

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES

TRABAJO DE GRADO

Pseudofinitud y medibilidad de la teoría de los
grafos acíclicos infinito-regulares

Melissa Robles Carmona

Asesor: Darío García

Coasesor: Alexander Berenstein



Bogotá, Colombia

2021

Agradecimientos

Quiero agradecer a todos los que me acompañaron durante este proceso, especialmente a mis papás, mi abuela, mi hermano, mi novio y mis amigos. También quiero agradecer a todos mis profesores, en particular a Darío García, a Alexander Berenstein y a Germán Gómez, por haber hecho parte de mi formación matemática.

Índice general

Introducción	1
1. Preliminares	5
1.1. La teoría del Grafo Aleatorio y las teorías T_r y T_∞	5
1.2. Eliminación de cuantificadores	7
1.3. Rango de Morley	11
1.4. Estabilidad y ω -estabilidad	16
1.5. Clausuras algebraicas	18
2. Estructuras pseudofinitas	21
2.1. Estructuras pseudofinitas	21
2.2. Pseudofinitud de la teoría RG	24
2.3. Pseudofinitud de las teorías T_r y T_∞	27
3. Medidas en estructuras pseudofinitas	31
3.1. Medidas en estructuras pseudofinitas	31
3.2. Medibilidad de cardinalidades pseudofinitas para conjuntos definibles	32
4. Clases asintóticas	41
4.1. Clases asintóticas	41
4.2. Clases multidimensionales asintóticas	44

Introducción

En las últimas décadas, debido al ingente crecimiento del número de datos que se manejan, la teoría de grafos se ha convertido en una de las ramas más importantes de las matemáticas modernas. Aún así, su importancia no reside únicamente en su amplia aplicación a otras áreas como la informática, la química y la biología, sino también en la capacidad que tienen los grafos de representar cualquier estructura matemática. Un ejemplo de esto son los grafos de Cayley, los cuales codifican la estructura abstracta de un grupo a partir de un conjunto de generadores.

La teoría de modelos es un área que proporciona diferentes métodos para estudiar estructuras infinitas. Entre las herramientas modelo-teóricas más importantes se encuentran la estabilidad, el estudio del rango de Morley y la pseudofinitud. Estos métodos también pueden usarse para obtener propiedades combinatorias de familias de grafos, gracias a la construcción de ultraproducto y al teorema de Łoś que proporciona un principio de transferencia entre familias de estructuras y sus ultraproductos.

En términos generales, una estructura es pseudofinita si es elementalmente equivalente a un ultraproducto de estructuras finitas. Por lo tanto, podemos utilizar argumentos infinitarios sobre el ultraproducto para probar propiedades en las estructuras finitas, pero también podemos utilizar propiedades de las estructuras finitas para obtener propiedades modelo-teóricas en sus ultraproductos.

El primer ejemplo que se encuentra de un grafo pseudofinito es el llamado *Grafo Aleatorio*, que se puede ver de tres maneras diferentes. En primer lugar, es el ultraproducto de los grafos de Paley definidos en campos finitos. En segundo lugar, es la versión límite del modelo probabilístico $\mathbb{G}(n, p)$ de Erdős, en el cual se tiene un grafo con n vértices y se asignan aristas aleatoriamente con probabilidad p . Finalmente, es el único grafo contable que satisface los axiomas \mathcal{A}_n : para cualesquiera vértices distintos $v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_n$ existe un vértice u que está relacionado con todos los v_i y no está relacionado con ningún w_j .

Cualquier ultraproducto infinito de árboles finitos será un árbol pseudofinito, y en particular todos estos árboles pseudofinitos van a tener vértices de grado 1, también llamados hojas. En contraste con esto, no todo árbol infinito es pseudofinito. Por ejemplo, en [3] se mostró que el árbol infinito con raíz y 3-ramificado (RT_3) no puede ser pseudofinito. Aún así, es posible encontrar

árboles infinitos que no contienen hojas, y entre estos hay dos ejemplos fundamentales: el árbol infinito r -regular y el árbol infinito-regular, cuyas teorías denotamos por T_r y T_∞ respectivamente. En el capítulo 2 de esta tesis mostramos que estos árboles son pseudofinitos, encontrando dos ultraproductos de grafos finitos que son modelos de T_r y T_∞ respectivamente.

Una de las razones para estudiar estructuras pseudofinitas es que la medida de conteo en una clase de estructuras finitas induce nociones de dimensión y medida en sus ultraproductos. En este sentido, cada subconjunto definible X de un ultraproducto de estructuras finitas $M = \prod_{\mathcal{U}} M_i$ tiene una *cardinalidad no-estándar* $|X|$, que es un número en la ultrapotencia $\mathbb{R}^{\mathcal{U}}$ de los números reales. En general, no se puede dar una caracterización de cuáles son las posibles cardinalidades infinitas que pueden encontrarse en estos ultraproductos, pero existen algunos casos en los que se pueden dar descripciones explícitas sobre las cardinalidades de conjuntos definibles de manera uniforme sobre los parámetros que definen el conjunto, y este es el caso de las llamadas *estructuras medibles*.

Entre los ejemplos más importantes de estructuras medibles se encuentran los ultraproductos de *clases asintóticas*. Estas fueron definidas por Macpherson y Steinhorn en [7] y son clases de estructuras finitas en un mismo lenguaje \mathcal{L} con restricciones fuertes sobre las cardinalidades de los subconjuntos definibles. Este concepto se generaliza luego con las clases multidimensionales asintóticas, que extienden el concepto de control sobre estas cardinalidades.

El principal objetivo de esta tesis es estudiar las principales propiedades modelo-teóricas de las teorías del grafo aleatorio, T_r y T_∞ . En el capítulo 1 mostraremos algunos resultados clásicos en la literatura sobre propiedades modelo-teóricas del grafo aleatorio, de T_r y de T_∞ , mostrando eliminación de cuantificadores para estas teorías (en lenguajes apropiados) y describiendo el rango de Morley para sus conjuntos definibles. En particular, se muestra que T_r es una teoría de rango de Morley 1 para todo $r \in \mathbb{N}$, mientras que T_∞ es una estructura de rango de Morley ω .

En el capítulo 2, se probará que estas teorías son pseudofinitas. Para el grafo aleatorio, se mostrará que todo ultraproducto infinito de grafos de Paley es un modelo de la teoría del grafo aleatorio. Para T_r y T_∞ , utilizaremos una construcción en teoría de grafos denominada “levantamiento” para obtener familias de grafos $\mathcal{C}_r = \{N_k : k \in \mathbb{N}\}$ y $\mathcal{C}_\infty = \{M_k : k \in \mathbb{N}\}$ cuyos ultraproductos infinitos satisfacen las teorías T_r y T_∞ respectivamente.

En el capítulo 3 se dará una caracterización para las cardinalidades de conjuntos definibles en estos ultraproductos. En [9], Pillay demostró que todo conjunto definible de una estructura pseudofinita y fuertemente minimal, es posible medirlo a partir de un polinomio en $\mathbb{Z}[t_1]$. Este es el caso de T_r , porque esta teoría es fuertemente minimal. Para T_∞ es posible utilizar la eliminación de cuantificadores para medir las cardinalidades de conjuntos definibles a partir de polinomios

con coeficientes enteros en dos variables.

En el capítulo 4 se da una demostración de que la clase de grafos de Paley forma una clase asintótica 1-dimensional y se muestra que si todos los ultraproductos infinitos de una clase de estructuras finitas \mathcal{C} son fuertemente minimales entonces \mathcal{C} es una clase 1-dimensional asintótica. Este resultado aplica directamente para la clase \mathcal{C}_r . Además de esto, utilizamos los resultados del capítulo 3 junto con el “Projection Lemma” en [10] para mostrar que la clase \mathcal{C}_∞ es una clase multidimensional asintótica.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se estudiarán las principales propiedades modelo-teóricas de tres teorías: la de los grafos aleatorios, la de los bosques regulares de grado r y la de los bosques infinito-regulares; las cuales denotamos por RG , T_r y T_∞ respectivamente. En particular se darán descripciones de algunas de estas propiedades en términos de propiedades combinatorias de los grafos considerados.

1.1. La teoría del Grafo Aleatorio y las teorías T_r y T_∞

Definición 1.1 (Grafo). Un grafo es un par $G = (V, E)$ donde V es un conjunto de vértices y E es una relación binaria irreflexiva y simétrica. En lógica de primer orden fijamos el lenguaje $\mathcal{L}_g = \{R\}$, que contiene un único símbolo de relación binaria. En un grafo, por lo tanto, la relación se interpreta como $R^G = \{(x, y) \in V^2 : \{x, y\} \in E\}$.

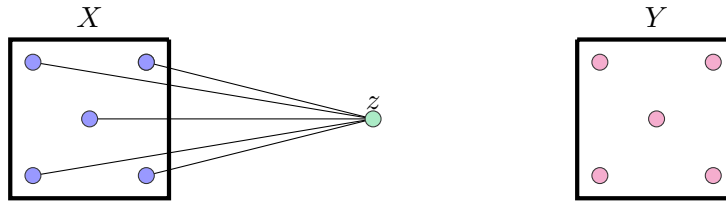
Definición 1.2 (Teoría del grafo aleatorio). La teoría del grafo aleatorio RG está dada por los siguientes axiomas:

$$\text{RG} = \{\forall x, y(xRy \rightarrow yRx)\} \cup \{\forall x \neg(xRx)\} \cup \{\mathcal{A}_r : r \geq 1\},$$

donde las sentencias \mathcal{A}_r para $r \geq 1$ se definen como

$$\mathcal{A}_r = \forall x_1, \dots, x_r \forall y_1, \dots, y_r \left(\bigwedge_{1 \leq i, j \leq r} \neg(x_i = y_j) \rightarrow \exists z \left(\bigwedge_{1 \leq i \leq r} x_i Rz \wedge \neg y_i Rz \wedge \neg(y_i = z) \right) \right).$$

Es decir, para cada par de conjuntos finitos y disjuntos de vértices, existe un vértice que está conectado con todos los vértices del primer conjunto y no está conectado con ninguno de los vértices del segundo.

FIGURA 1.1: Interpretación de la sentencia \mathcal{A}_5 .

Definición 1.3 (Árbol de ramificación finita). Para cada $r \geq 1$, la teoría del árbol regular de ramificación finita T_r está dada por los siguientes conjuntos de axiomas:

1. Tiene infinitos vértices:

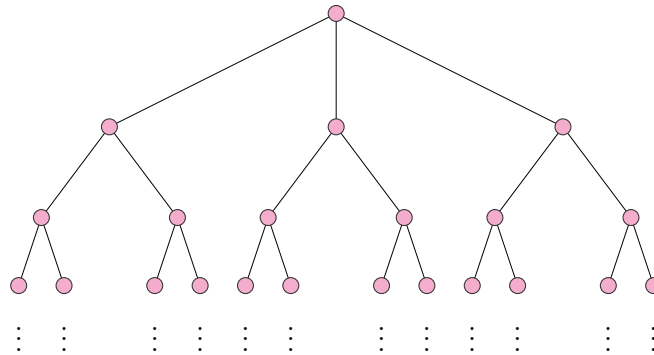
$$\left\{ \exists x_1, \dots, x_n \left(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} x_i \neq x_j \right) : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

2. Cada vértice es de grado r :

$$\left\{ \forall y \exists x_1, \dots, x_r \left(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq r} x_i \neq x_j \wedge \bigwedge_{i=1}^r y R x_i \wedge \forall z \left(z R y \rightarrow \bigvee_{i=1}^r z = x_i \right) \right) \right\}.$$

3. No hay ciclos:

$$\left\{ \forall x_1, \dots, x_n \neg \left(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} x_i \neq x_j \wedge \bigwedge_{i=1}^{n-1} x_i R x_{i+1} \wedge x_n R x_1 \right) : n \geq 3 \right\}.$$

FIGURA 1.2: Ejemplo de un modelo de T_3 .

Definición 1.4 (Árbol de ramificación infinita). La teoría del árbol de ramificación infinita T_∞ está dada por los mismos conjuntos de axiomas que T_r , cambiando (2) por el esquema:

2'. Cada vértice tiene grado infinito:

$$\left\{ \forall y \exists x_1, \dots, x_n \left(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} x_i \neq x_j \wedge \bigwedge_{i=1}^n y R x_i \right) : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Observación 1.5. Como todo modelo \mathcal{M} de T_r o de T_∞ es un grafo sin ciclos, entonces para todo par de vértices $a, b \in M$, existe a lo sumo un camino entre ellos.

1.2. Eliminación de cuantificadores

Al estudiar una teoría T es importante caracterizar los conjuntos definibles de sus modelos. Esto se dificulta particularmente cuando consideramos fórmulas con cuantificadores, pues estas pueden tomar formas muy complejas. Sin embargo, para algunas teorías - aquellas con eliminación de cuantificadores - este análisis se facilita porque basta con entender los conjuntos definidos por fórmulas básicas, ya que cualquier otro conjunto definible será una combinación booleana de estos. Más específicamente, todo conjunto definible en un modelo \mathcal{M} de una teoría T con eliminación de cuantificadores está determinado por una fórmula de la forma

$$\varphi(\bar{x}, \bar{a}) \equiv \bigvee_{i=1}^n \bigwedge_{j=1}^{m_i} \tau_{ij}(\bar{x}, \bar{a})$$

para algún $\bar{a} \in M^k$, donde los $\tau_{ij}(\bar{x}, \bar{a})$ son fórmulas básicas.

Definición 1.6 (Eliminación de cuantificadores). Una teoría T en un lenguaje \mathcal{L} tiene eliminación de cuantificadores si toda \mathcal{L} -fórmula es equivalente módulo T a una \mathcal{L} -fórmula sin cuantificadores. De forma equivalente, una teoría tiene eliminación de cuantificadores si toda fórmula existencial primitiva es equivalente módulo T a una fórmula libre de cuantificadores.

Teorema 1.7. Sea T una teoría consistente, entonces las siguientes son equivalentes:

1. T tiene eliminación de cuantificadores.
2. Si \mathcal{M} y \mathcal{N} son dos modelos de T y $f : \mathcal{A} = \langle a_1, \dots, a_n \rangle \rightarrow \langle b_1, \dots, b_n \rangle = \mathcal{B}$ es un \mathcal{L} -isomorfismo de dos estructuras finitamente generadas \mathcal{A} y \mathcal{B} de \mathcal{M} y \mathcal{N} respectivamente con $f(a_i) = b_i$, entonces para todo $d \in M$ existe una extensión elemental $\mathcal{N} \prec \mathcal{N}'$ y una \mathcal{L} -inmersión $g : \langle \mathcal{A}, d \rangle \rightarrow \mathcal{N}'$ que extiende a f .

Demostración. La prueba del teorema se puede encontrar en [4], Theorem 8.4.1. □

Observación 1.8. Si \mathcal{M} es una \mathcal{L} -estructura y $A \subseteq M$, entonces $\langle A \rangle$ representa a la \mathcal{L} -subestructura más pequeña de \mathcal{M} que contiene al conjunto A . Si \mathcal{L} es un lenguaje relacional y T es una \mathcal{L} -teoría, entonces para todo modelo \mathcal{M} de T y elementos $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{M}$, se tiene que $\langle a_1, \dots, a_n \rangle = \{a_1, \dots, a_n\}$.

Teorema 1.9. *La teoría RG tiene eliminación de cuantificadores sobre el lenguaje \mathcal{L}_g .*

Demostración. Sean \mathcal{M} y \mathcal{N} modelos de RG y $f : \mathcal{A} = \langle a_1, \dots, a_n \rangle \rightarrow \langle b_1, \dots, b_n \rangle = \mathcal{B}$ un \mathcal{L} -isomorfismo entre subestructuras finitamente generadas de \mathcal{M} y \mathcal{N} respectivamente. Sea $d \in \mathcal{M}$, supongamos que $d \notin \mathcal{A}$ pues de lo contrario podemos tomar $g = f$ y terminamos. Sea $U = \{a_{i_1}, \dots, a_{i_m}\} \subseteq \{a_1, \dots, a_n\}$ tal que para todo $a_{i_j} \in U$, $\mathcal{M} \models a_{i_j} R d$ y para todo $a_j \notin U$, $\mathcal{M} \models \neg a_j R d$. Como \mathcal{N} es un modelo de RG, existe un $e \in \mathcal{N}$ relacionado con todos los elementos de $f(U)$ y no relacionado con todos los elementos de $f(U^c)$. Así, podemos definir una función $g : \langle \mathcal{A}, d \rangle \rightarrow \langle \mathcal{B}, e \rangle$ que extiende a f y que cumple $g(d) = e$. Tenemos que $\langle \mathcal{A}, d \rangle \cong \langle \mathcal{B}, e \rangle$ mediante una extensión de f y por el teorema 1.7, esto implica que RG tiene eliminación de cuantificadores. \square

Las teorías T_r y T_∞ no tienen eliminación de cuantificadores en el lenguaje de la teoría de grafos \mathcal{L}_g , pero podemos dar una expansión explícita del lenguaje con la cual se obtiene la eliminación de cuantificadores. El lenguaje que utilizaremos para estas dos teorías T_r y T_∞ será $\mathcal{L}'_g = \{D_n : n \geq 0\}$ donde cada D_n es una relación binaria definida como

$$D_n(x, y) \Leftrightarrow \text{“La distancia entre } x \text{ y } y \text{ es igual a } n\text{.”}$$

$$\Leftrightarrow \exists z_0, \dots, z_n \left(\bigwedge_{0 \leq i < j \leq n} z_i \neq z_j \wedge z_0 = x \wedge z_n = y \wedge \bigwedge_{0 \leq i < n} (z_i R z_{i+1}) \right) \wedge$$

$$\bigwedge_{k=0}^{n-1} \neg \left(\exists z_0, \dots, z_k \left(\bigwedge_{0 \leq i < j \leq k} z_i \neq z_j \wedge z_0 = x \wedge z_k = y \wedge \bigwedge_{0 \leq i < k} (z_i R z_{i+1}) \right) \right).$$

Es decir, existe un camino de longitud n entre x y y y no existe un camino de menor longitud. Con base en este nuevo lenguaje \mathcal{L}'_g , podemos definir la distancia entre dos puntos de cualquier \mathcal{L}'_g -estructura.

Definición 1.10 (Distancia). Si \mathcal{M} es una \mathcal{L}'_g -estructura y $a, b \in M$, entonces definimos la *distancia* entre a y b como

$$\text{dist}(a, b) = \begin{cases} N & \text{si } \mathcal{M} \models D_N(a, b), \\ \infty & \text{si para todo } N \in \mathbb{N}, \mathcal{M} \models \neg D_N(a, b). \end{cases}$$

Definición 1.11 (Camino). Si \mathcal{M} es una \mathcal{L}'_g -estructura, decimos que una sucesión finita (v_1, v_2, \dots, v_n) de vértices distintos de \mathcal{M} es un *camino* si para todo $i < n$ se cumple que

$$\mathcal{M} \models D_1(v_i, v_{i+1}).$$

Para poder mostrar la eliminación de cuantificadores para T_∞ y T_r en este lenguaje, es importante entender un poco más a fondo la estructura de los modelos de estas teorías. El concepto de *clausura convexa* se utilizará a lo largo del documento.

Definición 1.12 (Clausura convexa). Sea \mathcal{M} un modelo de T_r o de T_∞ y $a_1, \dots, a_n \in M$. Definimos $\text{conv}(\{a_1, \dots, a_n\})$ como el conjunto de todos los vértices v en los posibles caminos entre cada par a_i y a_j . Por convención, si $\text{dist}(a_i, a_j) = \infty$, entonces $\text{conv}(\{a_i, a_j\}) = \{a_i, a_j\}$.

Observación 1.13. Directamente de la definición podemos notar que para $a_1, \dots, a_n \in M$, se cumple

$$\text{conv}(\{a_1, \dots, a_n\}) = \bigcup_{1 \leq i < j \leq n} \text{conv}(\{a_i, a_j\}).$$

Proposición 1.14. Sea \mathcal{M} un modelo de T_r o de T_∞ y sean $a_1, \dots, a_n, b \in M$ todos a distancia finita. Si $b \notin \text{conv}(\{a_1, \dots, a_n\})$, entonces existe un único elemento $c = c(b, a_1, \dots, a_n)$ tal que:

1. El vértice c pertenece a $\text{conv}(a_1, \dots, a_n)$.
2. Para cada $j \leq n$, el único camino entre b y a_j tiene la forma $b - b_1 - \dots - b_{m_1} - c - c_1^j - \dots - c_{m_j}^j - a_j$ donde $c_1^j, \dots, c_{m_j}^j \in \text{conv}(\{a_1, \dots, a_n\})$.

Demostración. Sean $i, j \in \{1, \dots, n\}$ y sean

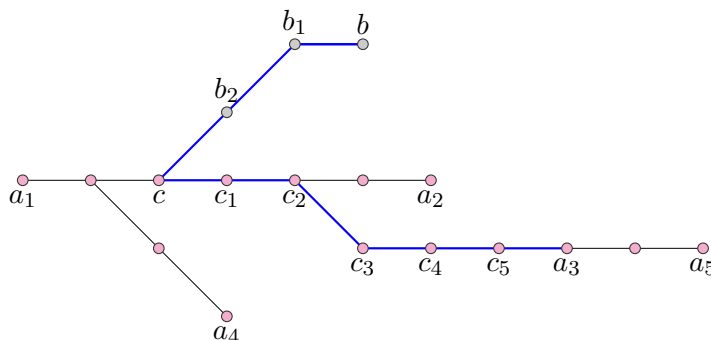
$$\begin{aligned} b - b_1 - \dots - b_{s_1} - c^j - c_1^j - \dots - c_{s_2}^j - a_j \\ b - b_1 - \dots - b_{t_1} - c^i - c_1^i - \dots - c_{t_2}^i - a_i \end{aligned}$$

los caminos únicos entre b y a_i, a_j respectivamente, donde c^i y c^j son los primeros vértices en los caminos que pertenecen a $\text{conv}(\{a_1, \dots, a_n\})$. Si $c^i \neq c^j$, entonces es posible construir un ciclo contenido en

$$b - \dots - c^i - \dots - c^j - \dots - b.$$

Como \mathcal{M} es un modelo de T_r y de T_∞ , en particular no puede contener un ciclo, por lo tanto para todo i, j se tiene $c^i = c^j = c$, y se concluye la afirmación. \square

Veamos un ejemplo con $n = 5$. Encontramos el camino entre b y a_3 :¹



Teorema 1.15. La teoría de T_∞ en el lenguaje \mathcal{L}'_g tiene eliminación de cuantificadores.

¹En la figura los vértices en rosado representan los elementos de la clausura convexa de $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$.

Demostración. Sean \mathcal{M} y \mathcal{N} como antes, $f : \mathcal{A} = \langle a_1, \dots, a_n \rangle \rightarrow \langle b_1, \dots, b_n \rangle = \mathcal{B}$ un \mathcal{L}'_g -isomorfismo parcial con $f(a_i) = b_i$ para todo i . Sea $d \in \mathcal{M}$, si $d = a_i$ para algún i , podemos tomar $g = f$ como la extensión deseada, luego supongamos que $d \notin \mathcal{A}$. Sea $U = \{a_{i_1}, \dots, a_{i_k}\} \subseteq \{a_1, \dots, a_n\}$ tal que para todo $a_{ij} \in U$, $\text{dist}(a_{ij}, d) < \infty$ y para $a_k \in U^c$, $\text{dist}(a_k, d) = \infty$.

- Si $U \neq \emptyset$ tenemos dos casos a considerar: cuando d es un vértice en el camino de algunos de los vértices de U , y cuando esto no ocurre.

- (1) Supongamos que d está en el camino entre dos de los vértices de U , sin pérdida de generalidad a_{i_1} y a_{i_2} ; en particular, $\text{dist}(d, a_{i_1}) + \text{dist}(d, a_{i_2}) = \text{dist}(a_{i_1}, a_{i_2})$. Como f es un isomorfismo parcial, en particular $\text{dist}(a_{i_1}, a_{i_2}) = \text{dist}(b_{i_1}, b_{i_2})$ y podemos tomar e como el elemento de N en el camino único entre b_{i_1} y b_{i_2} tal que

$$\text{dist}(d, a_{i_1}) = \text{dist}(e, b_{i_1}) \quad \text{y} \quad \text{dist}(d, a_{i_2}) = \text{dist}(e, b_{i_2})$$

Notemos que como \mathcal{M} es acíclico, e también mantiene las distancias con el resto de $a_{ij} \in U$. Así, con este elemento e fijo, podemos definir g como antes, y de nuevo obtenemos una \mathcal{L}'_g -sumersión como queríamos.

- (2) Supongamos que d no está en el camino entre dos de los vértices de U . Como además, $d \notin U$, entonces en particular $d \notin \text{conv}(U)$. Por la proposición 1.14, existe un vértice c^d , que es el primer elemento en $\text{conv}(U)$ en el camino único entre d y cualquiera de los $a_{ij} \in U$. Como $c^d \in \text{conv}(U)$ podemos suponer sin pérdida de generalidad que c^d está en el camino entre a_{i_1} y a_{i_2} . Sea $c^e \in N$ un vértice tal que

$$\text{dist}(c^d, a_{i_1}) = \text{dist}(c^e, b_{i_1}) \quad \text{y} \quad \text{dist}(c^d, a_{i_2}) = \text{dist}(c^e, b_{i_2}).$$

Por último, sea $e \in N$ un vértice con $\text{dist}(e, c^e) = \text{dist}(d, c^d)$ tal que el camino entre e y c^e no contiene vértices de $\text{conv}(U)$. Este e existe porque cada vértice tiene grado infinito. De nuevo, con este e fijo, podemos definir g como una extensión de f tal que $g(d) = e$.

- Si $U = \emptyset$: Considere el siguiente conjunto de fórmulas

$$\Sigma(x) := \left\{ \bigwedge_{i=1}^n \neg D_m(x, b_i) : m \in \mathbb{N} \right\}$$

Sea Σ_0 un subconjunto finito de Σ , entonces existe un subconjunto finito de \mathbb{N} , digamos F , tal que $\Sigma_0 = \{ \bigwedge_{i=1}^n \neg D_m(x, b_i) : m \in F \}$. Note que como $U = \emptyset$, d debe pertenecer a una componente conexa diferente que todos los a_i . Sean $\{a_{i_1}, \dots, a_{i_s}\}$ los elementos entre los a_i que están en la componente conexa de a_1 . Como \mathcal{N} es un modelo de T_∞ , existe un e_0 en la componente conexa de b_1 que satisface para todo j y para algún $N_j > \text{máx}(F) + 1$, que $\text{dist}(e_0, b_{i_j}) = N_j$.

Como e_0 realiza Σ_0 , Σ es finitamente satisfactible. Por compacidad, Σ es satisfactible, luego existe una extensión elemental \mathcal{N}' de \mathcal{N} que realiza Σ , es decir, que contiene un vértice que está a distancia infinita de b_i para todo i . Sea e uno de estos elementos, podemos definir $g : \langle \mathcal{A}, d \rangle \rightarrow \mathcal{N}'$ como una extensión de f tal que $g(d) = e$.

□

Teorema 1.16. *La teoría T_r en el lenguaje \mathcal{L}'_g tiene eliminación de cuantificadores*

Demostración. Se hace de manera análoga la demostración del teorema 1.15, con una leve modificación en el caso en el que $U \neq \emptyset$ y d no hace parte de un camino entre dos de los vértices en U . En este caso, como $d \notin \text{conv}(U)$, en particular c^d contiene a lo más $r - 1$ vecinos en $\text{conv}(U)$. Al ser f un isomorfismo parcial, esto implicaría que el vértice que elegimos como c^e también contiene a lo más $r - 1$ vecinos en $\text{conv}(U)$, y por lo tanto aún podemos elegir el elemento e tal que el camino entre c^e y e no contiene elementos en $\text{conv}(U)$.

□

Corolario 1.17. *Las teorías RG , T_r y T_∞ son completas.*

Demostración. Mostraremos en general que si T es una teoría consistente con eliminación de cuantificadores en un lenguaje relacional, entonces T es completa. Note que si T tiene eliminación de cuantificadores, cada sentencia es equivalente a una sentencia sin cuantificadores. Además, como el lenguaje es relacional y no contiene constantes, las únicas sentencias sin cuantificadores son \top y \perp . Así, si σ es una sentencia equivalente a \top , $T \vdash \sigma$, y si es equivalente a \perp , entonces $T \vdash \neg\sigma$.

□

1.3. Rango de Morley

Definición 1.18 (Rango de Morley). Sea \mathcal{M} una \mathcal{L} -estructura y $\varphi(\bar{x})$ una \mathcal{L} -fórmula, se define el rango de Morley inductivamente:

- $RM^{\mathcal{M}}(\varphi) \geq 0$ si y solo si $\varphi(\mathcal{M}) \neq \emptyset$.
- Si α es un ordinal límite, $RM^{\mathcal{M}}(\varphi) \geq \alpha$ si y solo si $RM^{\mathcal{M}}(\varphi) \geq \beta$ para todo ordinal $\beta < \alpha$.
- Si α es un ordinal, $RM^{\mathcal{M}}(\varphi) \geq \alpha + 1$ si y solo si existen contables $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ -fórmulas $\psi_1(\bar{x}), \psi_2(\bar{x}), \dots$ tales que para todo $i, j < \omega$
 1. $\psi_i(\mathcal{M}) \cap \psi_j(\mathcal{M}) = \emptyset$.
 2. $\psi_i(\mathcal{M}) \subset \varphi(\mathcal{M})$.
 3. $RM^{\mathcal{M}}(\psi_i) \geq \alpha$.

Decimos que $RM^{\mathcal{M}}(\varphi) = \alpha$ si $RM^{\mathcal{M}}(\varphi) \geq \alpha$ pero $RM^{\mathcal{M}}(\varphi) < \alpha + 1$. Si $\varphi(\mathcal{M}) = \emptyset$, decimos que $RM^{\mathcal{M}}(\varphi) = -1$, y si para todo ordinal α , $RM^{\mathcal{M}}(\varphi) \geq \alpha$, entonces decimos que

$$RM^{\mathcal{M}}(\varphi) = \infty.$$

En principio esta noción de dimensión dependerá de la estructura que se está analizando. Para poder quitar esta dependencia al modelo y poder trabajar sobre teorías, es suficiente considerar únicamente modelos \aleph_0 -saturados. Resulta que para cada par de modelos \mathcal{M} y \mathcal{N} de una teoría T , si ambos son \aleph_0 -saturados, entonces $RM^{\mathcal{M}}(\varphi) = RM^{\mathcal{N}}(\varphi)$ para toda fórmula φ . De esta forma, se puede hablar del rango de Morley de una teoría como $RM^{\mathcal{M}}(x = x)$ para cualquier $\mathcal{M} \models T$ \aleph_0 -saturado. Por lo tanto, de ahora en adelante se considerarán únicamente modelos \aleph_0 -saturados.

Lema 1.19. *Sean X y Y conjuntos definibles, entonces el rango de Morley cumple*

1. Si $X \neq \emptyset$, entonces $RM(X) = 0$ si y solo si $|X| < \infty$.
2. $RM(X \cup Y) = \max\{RM(X), RM(Y)\}$.
3. Si $X \subseteq Y$, entonces $RM(X) \leq RM(Y)$.

Demostración. La prueba se puede encontrar en [8], lema 6.2.7. □

Teorema 1.20. *La teoría del grafo aleatorio RG tiene rango de Morley infinito.*

Demostración. Sea \mathcal{M} un modelo de RG y $u_1, \dots, u_{m_1}, v_1, \dots, v_{m_2} \in M$. Para esta demostración, probaremos por inducción transfinita que cualquier fórmula de la forma

$$\varphi(x) \equiv \bigwedge_{u \in U} xRu \wedge \bigwedge_{v \in V} \neg xRv \tag{1.1}$$

con $|U|, |V| < \infty$ tales que $U \cup V \neq \emptyset$ y $U \cap V = \emptyset$, tiene rango de Morley infinito.

- Caso base: Como \mathcal{M} es un modelo de RG, entonces existe un $z \in M$ tal que $\mathcal{M} \models zRu$ para todo $u \in U$ y $\mathcal{M} \models \neg zRv$ para todo $v \in V$. Así, $\varphi(\mathcal{M}) \neq \emptyset$, por lo tanto $RM(\varphi) \geq 0$.
- Ordinal límite: Sea α un ordinal límite y supongamos por inducción que $RM(\varphi) \geq \beta$ para $\beta < \alpha$. Por definición, se tiene que $RM(\varphi) \geq \alpha$.
- Ordinal sucesor: Sea α un ordinal y supongamos por inducción que $RM(Y) \geq \alpha$ para cualquier conjunto no vacío definido por una fórmula de la forma mostrada en (1.1). Sean $a_1, a_2, \dots \in M - (U \cup V)$ y sean $Y_1, Y_2, \dots \subset X$ tal que cada Y_i está definido por la fórmula

$$\psi_i(\bar{u}, \bar{v}, a_1, \dots, a_i) \equiv \left(\bigwedge_{u \in U} xRu \wedge xRa_i \right) \wedge \left(\bigwedge_{v \in V} \neg xRv \wedge \bigwedge_{k=1}^{i-1} \neg xRa_k \right)$$

Estos son subconjuntos definibles de $\varphi(\mathcal{M})$ y por hipótesis de inducción cumplen $RM(\psi_i) \geq \alpha$. Así, $RM(\varphi) \geq \alpha + 1$.

□

Teorema 1.21. *La teoría del árbol de ramificación finita T_r tiene rango de Morley 1.*

Demostración. Sea \mathcal{M} un modelo de T_r , $a \in M$ y $n \in \mathbb{N}$. Inicialmente analizaremos el rango de Morley para fórmulas básicas $\varphi(x, a)$ de la forma $D_n(x, a)$ o $\neg D_n(x, a)$. Si $\varphi(x) \equiv D_n(x, a)$ y $X = \varphi(\mathcal{M})$, como cada elemento tiene grado r , $|X| = r(r-1)^{n-1}$ y por lo tanto es finito. Así, $RM(X) = 0$ para este caso. Por otro lado, si $\varphi(x) \equiv \neg D_n(x, a)$ y $Y = \varphi(\mathcal{M})$, como cada elemento tiene grado r , Y es infinito, por lo tanto $RM(Y) \geq 1$. Más aún, por lo analizado previamente, Y es un conjunto cofinito y, por eliminación de cuantificadores, todo subconjunto de Y definible es una intersección de uniones de conjuntos finitos o cofinitos, es decir es finito o cofinito. En particular, como no existen dos conjuntos de este tipo infinitos y disjuntos, entonces $RM(Y) < 2$, por lo que concluimos que $RM(Y) = 1$.

En conclusión, como

$$RM(T_r) = RM(\mathcal{M}) = RM(D_n(\mathcal{M}, a) \cup \neg D_n(\mathcal{M}, a)) = \max\{RM(D_n(\mathcal{M}, a)), RM(\neg D_n(\mathcal{M}, a))\} = 1$$

entonces el rango de Morley de cualquier conjunto definible en una variable debe ser menor o igual que 1, por lo tanto es $-1, 0$ o 1 , dependiendo de si el conjunto es vacío, finito o infinito.

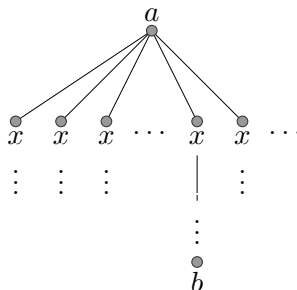
□

Teorema 1.22. *La teoría del árbol de ramificación infinita T_∞ tiene rango de Morley ω . Más aún, para todo $n \in \mathbb{N}$, $RM(D_n(x, a)) = n$.*

Demostración. Sea \mathcal{M} un modelo de T_∞ y $a \in M$. Probaremos la afirmación por inducción fuerte en n .

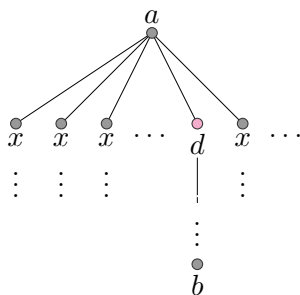
(**n=1**) Sea $X = D_1(\mathcal{M}, a)$. Veamos que todos sus subconjuntos definibles son finitos o cofinitos con respecto a X . Para eso analicemos los casos básicos para los posibles subconjuntos definibles de X :

- $Y \subseteq X$ está definido por $D_1(a, x) \wedge x = b$ o $D_1(a, x) \wedge x \neq b$. En estos casos, $X \setminus Y \in \{\emptyset, \{b\}, X\}$.
- $Y \subseteq X$ está definido por $D_1(a, x) \wedge D_k(b, x)$. Para que Y sea no vacío, debe existir algún $N \in \mathbb{N}$ tal que $\text{dist}(a, b) = N$. En principio, la configuración inicial es la siguiente:

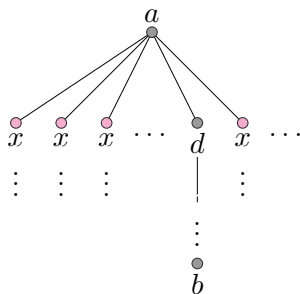


Fijando esto, tenemos únicamente dos posibles valores para k para que $Y \neq \emptyset$: $k = N - 1$ o $k = N + 1$.

Si $k = N - 1$, entonces Y contiene un único elemento d , que es el elemento a distancia $N - 1$ de b en el camino entre a y b .²



Si por otro lado $k = N + 1$, entonces $Y = X \setminus \{d\}$ para un vértice d , pues son todos los elementos de X menos el elemento mencionado anteriormente.

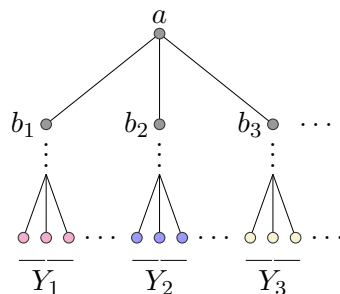


- $Y \subseteq X$ está definido por $D_1(a, x) \wedge \neg D_k(b, x)$. Por el mismo razonamiento anterior, $X \setminus Y \in \{\emptyset, \{d\}, X\}$.

Por eliminación de cuantificadores, todos los subconjuntos definibles de X son, con respecto a X , finitos o cofinitos, entonces no existen dos subconjuntos definibles de X infinitos y disjuntos, por lo tanto $RM(X) < 2$. Como además X es infinito, entonces concluimos que $RM(X) = 1$.

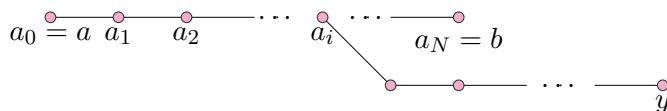
(n+1) Supongamos que $RM(D_k(x, a)) = k$ para todo $k \leq n$ y llamemos $X = D_{n+1}(\mathcal{M}, a)$. Sea $\{b_i\}_{i \in \omega}$ una colección de vértices con $D_1(a, b_i)$ para todo i . A partir de estos, definimos para cada i un $Y_i \subseteq X$ definido por la fórmula $D_n(x, b_i) \wedge D_{n+1}(x, a)$.

²En las ilustraciones, el color rosado representa los vértices en el conjunto Y .

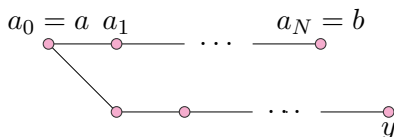


Tenemos que para todo i , $D_n(\mathcal{M}, b_i) = Y_i \cup A_i$ para algún $A_i \subset D_{n-1}(\mathcal{M}, a)$. Por hipótesis de inducción y lema 1.19, $RM(A_i) \leq n - 1$. Por otro lado, por hipótesis, $RM(D_n(\mathcal{M}, b_i)) = n$, luego por el lema 1.19, $RM(Y_i) = n$. Por construcción, los Y_i son disjuntos, por lo tanto podemos concluir que $RM(D_{n+1}(x, a)) \geq n + 1$. Basta entonces mostrar que $RM(D_{n+1}(x, a)) < n + 2$ y para esto se analizarán los posibles subconjuntos definibles y se mostrará que no existen dos disjuntos con rango de Morley $n + 1$.

Consideremos inicialmente $Y \subset X$ definido por la fórmula $D_{n+1}(x, a) \wedge D_k(x, b)$ y de nuevo supongamos que existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $\text{dist}(a, b) = N$, pues de lo contrario Y sería vacío. Por otro lado, si $k < n + 1$, por el lema 1.19 y por hipótesis de inducción $RM(Y) \leq k < n + 1$, por lo tanto supongamos que $k \geq n + 1$ y definimos $a = a_0, a_1, \dots, a_N = b$ el único camino entre a y b . Debe existir un $i \in \{0, 1, \dots, N\}$ tal que se cumpla que para todo $y \in Y$, $D_{n+1-i}(y, a_i)$ como en la siguiente figura:



Notemos que si $i > 0$, entonces $Y \subset D_{n+1-i}(\mathcal{M}, a_i)$, por lo tanto por lema 1.19, $RM(Y) \leq n + 1 - i < n + 1$ por hipótesis de inducción. Supongamos entonces que $i = 0$, luego tenemos la siguiente configuración



Tenemos dos posibilidades para k :

- Si $k < N$, el único elemento posible c en Y va a ser el elemento que está a distancia k de b en el camino único entre a y b , luego Y es vacío o finito.
- Si $k \geq N$ y $k = N + n + 1$, entonces $Y = X$, de lo contrario para otro valor de k , Y es vacío.

Por eliminación de cuantificadores podemos concluir que dos subconjuntos de X con rango de Morley mayor a n solo son finitos o cofinitos con respecto a X , por lo tanto no pueden existir dos de estos que sean disjuntos.

De manera análoga se puede ver que lo mismo ocurre para subconjuntos definidos por $D_{n+1}(x, a) \wedge \neg D_k(x, b)$, $D_{n+1}(x, a) \wedge x = b$ o $D_{n+1}(x, a) \wedge x \neq b$. Concluimos así por eliminación de cuantificadores que $RM(X) = RM(D_{n+1}(x, a)) = n + 1$ como queríamos. □

1.4. Estabilidad y ω -estabilidad

Otra forma de clasificar las teorías es mediante el concepto de *estabilidad*. En términos generales, una teoría es ω -estable si el número de tipos sobre un conjunto a lo sumo enumerable es a lo sumo enumerable.

Definición 1.23. Una \mathcal{L} -teoría T es ω -estable si para todo modelo \mathcal{M} de T , si $A \subseteq M$, se tiene que

$$|A| \leq \aleph_0 \implies |S(A)| \leq \aleph_0,$$

donde $S(A)$ denota el conjunto de 1-tipos sobre A .

Definición 1.24 (Totalmente trascendente). Una teoría T es totalmente trascendente si para todo modelo \mathcal{M} de T , si φ es una $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ -fórmula, entonces $RM(\varphi) < \infty$. Equivalentemente, T es totalmente trascendente si ningún modelo tiene un árbol binario de $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ -fórmulas consistentes.

El siguiente teorema nos da una caracterización de las teorías ω -estables sobre lenguajes contables a partir del rango de Morley.

Teorema 1.25. Si \mathcal{L} es contable, entonces una \mathcal{L} -teoría T es ω -estable si y solo si T es totalmente trascendente.

Demostración. La prueba se puede encontrar en [8], teorema 6.2.14. □

Corolario 1.26. La teoría RG no es ω -estable, mientras que las teorías T_r y T_∞ si lo son.

Otra forma de ver que RG no es ω -estable es tomar un conjunto contable A de un modelo no contable y ω -saturado de RG, digamos

$$A = \{a_1, a_2, \dots\}$$

Como se deben cumplir los axiomas \mathcal{A}_r , entonces para todo subconjunto $S \subseteq A$, existe un elemento z en el modelo que está conectado con todos los elementos de S pero con ninguno de S^c . Luego

$$|S(A)| \geq |\mathcal{P}(\mathbb{N})| > \aleph_0.$$

Definición 1.27 (k -propiedad del orden). Una fórmula $\varphi(x, y)$ tiene la k -propiedad del orden (con respecto a una teoría T) si existe un modelo \mathcal{M} de T y tuplas $\{(a_i, b_i) : i < k\}$ tales que

$$\mathcal{M} \models \varphi(a_i, b_j) \text{ si y solo si } i \leq j.$$

Definición 1.28 (Fórmula estable). Una \mathcal{L} -fórmula $\varphi(x, y)$ es estable si existe un $k \in \omega$ tal que $\varphi(x, y)$ no tiene la k -propiedad del orden.

Definición 1.29 (Teoría estable). Una teoría es estable si todas las fórmulas son estables (con respecto a T).

Definición 1.30 (m -Half graph). El m -Half graph es un grafo bipartito con $2m$ vértices $\{a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_m\}$ tales que $a_i R b_j \iff i \leq j$.

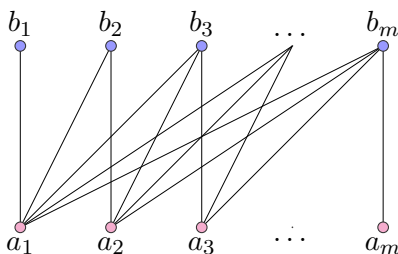


FIGURA 1.3: Representación del m -Half graph.

Proposición 1.31. *La teoría de RG no es estable.*

Demostración. Para esto, probaremos que todo modelo \mathcal{M} de RG contiene a todos los m -Half graph. Sean b_1, b_2, \dots, b_m vértices distintos de \mathcal{M} tal que $\neg b_i R b_j$ para todo $i \neq j$. Defina:

$$U_1 = \{b_1, b_2, \dots, b_m\} \quad V_1 = \emptyset$$

Como \mathcal{M} es un modelo de RG, entonces existe un vértice que llamaremos a_1 tal que $a_1 R b_1, a_1 R b_2, \dots, a_1 R b_m$. De forma análoga, definimos inductivamente para $i \leq m$

$$U_i = \{b_i, \dots, b_m\} \quad V_i = \{a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, b_1, b_2, \dots, b_{i-1}\}$$

Y podemos encontrar un vértice a_i tal que para $j \geq i$, $a_i R b_j$ y $\neg a_i R a_1, \dots, \neg a_i R a_{i-1}, \neg a_i R b_1, \dots, \neg a_i R a_{i-1}$.

Concluimos así que la fórmula $x R y$ tiene la k -propiedad para todo k , por lo tanto RG no es estable. \square

Observación 1.32. Ningún modelo de T_r o de T_∞ contiene a ningún m -Half Graph para $m \geq 3$. Contienen únicamente a H_1 y H_2 pues para $m \geq 3$, H_m contiene ciclos.

De hecho, tanto T_r como T_∞ son teorías estables, y esto lo garantiza el siguiente lema.

Lema 1.33. *Si T es una teoría ω -estable, entonces es estable.*

Demostración. Supongamos que T no es estable, luego existe una fórmula $\varphi(x, y)$ que tiene la k -propiedad del orden para todo k , es decir, existen tuplas $\{(a_i, b_i) : i < \omega\}$ que cumplen para algún modelo \mathcal{M} de T ,

$$\mathcal{M} \models \varphi(a_i, b_j) \text{ si y solo si } i \leq j.$$

Por compacidad existe una sucesión indexada por los racionales $(c_q, d_q)_{q \in \mathbb{Q}}$ tal que $\models \varphi(c_q, d_s) \leftrightarrow q < s$. Ahora, defina para cada $s \in \mathbb{R}$, el tipo $p_s(x)$ definido por las fórmulas

$$\{\varphi(x, d_j) : j \leq s\} \cup \{\neg\varphi(x, d_j) : j > s\}.$$

Como $|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$, entonces van a existir 2^{\aleph_0} de estos tipos p_s , por lo tanto concluimos que aunque $|\{b_i : i \in \mathbb{Q}\}| = \aleph_0$, $|S(\{d_i : i \in \mathbb{Q}\})| = 2^{\aleph_0} > \aleph_0$, luego T no es ω -estable. □

1.5. Clausuras algebraicas

Definición 1.34 (Elemento algebraico). Sea \mathcal{L} un lenguaje y \mathcal{M} una \mathcal{L} -estructura. Dado un conjunto $B \subseteq M$ y un elemento $a \in M$, decimos que a es algebraico sobre B si existe una \mathcal{L} -fórmula $\varphi(x, \bar{y})$ y $\bar{b} \in B^{|\bar{y}|}$ tal que $\mathcal{M} \models \varphi(a, \bar{b})$ y $\varphi(\mathcal{M}, \bar{b})$ es finito.

Definición 1.35 (Clausura algebraica). Si $B \subseteq M$, la clausura algebraica de B (que denotamos por $\text{acl}_{\mathcal{M}}(B)$) es el conjunto de todos los elementos algebraicos sobre B .

Encontrar la clausura algebraica para un conjunto finito dado $\{a_1, \dots, a_n\} \subseteq M$, es equivalente a encontrar todos los conjuntos $\{a_1, \dots, a_n\}$ -definibles y finitos. Al igual que antes, esto resulta más simple al trabajar en una teoría con eliminación de cuantificadores. En estos casos basta considerar las fórmulas que son conjunciones de disjunciones de fórmulas básicas, por lo tanto, cualquier elemento en $\text{acl}(\{a_1, \dots, a_n\})$ satisface alguna fórmula de la forma

$$\varphi(x, \bar{a}) \equiv \bigwedge_{j=1}^k \tau_j(x, \bar{a})$$

donde los $\tau_i(x, \bar{a})$ son fórmulas básicas, lo cual simplifica los cálculos bajo estas hipótesis.

Además, notemos que $\{a_1, \dots, a_n\} \subseteq \text{acl}(\{a_1, \dots, a_n\})$ pues cada a_i satisface la fórmula $x = a_i$. Podemos entonces considerar únicamente los $\tau_i(x, \bar{a}) \not\equiv (x = a_j)$ para todo i, j . De igual manera, como las fórmulas $x \neq a_j$ solo excluyen un único punto del conjunto definible, podemos tomar también $\tau_i(x, \bar{a}) \not\equiv (x \neq a_j)$ para todo i, j .

Proposición 1.36. *Sea \mathcal{M} un modelo de RG y $\{a_1, \dots, a_n\} \subseteq M$ un subconjunto finito de elementos, entonces $\text{acl}(\{a_1, \dots, a_n\}) = \{a_1, \dots, a_n\}$.*

Demostración. Consideremos $\varphi(x, \bar{a})$ de la forma

$$\varphi(x, \bar{a}) \equiv \bigwedge_{i \in A} xRa_i \wedge \bigwedge_{j \in B} \neg xRa_j$$

donde $A, B \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$. Si $\varphi(\mathcal{M}, \bar{a}) \neq \emptyset$, debemos tener que $A \cap B = \emptyset$. Veamos que $\varphi(\mathcal{M}, \bar{a})$ es un conjunto infinito, concluyendo así la afirmación. Supongamos por contradicción que $\varphi(\mathcal{M}, \bar{a}) = \{c_1, c_2, \dots, c_N\}$ y definamos

$$U = A \cup \{c_1, \dots, c_N\}$$

$$V = B$$

Como \mathcal{M} es un modelo de RG entonces existe un z conectado con todos los vértices de U y con ninguno de V . Este sería un elemento de $\varphi(\mathcal{M}, \bar{a}) - \{c_1, c_2, \dots, c_N\}$, contradicción. Concluimos así que $\text{acl}(\{a_1, a_2, \dots, a_n\}) = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. \square

Proposición 1.37. *Si \mathcal{M} es modelo de T_r y $\bar{a} \in M^n$, entonces $\text{acl}(\{a_1, \dots, a_n\})$ es la unión de las componentes conexas de los elementos a_1, \dots, a_n . A esto se le conoce como la clausura conexa de $\{a_1, \dots, a_n\}$.*

Demostración. Si $\varphi(x, \bar{a}) \equiv \bigwedge_{i \in A} D_{s_i}(x, a_i) \wedge \bigwedge_{j \in B} \neg D_{s_j}(x, a_j)$ para $A, B \subseteq \{1, \dots, n\}$ y $A \neq \emptyset$, entonces para cualquier $k \in A$ se cumple

$$\varphi(\mathcal{M}, \bar{a}) \subseteq D_{s_k}(\mathcal{M}, a_k)$$

y como $|D_{s_1}(\mathcal{M}, a_1)| = r(r-1)^{s_1-1}$, entonces $\varphi(\mathcal{M}, \bar{a})$ es finito, por lo tanto cualquier vértice en la componente conexa de algún a_i está en la clausura algebraica de $\{a_1, \dots, a_n\}$.

Por último, si $\varphi(x, \bar{a}) \equiv \bigwedge_{i=1}^m \neg D_{s_i}(x, a_i)$, como $\varphi(x, \bar{a}) \equiv \neg(\bigvee_{i=1}^m D_{s_i}(x, a_i))$ y la disjunción define un conjunto finito, $\varphi(x, \bar{a})$ define un conjunto infinito.

Podemos concluir así que los elementos de $\text{acl}(\{a_1, \dots, a_n\})$ son los elementos que satisfacen $D_s(x, a_i)$ para algún $i \in \{1, \dots, n\}$ y $s \in \mathbb{N}$, es decir, la clausura conexa de $\{a_1, \dots, a_n\}$. \square

Proposición 1.38. *Sea \mathcal{M} es un modelo de T_∞ , y $\{a_1, \dots, a_n\} \subset M$, entonces $\text{acl}(\{a_1, \dots, a_n\}) = \text{conv}(\{a_1, \dots, a_n\})$. En particular $\text{acl}(\{a_1, \dots, a_n\})$ es finita.*

Demostración. Notemos que, al igual que en el caso anterior, una fórmula de la forma

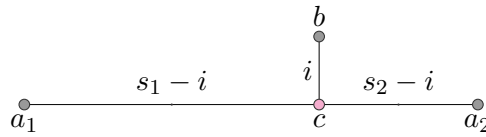
$$\varphi(x, \bar{a}) \equiv \bigwedge_{i=1}^t \neg D_{s_i}(x, a_i)$$

no puede definir un conjunto finito. De hecho, si tomamos $N = 2 \cdot \max_i \{s_i\} + 1$ y $b \in M$ tal que $D_N(b, a_1)$, entonces para todo d con $\text{dist}(b, d) = 1$, $d \in \varphi(\mathcal{M}, \bar{a})$ y tenemos que $D_1(b, \mathcal{M}) \subseteq \varphi(\mathcal{M}, \bar{a})$. Como b tiene grado infinito, en particular $\varphi(\mathcal{M}, \bar{a})$ es infinito.

Para los otros casos, consideremos inicialmente la fórmula $\varphi(x, a_1, a_2) \equiv D_{s_1}(x, a_1) \wedge D_{s_2}(x, a_2)$. Si $\text{dist}(a_1, a_2) > s_1 + s_2$, entonces $\varphi(\mathcal{M}, a_1, a_2)$ es vacío. Si $\text{dist}(a_1, a_2) = s_1 + s_2$, entonces $\varphi(\mathcal{M}, a_1, a_2)$ tiene un único elemento en el camino entre a_1 y a_2 . De esta forma podemos ver que $\text{conv}(\{a_1, a_2\}) \subseteq \text{acl}(\{a_1, a_2\})$, veamos entonces que no existe $b \in \text{acl}(\{a_1, a_2\}) - \text{conv}(\{a_1, a_2\})$. Supongamos que $\text{dist}(a_1, a_2) < s_1 + s_2$ y $b \in \varphi(\mathcal{M}, a_1, a_2)$. Como $b \notin \text{conv}(\{a_1, a_2\})$, entonces existe un $c \in \text{conv}(\{a_1, a_2\})$ como en la proposición 1.14 tal que para algún $i \in \{1, \dots, \min\{s_1, s_2\}\}$ se cumple

$$\text{dist}(c, a_1) = s_1 - i \qquad \text{dist}(c, a_2) = s_2 - i \qquad \text{dist}(b, c) = i.$$

Es decir, se tiene la siguiente configuración:



Como \mathcal{M} es un modelo de T_∞ , entonces existen e_1, e_2, \dots vértices que cumplen para todo j que

$$\text{dist}(c, a_1) = s_1 - i \qquad \text{dist}(c, a_2) = s_2 - i \qquad \text{dist}(e_j, c) = i.$$

Por lo tanto, todos estos e_j tienen la misma distancia a a_1 y a a_2 que b , y concluimos así que todo estos e_j pertenecen de igual manera a $\varphi(\mathcal{M}, a_1, a_2)$, por lo tanto no es un conjunto finito. Ahora para el caso más general, supongamos que $\varphi(x, \bar{a})$ es de la forma

$$\varphi(x, \bar{a}) \equiv \bigwedge_{i=1}^{k_1} D_{s_i}(x, a_i) \wedge \bigwedge_{j=1}^{k_2} \neg D_{t_j}(x, a_j).$$

Por el caso $n = 2$, ya sabemos que $\text{conv}(\{a_1, \dots, a_n\}) \subseteq \text{acl}(\{a_1, \dots, a_n\})$. De igual manera, sea un $b \in \varphi(\mathcal{M}, \bar{a}) - \text{conv}(\{a_1, \dots, a_n\})$ y c como en la proposición 1.14. Este debe cumplir que para algún $i \in \{1, \dots, \min\{s_1, \dots, s_n\}\}$ y para todo $j \in \{1, \dots, n\}$,

$$\text{dist}(c, a_j) = s_j - i \qquad \text{dist}(b, c) = i.$$

Como \mathcal{M} es un modelo de T_∞ , entonces existen otros e_1, e_2, \dots que cumplen para todo k ,

$$\text{dist}(e_k, c) = i.$$

Esto nos va a garantizar que todos los e_k tienen la misma distancia con todos los a_i que b , por lo tanto, $\{e_1, e_2, \dots\} \subset \varphi(x, \bar{a})$. Concluimos así que $\varphi(\mathcal{M}, \bar{a})$ es infinito, por lo que $\text{acl}(\{a_1, \dots, a_n\}) = \text{conv}(\{a_1, \dots, a_n\})$. \square

Capítulo 2

Estructuras pseudofinitas

En este capítulo se estudiará la pseudofinitud de las teorías RG , T_r y T_∞ . En términos generales, una \mathcal{L} -teoría T completa es *pseudofinita* si toda sentencia σ tal que $T \models \sigma$, es verdadera en alguna \mathcal{L} -estructura finita. Iniciaremos con algunas definiciones básicas de filtros, ultrafiltros y ultraproductos, que nos permitirán entender algunas caracterizaciones diferentes de pseudofinitud.

2.1. Estructuras pseudofinitas

Definición 2.1 (Filtro). Un filtro \mathcal{F} sobre un conjunto de índices I es un subconjunto de $\mathcal{P}(I)$ que satisface las siguientes propiedades:

1. $\emptyset \notin \mathcal{F}$, $I \in \mathcal{F}$.
2. Si $A, B \in \mathcal{F}$, entonces $A \cap B \in \mathcal{F}$.
3. Si $A \in \mathcal{F}$ y $A \subseteq B$, entonces $B \in \mathcal{F}$.

Ejemplo 2.2 (Filtro de Fréchet). El filtro de Fréchet sobre un conjunto infinito I se define como $\mathcal{F} = \{A \subseteq I : I \setminus A \text{ es finito}\}$.

Definición 2.3 (Ultrafiltro). Un ultrafiltro \mathcal{U} es un filtro sobre un conjunto de índices I , tal que para todo $A \subseteq I$, $A \in \mathcal{U}$ o $A^c \in \mathcal{U}$.

Ejemplo 2.4 (Ultrafiltro principal). Un ultrafiltro principal sobre un conjunto infinito I , se define para un elemento $i \in I$ como $\mathcal{F}_i = \{A \subseteq I : i \in A\}$.

Definición 2.5 (Ultraproducto). Sea I un conjunto de índices, $\{\mathcal{M}_i\}_{i \in I}$ una colección de \mathcal{L} -estructuras y \mathcal{U} un ultrafiltro sobre I . Con base en esto, se define una relación de equivalencia \sim

$$(a_i)_{i \in I} \sim (b_i)_{i \in I} \text{ si y solo si } \{i \in I : a_i = b_i\} \in \mathcal{U}.$$

Así, se define el *ultraproducto* como

$$\prod_{\mathcal{U}} M_i = \prod_{i \in I} M_i / \sim .$$

Observación 2.6. La nueva estructura obtenida $\mathcal{M} = \prod_{\mathcal{U}} M_i$ se puede ver de igual manera como una \mathcal{L} -estructura de la siguiente manera:

- Si c es una constante en \mathcal{L} , entonces

$$c^{\mathcal{M}} = [(c^{\mathcal{M}_i})_i].$$

- Si f es una función en \mathcal{L} , entonces

$$f^{\mathcal{M}}([(a_1^i)_i], [(a_2^i)_i], \dots, [(a_n^i)_i]) = [(f^{\mathcal{M}}(a_1^i, a_2^i, \dots, a_n^i))_i].$$

- Si R es una relación en \mathcal{L} , entonces

$$([(a_1^i)_i], [(a_2^i)_i], \dots, [(a_n^i)_i]) \in R^{\mathcal{M}} \text{ si y solo si } \{i \in I : (a_1^i, a_2^i, \dots, a_n^i) \in R^{\mathcal{M}_i}\} \in \mathcal{U}.$$

Teorema 2.7 (Łoś, 1955). Sean I , $\{M_i\}_{i \in I}$ y \mathcal{U} como antes, entonces para toda \mathcal{L} -fórmula $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ se cumple

$$\prod_{\mathcal{U}} M_i \models \varphi([a_1], [a_2], \dots, [a_n]) \text{ si y solo si } \{i \in I : M_i \models \varphi(a_1^i, a_2^i, \dots, a_n^i)\} \in \mathcal{U}.$$

Demostración. La prueba se puede encontrar en [3], teorema 4.5. □

Definición 2.8 (Estructura pseudofinita). Una \mathcal{L} -estructura \mathcal{M} es pseudofinita si para toda sentencia σ tal que $\mathcal{M} \models \sigma$, existe una \mathcal{L} -estructura \mathcal{M}_σ finita tal que $\mathcal{M}_\sigma \models \sigma$.

Proposición 2.9. Sea \mathcal{M} una \mathcal{L} -estructura. Las siguientes son equivalentes:

1. \mathcal{M} es una estructura pseudofinita.
2. \mathcal{M} es elementalmente equivalente a un ultraproducto de estructuras finitas.
3. Si σ es una sentencia válida en toda \mathcal{L} -estructura finita, entonces $\mathcal{M} \models \sigma$.

Demostración. La prueba se puede encontrar en [3], proposición 7.7. □

Definición 2.10 (Teoría pseudofinita). Una teoría completa es pseudofinita si para toda fórmula σ con $T \models \sigma$ existe una \mathcal{L} -estructura finita \mathcal{M}_σ que cumple $\mathcal{M}_\sigma \models \sigma$. Equivalentemente, T es pseudofinita si todo modelo de T es una estructura pseudofinita.

Ejemplo 2.11. Directamente de la proposición 2.9 sabemos que cualquier ultraproducto de estructuras finitas es pseudofinita. En particular, cualquier ultraproducto de grafos finitos es pseudofinito.

Ejemplo 2.12. $(\mathbb{Q}, <)$ no es una estructura pseudofinita.

Demostración. Una de las propiedades principales de los racionales es la densidad de sus elementos, es decir $(\mathbb{Q}, <)$ satisface la siguiente sentencia

$$\sigma : \forall x \forall y (x < y \rightarrow \exists z (x < z \wedge z < y))$$

Toda estructura que satisfaga σ debe ser infinita, entonces por la segunda caracterización de pseudofinitud de estructuras, $(\mathbb{Q}, <)$ no es pseudofinita. \square

Ejemplo 2.13 (Darío García, 2019). El árbol infinito con raíz y 3-ramificado (RT_3) no es pseudofinito. Definimos RT_3 como el árbol infinito y conexo donde cada nodo tiene exactamente tres sucesores.

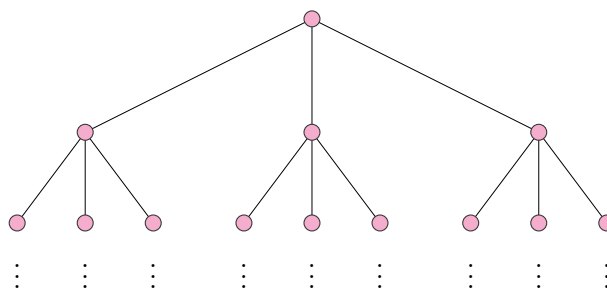


FIGURA 2.1: Representación de RT_3 .

Como vimos con la teoría T_r , “ser de grado r ” es expresable mediante una fórmula para todo $r \in \omega$ fijo. Notemos que en RT_3 existe un único vértice de grado tres y el resto tienen grado cuatro, por lo tanto satisface sentencia

$$\sigma \equiv \exists x (\text{grado}(x) = 3 \wedge \forall y (y \neq x \rightarrow \text{grado}(y) = 4)).$$

Cualquier grafo que cumpla σ satisface $\sum_{v \in V} \text{grado}(v) = 3 + 4(|V| - 1)$, pero por el *Handshaking Lemma*, todo grafo finito cumple $\sum_{v \in V} \text{grado}(v) = 2|E|$. Por lo tanto si existiera un grafo finito que cumpliera σ , tendríamos

$$3 + 4(|V| - 1) = 2|E|,$$

lo cual es una contradicción pues la parte izquierda de la igualdad es impar mientras que la parte derecha es par. Así, no existe un grafo finito que satisfaga σ y por lo tanto, por la segunda caracterización de pseudofinitud de estructuras, concluimos que RT_3 no es una estructura pseudofinita.

El resto del capítulo se centrará en las demostraciones de que RG , T_r y T_∞ son teorías pseudofinitas.

2.2. Pseudofinitud de la teoría RG

Hay dos formas de ver que la teoría del grafo aleatorio es pseudofinita. La primera utiliza el modelo probabilístico para demostrar que para todo $r \in \omega$, casi todo grafo finito cumple el axioma \mathcal{A}_r .

Definición 2.14 (Modelo probabilístico). El modelo probabilístico $\mathbb{G}(n, p)$ para $n \in \omega$ y $0 < p < 1$ toma en cuenta todos grafos con n vértices para los cuales las aristas son escogidas independientemente y con probabilidad p . Se construye de la siguiente manera:

Sea $V = \{1, \dots, n\}$ un conjunto de vértices. Para cada $e \in V^2$, definimos el espacio de probabilidad $(\Omega_e, \mathcal{P}(\Omega_e), \mathbb{P}_e)$ con

$$\Omega_e = \{0_e, 1_e\} \quad \mathbb{P}_e(\{1_e\}) = p \quad \text{y} \quad \mathbb{P}_e(\{0_e\}) = 1 - p.$$

$\mathbb{G}(n, p)$ es el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ donde $\Omega = \prod_{e \in V^2} \Omega_e$ y \mathbb{P} es la medida producto.

Definición 2.15. Sea $e \in V^2$. Definimos el evento $A_e = \{\mathbf{x} \in \Omega : x_e = 1_e\} = \{G : e \in E(G)\}$. En palabras, es el evento “tener e como arista”.

Proposición 2.16. *Los eventos A_e son independientes*

Demostración. Sean $e_1, \dots, e_m \in V^2$. Para todo $i \in \{1, \dots, m\}$ tenemos

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_{e_i}) &= \mathbb{P}_{e_i}(\{1_{e_i}\}) \times \prod_{e' \neq e_i} \mathbb{P}_{e'}(\Omega_{e'}) = p \\ \implies \mathbb{P}(A_{e_1} \cap \dots \cap A_{e_m}) &= \mathbb{P} \left(\prod_{j=1}^m \{1_{e_j}\} \times \prod_{e' \neq e_i} \Omega_{e'} \right) = \prod_{j=1}^m \mathbb{P}_{e_j}(\{1_{e_j}\}) \times \prod_{e' \neq e_i} \mathbb{P}_{e'}(\Omega_{e'}) = p^m. \end{aligned}$$

□

Teorema 2.17 (Darío García, 2019). *Para todo $0 < p < 1$ y $r \geq 1$, casi todos los grafos finitos satisfacen \mathcal{A}_r , es decir, si $\mathcal{P}_r(n, p) = \{G \in \mathbb{G}(n, p) : G \models \mathcal{A}_r\}$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\mathcal{P}_r(n, p)) = 1$.*

Demostración. Sean U, W subconjuntos disjuntos de V con $|U|, |W| \leq r$ y $v \in V - (U \cup W)$. La probabilidad de que v esté conectado con todos los vértices en U y con ninguno de los vértices en W es

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B_v) &= \mathbb{P}(\forall u \in U \forall w \in W (uRv \wedge \neg wRv)) = \mathbb{P} \left(\bigcap_{u \in U} A_{\{u,v\}} \cap \bigcap_{w \in W} A_{\{w,v\}}^c \right) \\ &= p^{|U|} (1-p)^{|W|} \geq p^r (1-p)^r \end{aligned}$$

Así, la probabilidad de que v no cumpla la condición requerida para U y W es

$$\mathbb{P}(B_v^c) = 1 - p^{|U|} (1-p)^{|W|} \leq 1 - p^r (1-p)^r.$$

Sea $q = 1 - p$. Como todos los eventos A_e son independientes, la probabilidad de que ningún vértice $v \in V \setminus (U \cup W)$ satisfaga esto es

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\bigcap_{v \in V \setminus (U \cup W)} B_v^c \right) &= \prod_{v \in V \setminus (U \cup W)} \mathbb{P}(B_v^c) = (1 - p^{|U|} q^{|W|})^{|V \setminus (U \cup W)|} \\ &= (1 - p^r q^r)^{n - |U \cup W|} \leq (1 - p^r q^r)^{n - 2r}. \end{aligned}$$

Por último, note que n^{2r} es una cota superior para el número de subconjuntos disjuntos U, W de V , pues cada par U, W puede codificarse con una función $f : \{a_1, \dots, a_r\} \cup \{b_1, \dots, b_r\} \rightarrow V$. Por lo tanto, la probabilidad de que un grafo no cumpla \mathcal{A}_r es

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\mathcal{P}_r(n, p)^c) &= \mathbb{P} \left(\bigcup_{U, W} \left(\bigcap_{v \in V - (U \cup W)} B_v^c \right) \right) \leq \sum_{U, W} \left(\mathbb{P} \left(\bigcap_{v \in V - (U \cup W)} B_v^c \right) \right) \\ &\leq n^{2r} (1 - p^r q^r)^{n - |V \cup W|} \leq n^{2r} (1 - p^r q^r)^{n - 2r} \\ &\implies \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\mathcal{P}_r(n, p)^c) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} n^{2r} (1 - p^r q^r)^{n - 2r} = 0 \\ &\implies \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\mathcal{P}_r(n, p)) = 1. \end{aligned}$$

□

Corolario 2.18. *La teoría de RG es pseudofinita.*

Demostración. Sea σ uno de los axiomas de RG. Si $\sigma \equiv \forall x, y (xRy \rightarrow yRx)$ o $\sigma \equiv \forall x \neg(xRx)$, entonces cualquier grafo finito adirigido y simple satisface σ . Si por otro lado, $\sigma \equiv \mathcal{A}_r$ para algún $r \geq 1$, entonces el teorema 2.17 nos va a garantizar que existe un grafo finito que satisface σ . □

Otra forma de ver que la teoría de RG es pseudofinita, es verlo como el ultraproducto de una familia finita de grafos finitos, a saber, los grafos de Paley.

Definición 2.19 (Grafo de Paley). Sea q una potencia de un primo con $q \equiv 1 \pmod{4}$. P_q es el grafo que tiene como vértices $V = \mathbb{F}_q$ y aristas

$$E = \{\{x, y\} : x - y \text{ es un cuadrado perfecto, } x \neq y\}.$$

Notemos que el tener $q \equiv 1 \pmod{4}$ nos garantiza que -1 es un cuadrado perfecto, por lo que P_q será un grafo adirigido, en otras palabras, E es una relación simétrica.

Sean U y W dos conjuntos disjuntos de \mathbb{F}_q y $m = |U \cup W|$. Definimos

$$v(U, W) = \{x \in \mathbb{F}_q : xRu \wedge \neg xRw \text{ para todo } u \in U, w \in W\}.$$

Sea $\chi(x)$ el residuo cuadrático de \mathbb{F}_q , es decir,

$$\chi(x) = x^{q-1/2} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es cuadrado perfecto} \\ -1 & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

Observación 2.20. Si U y W son dos conjuntos disyuntos de \mathbb{F}_q y $v(U, W)$ se define como antes, entonces

$$\sum_{x \notin U \cup W} \prod_{u \in U} (1 + \chi(x - u)) \prod_{w \in W} (1 - \chi(x - w)) = 2^m |v(U, W)|.$$

Esto ocurre porque la única forma en que un sumando sea diferente de 0, es cuando $x \in v(U, W)$. Cuando esto ocurre, $\chi(x - u) = 1$ para todo $u \in U$ y $\chi(x - v) = -1$ para todo $v \in W$, por lo tanto $\prod_{u \in U} (1 + \chi(x - u)) \prod_{w \in W} (1 - \chi(x - w)) = 2^m$.

Proposición 2.21. Si U y W son dos subconjuntos no vacíos de \mathbb{F}_q tales que $|U \cup W| = m$ entonces

$$\left| \left(\sum_{x \notin U \cup W} \prod_{u \in U} (1 + \chi(x - u)) \prod_{w \in W} (1 - \chi(x - w)) \right) - q \right| \leq ((m - 2)2^{m-1} + 1)q^{1/2} + m2^{m-1}.$$

Demostración. La demostración de la proposición se puede encontrar en [1], Lemma 13.9. \square

Corolario 2.22 (Bollobás-Thomason, 1985). Si U y W son dos subconjuntos no vacíos de \mathbb{F}_q tales que $|U \cup W| = m$ entonces

$$\left| |v(U, W)| - 2^{-m}q \right| \leq \frac{1}{2} (m - 2 + 2^{-m+1}) q^{1/2} + \frac{m}{2}.$$

Demostración. De la proposición anterior tenemos

$$\left| \left(\sum_{x \notin U \cup W} \prod_{u \in U} (1 + \chi(x - u)) \prod_{w \in W} (1 - \chi(x - w)) \right) - q \right| \leq ((m - 2)2^{m-1} + 1)q^{1/2} + m2^{m-1}$$

$$\implies |2^m |v(U, W)| - q| \leq ((m - 2)2^{m-1} + 1)q^{1/2} + m2^{m-1}$$

$$\implies \left| |v(U, W)| - q2^{-m} \right| \leq \frac{1}{2} ((m - 2) + 2^{-m+1})q^{1/2} + \frac{m}{2}.$$

\square

Corolario 2.23 (Macpherson y Steinhorn [7], Example 3.4). Sea \mathcal{U} un ultrafiltro no principal sobre $I = \{q : q = p^n \text{ para algún } p \text{ primo, } n \in \omega \text{ y } q \equiv 1 \pmod{4}\}$. Entonces, $P = \prod_{\mathcal{U}} P_q$ es un modelo de RG.

Demostración. Para ver que P es un modelo de la teoría RG, mostraremos que para todo $r \geq 1$ se tiene que $P \models \mathcal{A}_r$. Sean

$$U = \{u_1, \dots, u_r\} \text{ y } W = \{w_1, \dots, w_r\}$$

subconjuntos disjuntos de P con $u_i = [u_i^q]_{\mathcal{U}}$ y $w_j = [w_j^q]_{\mathcal{U}}$ para todo $i, j \in \{1, 2, \dots, r\}$. Por el teorema de Łoś los conjuntos $U^q = \{u_1^q, \dots, u_r^q\}$ y $W^q = \{w_1^q, \dots, w_r^q\}$ son disjuntos para \mathcal{U} -casi todo q . Sea $m = 2r$, por lo anterior tenemos

$$\begin{aligned} |v(U^q, W^q)| - 2^{-m}q &\leq \frac{1}{2}(m - 2 + 2^{-m+1})q^{1/2} + \frac{m}{2} \\ \implies 2^{-m}q - |v(U^q, W^q)| &\leq \frac{1}{2}(m - 2 + 2^{-m+1})q^{1/2} + \frac{m}{2} \\ \implies |v(U^q, W^q)| &\geq -\frac{1}{2}(m - 2 + 2^{-m+1})q^{1/2} - \frac{m}{2} + 2^{-m}q. \end{aligned}$$

Sea $C_m = \frac{1}{2}(m - 2 + 2^{-m+1})$ y tomemos $q > \max\{m2^m, 4^{m+1}C_m^2\}$. Como $q \geq 4^{m+1}C_m^2$, entonces $\frac{1}{2}\frac{q}{2^m} \geq C_m q^{1/2} \implies \frac{q}{2^m} - C_m q^{1/2} \geq \frac{q}{2^m} - C_m q^{1/2} \geq \frac{1}{2}\frac{q}{2^m}$. Así,

$$|v(U^q, W^q)| \geq \frac{1}{2}\frac{q}{2^m} - \frac{m}{2} \implies |v(U^q, W^q)| > 0.$$

Esta última desigualdad se cumple pues $q > m2^m$. Como esto se cumple para cualquier $q > \max\{m2^m, 4^{m+1}C_m^2\}$, entonces $\{q : |v(U^q, W^q)| > 0\} \in \mathcal{U}$ pues es un conjunto cofinito. Así, por el teorema de Łoś, $|v(U, W)| > 0$ y como U y W eran arbitrarios, concluimos que P es modelo de RG. \square

2.3. Pseudofinitud de las teorías T_r y T_∞

Para demostrar que T_r y T_∞ son teorías pseudofinitas, encontraremos dos familias de grafos finitos $\mathcal{C}_\infty = \{M_k\}_{k \in \omega}$ y $\mathcal{C}_r = \{N_k\}_{k \in \omega}$ tales que cualquier ultraproducto sobre un ultrafiltro no principal de ellos forma un modelo de T_∞ y de T_r , respectivamente. La existencia de estas dos familias la garantiza los siguientes dos teoremas, los cuales fueron enunciados y demostrados por Darío García en [3].

Teorema 2.24. *Existe $\mathcal{C}_\infty = \{M_k : k \in \omega\}$ una familia de grafos que cumple:*

1. *Para todo k , $|V(M_k)| > k$.*
2. *Existe $\{r_k\}_{k \in \omega}$ una familia de naturales con $\lim_{k \rightarrow \infty} r_k = \infty$ tal que para todo k , M_k es r_k -regular.*
3. *Para $k \geq 3$, todo ciclo en M_k tiene tamaño mayor o igual a $2k$.*

Observación 2.25. Al tamaño del ciclo más pequeño de un grafo G lo llamamos $\text{girth}(G)$.

Teorema 2.26. Para todo $r \in \mathbb{N}$, existe $\mathcal{C}_r = \{N_k : k \in \omega\}$ una familia de grafos que cumple 1 y 3 como en el teorema 2.24 y que satisface:

2'. Para todo k , N_k es r -regular.

Antes de dar una construcción de estas familias de grafos, veamos cómo usar los teoremas anteriores para probar que las teorías T_r y T_∞ son pseudofinitas. Para esto, sea \mathcal{U} un ultrafiltro no principal sobre \mathbb{N} , y sea $\mathcal{M} = \prod_{\mathcal{U}} M_k$. La propiedad 1 del teorema 2.24 nos garantiza que para todo k , $|M| > k$, es decir \mathcal{M} es un grafo infinito. Además, por la propiedad 2, para todo $r \in \mathbb{N}$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que para $k \geq N$, $r_k > r$, por lo tanto $\{i \in \mathbb{N} : r_k > r\} \supseteq [N, \infty) \in \mathcal{U}$, y por el teorema de Łoś,

$$\mathcal{M} \models \forall y \exists x_1, \dots, x_r \left(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq r} x_i \neq x_j \wedge \bigwedge_{i=1}^r y R x_i \right).$$

Como esto ocurre para todo $r \in \mathbb{N}$, entonces concluimos que cada vértice en \mathcal{M} es de grado infinito.

Por último, por el mismo razonamiento anterior, para todo $l \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{M} \models \forall x_1, \dots, x_{l-1} \left(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq l} x_i \neq x_j \wedge \bigwedge_{i=1}^{l-1} x_i R y_{i+1} \wedge x_l R x_1 \right)$$

y como esto ocurre para todo l , entonces concluimos que \mathcal{M} no tiene ciclos de ningún tamaño. Así, \mathcal{M} es un modelo de T_∞ . Con un argumento similar se puede ver que $\mathcal{N} = \prod_{\mathcal{U}} N_k$ es un modelo de T_r .

La existencia de la familia de grafos descrita en los teoremas 2.24 y 2.26 se basa en una construcción llamada *levantamiento*.

Definición 2.27 (Levantamiento). Sea $G = (V, E)$ un grafo no dirigido. El *levantamiento* de G es el grafo $L[G] = (V', E')$ donde $V' = V \times \{0, 1\}^E$ y se define la relación E' como $\{(u, f), (v, g)\} \in E'$ si y solo si

1. Los vértices u y v forman una arista en el grafo original, es decir $\{u, v\} \in E$.
2. Las funciones cumplen que $f(\{u, v\}) \neq g(\{u, v\})$.
3. Para todo $e \neq \{u, v\}$, $f(e) = g(e)$.

Ejemplo 2.28 (K_3). Considere K_3 el grafo completo en tres vértices v_1, v_2 y v_3 . El levantamiento de K_3 tiene 24 vértices de la forma (v_i, j, k, l) donde $i \in \{1, 2, 3\}$ y $j, k, l \in \{0, 1\}$. Está compuesto por cuatro componentes conexas, donde cada una de estas es un hexágono.

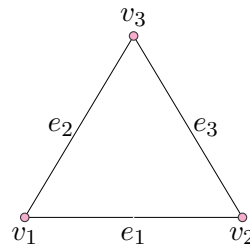


FIGURA 2.2: K_3 .

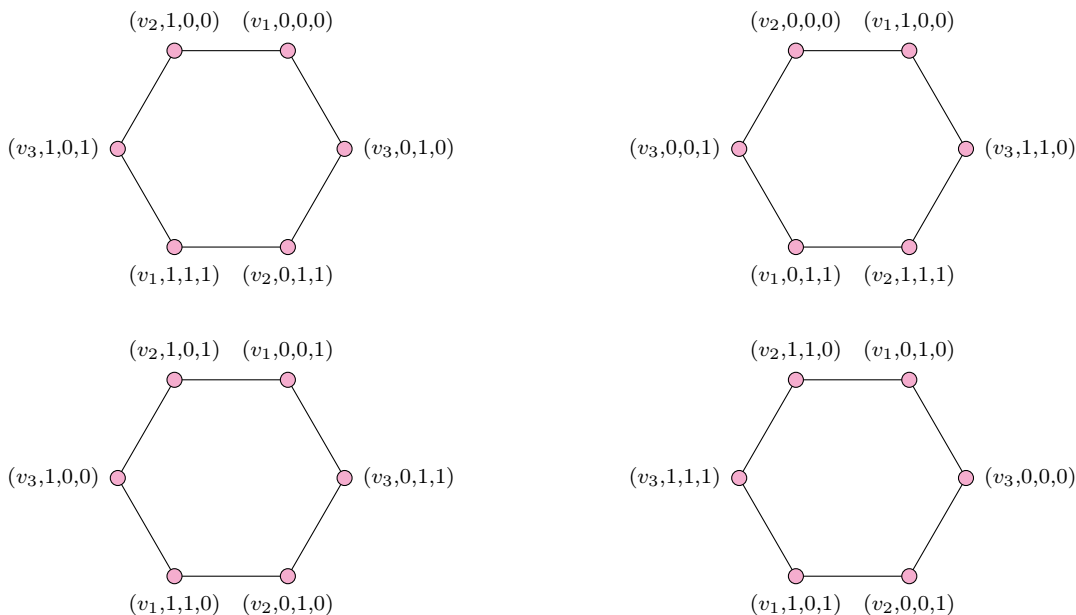


FIGURA 2.3: $L[K_3]$.

Proposición 2.29. Sea $G = (V, E)$ un grafo r -regular con $3 \leq |V| < \infty$ y $\text{girth}(G) = g$; entonces el levantamiento $L[G] = (V', E')$ es r -regular y $\text{girth}(L[G]) = 2g$.

Demostración. Para ver que $L[G]$ es r -regular, notemos que para todo $(v, f), (u, g) \in E'$ se cumple

$$\{(v, f), (u, g)\} \in E' \iff \{v, u\} \in E, f(\{v, u\}) \neq g(\{v, u\}) \text{ y para todo } e \neq \{v, u\}, f(e) = g(e).$$

Y como solo existen r posibles u que cumplen $\{v, u\} \in E$ y $f(\{v, u\})$ solo puede tomar dos valores posibles, entonces (v, f) está conectado con exactamente r vértices.

Ahora, sea $(v_1, f_1), (v_2, f_2), \dots, (v_n, f_n), (v_{n+1}, f_{n+1}) = (v_1, f_1)$ un ciclo en $L[G]$, y sean $l_1, l_2 \in \{1, 2, \dots, n\}$ con $l_1 < l_2$ tales que $v_{l_1} = v_{l_2}$ y $l_2 - l_1$ es minimal. Reordenando los vértices de ser necesario, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $l_1 = 1$. Por la construcción de E' , tenemos que $v_1 - v_2 - \dots - v_{l_2}$ es un ciclo en G , por lo tanto, $s = l_2 - 1 \geq g$.

Como s es minimal, f_{l_2} se encuentra a partir de f_1 cambiando s entradas distintas, por lo que para volver al vértice (v_1, f_1) , es necesario restaurar estas entradas con otros s pasos. Concluimos así que para $n \geq 2$, $s \geq 2n$, por lo que $\text{girth}(L[G]) \geq 2g$

Para probar que $\text{girth}(L[G])$ es exactamente $2g$, consideremos un camino de G

$$v_1 - v_2 - \cdots - v_g - v_{g+1} = v_1,$$

y llamemos $e_i = \{v_i, v_{i+1}\}$. Entonces, el siguiente es un ciclo de longitud $2n$ de $L[G]$:

$$(v_1, 0, 0, \dots, 0) - (v_2, 1, 0, \dots, 0) - \cdots - (v_g, 1, 1, \dots, 1, 0, 0, \dots, 0) - (v_1, 1, 1, \dots, 1, 1, 0, \dots, 0) \\ - (v_2, 0, 1, 1, \dots, 1, 1, 0, \dots, 0) - \cdots - (v_g, 0, 0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) - (v_1, 0, 0, \dots, 0).$$

□

Observación 2.30. Si $G = (V, E)$ es un grafo finito r -regular, entonces $L[G] = (V', E')$ cumple que $|V'| = |V| \cdot 2^{|E|} = |V| \cdot 2^{\frac{r|V|}{2}}$.

Demostración de teorema 2.24. Para cada $k \in \omega$, definiremos una sucesión de grafos finitos

$$\overline{M}_{1k}, \overline{M}_{2k}, \dots, \overline{M}_{kk} = M_k$$

de forma inductiva. Definimos $\overline{M}_{1k} := K_{k+1}$, es decir, el grafo completo con $k+1$ vértices. Para $i > 1$, definimos $\overline{M}_{ik} = L[\overline{M}_{(i-1)k}]$. Veamos que se cumplen las condiciones necesarias:

1. Como $|V(K_{k+1})| = k+1$, por la observación 2.30 tenemos que $|V(M_k)| > k$.
2. Como K_{k+1} es k -regular, por la proposición 2.29 M_k es k -regular. Con $k = r_k$, concluimos que $\lim_{k \rightarrow \infty} r_k = \infty$ como se buscaba.
3. Como $\text{girth}(K_{k+1}) = 3$, por la proposición 2.29, $\text{girth}(M_k) = 2^k \cdot 3 > 2k$.

□

Demostración de teorema 2.26. Para este caso, necesitamos que cada N_k sea r -regular. Por lo tanto, podemos tomar $N_0 = K_{r+1}$ y para $i > 0$, $N_i = L[N_{i-1}]$. Así, tendremos que todo N_k es r -regular con $\text{girth}(N_k) = 2^k \cdot 3 > 2k$. □

En [6] se muestra una construcción explícita de otra familia de grafos finitos que satisfacen las condiciones enunciadas en el teorema 2.24, utilizando un algoritmo avaro a partir de un ciclo Hamiltoniano. En 2012 [2], Xavier Dahan también hizo otra descripción explícita de una familia de grafos que satisface las condiciones que buscamos. Esta se basa en la construcción de grafos de Cayley sobre $PGL_2(\mathbb{F}_q)$, con una familia explícita de generadores. Esta es una mejora de la construcción que se había formulado ya en 1984 por Wilfried Imrich [5].

Capítulo 3

Medidas en estructuras pseudofinitas

Como ya vimos, toda estructura pseudofinita \mathcal{M} es elementalmente equivalente a un ultraproducto de estructuras finitas. Por lo tanto, el teorema de Łoś nos proporciona una forma de obtener resultados en \mathcal{M} mediante el análisis de las estructuras finitas y viceversa. De hecho, esto ocurre al momento de definir medidas en el ultraproducto: las medidas de conteo de las estructuras finitas nos inducen una forma de medir conjuntos definibles en el ultraproducto. En este capítulo se hablará del concepto de *medibilidad* en estructuras pseudofinitas y se mostrará que para T_r y T_∞ hay formas de caracterizar las cardinalidades de los conjuntos definibles.

3.1. Medidas en estructuras pseudofinitas

Formalmente, para poder hablar de una medida sobre \mathcal{L} -estructuras, debemos extender nuestro lenguaje con dos suertes \mathbb{D} y $\mathbb{O}\mathbb{F}$ donde \mathbb{D} contiene los símbolos de \mathcal{L} , mientras que $\mathbb{O}\mathbb{F}$ contiene los símbolos del lenguaje de anillos ordenados $\mathcal{L}_{o-rings} = \{+, \cdot, 0, 1, <\}$. Además de esto, por cada \mathcal{L} -fórmula $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ agregamos una nueva función $|\bar{y}|$ -aria f_φ que tomará valores en la suerte $\mathbb{O}\mathbb{F}$. Toda \mathcal{L} -estructura finita \mathcal{M}_i determina en este nuevo lenguaje una nueva estructura que llamaremos $\overline{\mathcal{M}}_i$ donde $\mathbb{D}(\overline{\mathcal{M}}_i) = \mathcal{M}_i$, $\mathbb{O}\mathbb{F}(\overline{\mathcal{M}}_i) = \mathbb{R}$ y, para cada \mathcal{L} -fórmula $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$, se define $f_\varphi^{\overline{\mathcal{M}}_i}$ de la siguiente manera:

$$f_\varphi^{\overline{\mathcal{M}}_i} : M_i^{|\bar{y}|} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\bar{a} \mapsto |\varphi(\mathcal{M}_i^{\bar{x}}, \bar{a})|.$$

Si consideramos que $(\mathcal{M}_i)_{i \in I}$ es una familia de \mathcal{L} -estructuras finitas, y \mathcal{U} es un ultrafiltro no principal sobre I , entonces podemos ver al ultraproducto de los $(\overline{\mathcal{M}}_i)_{i \in I}$ como

$$\mathcal{M} = \prod_{\mathcal{U}} \overline{\mathcal{M}}_i = \left(\prod_{\mathcal{U}} \mathcal{M}_i, \mathbb{R}^* \right);$$

es decir, como una estructura con dos suertes, donde la primera es la estructura pseudofinita formada por las estructuras iniciales $(\mathcal{M}_i)_{i \in I}$, y la segunda una copia no estándar de los reales. Con esto en mente, podemos definir una medida sobre el álgebra de conjuntos definibles de \mathcal{M}

que denotamos por $\text{Def}(\mathcal{M})$. Definimos la medida relativa

$$\mu : \text{Def}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$X \mapsto \text{st} \left(\frac{|X|}{|M|} \right) = \lim_{\mathcal{U}} \left(\frac{|X(M_i)|}{|M_i|} \right).$$

Esta correspondencia entre cardinalidades de conjuntos definibles en las estructuras finitas y las cardinalidades en el ultraproducto, es lo que da lugar al concepto de *medibilidad* en estructuras pseudofinitas, donde la idea es dar una caracterización de los posibles valores que las cardinalidades de un conjunto $\varphi(M, \bar{b})$ puede tomar. En algunos casos es posible dar una aproximación de estas cardinalidades, mientras que en otros casos incluso se puede llegar a una caracterización del valor exacto, como veremos que es el caso de T_r y T_∞ .

3.2. Medibilidad de cardinalidades pseudofinitas para conjuntos definibles

Medibilidad de T_r

Las estructuras fuertemente minimales usualmente corresponden en teoría de modelos a las estructuras más fáciles de analizar en términos de dimensiones de sus conjuntos definibles. Si además se añade la condición de pseudofinitud, se puede dar una caracterización precisa de las cardinalidades de conjuntos definibles en términos de polinomios con coeficientes enteros.

Definición 3.1 (Estructura fuertemente minimal). Una \mathcal{L} -estructura \mathcal{M} es fuertemente minimal si todo subconjunto $X \subseteq M$ definible es finito o cofinito.

Como se analizó en el cálculo de rango de Morley, los conjuntos definibles en todo modelo de T_r son finitos o cofinitos, por lo tanto todo modelo es fuertemente minimal.

Teorema 3.2 (Pillay, 2014). *Sea \mathcal{M} una \mathcal{L} -estructura pseudofinita y fuertemente minimal, entonces para $E \subseteq \mathcal{M}$ definible se tiene:*

1. *Existe $p_E(t_1)$ un polinomio en una variable con coeficientes en \mathbb{Z} tal que*

$$|E| = p_E(\beta)$$

Donde $\beta = |\mathcal{M}| \in \mathbb{R}^$. Más aún, $RM(E) = \deg(p_E)$.*

2. *Para toda \mathcal{L} -fórmula $\varphi(x, \bar{y})$ existen finitos polinomios $p_1^\varphi, p_2^\varphi, \dots, p_{k_\varphi}^\varphi \in \mathbb{Z}[t_1]$ y finitas fórmulas $\psi_1(\bar{y}), \psi_2(\bar{y}), \dots, \psi_{k_\varphi}(\bar{y})$ tales que para todo \bar{a} , se cumple*

$$\mathcal{M} \models \psi_i(\bar{a}) \text{ si y solo si } |\varphi(\mathcal{M}, \bar{a})| = p_i(\beta).$$

Demostración. Se puede encontrar en [9], teorema 1.1. □

Dado que T_r es una teoría fuertemente minimal, el teorema 3.2 nos garantiza que en todo modelo de T_r de la forma $\mathcal{N} = \prod_{\mathcal{U}} N_i$ con $N_i \in \mathcal{C}_r$, podemos tener un control sobre las cardinalidades de los conjuntos definibles. Veamos algunos ejemplos de esto.

Ejemplo 3.3. Consideremos la fórmula $\varphi(x, a) \equiv \neg D_4(x, a)$. Como \mathcal{N} es un modelo de T_r , cada vértice tiene exactamente r vecinos, por lo tanto $|D_4(\mathcal{N}, a)| = r(r-1)^3$. Tenemos entonces $|\varphi(\mathcal{N}, a)| = \beta - r(r-1)^3$ y podemos tomar el polinomio $p_\varphi(t_1) = t_1 - r(r-1)^3$.

Ejemplo 3.4. Ahora, consideremos la fórmula $\varphi(x, a_1, a_2) \equiv D_1(x, a_1) \wedge D_2(x, a_2)$. A diferencia que en el ejemplo anterior, tenemos varios casos posibles:

$$|\varphi(\mathcal{N}, a_1, a_2)| = \begin{cases} 0 & \text{si } \text{dist}(a_1, a_2) > 3, \\ 1 & \text{si } \text{dist}(a_1, a_2) = 3, \\ r-1 & \text{si } \text{dist}(a_1, a_2) = 1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Note que en este caso los polinomios son $p_1(t_1) = 1$, $p_2(t_1) = t_1 - 1$, $p_3(t_1) = 0$, y tienen asociadas las fórmulas $\psi_1(y_1, y_2) \equiv D_3(y_1, y_2)$, $\psi_2 \equiv D_1(y_1, y_2)$ y $\psi_3(y_1, y_2) \equiv \neg(D_1(y_1, y_2) \vee D_3(y_1, y_2))$.

Medibilidad de T_∞

Aunque T_∞ no es una teoría fuertemente minimal, mostraremos en esta tesis que satisface propiedades similares a las descritas en el teorema 3.2. Para esto, fijaremos $\mathcal{M} = \prod_U M_k$ un ultraproducto de grafos finitos tal que \mathcal{M} es un modelo de T_∞ y cada M_k es regular de grado r_k . Iniciaremos con la definición de la configuración de un conjunto finito de vértices de M .

Definición 3.5 (Configuración). Sean $a_1, \dots, a_n \in M$ vértices. Definimos la matriz simétrica con 0's en la diagonal

$$\text{config}(a_1, \dots, a_n) = \begin{bmatrix} 0 & \text{dist}(a_1, a_2) & \dots & \text{dist}(a_1, a_n) \\ \text{dist}(a_2, a_1) & 0 & \dots & \text{dist}(a_2, a_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \text{dist}(a_n, a_1) & \text{dist}(a_n, a_2) & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

En principio, las entradas de esta matriz pueden ser infinitas, pero si estamos en el caso en que $\bar{d} = \langle d_{ij} \rangle_{i,j} \in M_{n \times n}(\mathbb{N})$ es simétrica, con 0's en la diagonal y todas sus entradas son finitas, entonces para todo par de tuplas \bar{b} y \bar{a} con esta configuración, va a existir un automorfismo $h \in \text{Aut}(M)$ tal que $h(a_i) = b_i$ para todo $i = 1, \dots, n$. De hecho, su tipo va a estar únicamente determinado por la fórmula

$$\Gamma_{\bar{d}}(\bar{y}) \equiv \bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} D_{d_{ij}}(y_i, y_j).$$

Teorema 3.6. *Considere las cardinalidades no-estándar*

$$\beta = |\mathcal{M}| \quad y \quad \alpha = [(r_1, r_2, \dots)]_{\mathcal{U}} = |D_1(a, \mathcal{M})| \in \mathbb{R}^*$$

donde a cualquier vértice de \mathcal{M} . Si E es un conjunto definible de M^1 , entonces existe $p_E(t_1, t_2)$ un polinomio en dos variables con coeficientes enteros tal que

$$|E| = p_E(\alpha, \beta).$$

Demostración. Como la teoría T_∞ tiene eliminación de cuantificadores en el lenguaje \mathcal{L}'_g , todo conjunto definible $E \subseteq M^1$ está determinado por una fórmula de la forma

$$\varphi(x, \bar{a}) \equiv \bigvee_{i=1}^k \bigwedge_{j=1}^{l_i} \tau_{ij}(x, \bar{a}) \tag{3.1}$$

donde $\tau_{ij}(x, \bar{a}) \in \{D_s(x, a_{ij}), \neg D_s(x, a_{ij}), x \neq a_{ij}, x = a_{ij}\}$ para algún $s \in \mathbb{N}$ y $\bar{a} \in M^r$. Aumentando el número de conjunciones y disjunciones de ser necesario, podemos suponer que los conjuntos

$$Y_1 = \bigwedge_{j=1}^{l_1} \tau_{1j}(\mathcal{M}, \bar{a}), \dots, Y_k = \bigwedge_{j=1}^{l_k} \tau_{kj}(\mathcal{M}, \bar{a})$$

son disjuntos. De esta forma, $|E| = \sum_{i=1}^k |Y_i|$ y como $\mathbb{Z}[t_1, t_2]$ es cerrado bajo sumas, basta probar la afirmación para conjuntos E definidos por una única conjunción de fórmulas básicas.

Si alguna de estas fórmulas básicas es de la forma $\tau_j(x, \bar{a}) \equiv (x = a_i)$, el conjunto definido solo podrá tener cardinalidad 0 o 1, y como $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}[t_1, t_2]$ basta considerar los otros casos.

Inicialmente probaremos la afirmación para E definido por una fórmula de la forma

$$\varphi(x, \bar{a}) \equiv \bigwedge_{j=1}^k D_{s_j}(x, a_j)$$

Veamos en primer lugar cómo funciona para $k \in \{1, 2\}$. Si $k = 1$, $\varphi(x, \bar{a}) \equiv D_s(x, a)$ y, por la definición de α , $|E| = \alpha(\alpha - 1)^{s-1}$. Por lo tanto, podemos tomar $p_E(t_1, t_2) = t_1(t_1 - 1)^{s-1}$ como el polinomio buscado.

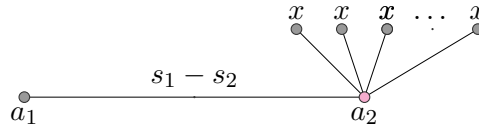
Para $k = 2$, $\varphi(x, a_1, a_2) \equiv D_{s_1}(x, a_1) \wedge D_{s_2}(x, a_2)$. En este caso la cardinalidad de E depende tanto de s_1 y de s_2 como de la distancia entre a_1 y a_2 . Sea $N = \text{dist}(a_1, a_2)$, si $N > s_1 + s_2$, entonces $E = \emptyset$. Si $N = s_1 + s_2$ entonces E es igual a $\{b\}$, donde b es el único elemento en el camino entre a_1 y a_2 que está a distancia s_1 de a_1 y $s_2 = N - s_1$ de a_2 . Falta únicamente por analizar cuando $N < s_1 + s_2$. En este caso, para cualquier $b \in E$, como $b \notin \text{acl}\{a_1, a_2\}$, por la proposición 1.14 debe existir un elemento c^b en la clausura algebraica de $\{a_1, a_2\}$, que sea el primer elemento en este conjunto en el camino único entre b y a_1 . Notemos que la ausencia de ciclos nos garantiza

que este va a ser el mismo primer elemento en el camino entre b y a_2 que pertenece a la clausura algebraica de a_1, a_2 . Este vértice c^b debe cumplir que para algún $i \in \{1, \dots, \min\{s_1, s_2\}\}$,

$$\text{dist}(c^b, a_1) = s_1 - i \text{ y } \text{dist}(c^b, a_2) = s_2 - i$$

En particular, $N = s_1 + s_2 - 2i$, lo que nos garantiza que el i es único, por lo tanto para todo $\tilde{b} \in E$, $c^b = c^{\tilde{b}} = c$. Veamos entonces los casos posibles para el vértice c :

- $c \in \{a_1, a_2\}$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $s_1 > s_2$, entonces en este caso, $N = s_1 - s_2$, y obtenemos la siguiente configuración:

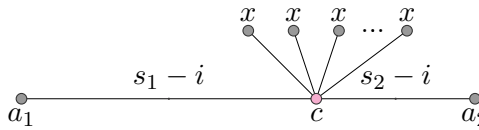


Para este caso, los elementos de E son todos los que están a distancia s_2 de a_2 , sin contar aquellos que están a distancia $s_2 - 1$ del vecino de a_2 en la clausura algebraica. Tenemos así que

$$|E| = (\alpha - 1)(\alpha - 1)^{s_2 - 1} = (\alpha - 1)^{s_2}$$

Por lo tanto, podemos tomar el polinomio $p_E(t_1, t_2) = (t_1 - 1)^{s_2}$.

- $c \neq a_1, a_2$, luego existe un $i \in \{1, \dots, \min\{s_1, s_2\} - 1\}$ tal que $\text{dist}(c, a_1) = s_1 - i$ y $\text{dist}(c, a_2) = s_2 - i$. En particular, esto nos garantiza que $N = s_1 + s_2 - 2i$, por lo que, para que E sea no vacío, $s_1 + s_2 - N$ debe ser un número par. Tenemos así la siguiente configuración:



En este caso, los elementos en E serán los que están a distancia i de c , pero no a distancia $i - 1$ de los vecinos de c en $\text{acl}(\{a_1, a_2\})$, es decir,

$$|E| = (\alpha - 2)(\alpha - 1)^{i - 1} = (\alpha - 2)(\alpha - 1)^{\frac{s_1 + s_2 - N}{2} - 1}.$$

Por lo tanto, podemos tomar el polinomio $p_E(t_1, t_2) = (t_1 - 2)(t_1 - 1)^{\frac{s_1 + s_2 - N}{2} - 1}$. Notemos entonces que los polinomios escogidos en estos casos, están determinados por la configuración $\text{config}(\{a_1, a_2\})$.

Para probar el caso generalizado con $\varphi(x, \bar{y}) \equiv \bigwedge_{j=1}^k D_{s_j}(x, a_j)$, debemos dar algunas definiciones.

Definición 3.7. Sea $A = \text{acl}(\{a_1, a_2, \dots, a_k\})$. Recordemos de la sección 1.5, que A está conformado por todos los vértices en los caminos entre cualquier par a_i, a_j . Para todo $\tilde{d} \in A$, definimos

$$\text{deg}_A(\tilde{d}) = \text{número de vecinos de } \tilde{d} \text{ en } A.$$

Por la proposición 1.38, A es finito, por lo tanto $\text{deg}_A(\tilde{d})$ también lo es.

Al igual que en el caso anterior, si $|E| > 1$ debe existir un $c \in A$ y $i \in \{1, 2, \dots, \min_j \{a_j\}\}$ tal que:

1. Para todo $b \in E$, $i = \text{dist}(b, c)$,
2. Para todo $j \leq k$, $\text{dist}(c, a_j) = s_j - i$,

lo que garantiza la unicidad del c . Con este elemento fijo podemos concluir

$$|E| = (\alpha - \text{deg}_A(c))(\alpha - 1)^{s_1 - \text{dist}(c, a_1) - 1}$$

y podemos tomar como polinomio $p_E(t_1, t_2) = (t_1 - \text{deg}_A(c))(t_1 - 1)^{s_1 - \text{dist}(c, a_1) - 1}$, que está determinado únicamente por la configuración de los vértices a_1, a_2, \dots, a_k y las distancias s_1, s_2, \dots, s_k .

Ahora veamos el caso en que E está definido por una fórmula de la forma

$$\varphi(x, \bar{a}) \equiv \bigwedge_{i=1}^{k_1} D_{s_i}(x, a_i) \wedge \bigwedge_{j=1}^{k_2} \neg D_{t_j}(x, a_j)$$

para $k_1, k_2 > 0$. Sabemos que $|\bigwedge_{i=1}^{k_1} D_{s_i}(x, a_i)| = q(\alpha, \beta)$ para algún $q(t_1, t_2) \in \mathbb{Z}[t_1, t_2]$. Sea entonces $\theta(x, \bar{a}) \equiv \bigwedge_{i=1}^{k_1} D_{s_i}(x, a_i)$, tenemos

$$\begin{aligned} |\varphi(\mathcal{M}, \bar{a})| &= \left| \theta(\mathcal{M}, \bar{a}) \right| - \left| \theta(\mathcal{M}, \bar{a}) \wedge \bigvee_{j=1}^{k_2} D_{t_j}(x, a_j) \right| \\ &= \left| \theta(\mathcal{M}, \bar{a}) \right| - \left| \bigvee_{j=1}^{k_2} \theta(\mathcal{M}, \bar{a}) \wedge D_{t_j}(x, a_j) \right| \end{aligned}$$

Y por el principio de *inclusión-exclusión*, obtenemos

$$\begin{aligned} |\varphi(\mathcal{M}, \bar{a})| &= \left| \theta(\mathcal{M}, \bar{a}) \right| - \sum_{j=1}^{k_2} \left| \theta(\mathcal{M}, \bar{a}) \wedge D_{t_j}(\mathcal{M}, \bar{a}) \right| + \sum_{j_1 < j_2 \leq k_2} \left| \theta(\mathcal{M}, \bar{a}) \wedge D_{t_{j_1}}(\mathcal{M}, \bar{a}) \wedge D_{t_{j_2}}(\mathcal{M}, \bar{a}) \right| \\ &\quad - \dots + (-1)^{k_2} \left| \theta(\mathcal{M}, \bar{a}) \wedge \bigwedge_{j=1}^{k_2} D_{t_j}(\mathcal{M}, \bar{a}) \right| \end{aligned}$$

Por lo anterior, cada una de las cardinalidades que aparece en los sumandos se puede escribir como un polinomio en términos de α y β , por lo tanto podemos concluir la afirmación para este caso.

Un resultado similar se obtiene cuando solo tenemos negaciones de fórmulas atómicas

$$\varphi(x, \bar{a}) \equiv \bigwedge_{j=1}^k \neg D_{s_j}(x, a_j).$$

Si $k = 1$, $\varphi(x, a) \equiv \neg D_s(x, a)$. En este caso $|E| = \beta - \alpha(\alpha - 1)^{s-1}$. Así, podemos tomar como polinomio $p_E(t_1, t_2) = t_2 - t_1(t_1 - 1)^{s-1}$.

Para el caso más general, como $\varphi(x, \bar{a}) \equiv \bigwedge_{j=1}^k \neg D_{s_j(x, a_j)} \equiv \neg(\bigvee_{j=1}^k D_{s_j}(x, a_j))$, de igual manera podemos utilizar el principio de *inclusión-exclusión*, obteniendo

$$|E| = \beta - \sum_{j=1}^k |D_{s_j}(\mathcal{M}, a_j)| + \sum_{j_1 < j_2 \leq k} |D_{s_{j_1}}(\mathcal{M}, a_{j_1}) \wedge D_{s_{j_2}}(\mathcal{M}, a_{j_2})| - \dots + (-1)^k \left| \bigwedge_{j=1}^k D_{s_j}(\mathcal{M}, a_j) \right|.$$

Como cada uno de los sumandos se puede ver como un polinomio en dos variables evaluado en α y β , y cada uno de los polinomios depende únicamente de s_1, \dots, s_k y de $\text{config}(\{a_1, \dots, a_n\})$, concluimos la afirmación inicial en este caso.

Por último, veamos qué sucede cuando alguna de las fórmulas $\tau_j(x, \bar{a}) \equiv a_i \neq x$. Si $\varphi(x, \bar{a})$ es de la forma $\varphi(x, \bar{a}) \equiv \bigwedge_{i=1}^k x \neq a_i$ entonces $|E| = \beta - k$ suponiendo que todos los a_i son diferentes. Así, podemos tomar el polinomio $p(t_1, t_2) = t_2 - k$.

Si por el contrario φ es de la forma

$$\varphi(x, \bar{a}) \equiv \theta(x, \bar{a}) \wedge \bigwedge_{i=1}^k x \neq a_i$$

para alguna fórmula $\theta(x, \bar{a})$ de las formas analizadas previamente, entonces $|E| = q(\alpha, \beta) - K$ donde $q(\alpha, \beta) = |\theta(x, \bar{a})|$ y $K = \#\{i \leq k : a_i \in \theta(\mathcal{M}, \bar{a})\}$. En este caso tomamos el polinomio $p(t_1, t_2) = q(t_1, t_2) - K$ y concluimos la demostración. \square

Teorema 3.8. Sean \mathcal{M}, α y β como en el teorema 3.6. Para toda \mathcal{L}'_g -fórmula $\varphi(x, \bar{y})$ existen finitos polinomios $p_1^\varphi, p_2^\varphi, \dots, p_{k_\varphi}^\varphi \in \mathbb{Z}[t_1, t_2]$ y finitas fórmulas $\psi_1(\bar{y}), \psi_2(\bar{y}), \dots, \psi_{k_\varphi}(\bar{y})$ tales que

1. La familia $\{\psi_i(\bar{y})\}_{i=1}^{k_\varphi}$ define una partición de $M^{|\bar{y}|}$.
2. Para todo \bar{a} , se cumple $\mathcal{M} \models \psi_i(\bar{a}) \iff |\varphi(\mathcal{M}, \bar{a})| = p_i(\alpha, \beta)$.

Demostración. Consideremos una \mathcal{L}'_g -fórmula $\varphi(x, \bar{y})$ de la forma

$$\varphi(x, \bar{y}) \equiv \bigwedge_{j=1}^k D_{s_j}(x, y_j)$$

Al igual que en la demostración anterior, analizaremos qué pasa cuando $k = 2$. En este caso $\varphi(x, y_1, y_2) \equiv D_{s_1}(x, y_1) \wedge D_{s_2}(x, y_2)$. Por lo que se analizó previamente, para a_1 y a_2 vértices, si $n = \min\{s_1, s_2\}$ y $N = \max\{s_1, s_2\}$ se tiene

$$|\varphi(\mathcal{M}, a_1, a_2)| = \begin{cases} 0 & si & \text{dist}(a_1, a_2) > s_1 + s_2 \\ 1 & si & \text{dist}(a_1, a_2) = s_1 + s_2 \\ (\alpha - 1)^n & si & \text{dist}(a_1, a_2) = N - n \\ (\alpha - 2)(\alpha - 1)^{i-1} & si & \text{existe } i \in \{1, \dots, n-1\} \text{ con} \\ & & \text{dist}(a_1, a_2) = s_1 + s_2 - 2i \\ 0 & \text{de lo contrario.} \end{cases}$$

Por lo tanto, podemos tomar las fórmulas y polinomios asociados como

$$\begin{array}{ll} \psi_1(y_1, y_2) \equiv D_{s_1+s_2}(y_1, y_2) & p_1^\varphi(t_1, t_2) = 1 \\ \psi_2(y_1, y_2) \equiv D_{N-n}(y_1, y_2) & p_2^\varphi(t_1, t_2) = (t_1 - 1)^n \\ \psi_3(y_1, y_2) \equiv D_{s_1+s_2-2}(y_1, y_2) & p_3^\varphi(t_1, t_2) = (t_1 - 2) \\ \psi_4(y_1, y_2) \equiv D_{s_1+s_2-4}(y_1, y_2) & p_4^\varphi(t_1, t_2) = (t_1 - 2)(t_1 - 1) \\ \vdots & \vdots \\ \psi_{n+1}(y_1, y_2) \equiv D_{s_1+s_2-2(n-1)}(y_1, y_2) & p_{n+1}^\varphi(t_1, t_2) = (t_1 - 2)(t_1 - 1)^{n-2} \\ \psi_{n+2}(y_1, y_2) \equiv \bigwedge_{j=0}^{s_1+s_2} \neg D_j(y_1, y_2) \vee \bigwedge_{k=1}^{n+1} \neg \psi_k(y_1, y_2) & p_{n+2}^\varphi(t_1, t_2) = 0 \end{array}$$

Ahora, para el caso general con $\varphi(x, \bar{y}) \equiv \bigwedge_{i=1}^k D_{s_i}(x, y_i)$ notemos que si tomamos $\bar{a} \in M^{|\bar{y}|}$, entonces para todo $1 \leq j_1 < j_2 \leq k$ se cumple

$$\varphi(\mathcal{M}, \bar{a}) \subseteq D_{s_{j_1}}(\mathcal{M}, a_{j_1}) \wedge D_{s_{j_2}}(\mathcal{M}, a_{j_2}).$$

Así, si $\text{dist}(a_{j_1}, a_{j_2}) > s_{j_1} + s_{j_2}$, entonces $\varphi(\mathcal{M}, \bar{a}) = \emptyset$. Por lo tanto, para que $\varphi(\mathcal{M}, \bar{a}) \neq \emptyset$, la configuración $\text{config}(\bar{a}) = \langle d_{ij} \rangle_{i,j}$ debe cumplir que para todo i, j $d_{ij} \leq s_i + s_j$. Esto nos garantiza que las configuraciones posibles para que el conjunto definido por $\varphi(x, \bar{a})$ sea no vacío, son finitas. De hecho,

$$(\# \text{ de configuraciones para las que } \varphi(\mathcal{M}, \bar{a}) \neq \emptyset) \leq \prod_{1 \leq i < j \leq n} (s_i + s_j + 1).$$

Para cada una de estas finitas configuraciones $\vec{d}^t = (d_{ij}^t)_{i,j}$, por lo probado en el teorema 3.6, va a existir una fórmula $\Gamma_{\vec{d}^t}(\bar{y})$ y un polinomio $p_t^\Gamma(t_1, t_2) \in \mathbb{Z}[t_1, t_2]$ tal que para cualquier $\bar{a} \in M^{|\bar{y}|}$ con $\mathcal{M} \models \Gamma_{\vec{d}^t}(\bar{a})$, se cumple $|\varphi(\mathcal{M}, \bar{a})| = p_t^\varphi(\alpha, \beta)$. Como cada configuración está determinada por una fórmula y hay finitas de estas, podemos concluir la afirmación para este caso.

Si por otra parte

$$\varphi(x, \bar{y}) \equiv \bigwedge_{j=1}^{k_1} D_{s_j}(x, y_j) \wedge \bigwedge_{j=1}^{k_2} \neg D_{t_j}(x, y_j)$$

donde $k_2 > 0$, recordemos que la demostración del teorema anterior nos proporciona una construcción explícita de los polinomios que buscamos en función de los polinomios definidos en el caso anterior. El número total de polinomios que podríamos tener es a lo más

$$\begin{aligned} & \prod_{1 \leq i < j \leq k_1} (s_i + s_j + 1) \cdot \prod_{r=1}^{k_2} \left(\prod_{1 \leq i < j \leq k_1} (s_i + s_j + 1) \cdot \prod_{i=1}^{k_1} (s_i + t_r + 1) \right) \cdot \\ & \prod_{1 \leq r_1 < r_2 \leq k_2} \left(\prod_{1 \leq i < j \leq k_1} (s_i + s_j + 1) \cdot \prod_{i=1}^{k_1} (s_i + t_{r_1} + 1) \cdot \prod_{i=1}^{k_1} (s_i + t_{r_2} + 1) \right) \cdots \\ & \prod_{1 \leq i < j \leq k_1} (s_i + s_j + 1) \cdot \prod_{r=1}^{k_2} \left(\prod_{i=1}^{k_1} (s_i + t_r + 1) \right) < \infty. \end{aligned}$$

Por último, si $\varphi(x, \bar{y})$ es de la forma $\theta(x, \bar{y}) \wedge \bigwedge_{i=1}^k x \neq y_i$ para $\theta(x, \bar{y})$ una fórmula como en los casos anteriores, entonces se tiene la misma cota de antes multiplicada por $(k+1)$, que equivale al número de posibles a_i en $\theta(\mathcal{M}, \bar{a})$. Podemos entonces concluir la afirmación inicial para toda \mathcal{L}'_g -fórmula. \square

Hasta ahora hemos probado que para los conjuntos definibles $E \subset M^1$ se puede tener una caracterización explícita de las cardinalidades posibles. Es posible generalizar este resultado a cualquier conjunto definible de M^n utilizando eliminación de cuantificadores y un argumento por inducción en n . Sin embargo, el teorema 4.8 (que será enunciado en el siguiente capítulo) nos garantiza que basta analizar únicamente las fórmulas en una sola variable para tener un resultado general.

Capítulo 4

Clases asintóticas

El concepto de *clase asintótica 1-dimensional* fue definido en 2007 por Macpherson y Steinhorn en [7]. Estas son clases de estructuras finitas donde se tiene un control polinomial rígido sobre las cardinalidades de los conjuntos definibles de cada estructura. Más adelante, este concepto fue generalizado con las llamadas *clases multidimensionales asintóticas*, que extienden el concepto de control dado anteriormente, permitiendo otro tipo de funciones para las posibles cardinalidades de conjuntos definibles. En este capítulo se darán las definiciones básicas y se probarán dos resultados principales: los grafos de Paley forman una clase asintótica 1-dimensional, mientras que cualquier clase de grafos finitos que cumplan las condiciones descritas en el teorema 2.24, forma una clase multidimensional exacta.

4.1. Clases asintóticas

Definición 4.1 (Macpherson, Steinhorn). Consideremos \mathcal{C} una clase de \mathcal{L} -estructuras finitas; decimos que \mathcal{C} es una *clase asintótica 1-dimensional* si para toda \mathcal{L} -fórmula $\varphi(x, \bar{y})$ existe una constante $d_\varphi > 0$ y un conjunto finito $E_\varphi \subset \mathbb{R}^{>0}$ que cumplen

1. Para toda estructura finita $M \in \mathcal{C}$ y $\bar{a} \in M^{|\bar{y}|}$, se satisface que $|\varphi(M, \bar{a})| \leq d_\varphi$ o existe un $\mu \in E_\varphi$ tal que

$$||\varphi(M, \bar{a})| - \mu|M|| \leq d_\varphi|M|^{\frac{1}{2}}.$$

2. Para todo $\mu \in E_\varphi$ existe una fórmula $\psi_\mu(\bar{y})$ tal que para toda estructura $M \in \mathcal{C}$ y $\bar{a} \in M^{|\bar{y}|}$,

$$M \models \psi_\mu(\bar{a}) \text{ si y solo si } ||\varphi(M, \bar{a})| - \mu|M|| \leq d_\varphi|M|^{\frac{1}{2}}.$$

En una clase asintótica 1-dimensional los tamaños de conjuntos definidos por una fórmula $\varphi(x, \bar{y})$ son asintóticamente de la forma $\mu|M|$.

Como hemos visto, trabajar sobre teorías con eliminación de cuantificadores simplifica significativamente el estudio de propiedades modelo-teóricas de una estructura. El siguiente resultado

muestra que cuando todos los ultraproductos infinitos de una clase de estructuras finitas satisfacen eliminación de cuantificadores, ésta propiedad se refleja en las estructuras finitas como una especie de eliminación “eventual” de cuantificadores.

Lema 4.2. *Sea $C = \{M_1, M_2, \dots\}$ una clase de estructuras finitas tal que cualquier ultraproducto infinito $\mathcal{M} = \prod_{\mathcal{U}} M_k$ es un modelo de una \mathcal{L} -teoría $T = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots\}$ con eliminación de cuantificadores.*

Si para todo k existe $N_k \in \mathbb{N}$ tal que $M_n \models \sigma_k$ para todo $n \geq N_k$, entonces para toda fórmula $\varphi(\bar{x})$ existe una \mathcal{L} -fórmula libre de cuantificadores $\psi(\bar{x})$ y $K_\varphi \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m \geq K_\varphi$, $M_m \models \forall \bar{x}(\varphi(\bar{x}) \leftrightarrow \psi(\bar{x}))$.

Demostración. Sea $\varphi(\bar{x})$ una \mathcal{L} -fórmula. Como T es una teoría con eliminación de cuantificadores, entonces existe una fórmula $\psi(\bar{x})$ libre de cuantificadores, tal que

$$T \vdash \forall \bar{x}(\varphi(\bar{x}) \leftrightarrow \psi(\bar{x})).$$

Entonces, por el teorema de compacidad existen finitas sentencias $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ en T_∞ que satisfacen

$$\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\} \vdash \forall \bar{x}(\varphi(\bar{x}) \leftrightarrow \psi(\bar{x})).$$

Así, tomando $K_\varphi = \max\{N_1, \dots, N_n\}$, tenemos por hipótesis que para todo $m > K_\varphi$ se cumple $M_m \models \sigma_1 \wedge \dots \wedge \sigma_n$, por lo cual $M_m \models \forall x(\varphi(\bar{x}) \leftrightarrow \psi(\bar{x}))$. \square

Ejemplo 4.3 (Grafos de Paley). Los grafos de Paley forman una clase 1-dimensional asintótica.

Demostración. Sea $\varphi(x, \bar{y})$ una \mathcal{L}_g -fórmula. Como vimos en el capítulo 2, RG es una teoría con eliminación de cuantificadores, entonces podemos tomar una constante K_φ como en el lema 4.2, tal que para todo $q \geq K_\varphi$, $P_q \models \forall x \forall \bar{y}(\varphi(x, \bar{y}) \leftrightarrow \hat{\varphi}(x, \bar{y}))$ para $\hat{\varphi}(x, \bar{y})$ una fórmula libre de cuantificadores. Notemos que para los $q' < K_\varphi$, la cardinalidad de $|P_{q'}|$ está acotada por K_φ , por lo que se puede tomar $d_\varphi \geq K_\varphi$. Veamos qué pasa para los $q \geq K_\varphi$.

Consideremos inicialmente una fórmula de la forma

$$\hat{\varphi}(x, \bar{y}) \equiv \bigwedge_{i \in A} xRy_i \wedge \bigwedge_{j \in B} \neg xRy_j$$

para $A \cup B = \{1, 2, \dots, n\}$. Por el corolario 2.22 tenemos que para todo q y $\bar{a} \in P_q^{|\bar{y}|}$

$$||\hat{\varphi}(x, \bar{a})| - 2^{-m}q| \leq \frac{1}{2}((m-2) + 2^{-m+1})q^{1/2} + \frac{m}{2},$$

donde m es el número de vértices a_i diferentes en \bar{a} . Tenemos entonces

$$||\hat{\varphi}(x, \bar{a})| - 2^{-m}|P_q|| \leq \frac{1}{2} \left((m-2) + 2^{-m+1} + \frac{m}{2} \right) |P_q|^{1/2},$$

por lo que podemos concluir la parte (1) de la definición 4.1 para este caso, tomando la constante como $d_\varphi = \frac{1}{2}((m-2) + 2^{-m+1}) + \frac{m}{2}$ y $\mu = 2^{-m}$.

Para la segunda parte, notemos que lo único que define el μ a elegir es el número de vértices distintos en \bar{a} . Así, podemos tomar $|\bar{y}| = n$ distintas fórmulas $\psi_1(\bar{y}), \dots, \psi_n(\bar{y})$ donde $P_q \models \psi_i(\bar{a})$ si y solo si existen exactamente i diferentes vértices en \bar{a} .

Para las otras posibles fórmulas libres de cuantificadores, notemos que si una fórmula es de la forma

$$\hat{\varphi}(x, \bar{y}) \equiv \theta(x, \bar{y}) \wedge \bigwedge_{k=1}^N x = y_k$$

para $\theta(x, \bar{y})$ como antes, entonces para todo q y $\bar{a} \in P_q^{|\bar{y}|}$, se tiene $|\hat{\varphi}(x, \bar{a})| \leq N$, por lo que podemos tomar $d_\varphi \geq N$.

De forma análoga, si la fórmula es de la forma

$$\hat{\varphi}(x, \bar{y}) \equiv \theta(x, \bar{y}) \wedge \bigwedge_{k=1}^N x \neq y_k,$$

entonces, para todo q y $\bar{a} \in F_q$, se tiene $|\hat{\varphi}(P_q, \bar{a})| = |\theta(P_q, \bar{a})| - K$ donde K es el número de elementos de \bar{a} en $\theta(P_q, \bar{a})$, por lo tanto se reduce de nuevo a los casos anteriores.

Por último, podemos considerar fórmulas más generales

$$\hat{\varphi}(x, \bar{y}) \equiv \bigvee_{k=1}^N \theta_k(x, \bar{y}),$$

con fórmulas $\theta_k(x, \bar{y})$ como en los casos anteriores. Al igual que en el capítulo 3, podemos suponer sin pérdida de generalidad, que para todo q y $\bar{a} \in P_q^{|\bar{y}|}$, los conjuntos definidos por los θ_k son disjuntos. En este caso, $|\varphi(P_q, \bar{a})| = \sum_{k=1}^t |\theta_k(P_q, \bar{a})|$. Por lo tanto, podemos también concluir la afirmación para este tipo de fórmulas. \square

El siguiente teorema nos garantiza que cualquier clase de grafos finitos que cumplan las condiciones del teorema 2.26, forman una clase 1-dimensional asintótica.

Teorema 4.4 (Macpherson-Steinhorn, 2007). *Sea \mathcal{C} una clase de \mathcal{L} -estructuras finitas tal que todo ultraproducto infinito de estructuras de \mathcal{C} es fuertemente minimal, entonces \mathcal{C} es una clase asintótica 1-dimensional.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{C} = \{M_k : k \in \mathbb{N}\}$ no es una clase asintótica 1-dimensional. Sea entonces $\varphi(x, \bar{y})$ tal que para todo $d_\varphi > 0$ y $E_\varphi \subset \mathbb{R}^{>0}$ finito no se cumplen las condiciones (1) y (2) de la definición 4.1. En particular, si tomamos $d_n = n$ y $D_n = \{1\}$, existen una estructura

$M_{k_n} \in \mathcal{C}$ y un elemento $\overline{a_{k_n}} \in M^{|y|}$ tales que

$$\begin{aligned} & |\varphi(M_{k_n}, \overline{a_{k_n}})| > n \quad \text{y} \quad ||\varphi(M_{k_n}, \overline{a_{k_n}})| - |M_{k_n}|| > n|M_{k_n}|^{1/2} \\ \implies & |\varphi(M_{k_n}, \overline{a_{k_n}})| > n \quad \text{y} \quad |\neg\varphi(M_{k_n}, \overline{a_{k_n}})| = |M_{k_n}| - |\varphi(M_{k_n}, \overline{a_{k_n}})| \geq n. \end{aligned}$$

Sea $\mathcal{M} = \prod_{\mathcal{U}} M_{k_n}$ un ultraproducto de las estructuras M_{k_n} sobre un ultrafiltro no principal \mathcal{U} que contenga al conjunto $\{k_1, k_2, \dots\}$, y definimos $\bar{b} = [(\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots)]_{\mathcal{U}}$. Por lo anterior, se tiene que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$|\varphi(\mathcal{M}, \bar{a})| \geq n \quad \text{y} \quad |\neg\varphi(\mathcal{M}, \bar{a})| \geq n,$$

Lo que quiere decir que $\varphi(\mathcal{M}, \bar{a})$ no es finito ni cofinito, contradiciendo que \mathcal{M} es una estructura fuertemente minimal. \square

4.2. Clases multidimensionales asintóticas

Definición 4.5. Sea \mathcal{L} un lenguaje y \mathcal{C} una clase de \mathcal{L} -estructuras finitas. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos el conjunto $\mathcal{C}(n)$ como $\mathcal{C}(0) = \mathcal{C}$ y para $n > 0$,

$$\mathcal{C}(n) = \{(\mathcal{N}, \bar{a}) : \mathcal{N} \in \mathcal{C}, \bar{a} \in N^n\}.$$

Definición 4.6 (Partición definible de $\mathcal{C}(n)$). Sea $P = \{\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m\}$ una partición de $\mathcal{C}(n)$. Decimos que P es una partición definible si existen \mathcal{L} -fórmulas $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_m$ tales que para todo $(\mathcal{N}, \bar{a}) \in \mathcal{C}(n)$, se satisface

$$\mathcal{N} \models \psi_i(x, \bar{a}) \text{ si y solo si } (\mathcal{N}, \bar{a}) \in \pi_i.$$

Definición 4.7 (Clase multidimensional asintótica). Sea \mathcal{C} una clase de \mathcal{L} -estructuras finitas y R un conjunto de funciones $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$. Decimos que \mathcal{C} es una *clase multidimensional asintótica* para R (R -mac) si para toda \mathcal{L} -fórmula $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ existe una partición finita definible P de $\mathcal{C}(|\bar{y}|)$ tal que para todo $\pi \in P$ y $\epsilon > 0$ existe un $h_\pi \in R$ y un $K_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que si $(\mathcal{N}, \bar{a}) \in \pi$ cumple $|N| > K_\epsilon$, entonces

$$\left| |\varphi(\mathcal{N}^{|\bar{x}|}, \bar{a})| - h_\pi(\mathcal{N}) \right| \leq \epsilon h_\pi(\mathcal{N}).$$

Definición 4.8 (Clase multidimensional exacta). Sea \mathcal{C} una clase de \mathcal{L} -estructuras y sea $R \subseteq \{f : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{N}\}$ un conjunto de funciones. La familia \mathcal{C} es una *clase multidimensional exacta* (R -mec) si para toda fórmula $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$, existe una partición definible P de $\mathcal{C}(|\bar{y}|)$ tal que para todo $\pi \in P$ existe $h_\pi \in R$ y para todo $(\mathcal{N}, \bar{a}) \in \pi$

$$|\varphi(\mathcal{N}^{|\bar{x}|}, \bar{a})| = h_\pi(\mathcal{N}).$$

Directamente de la definición podemos notar que para toda R -mec \mathcal{C} , el conjunto R debe ser cerrado bajo sumas y productos. Esto se tiene porque dados dos conjuntos definibles y disjuntos X

y Y , $|X \cup Y| = |X| + |Y|$, y $|X \times Y| = |X| \cdot |Y|$. El siguiente lema nos permite reducir la complejidad a la hora de demostrar que una clase de estructuras es una clase exacta multidimensional.

Lema 4.9 (Projection Lemma). *Sea \mathcal{C} una clase de \mathcal{L} -estructuras finitas y $R \subseteq \{f : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{N}\}$. Si las condiciones en la definición 4.8 valen para fórmulas $\varphi(x, \bar{y})$ donde x es una única variable, entonces \mathcal{C} es una R' -mec para algún $R' \supseteq R$.*

Demostración. Se puede encontrar en [10], Lemma 2.3.1. La demostración se hace por inducción en el número de variables, y para fórmulas $\varphi(x_1, \dots, x_{n+1}; \bar{y})$ se utiliza la descomposición que se tiene por hipótesis de inducción para fórmulas de la forma $\varphi(x_{n+1}; x_1, \dots, x_n, \bar{y})$ (pensándola como una fórmula en una variable y con parámetros x_1, \dots, x_n, \bar{y}) y $\exists x_{n+1} \varphi(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}; \bar{y})$. \square

Ejemplo 4.10. Sea $\mathcal{L} = \{<\}$ y \mathcal{C} la clase de todos los ordenes lineales finitos, entonces \mathcal{C} no es una R -mec.

Demostración. Considere la fórmula $\varphi(x, y) \equiv (x < y)$ y supongamos que existe un R tal que \mathcal{C} es un R -mec. Por la definición, existe una partición $P = \{\pi_1, \dots, \pi_k\}$ de $\mathcal{C}(1) = \{(\mathcal{N}, a) : \mathcal{N} \in \mathcal{C}, a \in N\}$ con funciones de medida $\{h_{\pi_i} : 1 \leq i \leq k\} \subseteq R$. Considere $\mathcal{M}_k = \{a_1 < \dots < a_{k+1}\} \in \mathcal{C}$. Notemos que para todo $j \in \{1, \dots, k+1\}$, $\varphi(\mathcal{M}_k, a_j) = \{a_1, \dots, a_{j-1}\}$, por lo que $|\varphi(\mathcal{M}_k, a_j)| = j - 1$. Por lo tanto, hay $k+1$ diferentes cardinalidades y, como solo hay k posibilidades para h_{π} , llegamos a una contradicción. \square

Teorema 4.11. *Sea $\mathcal{C} = \{M_k : k < \omega\}$ una clase de grafos finitos tal que*

1. $\lim_{k \rightarrow \infty} |V(M_k)| = \infty$.
2. *Existe $\{r_k\}_{k \in \omega}$ una familia de naturales con $\lim_{k \rightarrow \infty} r_k = \infty$ tal que para todo k , M_k es r_k -regular.*
3. $\lim_{k \rightarrow \infty} \text{girth}(M_k) = \infty$.

Entonces \mathcal{C} es una clase multidimensional exacta sobre $R = \mathbb{Z}[t_1, t_2]$.

Demostración. Sea $\varphi(x, \bar{y})$ una \mathcal{L}'_g -fórmula. Como T_∞ es una teoría con eliminación de cuantificadores, podemos tomar una constante K_φ como en el lema 4.2 tal que para todo $m \geq K_\varphi$, $M_m \models \forall x \forall \bar{y} \varphi(x, \bar{y}) \leftrightarrow \hat{\varphi}(x, \bar{y})$ donde $\hat{\varphi}(x, \bar{y})$ es una fórmula libre de cuantificadores.

Consideremos ahora $\mathcal{M} = \prod_{\mathcal{U}} M_k$ un ultraproducto infinito de grafos en \mathcal{C} . Por el teorema de Łoś y lo que vimos en el teorema 3.8, para $m \geq K_\varphi$ existen finitos polinomios $p_1, p_2, \dots, p_{n_\varphi} \in \mathbb{Z}[t_1, t_2]$ y fórmulas $\psi_1(\bar{y}), \psi_2(\bar{y}), \dots, \psi_{n_\varphi}(\bar{y})$ tales que para todo $\bar{a} \in M_m^{|y|}$

$$M_m \models \psi_i(\bar{a}) \text{ si y solo si } |\varphi(M_m, \bar{a})| = p_i(r_k, |M_m|).$$

Falta entonces considerar las estructuras M_k para $k < K_\varphi$. Notemos que la elección de K_φ nos garantiza que $|M_k| \leq N$ para algún $N \in \mathbb{N}$, así, las posibles cardinalidades de $\varphi(M_k, \bar{a})$ son

$0, 1, \dots, N$. Podemos entonces tener para $i = 1, \dots, N$ y $\bar{a} \in M_n^{|\mathcal{Y}|}$:

$$M_k \models \exists x_1, \dots, x_i \left(\bigwedge_{j=1}^i \varphi(x_j, \bar{a}) \wedge \neg \exists z \left(\bigwedge_{j=1}^i z \neq x_j \wedge \varphi(z, \bar{a}) \right) \right) \text{ si y solo si } |\varphi(M_k, \bar{a})| = i.$$

Así podemos concluir que \mathcal{C} es una clase multidimensional exacta. □

Bibliografía

- [1] Béla Bollobás. *Random graphs*. Second. Vol. 73. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 2001. DOI: 10.1017/CB09780511814068.
- [2] Xavier Dahan. «Regular graphs of large girth and arbitrary degree». En: *Combinatorica* 34.4 (2014). DOI: 10.1007/s00493-014-2897-6.
- [3] Darío García. «Introducción a la teoría de modelos de estructuras pseudofinitas. Notas de cursillo para el Congreso Colombiano de Matemáticas.» En: (2019). URL: <https://sites.google.com/view/dagarcia/teaching>.
- [4] Wilfrid Hodges. *Model theory*. Vol. 42. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press, Cambridge, 1993. DOI: 10.1017/CB09780511551574.
- [5] Wilfried Imrich. «Explicit construction of regular graphs without small cycles». En: *Combinatorica* 4.1 (1984). DOI: 10.1007/BF02579157.
- [6] Nati Linial y Michael Simkin. «A randomized construction of high girth regular graphs». En: *Random Structures Algorithms* 58.2 (2021). DOI: 10.1002/rsa.20976.
- [7] Dugald Macpherson y Charles Steinhorn. «One-dimensional asymptotic classes of finite structures». En: *Trans. Amer. Math. Soc.* 360.1 (2008). DOI: 10.1090/S0002-9947-07-04382-6.
- [8] David Marker. *Model theory*. Vol. 217. Graduate Texts in Mathematics. An introduction. Springer-Verlag, New York, 2002.
- [9] Anand Pillay. «Strongly minimal pseudofinite structures». En: (2014). arXiv: 1411.5008 [math.LO].
- [10] Daniel Wolf. «Multidimensional exact classes, smooth approximation and bounded 4-types». En: *J. Symb. Log.* 85.4 (2020). DOI: 10.1017/jsl.2020.37.