$. Por definición $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente, por lo tanto,

$$b = \bigcap_{k=1}^{\infty} b_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} (\bigcup_{n=k}^{\infty} a_n).$$

Note que la construcción corresponde al $\limsup$ de conjuntos. Además como $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy, entonces para todo $\epsilon > 0$ existe N tal que para todo $m, n > N$,

$$d(a_m, a_n) < \epsilon.$$

Entonces, sin pérdida de generalidad tome $m \geq n > N$ tenemos,

$$\begin{aligned} d(b, a_n) &= \mu(b\backslash a_n \cup a_n\backslash b) \\ &\leq \mu(b\backslash a_n) + \mu(a_n\backslash b) \\ &\leq \mu(a_m\backslash a_n) + \mu(a_n\backslash a_m) \ \ \text{para m>n} \\ &= d(a_m, a_n) < \epsilon \end{aligned}$$

Y concluimos que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $b \in A$. $\square$

Lema 3.15. *La clase $\mathcal{A}$ de álgebras medibles finitas es una clase de Fraïssé.*

Demostración. Para probar que $\mathcal{A}$ es una clase de Fraïsse de estructuras métricas basta probar que cumple con las siguientes propiedades,

1. Propiedad hereditaria: Sean $A \in \mathcal{A}$ y $B \in \text{Edad}(A)$. Como $B \subseteq A$, si $b \in B$ entonces tenemos que $b^c \in B$ y si $b_1, b_2 \in B$ entonces $b_1 \cup b_2 \in B$ y $b_1 \cap b_2 \in B$. La medida en B es la medida inducida por A, y por lo tanto B es un álgebra medible. Es decir $B \in \mathcal{A}$ entonces $\text{Edad}(A) \subseteq \mathcal{A}$.

2. Propiedad de Inmersión Conjunta: Sean $A, B \in \mathcal{A}$, tales que $A = \{a_1, ..., a_n\}$ y $B = \{b_1, ..., b_m\}$. Definimos $C = A \times B$ con átomos $c_{ij} = (a_i, b_j)$ y $\mu(c_{ij}) = \mu(a_i)\mu(b_j)$.

Entonces existen inmersiones de A y B en C que preservan las medidas.

3. Propiedad de amalgamación para estructuras métricas: Sean A, B y C en $\mathcal{A}$ tales que $A = \{a_1, ..., a_n\}$, $B = \{b_1, ..., b_m\}$, $C = \{c_1, ..., c_k\}$ y existen $f : A \to B$ y $g : A \to C$ inmersiones elementales. Defina D el álgebra medible con átomos d_{jl} para $j = 1, .., k$ y $l = 1, .., m$, tal que,
$$\mu(d_{ij}) = \frac{\mu(c_j)\mu(b_l)}{\mu(a_i)},$$
donde $f(a_i) = b_l$ y $g(a_i) = c_j$. Luego, existen inmersiones $h : C \to D$ y $l : B \to D$ que preservan las medidas y $hf = lg$.

4. Propiedad polaca: Se sigue por el hecho que el espacio de tipos de un álgebra medible sin átomos es completo y separable.

5. Propiedad de continuidad: Sea $A \in \mathcal{A}$, veamos que las operaciones de unión, intersección y complemento son continuas en las álgebras medibles:

   - La unión es una operación continua: Sean $a_1,\ a_2,\ a_1',\ a_2' \in A$, y $\epsilon > 0$ tales que $d(a_1, a_1') < \frac{\epsilon}{2}$ y $d(a_2, a_2') < \frac{\epsilon}{2}$ entonces tenemos por el lema 3.10,
$$\begin{aligned} d(a_1 \cup a_2, a_1' \cup a_2') &= \mu((a_1 \cup a_2)\triangle(a_1' \cup a_2')) \\ &\leq \mu(a_1 \triangle a_1') + \mu(a_2 \triangle a_2') \\ &\leq 2\frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$
   - La prueba para la continuidad de la intersección es análoga a la prueba de la unión con las mismos módulos de continuidad.
   - El complemento es una operación continua: Sea $\epsilon > 0$ y sean $a_1,\ a_2 \in A$ tales que si $d(a_1, a_2) < \epsilon$ entonces tenemos por el lema 3.10,
$$\begin{aligned} d(a_1^c, a_2^c) &= \mu(a_1^c \triangle a_2^c) \\ &\mu(a_1 \triangle a_2) \\ &= d(a_1, a_2) \\ &< \epsilon. \end{aligned}$$

□

Corolario 3.16. *La clase $\mathcal{A}$ de álgebras medibles finitas tiene un límite de Fraïssé separable, ultrahomogéneo y sin átomos.*

Ahora vamos a construir una ley cero-uno para la teoría de las álgebras medibles separables y sin átomos. Sea $\mathcal{A}_n$ el conjunto de álgebras medibles con n átomos. Sea A un elemento de

$\mathcal{A}_n$ y sean $a_1, .., a_n$ sus átomos. Sin pérdida de generalidad podemos tomar $\mu(a_1) \leq \mu(a_2) \leq ... \leq \mu(a_n)$. La clase $\mathcal{A}_n$ puede representarse en el plano como el subconjunto convexo: $x_1 + x_2 + ... + x_n = 1$ con $x_1 \leq ... \leq x_n$, por lo tanto podremos asignarle a $\mathcal{A}_n$ la medida de Lebesgue que vamos a denotar por m.

Para construir una ley cero uno sobre las álgebras medibles vamos a estudiar que tan probable es tener un átomo de medida mayor o igual a $\frac{1}{l}$ para $l \in \mathbb{N}^+$. Entonces, para cada $l \in \mathbb{N}^+$ tomamos φ^l la $\mathcal{L}$-sentencia definida por

$$\varphi_l := \exists a[(\forall b\ [\mu(a \cap b) = 0 \vee \mu(a \cap b) = \mu(a)]) \wedge (\mu(a) < \frac{1}{l})].$$

Y defina,

$$\mathcal{B}_{n,l} := \{B \in \mathcal{A}_n,\ \text{tal que } B \models \varphi_l\}.$$

Ahora, utilizando la medida de Lebesgue m sobre $\mathcal{A}_n$, la probabilidad del evento de satisfacer φ^l es,

$$p_n(\varphi_l) = \frac{m(\mathcal{B}_{n,l})}{m(\mathcal{A}_n)}.$$

Nuestro objetivo es probar,

Teorema 3.17.

$$\lim_{n \to \infty} p_n(\varphi_l) = \lim_{n \to \infty} \frac{m(\mathcal{B}_{n,l})}{m(\mathcal{A}_n)} = 0.$$

Esto nos permitirá definir una ley Cero-Uno sobre las álgebras medibles, es decir para toda sentencia ϕ en $\mathcal{L}$ tenemos que $\lim_{n\to\infty} p_n(\phi) = 0$ o $\lim_{n\to\infty} p_n(\phi) = 1$.

Primero veamos algunos ejemplos explícitos:
Primero sea $l = 2$, B es un álgebra medible con átomos a_1 y a_2. Tomando la restricción m de la medida de Lebesgue en $[0, 1]^2$, es fácil ver que,

$$m(\{B \in \mathcal{A}_2 \text{ tal que } B \models \varphi_2\}) = 1.$$

Ahora sea B es un álgebra medible con tres átomos a_1, a_2 y a_3, tales que $\mu(a_1) \leq \mu(a_2) \leq \mu(a_3)$.
Así, podemos asociar a $\mathcal{A}_3$el conjunto conexo definido por los puntos $(0, 0, 1)$, $(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ y

$(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, por lo tanto,

$$\begin{aligned} m(\mathcal{A}_3) &= \frac{1}{2}\left\|(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \times (0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\right\| \\ &= \frac{1}{2}\left\|\det\begin{bmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\right\| \\ &= \frac{1}{2}\left\|(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6})\right\| = \frac{\sqrt{3}}{12} \end{aligned}$$

Ahora consideremos las posibles configuraciones para $\mu(a_1), \mu(a_2)$ y $\mu(a_3)$ con $\mu(a_1) \leq \mu(a_2) \leq \mu(a_3)$ y $\mu(a_3) \geq \frac{1}{2}$. En este caso, defina

$$\mathcal{B}_{3,2} = \{B \in \mathcal{A}_3 \text{ tal que } B \models \varphi_2\}.$$

Luego, podemos asociarle a $\mathcal{B}_{3,2}$ el conjunto conexo definido por los puntos $(0, 0, 1)$, $(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ y $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2})$. Por lo tanto, $m(\mathcal{B}_{3,2})$ corresponde a medio paralelogramo definido por $u = (-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ y $v = (0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, luego,

$$\begin{aligned} m(\mathcal{B}_{3,2}) &= \frac{1}{2}\left\|u \times v\right\| \\ &= \frac{1}{2}\left\|\det\begin{bmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\right\| \\ &= \frac{1}{2}\left\|(\frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8})\right\| = \frac{\sqrt{3}}{16} \end{aligned}$$

Finalmente, la probabilidad del evento de satisfacer φ_2 es,

$$p_3(\varphi_3^2) = \frac{m(\mathcal{B}_{3,2})}{m(\mathcal{A}_3)} = \frac{3}{4}.$$

Es claro que podemos asociarle a $\mathcal{A}_n$ el conjunto conexo definido por los siguientes vectores,

$$\begin{aligned} &\vec{w_0} = (1, 0, 0..., 0) \\ &\vec{w_1} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, ..., 0) \\ &\dots \\ &\vec{w_n} = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, ..., \frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \end{aligned}$$

Luego, definimos,

$$
\begin{aligned}
\vec{u_1} &= w_0 - w_1 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, ..., 0) \\
\vec{u_2} &= w_0 - w_2 = (\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 0, ..., 0) \\
&\dots \\
\vec{u_{n-1}} &= w_0 - w_n = (\frac{n-1}{n}, ..., -\frac{1}{n}, -\frac{1}{n})
\end{aligned}
$$

Así,

$$
m(\mathcal{A}_n) = \frac{1}{n!}\left\| \det \begin{bmatrix} \vec{i_1} & \vec{i_2} & \vec{i_3} & ... & \vec{i_{n-1}} & \vec{i_n} \\ \frac{n-1}{n} & -\frac{1}{n} & ... & -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} \\ \frac{n-2}{n-1} & -\frac{1}{n-1} & ... & -\frac{1}{n-1} & -\frac{1}{n-1} & 0 \\ . & . & & . & . & \\ . & . & & . & . & \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4}... & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & ... & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & ... & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\|
$$

$$
= \frac{1}{n!}\left\| \vec{i_1} \det \begin{bmatrix} -\frac{1}{n} & ... & -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n-1} & ... & -\frac{1}{n-1} & -\frac{1}{n-1} & 0 \\ . & & . & . & \\ . & & . & . & \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & ... & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & ... & 0 & 0 \end{bmatrix} + .. + (-1)^{n+1}\vec{i_n} \det \begin{bmatrix} \frac{n-1}{n} & -\frac{1}{n} & ... & -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} \\ \frac{n-2}{n-1} & -\frac{1}{n-1} & ... & -\frac{1}{n-1} & -\frac{1}{n-1} \\ . & . & & . & \\ . & . & & . & \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & ... & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & ... & 0 \end{bmatrix} \right\|
$$

Para cada $k = 2, .., n$ tenemos que las matrices tienen el mismo patrón,

$$
\vec{i_k} \det \begin{bmatrix} \frac{n-1}{n} & -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & ... & -\frac{1}{n} & ... & -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} \\ \frac{n-2}{n-1} & -\frac{1}{n-1} & ... & & ... & -\frac{1}{n-1} & -\frac{1}{n-1} & -\frac{1}{n-1} & 0 \\ . & . & & . & . & & & & \\ \frac{k}{k+1} & -\frac{1}{k+1} & -\frac{1}{k+1} & -\frac{1}{k+1} & ... & -\frac{1}{k+1} & -\frac{1}{k+1} & 0... & 0 \\ \frac{k-1}{k} & -\frac{1}{k} & -\frac{1}{k} & -\frac{1}{k} & ... & -\frac{1}{k} & 0 & ... & 0 \\ \frac{k}{k-1} & -\frac{1}{k-1} & -\frac{1}{k-1} & -\frac{1}{k-1} & ... & -\frac{1}{k-1} & 0 & ... & 0 \\ . & . & & . & . & & & & \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & ... & 0 & . & . & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & & ... & 0 & . & . & 0 \end{bmatrix}
$$

Ahora tenemos que triangularizar esta matriz, para esto sumamos la primera columna a la segunda y obtenemos,

$$\vec{i_k}\det\begin{bmatrix} \frac{n-1}{n} & \frac{n-2}{n} & -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & ... & -\frac{1}{n} & ... & -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} \\ \frac{n-2}{n-1} & \frac{n-3}{n-1} & ... & & ... & -\frac{1}{n-1} & -\frac{1}{n-1} & -\frac{1}{n-1} & 0 \\ . & . & & . & . & & & & \\ \frac{k}{k+1} & \frac{k}{k+1} & -\frac{1}{k+1} & -\frac{1}{k+1} & ... & -\frac{1}{k+1} & -\frac{1}{k+1} & 0... & 0 \\ \frac{k-1}{k} & \frac{k-2}{k} & -\frac{1}{k} & -\frac{1}{k} & ... & -\frac{1}{k} & 0 & ... & 0 \\ \frac{k}{k-1} & \frac{k-1}{k-1} & -\frac{1}{k-1} & -\frac{1}{k-1} & ... & -\frac{1}{k-1} & 0 & ... & 0 \\ . & . & & . & . & & & & \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & ... & 0 & . & . & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & & ... & 0 & . & . & 0 \end{bmatrix}$$

Después sumamos la segunda columna a la tercera y al repetir este proceso k veces obtenemos la matriz triangular superior D con entradas diagonales $D_{ii} = \frac{1}{i}$ para $i \leq k$ y $D_{ii} = -\frac{1}{i}$ para $k < i \leq n-1$, entonces,

$$\vec{i_k}\det\begin{bmatrix} \frac{n-1}{n} & -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & ... & -\frac{1}{n} & ... & -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} \\ \frac{n-2}{n-1} & -\frac{1}{n-1} & ... & & ... & -\frac{1}{n-1} & -\frac{1}{n-1} & -\frac{1}{n-1} & 0 \\ . & . & & . & . & & & & \\ \frac{k+1}{k+2} & -\frac{1}{k+2} & -\frac{1}{k+2} & -\frac{1}{k+2} & ... & -\frac{1}{k+2} & -\frac{1}{k+2} & 0... & 0 \\ \frac{k+1}{k} & -\frac{1}{k} & -\frac{1}{k} & \frac{1}{k} & ... & \frac{1}{k} & 0 & ... & 0 \\ \frac{k-2}{k-1} & -\frac{1}{k-1} & -\frac{1}{k-1} & -\frac{1}{k-1} & ... & 0 & 0 & ... & 0 \\ . & . & & . & . & & & & \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & ... & 0 & . & . & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & & ... & 0 & . & . & 0 \end{bmatrix}$$
$$=(-1)^{n-k}\frac{1}{n!}.$$

Entonces,

$$m(\mathcal{A}_n) = \frac{1}{2}\left\|(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}\vec{i_1} + (-1)^{n-2}\frac{1}{n!}\vec{i_2} + ... + \frac{1}{n!}\vec{i_n}\right\| = \frac{\sqrt{n}}{2n!}.$$

Consideremos el caso $l = 2$, entonces tenemos la sentencia

$$\varphi_2 := \exists a[(\forall b\ [\mu(a \cap b) = 0 \vee \mu(a \cap b) = \mu(a)]) \wedge (\mu(a) < \frac{1}{2})].$$

Por definición de $\mathcal{B}_{n,2}$ es claro que está delimitado por los siguientes vectores:

$$
\begin{aligned}
&\vec{v_0} = (1, 0, 0..., 0)\\
&\vec{v_1} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, ..., 0)\\
&\vec{v_2} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 0, ..., 0)\\
&\dots\\
&\vec{v_n} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2(n-1)}, ..., \frac{1}{2(n-1)}, \frac{1}{2(n-1)})
\end{aligned}
$$

Luego, $m(\mathcal{B}_{n,2})$ esta definido por los siguientes vectores,

$$
\begin{aligned}
&\vec{x_1} = v_0 - v_1 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, ..., 0)\\
&\vec{x_2} = v_0 - v_2 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, 0, ..., 0)\\
&\vec{x_3} = v_0 - v_3(\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, 0, ..., 0)\\
&\dots\\
&\vec{x_{n-1}} = v_0 - v_n = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2(n-1)}, ..., -\frac{1}{2(n-1)}, -\frac{1}{2(n-1)})
\end{aligned}
$$

Entonces,

$$
\begin{aligned}
m(\mathcal{B}_{n,2}) &= \frac{1}{2}\left\|\det\begin{bmatrix}
\vec{i_1} & \vec{i_2} & \vec{i_3} & ... & \vec{i_{n-1}} & \vec{i_n}\\
\frac{1}{2} & -\frac{1}{2(n-1)} & ... & -\frac{1}{2(n-1)} & -\frac{1}{2(n-1)} & -\frac{1}{2(n-1)}\\
\frac{1}{2} & -\frac{1}{2(n-2)} & ... & -\frac{1}{2(n-2)} & -\frac{1}{2(n-2)} & 0\\
. & . & & . & . & \\
. & . & & . & . & \\
\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6}... & 0 & 0\\
\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0... & 0 & 0\\
\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & ... & 0 & 0
\end{bmatrix}\right\|\\
&= \frac{1}{2}\left\|(-1)^{n-1}\frac{1}{2^{n-1}n!}\vec{i_1} + (-1)^{n-2}\frac{1}{2^{n-1}n!}\vec{i_2} + ... + \frac{1}{2^{n-1}n!}\vec{i_n}\right\|\\
&= \sqrt{n}\frac{1}{2^n \cdot (n-1)!}.
\end{aligned}
$$

Así, la probabilidad del evento de satisfacer φ_n^2 es,

$$
p_n(\varphi_2) = \frac{m(\mathcal{B}_{n,2})}{m(\mathcal{A}_n)} = \frac{2 \cdot n!}{2^n \cdot (n-1)!} = n(\frac{1}{2})^{n-1}.
$$

Note que para el caso $n = 2$ obtenemos el resultado esperado,

$$p_2(\varphi_2) = \frac{m(\mathcal{B}_{2,2})}{m(\mathcal{A}_2)} = 2(\frac{1}{2})^1 = 1.$$

Y para el caso $n = 3$,

$$p_3(\varphi_2) = \frac{m(\mathcal{B}_{3,2})}{m(\mathcal{A}_3)} = 3(\frac{1}{2})^2 = \frac{3}{4}.$$

Finalmente, si enviamos $n \to \infty$ obtenemos el resultado esperado,

$$\lim_{n\to\infty} p_n(\varphi_n^2) = \lim_{n\to\infty} n(\frac{1}{2})^{n-2} = 0.$$

Consideremos el caso $l = 3$, es decir tomamos,

$$\mathcal{B}_{n,3} := \{B \in \mathcal{A}_n \; B \models \varphi_3\}.$$

De nuevo podemos asociarle a $\mathcal{B}_{n,3}$ el conjunto conexo definido por los siguientes vectores:

$$\begin{aligned}
\vec{v_0} &= (1, 0, 0..., 0)\\
\vec{v_1} &= (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, ..., 0)\\
\vec{v_2} &= (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, ..., 0)\\
&\ldots\\
\vec{v_n} &= (\frac{1}{3}, \frac{2}{3(n-1)}, ..., \frac{2}{3(n-1)}, \frac{2}{3(n-1)})
\end{aligned}$$

Luego, $m(\mathcal{B}_{n,3})$ corresponde a la mitad del área del paralelogramo definido por

$$\begin{aligned}
\vec{u_1} &= v_0 - v_1 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, ..., 0)\\
\vec{u_2} &= v_0 - v_2 = (\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 0, ..., 0)\\
\vec{u_3} &= v_0 - v_3 = (\frac{2}{3}, -\frac{2}{9}, -\frac{2}{9}, -\frac{2}{9}, 0, ..., 0)\\
&\ldots\\
\vec{u_{n-1}} &= v_0 - v_n = (\frac{2}{3}, -\frac{2}{3(n-1)}, ..., -\frac{2}{3(n-1)}, -\frac{2}{3(n-1)})
\end{aligned}$$

Entonces,

$$
\begin{aligned}
m(\mathcal{B}_{n,3}) &= \frac{1}{2}\left\| \det \begin{bmatrix}
\vec{i_1} & \vec{i_2} & \vec{i_3} & ... & \vec{i_{n-1}} & \vec{i_n} \\
\frac{2}{3} & -\frac{2}{3(n-1)} & ... & -\frac{2}{3(n-1)} & -\frac{2}{3(n-1)} & -\frac{2}{3(n-1)} \\
\frac{2}{3} & -\frac{2}{3(n-2)} & ... & -\frac{2}{3(n-2)} & -\frac{2}{3(n-2)} & 0 \\
. & . & & . & . & \\
. & . & & . & . & \\
\frac{2}{3} & -\frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & -\frac{2}{9}... & 0 & 0 \\
\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0... & 0 & 0 \\
\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & ... & 0 & 0
\end{bmatrix} \right\| \\
&= \frac{1}{2}\left\| (-1)^{n-1}\frac{2^{n-1}}{3^{n-1}(n-1)!}\vec{i_1} + (-1)^{n-2}\frac{2^{n-1}}{3^{n-1}(n-1)!}\vec{i_2} + ... + \frac{2^{n-1}}{3^{n-1}(n-1)!}\vec{i_n} \right\| \\
&= \sqrt{n}\frac{2^{n-2}}{3^{n-1}(n-1)!}.
\end{aligned}
$$

Luego,

$$p_n(\varphi_3) = \frac{m(\mathcal{B}_{n,3})}{m(\mathcal{A}_n)} = \frac{1}{2n!}\frac{2^{n-2}}{3^{n-1}(n-1)!} = \frac{n}{9}(\frac{2}{3})^{n-2}.$$

Finalmente, si enviamos $n \to \infty$ obtenemos el resultado esperado,

$$\lim_{n\to\infty} p_n(\varphi_3) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{9}(\frac{2}{3})^{n-2} = 0.$$

Ahora si fijamos $l \in \mathbb{N}$ con $l < n$, vamos a tener que,

$$p_n(\varphi_l) = \frac{m(\mathcal{B}_{n,l})}{(A_n)} = \frac{n}{l^2}(\frac{l-1}{l})^{n-2}.$$

Si enviamos n a infinito tenemos

$$\lim_{n\to\infty} p_n(\varphi_n^l) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{l^2}(\frac{l-1}{l})^{n-2} = 0.$$

Finalmente, podemos definir una ley cero uno sobre las álgebras medibles,

$$\lim_{n\to\infty} p_n(\varphi_l) = 0.$$

Podemos concluir,

Teorema 3.18. *Sea $\psi = 0$ un sentencia que se deduce a partir de la teoría Γ de las álgebras medibles sin átomos. Entonces para todo $\epsilon > 0$ se tiene,*

$$\lim_{n\to\infty} p_n(\psi \leq \epsilon) = 1.$$

Demostración. Supongamos que $\varphi = 0$ es una sentencia que se deduce de Γ, es decir $\Gamma \vdash \varphi = 0$. Sea $\epsilon > 0$ tenemos que $\Gamma \cup \{\varphi \geq \epsilon\}$ es inconsistente. Por el teorema de compacidad en lógica continua tenemos que existen sentencias $\theta_1, ..., \theta_n \in \Gamma$ tales que $\{\theta_1, ..., \theta_n\} \cup \{\varphi \geq \epsilon\}$ es inconsistente. Entonces,

$$\{\theta_1, ..., \theta_n\} \vdash \varphi \leq \epsilon.$$

Concluimos que para todo $\epsilon > 0$ se tiene,

$$\lim_{n \to \infty} p_n(\varphi \leq \epsilon) = 1.$$

$\square$

Referencias

[1] Itaï Ben Yaacov. Fraïssé limits of metric structures. 2012.

[2] Alexander Berenstein; Itaïi Ben Yaacov; C. Ward Henson; Alexander Usvyatsov. *Model theory for metric structures*. Cambridge University Press, 2008.

[3] David Marker. *Model theory: An Introduction*. Springer, 2000.

[4] Joshua Horowitz. Zero-one laws, random graphs, and fraïssé limits. 2008.