

**CALIBRACIÓN DEL MODELO DE HESTON PARA
VALORACIÓN DE OPCIONES EUROPEAS SOBRE DIVISAS**

Catalina Dorado Huertas

Director: René Meziat Vélez

Universidad de los Andes
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
2022

ABSTRACT

Las opciones son un activo financiero cuyo precio depende de otros activos. Estas son un contrato entre dos partes que le da al que ocupa la posición de poseedor el derecho de comprar o vender el activo subyacente por un precio específico dentro de un periodo de tiempo determinado. Un tipo de opciones son las opciones europeas tipo call, estas se pueden ejercer solo en la fecha de expiración y dan el derecho al poseedor de la opción a comprar el activo prescrito. En el caso de las opciones europeas tipo call sobre divisas, su precio está dado por la tasa representativa del mercado (TRM).

Un primer modelo apropiado para la valoración de opciones fue el presentado por Black y Scholes. Este modelo usa procesos estocásticos y es uno de los más usados mundialmente por su simplicidad computacional y relativa precisión. La ecuación de Black-Scholes asume que no hay parámetros variables, lo que implica que se toma la volatilidad como constante. Lo anterior va en contra del comportamiento del mercado ya que los activos tienen periodos impredecibles de quietud y otros de amplias oscilaciones. Como solución a este problema de volatilidad surgió el modelo de Heston. Este es análogo al modelo de Black-Scholes pero introduce un proceso estocástico para la volatilidad usando una pareja de ecuaciones diferenciales estocásticas acopladas.

El propósito de este proyecto es, basándose en el modelo de Heston y siguiendo las características del mercado, calibrar los parámetros del modelo para la TRM. En un primer momento se definen ciertos conceptos que están presentes en los modelos de Black-Scholes y Heston, como los procesos estocásticos y el movimiento Browniano, y se aplican los resultados del Lema de Ito y funciones características, entre otros, para derivar el modelo de Black-Scholes para opciones europeas tipo call y posteriormente el modelo de Heston. Luego, usando el método de momentos y la estimación de máxima verosimilitud junto con los datos de la TRM desde el 1 de enero del 2000, se calibran los parámetros del modelo de Heston de forma que este represente apropiadamente la TRM. Con los resultados anteriores se hicieron simulaciones usando lo hallado por ambos métodos para evaluar la calidad de los resultados. Finalmente, se valoran opciones europeas tipo call sobre divisas.

ÍNDICE

1. Introducción	4
2. Preliminares	5
2.1. Opciones financieras	5
2.2. Probabilidad	5
2.3. Medida	6
3. Modelo de Black-Scholes	8
3.1. Procesos estocásticos	8
3.2. Movimiento Browniano	8
3.3. Lema de Ito	9
3.4. Ecuación de Black-Scholes	10
4. Modelo de Heston	14
4.1. Precio de una opción europea tipo call	14
4.2. Ecuación diferencial parcial de Heston	15
4.2.1. Ecuación diferencial parcial de P_1 y P_2	17
4.3. Planteamiento función característica de Heston	18
4.4. Solución ecuación de Riccati	19
5. Estimación de los parámetros	21
5.1. Discretización del modelo de Heston	21
5.2. Método de momentos	22
5.3. Estimación de máxima verosimilitud	31
6. Aplicación del modelo	34
7. Implementación computacional	36
8. Conclusión	41
9. Referencias	42

1. INTRODUCCIÓN

Las opciones son un tipo de derivado financiero, es decir, su precio depende de otros activos o de sus precios. Estas son un contrato entre dos partes que le da al que ocupa la posición de poseedor el derecho de comprar o vender el activo subyacente por un precio específico dentro de un periodo de tiempo determinado. Hay dos tipos de opciones, las americanas y las europeas. Las europeas se pueden ejercer solo en la fecha de expiración mientras que las americanas se pueden ejercer antes. En las últimas décadas ha habido un crecimiento sustancial en el mercado de derivados financieros, por lo que ha sido necesario establecer modelos para valorar opciones. Esto es importante ya que el cálculo del valor de una opción es requerido por la economía de muchos países.

Un primer modelo apropiado para la valoración de opciones fue el presentado por Black y Scholes en la segunda mitad del siglo XX. Este modelo usa procesos estocásticos y es uno de los más usados mundialmente debido a su simplicidad computacional y su relativa precisión. La ecuación de Black-Scholes asume que el mercado tiene un comportamiento log-normal y no tiene parámetros variables, lo que permite que se llegue a un precio claro y de forma directa. Algo característico de este modelo es que toma la volatilidad como constante.

Si bien el modelo de Black-Scholes es relativamente acertado, tomar la volatilidad como constante va en contra del comportamiento del mercado donde los activos tienen periodos impredecibles de quietud y otros de amplias oscilaciones. Como solución a este problema de la volatilidad han surgido varios modelos con volatilidad variable de tipo estocástico, que permiten que haya variaciones en el precio del activo y en la volatilidad, entre ellos el modelo de Heston. Este surgió en 1993 y es análogo al modelo de Black-Scholes pero introduce un proceso estocástico para la varianza usando una pareja de ecuaciones diferenciales estocásticas acopladas.

Por otra parte, las opciones europeas sobre divisas son utilizadas como cobertura ante el riesgo, o la volatilidad cambiaria, por parte de exportadores y negociadores de divisas, y son utilizadas en países con tasa de cambio variable producto de un mercado cambiario. En Colombia, el mercado de opciones europeas sobre divisas, cuyo precio está dado por la TRM, no está muy desarrollado pero ha ido creciendo en los últimos años. El propósito de este proyecto es, basándose en el modelo de Heston y siguiendo las características del mercado, calibrar las variables del modelo de forma que este represente apropiadamente la TRM. Para ello, se hará uso de implementaciones numéricas propias en Python. Posteriormente, usando el modelo de Heston calibrado, se busca valorar opciones europeas tipo call definidas sobre la TRM.

2. PRELIMINARES

Vamos a iniciar definiendo algunos conceptos, matemáticos y financieros, que serán empleados a lo largo de este trabajo y son necesarios para el correcto desarrollo y entendimiento del proyecto.

2.1. OPCIONES FINANCIERAS

Definición 1 (Opción financiera). Instrumento financiero derivado que se establece en un contrato que otorga el derecho a comprar o vender el activo subyacente en un periodo de tiempo y precio determinado.

Existen diversos tipos de opciones. En este proyecto vamos a trabajar únicamente con las opciones europeas tipo call.

Definición 2 (Opción europea tipo call). Opción financiera en la cual se le da el derecho al poseedor de la opción de comprar determinado activo en la fecha de expiración por la cantidad prescrita, conocida como el precio de ejercicio.

Definición 3 (Tasa representativa del mercado (TRM)). Cantidad de pesos colombianos por un dólar estadounidense. Se calcula con base en las operaciones de compra y venta de divisas registradas el día hábil inmediatamente anterior.

Definición 4 (Opción call sobre la tasa de cambio). Da al poseedor el derecho de comprar una divisa a un precio especificado. El precio de ejercicio de la opción corresponde a la TRM. Estas se usan para desacumular reservas internacionales.

2.2. PROBABILIDAD

Definición 5 (Función característica). La función característica ϕ_X de una variable aleatoria X está dada por

$$\phi_X(t) = \mathbb{E} [e^{itX}], \quad -\infty < t < \infty.$$

Para una variable aleatoria continua X con función de densidad f_X , la función característica es la transformada de Fourier f_X , es decir,

$$\phi_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f_X(x) dx, \quad -\infty < t < \infty.$$

Definición 6 (Función generadora de momentos). La función generadora de momentos de una variable aleatoria X está dada por

$$M_X(s) = \mathbb{E} [e^{sX}].$$

Teorema 1. Sean X y Y variables aleatorias independientes. Entonces, $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$.

Demostración. Sabemos que $\text{cov}(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$. Además, como X y Y son independientes, $\text{cov}(X, Y) = 0$. Luego

$$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y].$$

□

Definición 7 (Distribución normal). Sea X una variable aleatoria normal, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, con parámetros μ y σ . Tenemos que

$$E(X) = \mu, \quad \text{Var}(X) = \sigma^2.$$

Además, su función generadora de momentos está dada por

$$M_X(s) = E(e^{sX}) = e^{\{s\mu + \frac{1}{2}s^2\sigma^2\}}. \quad (1)$$

Definición 8 (Distribución log-normal). Si X está distribuida normalmente con media μ y varianza σ^2 , entonces la variable aleatoria Y con distribución log-normal, $Y = e^X$, tiene función de densidad

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sigma y \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\log y - \mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad y > 0. \quad (2)$$

Usando la función generadora de momentos de la variable aleatoria X que tiene distribución normal, podemos encontrar que la media de la variable Y está dada por

$$E[Y] = M_X(1) = E[e^X] = e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2} \quad (3)$$

y

$$E[Y^2] = M_X(2) = E[e^{2X}] = e^{2(\mu + \sigma^2)} \quad (4)$$

lo que implica que la varianza de Y está dada por

$$\text{Var}[Y] = E[Y^2] - (E[Y])^2 = e^{2(\mu + \sigma^2)} - e^{2\mu + \sigma^2} = e^{2\mu + \sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1). \quad (5)$$

Definición 9 (Caminata aleatoria). Sea $Z_n, n \geq 1$ una sucesión de variables independientes idénticamente distribuidas. En una caminata aleatoria se pueden dar pasos hacia adelante o hacia atrás dependiendo de la variable aleatoria $Z = \{-1, +1\}$. En intervalos de tiempo definidos se puede dar un paso adelante ($Z = +1$) con probabilidad p o un paso atrás ($Z = -1$) con probabilidad $q = 1 - p$. Durante un intervalo de tiempo arbitrario, tenemos

$$\begin{aligned} E[Z] &= (+1)p + (-1)q = p - q \\ \text{Var}(Z) &= E[Z^2] - (E[Z])^2 = (+1)^2p + (-1)^2q - (p - q)^2 = 1 - (p - q)^2 \\ &= (p + q)^2 - (p - q)^2 = 4pq. \end{aligned}$$

2.3. MEDIDA

Definición 10 (Álgebra). Una colección \mathcal{F}_0 de subconjuntos de Ω es un álgebra en Ω si satisface:

- $\emptyset, \Omega \in \mathcal{F}_0$.
- Si $A \in \mathcal{F}_0$, entonces $X \setminus A \in \mathcal{F}_0$.
- Si $A, B \in \mathcal{F}_0$, entonces $A \cup B \in \mathcal{F}_0$.

Definición 11 (σ -álgebra). Una colección \mathcal{F} de subconjuntos de Ω es una σ -álgebra en Ω si satisface:

- $\emptyset, \Omega \in \mathcal{F}$.

- Si $A \in \mathcal{F}$, entonces $X \setminus A \in \mathcal{F}$.
- Si $A_1, A_2, A_3, \dots \in \mathcal{F}$, entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$. Un subconjunto que pertenece a \mathcal{F} es \mathcal{F} -medible.

Definición 12 (Medida). Una medida \mathbb{P} en (Ω, \mathcal{F}) es una función

$$\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$$

que satisface:

- $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
- Si $A_1, A_2, A_3, \dots \in \mathcal{F}$ son disjuntos por parejas, entonces

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

Cuando $\mathbb{P}(\Omega) = 1$, entonces \mathbb{P} es una medida de probabilidad

Definición 13 (Función medible). Una función $X : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow \mathbb{R}$ es medible si

$$X^{-1}((a, b)) \in \mathcal{F} \quad \text{para cada } a < b.$$

Definición 14 (Filtración). Sea Ω un espacio medible con una σ -álgebra \mathcal{F} . Tomemos una colección de sub- σ -álgebras $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in I}$ de \mathcal{F} . Si $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ para $s, t \in I$ tal que $s \leq t$, entonces $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in I}$ es una filtración.

Con estas definiciones vamos a seguir adelante explicando los modelos de valoración de opciones de Black-Scholes y Heston.

3. MODELO DE BLACK-SCHOLES

El objetivo de este capítulo es mostrar cómo se llegó a la fórmula de Black-Scholes para la valoración de opciones europeas tipo call. Para esto se utilizó la teoría de procesos estocásticos, incluyendo el movimiento Browniano y el Lema de Ito. La información contenida en esta sección es un recuento de [WHD95] y [Mez].

3.1. PROCESOS ESTOCÁSTICOS

Definición 15 (Procesos estocásticos). Un proceso estocástico es una sucesión de variables aleatorias $X_t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ parametrizadas por un tiempo t que pertenece a un conjunto indexado $I \subset \mathbb{R}$. Es decir, si tenemos un proceso estocástico $X : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, el mapa $X(t, \cdot) = X_t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es medible para cada $t \in I$.

Los precios de los activos se deben mover de forma aleatoria debido principalmente a que:

- La historia pasada se refleja en el precio presente del activo.
- Los mercados responden de manera inmediata a cualquier nueva información del activo.

Esto implica que el modelo de los precios de los activos trata de modelar la nueva información que afecta el precio.

Supongamos que en el tiempo t el precio de un activo es S . Podemos considerar un pequeño intervalo de tiempo dt durante el cual S cambia a $S + dS$. El modelo más sencillo descompone el retorno del activo dS/S en dos partes. La primera le da una contribución

$$\mu dt$$

al retorno dS/S donde μ es una medida del crecimiento promedio del precio del activo, también conocido como drift.

La segunda contribución modela el cambio aleatorio en el precio del activo, como respuesta a efectos externos como noticias inesperadas. Esto se presenta como una muestra aleatoria tomada de una distribución normal con media cero y suma el término

$$\sigma dX$$

a dS/S . Acá σ es la volatilidad que mide la desviación estándar de los retornos. Si unimos esto, tenemos la ecuación diferencial estocástica

$$\frac{dS}{S} = \sigma dX + \mu dt. \quad (6)$$

El término dX que contiene la aleatoriedad de ciertas características del precio del activo se conoce como movimiento Browniano o proceso de Wiener.

3.2. MOVIMIENTO BROWNIANO

Un proceso estocástico $\{W(t); t \geq 0\}$ es un movimiento Browniano si cumple las siguientes características:

1. $W_0 = 0$.

2. La aplicación $t \mapsto W_t, t \geq 0$ es continua.
3. Para una serie finita de tiempos fijos $0 \leq t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4 \leq \dots \leq t_{2n-1} < t_{2n}$, los incrementos

$$W_{t_2} - W_{t_1}, W_{t_4} - W_{t_3}, \dots, W_{t_{2n}} - W_{t_{2n-1}}$$

son independientes.

4. Para $0 \leq s \leq t$, el incremento $W_t - W_s$ está distribuido normalmente con media 0 y varianza $t - s$.
Nota: Como caso especial de esta afirmación tenemos que W_t es una variable aleatoria con distribución normal con media 0 y varianza t .

Propiedades

- $E[W_t] = 0$.

Demostración. Fijemos $t \in \mathbb{R}$, podemos ver que $W_t = W_0 + (W_t - W_0)$ lo que implica que, por las características 1 y 4 del movimiento Browniano, $E[W_t] = E[W_0] + E[W_t - W_0] = 0$. □

- $E[W_t W_s] = \min\{t, s\}$. Luego, $E[W_t^2] = t$.

Demostración. Supongamos que $s \leq t$. Entonces, como W_s y W_t son independientes, usando propiedades del valor esperado \mathbb{E} tenemos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[W_t W_s] &= \mathbb{E}[W_s] \mathbb{E}[W_t - W_s + W_s] \\ &= \mathbb{E}[W_s] \mathbb{E}[W_t - W_s] + \mathbb{E}[W_s^2] \\ &= 0 + s \end{aligned}$$

□

3.3. LEMA DE ITO

Teorema 2 (Fórmula de Ito). Sea $f(t, x) : [0, \infty) \times \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ una función suficientemente suave tal que sus derivadas parciales f_t, f_x, f_{xx} existen y son continuas. Fijemos una constante $0 < T < \infty$. Entonces, casi seguro,

$$\begin{aligned} &f(T, W_T) - f(0, W_0) \\ &= \int_0^T f_t(s, W_s) ds + \int_0^T f_x(s, W_s) dW_s + \frac{1}{2} \int_0^T f_{xx}(s, W_s) ds. \end{aligned}$$

Esta fórmula también se puede escribir en notación diferencial,

$$df(t, W_t) = f_t(t, W_t) dt + f_x(t, W_t) dW_t + \frac{1}{2} f_{xx}(t, W_t) dt.$$

Demostración. La demostración de este teorema se encuentra en el capítulo 11.2 de [Cho16]. □

En la vida real el precio de un activo se mide en intervalos de tiempo discretos pero esto nos daría muchísimos datos. La idea entonces es pasar nuestros modelos a un tiempo límite continuo $dt \rightarrow 0$. Para esto

necesitamos de algo que nos permita manejar el término aleatorio dX cuando $dt \rightarrow 0$. El lema de Ito nos permite manipular las variables aleatorias que necesitamos. Está dado por

$$\begin{aligned} df &= \frac{df}{dS}(\sigma S dX + \mu S dt) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{d^2 f}{dS^2} dt \\ &= \sigma S \frac{df}{dS} dX + \left(\mu S \frac{df}{dS} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{d^2 f}{dS^2} \right) dt, \end{aligned} \quad (7)$$

y relaciona un cambio pequeño en una función $f(S)$ de una variable aleatoria con un cambio pequeño en la variable en sí.

Este resultado lo podemos generalizar considerando una función de la variable aleatoria S y el tiempo t , $f(S, t)$ así:

$$df = \sigma S \frac{df}{dS} dX + \left(\mu S \frac{df}{dS} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{d^2 f}{dS^2} + \frac{\partial f}{\partial t} \right) dt. \quad (8)$$

3.4. ECUACIÓN DE BLACK-SCHOLES

Tenemos que $V(S, t)$ es el valor de una opción que es función del valor actual del activo S , y el tiempo t . El valor de la opción también depende de

- σ , la volatilidad del activo
- E , el precio de ejercicio
- T , la fecha de expiración
- r , la tasa de interés

donde σ y r son constantes.

Si en el momento $t = T$ en que expira la opción tenemos que $S > E$, tiene sentido ejercer la opción sobre un precio E para obtener más barato un activo con valor S . La ganancia de esta transacción es $S - E$. Por otro lado, si $S < E$ en el momento en que expira, no se ejerce la compra ya que tendría una pérdida de $E - S$. Esto implica que el valor de la acción en la fecha de expiración se puede escribir como

$$V(S, T) = \text{máx}(S - E, 0).$$

Para el modelo de Black-Scholes hay que tener en cuenta:

- El precio del activo $S(t)$ sigue una caminata lognormal.
- La tasa de interés libre de riesgo r y la volatilidad σ son funciones conocidas del tiempo.

Supongamos que tenemos una opción con un valor $V(S, t)$ que depende solo de S y t . Usando el lema de Ito 7, tenemos

$$dV = \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dX + \left(\mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t} \right) dt. \quad (9)$$

La función V debe tener al menos una derivada en función de t y dos en función de S .

Construimos un portafolio que consiste en una opción y un número $-\Delta$ del activo subyacente. El valor de este portafolio es

$$\Pi = V - \Delta S, \quad (10)$$

luego, el salto del valor de este portafolio en un paso es

$$d\Pi = dV - \Delta dS.$$

Si unimos 6, 9 y 10 tenemos entonces que Π sigue una caminata aleatoria

$$d\Pi = \sigma S \left(\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta \right) dX + \left(\mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t} - \mu \Delta S \right) dt,$$

podemos eliminar el componente aleatorio tomando

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}. \quad (11)$$

Note que Δ es el valor de $\frac{\partial V}{\partial S}$ al principio del tiempo dt . Luego,

$$d\Pi = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt. \quad (12)$$

Como el portafolio tiene una tasa libre de riesgo r , tenemos que $d\Pi = r\Pi dt$, es decir,

$$r\Pi dt = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt. \quad (13)$$

Si sustituimos 10 y 11 en 13 y dividimos entre dt tenemos

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0.$$

Esta es la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes.

Queremos buscar una expresión para resolver la ecuación. Consideremos el precio de una opción europea tipo call, con valor $C(S, t)$, precio de ejercicio E y fecha de expiración T . Tenemos entonces que en $t = T$,

$$C(S, T) = \max(S - E, 0).$$

Esta es la condición final para nuestra ecuación diferencial parcial. Si $S = 0$,

$$C(0, t) = 0$$

y como el precio crece sin cota superior tenemos que $C(S, t) \sim S$ cuando $S \rightarrow \infty$.

Hacemos el siguiente cambio de variables

$$C = Ev(x, \tau), \quad S = Ee^x, \quad t = T - \frac{\tau}{(\sigma^2/2)}$$

y suponemos que $v(x, \tau) = e^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau)$ donde $\alpha = \frac{1-k}{2}, \beta = \frac{-1}{4}(1+k)^2$ para simplificar el problema. El parámetro $k = \frac{r}{(\sigma^2/2)}$ vincula los parámetros financieros, donde r es la tasa libre de riesgo y σ la volatilidad asociada a la ecuación diferencial estocástica de Black-Scholes.

Tenemos entonces que la función $u(x, \tau)$ debe resolver el problema de valor inicial

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

bajo la condición

$$u(x, 0) = g(x) = \begin{cases} e^{-(\alpha-1)x} - e^{-\alpha x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

para $x \in \mathbb{R}$ y $\tau \geq 0$. La solución a este problema está dada por

$$u(x, \tau) = \mathbb{E}_{N(x, 2\tau)}(g) \quad \text{para } \tau > 0$$

donde \mathbb{E} es el valor esperado y $N(x, 2\tau)$ es la distribución normal con media x y varianza 2τ . Vamos a calcular $u(x, \tau)$ usando la función de distribución de probabilidad acumulada F_Z y la función de densidad de probabilidad f_Z de una variable aleatoria con distribución normal estándar Z .

Usando la sustitución $y = \frac{s-x}{\sqrt{2\tau}}$ tenemos

$$u(x, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g(s) \frac{1}{\sqrt{2\tau}} f_Z\left(\frac{s-x}{\sqrt{2\tau}}\right) ds = \int_{-x/\sqrt{2\tau}}^{\infty} g(x + \sqrt{2\tau}y) f_Z(y) dy.$$

Ahora, por las características de la función $g(x)$ tenemos

$$u(x, \tau) = e^{-(\alpha-1)x} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{-(\alpha-1)\sqrt{2\tau}y} f_Z(y) dy - e^{-\alpha x} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{-\alpha\sqrt{2\tau}y} f_Z(y) dy$$

Como ambas integrales son muy similares, podemos estudiarlas como la integral

$$I(\alpha) = \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{-\alpha\sqrt{2\tau}y} f_Z(y) dy = \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} \frac{e^{-\alpha\sqrt{2\tau}y} \times e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dy$$

Si sumamos los exponentes de los exponenciales que se multiplican en el integrando,

$$\frac{-y^2}{2} - \alpha\sqrt{2\tau}y = \frac{-1}{2} \left\{ (y + \alpha\sqrt{2\tau})^2 - 2\tau\alpha^2 \right\} = \frac{-(y + \alpha\sqrt{2\tau})^2}{2} + \tau\alpha^2$$

y usando la sustitución $w = y + \alpha\sqrt{2\tau}$ y la simetría en la función de distribución de probabilidad acumulada $F_Z(-\zeta) = 1 - F_Z(\zeta)$, tenemos que la integral que buscamos está dada por

$$I(\alpha) = e^{\tau\alpha^2} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} \frac{e^{-\frac{(y+\alpha\sqrt{2\tau})^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dy = e^{\tau\alpha^2} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \alpha\sqrt{2\tau}}^{\infty} f_Z(w) dw = e^{\tau\alpha^2} F_Z\left(\frac{x}{\sqrt{2\tau}} - \alpha\sqrt{2\tau}\right)$$

Luego,

$$u(x, \tau) = e^{-(\alpha-1)x + \tau(\alpha-1)^2} F_Z\left(\frac{x}{\sqrt{2\tau}} - (\alpha-1)\sqrt{2\tau}\right) - e^{-\alpha x + \tau\alpha^2} F_Z\left(\frac{x}{\sqrt{2\tau}} - \alpha\sqrt{2\tau}\right)$$

Teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned}
C(S, t) &= Ev(x(S), \tau(t)) \\
&= Ee^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau) \\
&= Ee^{\alpha x + \beta \tau} \left\{ e^{-(\alpha-1)x + \tau(\alpha-1)^2} F_Z \left(\frac{x}{\sqrt{2\tau}} - (\alpha-1)\sqrt{2\tau} \right) - e^{-\alpha x + \tau\alpha^2} F_Z \left(\frac{x}{\sqrt{2\tau}} - \alpha\sqrt{2\tau} \right) \right\} \\
&= Ee^{\beta \tau} \left\{ e^{x + \tau(\alpha-1)^2} F_Z \left(\frac{x}{\sqrt{2\tau}} - (\alpha-1)\sqrt{2\tau} \right) - e^{\tau\alpha^2} F_Z \left(\frac{x}{\sqrt{2\tau}} - \alpha\sqrt{2\tau} \right) \right\} \\
&= E \left\{ e^{x + \tau\{\beta + (\alpha-1)^2\}} F_Z \left(\frac{x}{\sqrt{2\tau}} - (\alpha-1)\sqrt{2\tau} \right) - e^{\tau\{\beta + \alpha^2\}} F_Z \left(\frac{x}{\sqrt{2\tau}} - \alpha\sqrt{2\tau} \right) \right\} \\
&= E \left\{ e^x F_Z \left(\frac{x - (\alpha-1)(2\tau)}{\sqrt{2\tau}} \right) - e^{-k\tau} F_Z \left(\frac{x - \alpha(2\tau)}{\sqrt{2\tau}} \right) \right\}
\end{aligned}$$

donde

$$\beta + (\alpha - 1)^2 = 0, \quad \beta + \alpha^2 = -k$$

si hacemos las sustituciones inversas

$$x = \ln \left(\frac{S}{E} \right), \tau = \frac{\sigma^2}{2} (T - t), \sqrt{2\tau} = \sigma \sqrt{T - t}, -\alpha = \frac{k-1}{2}, \quad -\alpha + 1 = \frac{k+1}{2}$$

obtenemos

$$C(S, t) = E \left\{ e^{\ln(\frac{S}{E}) F_Z \left(\frac{\ln(\frac{S}{E}) + \frac{(k+1)}{2} (\sigma^2(T-t))}{\sigma\sqrt{T-t}} \right)} - e^{-k\frac{\sigma^2}{2}(T-t)} F_Z \left(\frac{\ln(\frac{S}{E}) + \frac{(k-1)}{2} (\sigma^2(T-t))}{\sigma\sqrt{T-t}} \right) \right\}$$

y usando $k = \frac{r}{(\sigma^2/2)^r}$, podemos concluir que

$$C(S, t) = SF_Z \left(\frac{\ln(\frac{S}{E}) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right) - Ee^{-r(T-t)} F_Z \left(\frac{\ln(\frac{S}{E}) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right) \quad (14)$$

Hemos así presentado una introducción a los procesos de valoración de opciones europeas tipo call. Este resultado y su desarrollo son necesarios para comprender el objetivo y desarrollo del modelo de Heston.

4. MODELO DE HESTON

Como vimos anteriormente, el modelo de Black-Scholes toma la volatilidad como constante, yendo en contra del comportamiento del mercado donde los activos tienen periodos impredecibles de quietud y otros de amplias oscilaciones. Como solución a este problema surge el modelo de Heston, que permite que tanto el precio como la volatilidad varíen. El objetivo de este capítulo es mostrar cómo se llegó a la solución cerrada para el precio de una opción europea tipo call con volatilidad estocástica. La información contenida en esta sección se encuentra en [Rou13].

El modelo de Heston está dado por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas acopladas

$$dS_t = rS_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_{1t} \quad (15)$$

$$dv_t = k(\theta - v_t) dt + \sigma \sqrt{v_t} dW_{2t} \quad (16)$$

con las variables definidas así:

- S_t : Precio del activo en tiempo t
- r : Tasa de interés esperada (libre de riesgo)
- $\sqrt{v_t}$: Volatilidad (desviación estándar) del activo.
- σ : Volatilidad de la volatilidad $\sqrt{v_t}$
- θ : Varianza del precio a largo plazo
- k : Tasa de reversión de la varianza del precio a largo plazo
- dt : Incremento positivo infinitesimalmente pequeño.
- W_{1t} : Movimiento Browniano del precio del activo
- W_{2t} : Movimiento Browniano de la varianza del precio del activo
- ρ : Coeficiente de correlación para W_{1t} y W_{2t}

4.1. PRECIO DE UNA OPCIÓN EUROPEA TIPO CALL

Sea S_t el precio de una opción europea tipo call en el tiempo t , con precio de ejercicio K y fecha de expiración T . Además, asumamos que su tasa libre de riesgo es una constante r . Tenemos que

$$C(K) = S_t P_1 - K e^{-r\tau} P_2 \quad (17)$$

para $\tau = T - t$. Donde P_1 y P_2 están dados por

$$P_j = Pr(\ln S_T > \ln K).$$

4.2. ECUACIÓN DIFERENCIAL PARCIAL DE HESTON

Usando un proceso similar al que usamos para la ecuación de Black-Scholes, vamos a hallar la ecuación diferencial parcial de Heston. En este caso construimos un portafolio que consiste en una opción $V(S, v, t)$, Δ unidades de esta opción y φ unidades de otra opción $U(S, v, t)$. El valor de este portafolio es

$$\Pi = V + \Delta S + \varphi U$$

y el salto del valor de este portafolio en un paso está dado por

$$d\Pi = dV + \Delta dS + \varphi dU. \quad (18)$$

Ahora, aplicamos el lema de Ito al valor de la primera derivada $V(S, v, t)$. Usando el hecho de que $(dS)^2 = vS^2 (dW_1)^2$, $(dv)^2 = \sigma^2 v dt$ y $dS dv = \sigma v S dW_1 dW_2 = \sigma \rho v S dt$. Además, $(dt)^2 = 0$ y $dW_1 dt = dW_2 dt = 0$.

Tenemos que

$$dV = \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial S} dS + \frac{\partial V}{\partial v} dv + \frac{1}{2} v S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} dt + \frac{1}{2} v \sigma^2 \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} dt + \sigma \rho v S \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial v} dt. \quad (19)$$

Si hacemos el mismo proceso para $U(S, v, t)$ obtenemos 19 en términos de U . Si sustituimos en 18 obtenemos que el cambio en el valor del portafolio está dado por

$$\begin{aligned} d\Pi &= dV + \Delta dS + \varphi dU \\ &= \left[\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} v S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \rho \sigma v S \frac{\partial^2 V}{\partial v \partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 v \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} \right] dt \\ &\quad + \varphi \left[\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{2} v S^2 \frac{\partial^2 U}{\partial S^2} + \rho \sigma v S \frac{\partial^2 U}{\partial v \partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 v \frac{\partial^2 U}{\partial v^2} \right] dt \\ &\quad + \left[\frac{\partial V}{\partial S} + \varphi \frac{\partial U}{\partial S} + \Delta \right] dS + \left[\frac{\partial V}{\partial v} + \varphi \frac{\partial U}{\partial v} \right] dv. \end{aligned} \quad (20)$$

Para que el portafolio esté cubierto frente a movimientos en el stock y la volatilidad, los dos últimos términos deben ser cero. Es decir

$$\varphi = -\frac{\partial V}{\partial v} / \frac{\partial U}{\partial v}, \quad \Delta = -\varphi \frac{\partial U}{\partial S} - \frac{\partial V}{\partial S}. \quad (21)$$

Si sustituimos estos valores en 20 tenemos

$$\begin{aligned} d\Pi &= \left[\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} v S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \rho \sigma v S \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial v} + \frac{1}{2} \sigma^2 v \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} \right] dt \\ &\quad + \varphi \left[\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{2} v S^2 \frac{\partial^2 U}{\partial S^2} + \rho \sigma v S \frac{\partial^2 U}{\partial S \partial v} + \frac{1}{2} \sigma^2 v \frac{\partial^2 U}{\partial v^2} \right] dt. \end{aligned} \quad (22)$$

La condición de que el portafolio tenga la tasa libre de riesgo r , implica que $d\Pi = r\Pi dt$. Luego, tenemos que 18 se convierte en

$$d\Pi = r(V + \Delta S + \varphi U) dt \quad (23)$$

Ahora, si hallamos 23 con 22, sustituimos 21 y dividimos entre dt , obtenemos

$$\begin{aligned} & \frac{\left[\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}vS^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \rho\sigma vS \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial v} + \frac{1}{2}\sigma^2 v \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} \right] - rV + rS \frac{\partial V}{\partial S}}{\frac{\partial V}{\partial v}} \\ &= \frac{\left[\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{2}vS^2 \frac{\partial^2 U}{\partial S^2} + \rho\sigma vS \frac{\partial^2 U}{\partial S \partial v} + \frac{1}{2}\sigma^2 v \frac{\partial^2 U}{\partial v^2} \right] - rU + rS \frac{\partial U}{\partial S}}{\frac{\partial U}{\partial v}} \end{aligned} \quad (24)$$

Como la izquierda de la ecuación 24 es una función solo de V , y la derecha es una función solo de U , podemos escribir ambos lados como funciones $f(S, v, t)$. Consideremos la función

$$f(S, v, t) = -\kappa(\theta - v) + \lambda(S, v, t)$$

donde $\lambda(S, v, t)$ es el precio del riesgo de volatilidad. Como este es una función lineal de la volatilidad, $\lambda(S, v, t) = \lambda v$, λ constante. Si sustituimos en 24 obtenemos

$$\begin{aligned} & -\kappa(\theta - v) + \lambda(S, v, t) \\ &= \frac{\left[\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{2}vS^2 \frac{\partial^2 U}{\partial S^2} + \rho\sigma vS \frac{\partial^2 U}{\partial S \partial v} + \frac{1}{2}\sigma^2 v \frac{\partial^2 U}{\partial v^2} \right] - rU + rS \frac{\partial U}{\partial S}}{\frac{\partial U}{\partial v}}. \end{aligned}$$

Si reorganizamos obtenemos la ecuación diferencial parcial de Heston en términos de S

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{2}vS^2 \frac{\partial^2 U}{\partial S^2} + \rho\sigma vS \frac{\partial^2 U}{\partial v \partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 v \frac{\partial^2 U}{\partial v^2} - rU + rS \frac{\partial U}{\partial S} + [\kappa(\theta - v) - \lambda(S, v, t)] \frac{\partial U}{\partial v} = 0. \quad (25)$$

De manera similar al modelo de Black-Scholes, tenemos que las condiciones de frontera para una opción con fecha de expiración T y precio de ejercicio K , están dadas por

$$U(S, v, T) = \max(0, S - K), \quad U(0, v, t) = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial S}(\infty, v, t) = 1, \quad U(S, \infty, t) = S.$$

Vamos a definir el precio log $x = \ln S$ y expresar la ecuación diferencial parcial en términos de (x, v, t) . Usando la regla de la cadena y del producto, tenemos

$$\frac{\partial U}{\partial S} = \frac{\partial U}{\partial x} \frac{1}{S}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial v \partial S} = \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{S} \frac{\partial U}{\partial x} \right) = \frac{1}{S} \frac{\partial^2 U}{\partial v \partial x}$$

y

$$\frac{\partial^2 U}{\partial S^2} = \frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{1}{S} \frac{\partial U}{\partial x} \right) = -\frac{1}{S^2} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{S} \frac{\partial^2 U}{\partial S \partial x} = -\frac{1}{S^2} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{S^2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}.$$

Si sustituimos estas expresiones en 25, obtenemos

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{2}v \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \left(r - \frac{1}{2}v \right) \frac{\partial U}{\partial x} + \rho\sigma v \frac{\partial^2 U}{\partial v \partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 v \frac{\partial^2 U}{\partial v^2} - rU + [\kappa(\theta - v) - \lambda v] \frac{\partial U}{\partial v} = 0. \quad (26)$$

4.2.1. ECUACIÓN DIFERENCIAL PARCIAL DE P_1 Y P_2

El precio de una opción europea tipo call donde $x = \ln S$ está dado por

$$C(K) = e^x P_1 - K e^{-r\tau} P_2. \quad (27)$$

Sabemos que esta opción satisface la ecuación 26. Luego, si derivamos 27 podemos expresar la ecuación diferencial parcial 26 en términos de P_1 y P_2 . Tenemos

$$\frac{\partial C}{\partial t} = e^x \frac{\partial P_1}{\partial t} - K e^{-r\tau} \left[r P_2 + \frac{\partial P_2}{\partial t} \right] \quad (28)$$

$$\frac{\partial C}{\partial x} = e^x \left[P_1 + \frac{\partial P_1}{\partial x} \right] - K e^{-r\tau} \frac{\partial P_2}{\partial x} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} &= e^x P_1 + 2e^x \frac{\partial P_1}{\partial x} + e^x \frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} - K e^{-r\tau} \frac{\partial^2 P_2}{\partial x^2} \\ &= e^x \left[P_1 + 2 \frac{\partial P_1}{\partial x} + \frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} \right] - K e^{-r\tau} \frac{\partial^2 P_2}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (30)$$

$$\frac{\partial C}{\partial v} = e^x \frac{\partial P_1}{\partial v} - K e^{-r\tau} \frac{\partial P_2}{\partial v}, \quad \frac{\partial^2 C}{\partial v^2} = e^x \frac{\partial^2 P_1}{\partial v^2} - K e^{-r\tau} \frac{\partial^2 P_2}{\partial v^2} \quad (31)$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x \partial v} = e^x \left[\frac{\partial P_1}{\partial v} + \frac{\partial^2 P_1}{\partial x \partial v} \right] - K e^{-r\tau} \frac{\partial^2 P_2}{\partial x \partial v}. \quad (32)$$

Si sustituimos en 26 para $U = C(K)$, reagrupando los P_1

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_1}{\partial t} + \frac{1}{2} v \left[P_1 + 2 \frac{\partial P_1}{\partial x} + \frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} \right] + \left(r - \frac{1}{2} v \right) \left[P_1 + \frac{\partial P_1}{\partial x} \right] + \rho \sigma v \left[\frac{\partial P_1}{\partial v} + \frac{\partial^2 P_1}{\partial x \partial v} \right] \\ + \frac{1}{2} \sigma^2 v \frac{\partial^2 P_1}{\partial v^2} - r P_1 + [\kappa(\theta - v) - \lambda v] \frac{\partial P_1}{\partial v} = 0. \end{aligned} \quad (33)$$

Luego

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_1}{\partial t} + \left(r + \frac{1}{2} v \right) \frac{\partial P_1}{\partial x} + \frac{1}{2} v \frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} + \rho \sigma v \frac{\partial^2 P_1}{\partial x \partial v} \\ + [\rho \sigma v + \kappa(\theta - v) - \lambda v] \frac{\partial P_1}{\partial v} + \frac{1}{2} \sigma^2 v \frac{\partial^2 P_1}{\partial v^2} = 0. \end{aligned} \quad (34)$$

Haciendo el mismo proceso para P_2 obtenemos

$$\frac{\partial P_2}{\partial t} + \frac{1}{2} v \frac{\partial^2 P_2}{\partial x^2} + \left(r - \frac{1}{2} v \right) \frac{\partial P_2}{\partial x} + \rho \sigma v \frac{\partial^2 P_2}{\partial v \partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2 v \frac{\partial^2 P_2}{\partial v^2} + [\kappa(\theta - v) - \lambda v] \frac{\partial P_2}{\partial v} = 0. \quad (35)$$

Podemos combinar 34 y 35 así:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_j}{\partial t} + \rho \sigma v \frac{\partial^2 P_j}{\partial v \partial x} + \frac{1}{2} v \frac{\partial^2 P_j}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \sigma^2 v \frac{\partial^2 P_j}{\partial v^2} \\ + (r + u_j v) \frac{\partial P_j}{\partial x} + (a - b_j v) \frac{\partial P_j}{\partial v} = 0 \end{aligned} \quad (36)$$

para $j = 1, 2$ donde $u_1 = \frac{1}{2}$, $u_2 = -\frac{1}{2}$, $a = \kappa\theta$, $b_1 = \kappa + \lambda - \rho\sigma$, y $b_2 = \kappa + \lambda$.

4.3. PLANTEAMIENTO FUNCIÓN CARACTERÍSTICA DE HESTON

Teorema 3 (Teorema de inversión Gil-Pelaez). Sea $f_j(\phi; x, v)$ la función característica de $x_T = \ln S_T$, entonces

$$P_j = \Pr(\ln S_T > \ln K) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left[\frac{e^{-i\phi \ln K} f_j(\phi; x, v)}{i\phi} \right] d\phi.$$

De acuerdo con Heston (1993), las funciones características para $x_T = \ln S_T$ son de la forma

$$f_j(\phi; x_t, v_t) = \exp(C_j(\tau, \phi) + D_j(\tau, \phi)v_t + i\phi x_t) \quad (37)$$

donde C_j y D_j son coeficientes y $\tau = T - t$. Siguiendo la ecuación 36, tenemos que la ecuación diferencial parcial para la función característica es

$$\begin{aligned} -\frac{\partial f_j}{\partial \tau} + \rho\sigma v \frac{\partial^2 f_j}{\partial v \partial x} + \frac{1}{2}v \frac{\partial^2 f_j}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\sigma^2 v \frac{\partial^2 f_j}{\partial v^2} \\ + (r + u_j v) \frac{\partial f_j}{\partial x} + (a - b_j v) \frac{\partial f_j}{\partial v} = 0. \end{aligned} \quad (38)$$

Como

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_j}{\partial \tau} &= \left(\frac{\partial C_j}{\partial \tau} + \frac{\partial D_j}{\partial \tau} v \right) f_j, & \frac{\partial f_j}{\partial x} &= i\phi f_j, & \frac{\partial f_j}{\partial v} &= D_j f_j \\ \frac{\partial^2 f_j}{\partial x^2} &= -\phi^2 f_j, & \frac{\partial^2 f_j}{\partial v^2} &= D_j^2 f_j, & \frac{\partial^2 f_j}{\partial v \partial x} &= i\phi D_j f_j \end{aligned}$$

si sustituimos en 38 obtenemos

$$\begin{aligned} -\left(\frac{\partial C_j}{\partial \tau} + v \frac{\partial D_j}{\partial \tau} \right) + \rho\sigma v i\phi D_j - \frac{1}{2}v\phi^2 + \frac{1}{2}v\sigma^2 D_j^2 \\ + (r + u_j v) i\phi + (a - b_j v) D_j = 0 \end{aligned}$$

o

$$v \left(-\frac{\partial D_j}{\partial \tau} + \rho\sigma i\phi D_j - \frac{1}{2}\phi^2 + \frac{1}{2}\sigma^2 D_j^2 + u_j i\phi - b_j D_j \right) - \frac{\partial C_j}{\partial \tau} + r i\phi + a D_j = 0, \quad (39)$$

lo que genera dos ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \frac{\partial D_j}{\partial \tau} &= \rho\sigma i\phi D_j - \frac{1}{2}\phi^2 + \frac{1}{2}\sigma^2 D_j^2 + u_j i\phi - b_j D_j \\ \frac{\partial C_j}{\partial \tau} &= r i\phi + a D_j. \end{aligned} \quad (40)$$

Podemos ver que la primera ecuación en 40 es una ecuación de Riccati en D_j y la segunda es una derivada ordinaria de C_j . Sabemos que la función característica está dada por

$$f_j(\phi; x_t, v_t) = \exp(C_j(\tau, \phi) + D_j(\tau, \phi)v_t + i\phi x_t).$$

Luego, tenemos que las condiciones iniciales de frontera son $D_j(0, \phi) = 0$ y $D_j(0, \phi) = 0$.

4.4. SOLUCIÓN ECUACIÓN DE RICCATI

La ecuación de Riccati para $y(t)$ con coeficientes $P(t)$, $Q(t)$ y $R(t)$ está definida como

$$\frac{dy(t)}{dt} = P(t) + Q(t)y(t) + R(t)y(t)^2 \quad (41)$$

y se puede resolver considerando la siguiente ecuación diferencial ordinaria

$$w'' - \left[\frac{P'}{P} + Q \right] w' + PRw = 0. \quad (42)$$

Luego, la solución a 41 está dada por

$$\begin{aligned} y(t) &= -\frac{w'(t)}{w(t)} \frac{1}{R(t)} \\ &= -\frac{M\alpha e^{\alpha t} + N\beta e^{\beta t}}{Me^{\alpha t} + Ne^{\beta t}} \frac{1}{R(t)} \end{aligned}$$

donde M y N son constantes.

Siguiendo lo anterior, podemos escribir la primera ecuación de 40 como

$$\frac{\partial D_j}{\partial \tau} = P_j - Q_j D_j + R D_j^2 \quad (43)$$

donde

$$P_j = u_j i \phi - \frac{1}{2} \phi^2, \quad Q_j = b_j - \rho \sigma i \phi, \quad R = \frac{1}{2} \sigma^2. \quad (44)$$

La ecuación diferencial ordinaria de segundo orden correspondiente es

$$w'' + Q_j w' + P_j R w = 0 \quad (45)$$

por lo que $D_j = -\frac{1}{R} \frac{w'}{w}$. La ecuación auxiliar es $r^2 + Q_j r + P_j R = 0$ que tiene raíces

$$\begin{aligned} \alpha_j &= \frac{-Q_j + \sqrt{Q_j^2 - 4P_j R}}{2} = \frac{-Q_j + d_j}{2} \\ \beta_j &= \frac{-Q_j - \sqrt{Q_j^2 - 4P_j R}}{2} = \frac{-Q_j - d_j}{2} \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} d_j &= \alpha_j - \beta_j = \sqrt{Q_j^2 - 4P_j R} \\ &= \sqrt{(\rho \sigma i \phi - b_j)^2 - \sigma^2 (2u_j i \phi - \phi^2)}. \end{aligned} \quad (46)$$

Podemos concluir entonces que la solución a la ecuación de Riccati es

$$D_j = -\frac{1}{R} \frac{w'}{w} = -\frac{1}{R} \left(\frac{M\alpha e^{\alpha \tau} + N\beta e^{\beta \tau}}{Me^{\alpha \tau} + Ne^{\beta \tau}} \right) = -\frac{1}{R} \left(\frac{K\alpha e^{\alpha \tau} + \beta e^{\beta \tau}}{Ke^{\alpha \tau} + e^{\beta \tau}} \right) \quad (47)$$

donde $K = \frac{M}{N}$. Teniendo en cuenta la condición inicial, tenemos que

$$\begin{aligned} D_j &= -\frac{\beta}{R} \left(\frac{-e^{\alpha\tau} + e^{\beta\tau}}{-g_j e^{\alpha\tau} + e^{\beta\tau}} \right) = -\frac{\beta}{R} \left(\frac{1 - e^{d_j\tau}}{1 - g_j e^{d_j\tau}} \right) \\ &= \frac{Q_j + d_j}{2R} \left(\frac{1 - e^{d_j\tau}}{1 - g_j e^{d_j\tau}} \right) \end{aligned} \quad (48)$$

donde

$$g_j = -K = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{b_j - \rho\sigma i\phi + d_j}{b_j - \rho\sigma i\phi - d_j} = \frac{Q_j - d_j}{Q_j + d_j}.$$

Finalmente, tenemos que la solución para D_j está dada por

$$D_j(\tau, \phi) = \frac{b_j - \rho\sigma i\phi + d_j}{\sigma^2} \left(\frac{1 - e^{d_j\tau}}{1 - g_j e^{d_j\tau}} \right). \quad (49)$$

Ahora, para hallar la solución para C_j vamos a integrar la segunda ecuación de 40

$$C_j = \int_0^\tau ri\phi dy + a \left(\frac{Q_j + d_j}{\sigma^2} \right) \int_0^\tau \left(\frac{1 - e^{d_j y}}{1 - g_j e^{d_j y}} \right) dy + K_1 \quad (50)$$

donde K_1 es constante. Usando sustitución tenemos

$$C_j = ri\phi\tau + \frac{a}{d_j} \left(\frac{Q_j + d_j}{\sigma^2} \right) \int_1^{\exp(d_j\tau)} \left(\frac{1 - x}{1 - g_j x} \right) \frac{1}{x} dx + K_1 \quad (51)$$

y usando fracciones parciales

$$\begin{aligned} \int_1^{\exp(d_j\tau)} \frac{1 - x}{x(1 - g_j x)} dx &= \int_1^{\exp(d_j\tau)} \left[\frac{1}{x} - \frac{1 - g_j}{1 - g_j x} \right] dx \\ &= \left[\ln x + \frac{1 - g_j}{g_j} \ln(1 - g_j x) \right]_{x=1}^{x=\exp(d_j\tau)} \\ &= \left[d_j\tau + \frac{1 - g_j}{g_j} \ln \left(\frac{1 - g_j e^{d_j\tau}}{1 - g_j} \right) \right]. \end{aligned}$$

Luego, usando la condición inicial $C_j(0, \phi) = 0$ obtenemos la solución para C_j

$$C_j(\tau, \phi) = ri\phi\tau + \frac{a}{\sigma^2} \left[(b_j - \rho\sigma i\phi + d_j)\tau - 2 \ln \left(\frac{1 - g_j e^{d_j\tau}}{1 - g_j} \right) \right] \quad (52)$$

donde $a = \kappa\theta$.

Si bien hemos llegado a una solución cerrada para valorar las opciones europeas tipo call con volatilidad estocástica, completando así el modelo de Heston, no es para nada sencillo evaluar esta fórmula.

5. ESTIMACIÓN DE LOS PARÁMETROS

El objetivo de este capítulo es, usando el método de momentos y la estimación de máxima verosimilitud, calibrar el modelo de Heston presentado en la sección anterior, de forma que este represente apropiadamente la TRM. Para ello seguimos el proceso presentado en [DHS14], explicando detalladamente cada paso y aplicándolo a nuestro caso de la TRM.

5.1. DISCRETIZACIÓN DEL MODELO DE HESTON

El modelo de Heston toma los movimientos en el precio del activo como procesos de tiempo continuos. Sin embargo, en la vida real el precio de un activo se mide con tiempos discretos. Luego, para estimar los parámetros es necesario discretizar el modelo.

Consideremos una ecuación diferencial estocástica

$$dS_t = \mu(S_t, t) + \sigma(S_t, t)dW_t. \quad (53)$$

Si integramos dS_t de t a $t + dt$ tenemos

$$S_{t+dt} = S_t + \int_t^{t+dt} \mu(S_u, u)du + \int_t^{t+dt} \sigma(S_u, u)dW_u \quad (54)$$

Ahora, usando el método de Euler que es equivalente a aproximar las integrales usando la regla del rectángulo por izquierda, tenemos

$$\begin{aligned} \int_t^{t+dt} \mu(S_u, u)du &\approx \mu(S_t, t) \int_t^{t+dt} du \\ &= \mu(S_t, t)dt \end{aligned}$$

Por propiedades de W_{t+dt} y W_t , sabemos que $W_{t+dt} - W_t$ tiene la misma distribución de $\sqrt{dt}Z$ donde $Z \sim N(0, 1)$.

$$\begin{aligned} \int_t^{t+dt} \sigma(S_u, u)dW_u &\approx \sigma(S_t, t) \int_t^{t+dt} dW_u \\ &= \sigma(S_t, t)(W_{t+dt} - W_t) \\ &= \sigma(S_t, t)\sqrt{dt}Z \end{aligned}$$

Luego, la discretización de 53 está dada por

$$S_{t+dt} = S_t + \mu(S_t, t)dt + \sigma(S_t, t)\sqrt{dt}Z.$$

Teniendo en cuenta lo anterior, queremos hallar la discretización del modelo de Heston dado por 15 y 16. Como pasa un día entre cada una de nuestras observaciones del precio del activo, tenemos que $dt = 1$. Además, en 15 tenemos que $\mu(S_t, t) = rS_t$ y $\sigma(S_t, t) = \sqrt{v_t}S_t$. Entonces, la discretización de 15 es

$$S_{t+1} = S_t + rS_t + \sqrt{v_t}S_tZ_s. \quad (55)$$

Para simplificar la estimación de los parámetros vamos a modelar el cambio en los precios del activo en términos del cambio en los retornos del activo Q_{t+1} , donde el retorno está dado por $\frac{S_{t+1}}{S_t}$. Si dividimos ambos lados de 55 entre S_t , obtenemos

$$Q_{t+1} = 1 + r + \sqrt{v_t}Z_s \quad (56)$$

donde $Z_s \sim N(0, 1)$.

Ahora, para discretizar 16, tenemos que $\mu(v_t, t) = k(\theta - v_t)$ y $\sigma(v_t, t) = \sigma\sqrt{v_t}$. Luego, la discretización está dada por

$$v_{t+1} = v_t + k(\theta - v_t) + \sigma\sqrt{v_t}Z_v. \quad (57)$$

donde $Z_v \sim N(0, 1)$.

El modelo de Heston tiene dos movimientos Brownianos W_{1t} y W_{2t} con correlación ρ y el modelo discretizado tiene dos variables aleatorias normales estándar Z_s y Z_v con la misma correlación ρ . Luego, para facilitar los cálculos, podemos tomar $Z_v = Z_1$ y $Z_s = \rho Z_1 + \sqrt{1 - \rho^2}Z_2$, donde $Z_1, Z_2 \sim N(0, 1)$ independientes. Esto debido a que $\rho(Z_v, Z_s) = \rho$.

Demostración. Sabemos que

$$\begin{aligned} \text{Var}(Z_v) &= \text{Var}(Z_1) = 1 \\ \text{Var}(Z_s) &= \rho^2 \text{Var}(Z_1) + 1 - \rho^2 \text{Var}(Z_2) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \rho(Z_v, Z_s) &= \text{Cov}(Z_v, Z_s) \\ &= \text{Cov}(Z_1, \rho Z_1 + \sqrt{1 - \rho^2}Z_2) \\ &= \rho \text{Cov}(Z_1, Z_1) + \sqrt{1 - \rho^2} \text{Cov}(Z_1, Z_2) \\ &= \rho \cdot 1 + \sqrt{1 - \rho^2} \cdot 0 \\ &= \rho. \end{aligned}$$

□

Finalmente, obtenemos el siguiente sistema discretizado

$$Q_{t+1} = 1 + r + \sqrt{v_t}(\rho Z_1 + \sqrt{1 - \rho^2}Z_2) \quad (58)$$

$$v_{t+1} = v_t + k(\theta - v_t) + \sigma\sqrt{v_t}Z_1. \quad (59)$$

5.2. MÉTODO DE MOMENTOS

Sea $\mu_j = \mathbb{E}[Q_{t+1}^j]$ el j -ésimo momento de la variable aleatoria Q_{t+1} . Para estimar los parámetros usando el método de momentos vamos a hallar n momentos en términos de los n parámetros que queremos estimar. Posteriormente, vamos a hallar los momentos de la muestra de Q_{t+1} dada por la TRM histórica desde el 1 de enero del 2000 hasta el 11 de abril del 2022, tomados de [BAN]. Finalmente, vamos a igualar los momentos

encontrados y resolver las ecuaciones para cada uno de los parámetros.

La función generadora de momentos de una variable aleatoria $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ está dada por

$$M_X(t) = e^{t\mu + \frac{1}{2}t^2\sigma^2}.$$

Luego, el k -ésimo momento de X está dado por

$$\mathbb{E}[X^k] = \left. \frac{d^k}{dt^k} M_X(t) \right|_{t=0}. \quad (60)$$

Ahora, sea $Z \sim N(0, 1)$, sus momentos están dados por

$$\mathbb{E}[Z^k] = \left. \frac{d^k}{dt^k} e^{\frac{t^2}{2}} \right|_{t=0}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} E(Z) &= \left. \frac{d}{dt} e^{\frac{t^2}{2}} \right|_{t=0} \\ &= \left. t e^{\frac{t^2}{2}} \right|_{t=0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(Z^2) &= \left. \frac{d^2}{dt^2} e^{\frac{t^2}{2}} \right|_{t=0} \\ &= \left. e^{\frac{t^2}{2}} + t^2 e^{\frac{t^2}{2}} \right|_{t=0} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(Z^3) &= \left. \frac{d^3}{dt^3} e^{\frac{t^2}{2}} \right|_{t=0} \\ &= \left. 3t e^{\frac{t^2}{2}} + t^3 e^{\frac{t^2}{2}} \right|_{t=0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(Z^4) &= \left. \frac{d^4}{dt^4} e^{\frac{t^2}{2}} \right|_{t=0} \\ &= \left. 3e^{\frac{t^2}{2}} + 6t^2 e^{\frac{t^2}{2}} + t^4 e^{\frac{t^2}{2}} \right|_{t=0} \\ &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(Z^5) &= \left. \frac{d^5}{dt^5} e^{\frac{t^2}{2}} \right|_{t=0} \\
&= \left. 15te^{\frac{t^2}{2}} + 10t^3e^{\frac{t^2}{2}} + t^5e^{\frac{t^2}{2}} \right|_{t=0} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Ahora, para hallar los momentos de Q_{t+1} dada por 58, debemos hallar los momentos de v_{t+1} dada por 59. Para esto, como Z_1 y Z_2 son variables aleatorias normales estándar independientes, por propiedades de valor esperado, para cualquier $j, k \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}[Z_1^j Z_2^k] = \mathbb{E}[Z_1^j] \mathbb{E}[Z_2^k].$$

Además, vamos a usar el hecho de que $\mathbb{E}[v_{t+1}] = \mathbb{E}[v_t]$.

Luego, usando propiedades del valor esperado,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[v_{t+1}] &= \mathbb{E}[v_t + k(\theta - v_t) + \sigma\sqrt{v_t}Z_1] \\
\mathbb{E}[v_{t+1}] &= \mathbb{E}[v_{t+1}] + k\theta - k\mathbb{E}[v_{t+1}] \\
k\mathbb{E}[v_{t+1}] &= k\theta \\
\mathbb{E}[v_{t+1}] &= \theta \\
\mathbb{E}[v_{t+1}^2] &= \mathbb{E}[(v_t + k(\theta - v_t) + \sigma\sqrt{v_t}Z_1)^2] \\
\mathbb{E}[v_{t+1}^2] &= \mathbb{E}\left[v_t^2 - 2kv_t^2 + 2v_tk\theta + 2\sigma v_t^{\frac{3}{2}}Z_1 + k^2v_t^2 - 2k^2v_t\theta \right. \\
&\quad \left. - 2kv_t^{\frac{3}{2}}\sigma Z_1 + k^2\theta^2 + 2k\theta\sigma\sqrt{v_t}Z_1 + \sigma^2v_tZ_1^2\right] \\
\mathbb{E}[v_{t+1}^2] &= \mathbb{E}[v_{t+1}^2] - 2k\mathbb{E}[v_{t+1}^2] + 2k\theta^2 + k^2\mathbb{E}[v_{t+1}^2] - 2k^2\theta^2 \\
&\quad + k^2\theta^2 + \sigma^2\theta \\
(2k - k^2)\mathbb{E}[v_{t+1}^2] &= -k^2\theta^2 + 2k\theta^2 + \sigma^2\theta \\
\mathbb{E}[v_{t+1}^2] &= \frac{-k^2\theta^2 + 2k\theta^2 + \sigma^2\theta}{2k - k^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} [v_{t+1}^3] &= \mathbb{E} \left[(v_t + k(\theta - v_t) + \sigma\sqrt{v_t}Z_1)^3 \right] \\
\mathbb{E} [v_{t+1}^3] &= \mathbb{E} \left[v_t^3 - 3kv_t^3 + 3k^2v_t^3 - v_t^3k^3 + k^3\theta^3 + 3\sigma v_t^{\frac{5}{2}}Z_1 \right. \\
&\quad + 3\sigma^2v_t^2Z_1^2 + 3v_t^2k^3\theta + 3v_t^2k\theta - 6k^2v_t^2\theta - 3v_tk^3\theta^2 \\
&\quad + 3v_tk^2\theta^2 + \sigma^3v_t^{\frac{3}{2}}Z_1^3 + 6k\theta\sigma v_t^{\frac{3}{2}}Z_1 - 6v_t^{\frac{3}{2}}k^2\theta\sigma Z_1 \\
&\quad + 3k^2\theta^2\sigma\sqrt{v_t}Z_1 + 3k\theta\sigma^2v_tZ_1^2 - 6kv_t^{\frac{5}{2}}\sigma Z_1 \\
&\quad \left. + 3v_t^{\frac{5}{2}}k^2\sigma Z_1 - 3v_t^2k\sigma^2Z_1^2 \right] \\
\mathbb{E} [v_{t+1}^3] &= \mathbb{E} [v_t^3] - 3k\mathbb{E} [v_t^3] + 3k^2\mathbb{E} [v_t^3] - k^3\mathbb{E} [v_t^3] + k^3\theta^3 \\
&\quad + 3\sigma^2\mathbb{E} [v_t^2] + 3\mathbb{E} [v_t^2] k^3\theta + 3\mathbb{E} [v_t^2] k\theta - 6k^2\mathbb{E} [v_t^2] \theta \\
&\quad - 3k^3\theta^3 + 3k^2\theta^3 + 3k\theta^2\sigma^2 - 3\mathbb{E} [v_t^2] k\sigma^2 \\
(k^3 - 3k^2 + 3k) \mathbb{E} [v_{t+1}^3] &= -2k^3\theta^3 - \frac{15\sigma^2k^2\theta^2}{-k^2 + 2k} + \frac{9\sigma^2k\theta^2}{-k^2 + 2k} + \frac{3\sigma^4\theta}{k^2 + 2k} \\
&\quad - \frac{3k^5\theta^3}{-k^2 + 2k} + \frac{12k^4\theta^3}{-k^2 + 2k} + \frac{6k^3\theta^2\sigma^2}{-k^2 + 2k} - \frac{15k^3\theta^3}{-k^2 + 2k} \\
&\quad + \frac{6k^2\theta^3}{-k^2 + 2k} + 3k^2\theta^3 + 3k\theta^2\sigma^2 - \frac{3k\sigma^4\theta}{-k^2 + 2k} \\
\mathbb{E} [v_{t+1}^3] &= \frac{-\theta}{k^2(k-2)(k^2-3k+3)} (5k^5\theta^2 - 13k^4\theta^2 - 3k^3\sigma^2\theta \\
&\quad + 9k^3\theta^2 + 9k^2\sigma^2\theta + 3k\sigma^4 - 6k^2\theta^2 - 9k\sigma^2\theta - 3\sigma^4)
\end{aligned}$$

Ahora, usando los momentos anteriores vamos a hallar los momentos de Q_{t+1} .

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Q_{t+1}] &= \mathbb{E}\left[1 + r + \sqrt{v_t} \left(\rho Z_1 + \sqrt{1 - \rho^2} Z_2\right)\right] \\ &= 1 + r\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Q_{t+1}^2] &= \mathbb{E}\left[\left(1 + r + \sqrt{v_t} \left(\rho Z_1 + \sqrt{1 - \rho^2} Z_2\right)\right)^2\right] \\ \mathbb{E}[Q_{t+1}^2] &= \mathbb{E}\left[1 + 2r + 2\sqrt{v_t}\rho Z_1 + 2\sqrt{v_t}\sqrt{1 - \rho^2} Z_2 + r^2 + 2r\sqrt{v_t}\rho Z_1\right. \\ &\quad \left.+ 2r\sqrt{v_t}\sqrt{1 - \rho^2} Z_2 + v_t\rho^2 Z_1^2 + 2v_t\rho Z_1\sqrt{1 - \rho^2} Z_2\right. \\ &\quad \left.- \rho^2 v_t Z_2^2 + v_t Z_2^2\right] \\ \mathbb{E}[Q_{t+1}^2] &= 1 + 2r + r^2 + \mathbb{E}[v_t]\rho^2 - \mathbb{E}[v_t]\rho^2 + \mathbb{E}[v_t] \\ \mathbb{E}[Q_{t+1}^2] &= r^2 + 2r + 1 + \theta \\ \mathbb{E}[Q_{t+1}^2] &= (r + 1)^2 + \theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Q_{t+1}^3] &= \mathbb{E}\left[\left(1 + r + \sqrt{v_t} \left(\rho Z_1 + \sqrt{1 - \rho^2} Z_2\right)\right)^3\right] \\ \mathbb{E}[Q_{t+1}^3] &= \mathbb{E}\left[1 + 3v_t\rho^2 Z_1^2 - 3\rho^2 v_t Z_2^2 + 3r + 3r^2 + 3v_t Z_2^2\right. \\ &\quad \left.+ 6rv_t\rho Z_1\sqrt{1 - \rho^2} Z_2 + 6r\sqrt{v_t}\rho Z_1 + 6r\sqrt{v_t}\sqrt{1 - \rho^2} Z_2\right. \\ &\quad \left.+ 3r^2\sqrt{v_t}\rho Z_1 + 3r^2\sqrt{v_t}\sqrt{1 - \rho^2} Z_2 + 3rv_t\rho^2 Z_1^2 - 3r\rho^2 v_t Z_2^2\right. \\ &\quad \left.- 3v_t^{\frac{3}{2}}\rho^3 Z_1 Z_2^2 + 3v_t^{\frac{3}{2}}\rho Z_1 Z_2^2 - v_t^{\frac{3}{2}}\sqrt{1 - \rho^2} Z_2^3 \rho^2 + 3rv_t Z_2^2\right. \\ &\quad \left.+ 6v_t\rho Z_1\sqrt{1 - \rho^2} Z_2 + 3v_t^{\frac{3}{2}}\rho^2 Z_1^2\sqrt{1 - \rho^2} Z_2 + v_t^{\frac{3}{2}}\rho^3 Z_1^3\right. \\ &\quad \left.+ 3\sqrt{v_t}\sqrt{1 - \rho^2} Z_2 + 3\sqrt{v_t}\rho Z_1 + v_t^{\frac{3}{2}}\sqrt{1 - \rho^2} Z_2^3 + r^3\right] \\ \mathbb{E}[Q_{t+1}^3] &= 1 + 3\mathbb{E}[v_t]\rho^2 - 3\mathbb{E}[v_t]\rho^2 + 3r + 3r^2 + 3\mathbb{E}[v_t] + 3r\rho^2\mathbb{E}[v_t] \\ &\quad - 3r\rho^2\mathbb{E}[v_t] + 3r\mathbb{E}[v_t] + r^3 \\ \mathbb{E}[Q_{t+1}^3] &= 1 + 3r + 3r^2 + 3\mathbb{E}[v_t] + 3r\mathbb{E}[v_t] + r^3 \\ \mathbb{E}[Q_{t+1}^3] &= (r + 1)^3 + 3\theta + 3r\theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} [Q_{t+1}^4] &= \mathbb{E} \left[\left(1 + r + \sqrt{v_t} \left(\rho Z_1 + \sqrt{1 - \rho^2} Z_2 \right) \right)^4 \right] \\
\mathbb{E} [Q_{t+1}^4] &= \mathbb{E} \left[1 - 12rv_t^{\frac{3}{2}} \rho^3 Z_1 Z_2^2 + 12rv_t^{\frac{3}{2}} \rho Z_1 Z_2^2 + 12rv_t \rho^2 Z_1^2 - 12rv_t Z_2^2 \rho^2 \right. \\
&\quad - 12v_t^{\frac{3}{2}} \rho^3 Z_1 Z_2^2 + 12v_t^{\frac{3}{2}} \rho Z_1 Z_2^2 + 6r^2 v_t \rho^2 Z_1^2 - 6r^2 v_t Z_2^2 \rho^2 \\
&\quad + 4rv_t^{\frac{3}{2}} \rho^3 Z_1^3 - 6v_t^2 \rho^4 Z_1^2 Z_2^2 + 6v_t^2 \rho^2 Z_1^2 Z_2^2 - 2v_t^2 Z_2^4 \rho^2 \\
&\quad + 4rv_t^{\frac{3}{2}} \sqrt{1 - \rho^2} Z_2^3 + 12r \sqrt{v_t} \rho Z_1 + 12r \sqrt{v_t} \sqrt{1 - \rho^2} Z_2 \\
&\quad + 12r^2 \sqrt{v_t} \rho Z_1 + 12r^2 \sqrt{v_t} \sqrt{1 - \rho^2} Z_2 - 4v_t^{\frac{3}{2}} \sqrt{1 - \rho^2} Z_2^3 \rho^2 \\
&\quad + 4r^3 \sqrt{v_t} \rho Z_1 + 4r^3 \sqrt{v_t} \sqrt{1 - \rho^2} Z_2 + 4\sqrt{v_t} \rho Z_1 \\
&\quad - 4v_t^2 \rho^3 Z_1 \sqrt{1 - \rho^2} Z_2^3 + 4v_t^2 \rho Z_1 \sqrt{1 - \rho^2} Z_2^3 - 4rv_t^{\frac{3}{2}} \sqrt{1 - \rho^2} Z_2^3 \rho^2 \\
&\quad + 4v_t^2 \rho^3 Z_1^3 \sqrt{1 - \rho^2} Z_2 + 12v_t^{\frac{3}{2}} \rho^2 Z_1^2 \sqrt{1 - \rho^2} Z_2 + 12v_t \rho Z_1 \sqrt{1 - \rho^2} Z_2 \\
&\quad + 4\sqrt{v_t} \sqrt{1 - \rho^2} Z_2 + 4v_t^{\frac{3}{2}} \sqrt{1 - \rho^2} Z_2^3 + 4r^3 + r^4 \\
&\quad + 12r^2 v_t \rho Z_1 \sqrt{1 - \rho^2} Z_2 + 12rv_t^{\frac{3}{2}} \rho^2 Z_1^2 \sqrt{1 - \rho^2} Z_2 \\
&\quad + 24rv_t \rho Z_1 \sqrt{1 - \rho^2} Z_2 + 4v_t^{\frac{3}{2}} \rho^3 Z_1^3 + 6r^2 v_t Z_2^2 + v_t^2 \rho^4 Z_1^4 \\
&\quad + v_t^2 Z_2^4 \rho^4 + v_t^2 Z_2^4 + 6v_t \rho^2 Z_1^2 - 6v_t Z_2^2 \rho^2 + 6v_t Z_2^2 + 12rv_t Z_2^2 \\
&\quad \left. + 4r + 6r^2 \right] \\
\mathbb{E} [Q_{t+1}^4] &= 1 + 6\rho^2 \mathbb{E} [v_t] - 6\rho^2 \mathbb{E} [v_t] + 4r + 6r^2 \rho^2 \mathbb{E} [v_t] - 6r^2 \rho^2 \mathbb{E} [v_t] \\
&\quad - 6\mathbb{E} [v_t^2] \rho^4 + 6\mathbb{E} [v_t^2] \rho^2 - 6\mathbb{E} [v_t^2] \rho^2 + r^4 + 6r^2 + 6\mathbb{E} [v_t] \\
&\quad + 12r \rho^2 \mathbb{E} [v_t] - 12r \rho^2 \mathbb{E} [v_t] + 12r \mathbb{E} [v_t] + 3\mathbb{E} [v_t^2] \rho^4 + 6r^2 \mathbb{E} [v_t] \\
&\quad + 3\mathbb{E} [v_t^2] + 3\mathbb{E} [v_t^2] \rho^4 + 4r^3 \\
\mathbb{E} [Q_{t+1}^4] &= 1 + 4r + r^4 + 6r^2 + 6\mathbb{E} [v_t] + 12r \mathbb{E} [v_t] + 6r^2 \mathbb{E} [v_t] + 3\mathbb{E} [v_t^2] + 4r^3 \\
\mathbb{E} [Q_{t+1}^4] &= \frac{1}{k(k-2)} (k^2 r^4 + 4k^2 r^3 + 6k^2 r^2 \theta - 2kr^4 + 6k^2 r^2 + 12k^2 r \theta + 3k^2 \theta^2 \\
&\quad - 8kr^3 - 12kr^2 \theta + 4k^2 r + 6k^2 r \theta - 24kr \theta - 6k \theta^2 - 3\sigma^2 \theta \\
&\quad + k^2 - 8kr - 12k \theta - 2k)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Q_{t+1}^5] &= \mathbb{E}\left[\left(1+r+\sqrt{v_t}\left(\rho Z_1+\sqrt{1-\rho^2}Z_2\right)\right)^5\right] \\
\mathbb{E}[Q_{t+1}^5] &= \mathbb{E}\left[1+5v_t^{\frac{5}{2}}\rho^4Z_1^4\sqrt{1-\rho^2}Z_2-10v_t^{\frac{5}{2}}\rho^4Z_1^2\sqrt{1-\rho^2}Z_2^3\right. \\
&\quad -10r^2v_t^{\frac{3}{2}}\sqrt{1-\rho^2}Z_2^3\rho^2-30r^2v_t^{\frac{3}{2}}\rho^3Z_1Z_2^2+30r^2v_t^{\frac{3}{2}}\rho Z_1Z_2^2 \\
&\quad +10v_t^{\frac{5}{2}}\rho^2Z_1^2\sqrt{1-\rho^2}Z_2^3-30rv_t^2\rho^4Z_1^2Z_2^2+30rv_t^2\rho^2Z_1^2Z_2^2+r^5 \\
&\quad +20v_t\rho Z_1\sqrt{1-\rho^2}Z_2+30v_t^{\frac{3}{2}}\rho^2Z_1^2\sqrt{1-\rho^2}Z_2-30r\rho^2v_tZ_2^2 \\
&\quad -30v_t^{\frac{3}{2}}\rho^3Z_1Z_2^2+30v_t^{\frac{3}{2}}\rho Z_1Z_2^2-10v_t^{\frac{3}{2}}\sqrt{1-\rho^2}Z_2^3\rho^2 \\
&\quad +v_t^{\frac{5}{2}}\sqrt{1-\rho^2}Z_2^5\rho^4-30v_t^2\rho^4Z_1^2Z_2^2+30v_t^2\rho^2Z_1^2Z_2^2+30r^2v_t\rho^2Z_1^2 \\
&\quad -30r^2\rho^2v_tZ_2^2+20rv_t^{\frac{3}{2}}\rho^3Z_1^3+20rv_t^{\frac{3}{2}}\sqrt{1-\rho^2}Z_2^3-2v_t^{\frac{5}{2}}\sqrt{1-\rho^2}Z_2^5\rho^2 \\
&\quad +20r^3\sqrt{v_t}\rho Z_1+20r^3\sqrt{v_t}\sqrt{1-\rho^2}Z_2-10v_t^{\frac{5}{2}}\rho^5Z_1^3Z_2^2 \\
&\quad +10v_t^{\frac{5}{2}}\rho^3Z_1^3Z_2^2-10v_t^{\frac{5}{2}}\rho^3Z_1Z_2^4+5v_t^{\frac{5}{2}}\rho^5Z_1Z_2^4+5v_t^{\frac{5}{2}}\rho Z_1Z_2^4 \\
&\quad +5r^4\sqrt{v_t}\rho Z_1+5r^4\sqrt{v_t}\sqrt{1-\rho^2}Z_2+10r^3v_t\rho^2Z_1^2-10r^3\rho^2v_tZ_2^2 \\
&\quad +10r^2v_t^{\frac{3}{2}}\rho^3Z_1^3+10r^2v_t^{\frac{3}{2}}\sqrt{1-\rho^2}Z_2^3-10rv_t^2Z_2^4\rho^2+5r\rho^4v_t^2Z_2^4 \\
&\quad +5rv_t^2\rho^4Z_1^4+30r^2\sqrt{v_t}\sqrt{1-\rho^2}Z_2+30rv_t\rho^2Z_1^2 \\
&\quad +20r\sqrt{v_t}\sqrt{1-\rho^2}Z_2+30r^2\sqrt{v_t}\rho Z_1+20r\sqrt{v_t}\rho Z_1 \\
&\quad +5\sqrt{v_t}\sqrt{1-\rho^2}Z_2+5\sqrt{v_t}\rho Z_1+10v_t^{\frac{3}{2}}\rho^3Z_1^3+30r^2v_tZ_2^2+5v_t^2\rho^4Z_1^4 \\
&\quad +5\rho^4v_t^2Z_2^4+10v_t^{\frac{3}{2}}\sqrt{1-\rho^2}Z_2^3+30rv_tZ_2^2-60rv_t^{\frac{3}{2}}\rho^3Z_1Z_2^2 \\
&\quad +60rv_t^{\frac{3}{2}}\rho Z_1Z_2^2-20rv_t^{\frac{3}{2}}\sqrt{1-\rho^2}Z_2^3\rho^2+60r^2v_t\rho Z_1\sqrt{1-\rho^2}Z_2 \\
&\quad +60rv_t^{\frac{3}{2}}\rho^2Z_1^2\sqrt{1-\rho^2}Z_2-20v_t^2\rho^3Z_1\sqrt{1-\rho^2}Z_2^3 \\
&\quad +20v_t^2\rho^3Z_1^3\sqrt{1-\rho^2}Z_2+20v_t^2\rho Z_1\sqrt{1-\rho^2}Z_2^3+10r^3v_tZ_2^2+v_t^{\frac{5}{2}}\rho^5Z_1^5 \\
&\quad -10v_t^2Z_2^4\rho^2+v_t^{\frac{5}{2}}\sqrt{1-\rho^2}Z_2^5+10v_t\rho^2Z_1^2-10\rho^2v_tZ_2^2+5rv_t^2Z_2^4 \\
&\quad +5r^4+10v_tZ_2^2+5v_t^2Z_2^4+10r^3+10r^2+5r+60rv_t\rho Z_1\sqrt{1-\rho^2}Z_2 \\
&\quad +20r^3v_t\rho Z_1\sqrt{1-\rho^2}Z_2+30r^2v_t^{\frac{3}{2}}\rho^2Z_1^2\sqrt{1-\rho^2}Z_2 \\
&\quad -20rv_t^2\rho^3Z_1\sqrt{1-\rho^2}Z_2^3+20rv_t^2\rho^3Z_1^3\sqrt{1-\rho^2}Z_2 \\
&\quad \left.+20rv_t^2\rho Z_1\sqrt{1-\rho^2}Z_2^3\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} [Q_{t+1}^5] &= 1 + 10\rho^2\mathbb{E} [v_t] - 10\rho^2\mathbb{E} [v_t] + 10r^3\rho^2\mathbb{E} [v_t] - 10r^3\rho^2\mathbb{E} [v_t] \\
&\quad - 30r\rho^2\mathbb{E} [v_t^2] + 15r\rho^4\mathbb{E} [v_t^2] + 15r\rho^4\mathbb{E} [v_t^2] + 5r + 30r^2\rho^2\mathbb{E} [v_t] \\
&\quad - 30r^2\rho^2\mathbb{E} [v_t] - 30\rho^4\mathbb{E} [v_t^2] + 30\rho^2\mathbb{E} [v_t^2] - 30\rho^2\mathbb{E} [v_t^2] + 5r^4 \\
&\quad + 10r^2 + 10\mathbb{E} [v_t] + r^5 + 10r^3\mathbb{E} [v_t] + 15r\mathbb{E} [v_t^2] - 30r\rho^4\mathbb{E} [v_t^2] \\
&\quad + 30r\rho^2\mathbb{E} [v_t^2] + 30r\rho^2\mathbb{E} [v_t] - 30r\rho^2\mathbb{E} [v_t] + 30r\mathbb{E} [v_t] + 15\rho^4\mathbb{E} [v_t^2] \\
&\quad + 30r^2\mathbb{E} [v_t] + 15\mathbb{E} [v_t^2] + 15\rho^4\mathbb{E} [v_t^2] + 10r^3 \\
\mathbb{E} [Q_{t+1}^5] &= 1 - 30r\rho^2\mathbb{E} [v_t^2] + 5r + 5r^4 + 10r^2 + 10\mathbb{E} [v_t] + r^5 + 10r^3\mathbb{E} [v_t] \\
&\quad + 15r\mathbb{E} [v_t^2] + 30r\rho^2\mathbb{E} [v_t^2] + 30r\mathbb{E} [v_t] + 30r^2\mathbb{E} [v_t] + 15\mathbb{E} [v_t^2] \\
&\quad + 10r^3 \\
\mathbb{E} [Q_{t+1}^5] &= 1 - 30r\rho^2 \left(\frac{-k^2\theta^2 + 2k\theta^2 + \sigma^2\theta}{-k^2 + 2k} \right) + 5r + 5r^4 + 10r^2 + 10\theta \\
&\quad + r^5 + 10r^3\theta + 15r \left(\frac{-k^2\theta^2 + 2k\theta^2 + \sigma^2\theta}{-k^2 + 2k} \right) \\
&\quad + 30r\rho^2 \left(\frac{-k^2\theta^2 + 2k\theta^2 + \sigma^2\theta}{-k^2 + 2k} \right) + 30r\theta + 30r^2\theta \\
&\quad + 15 \left(\frac{-k^2\theta^2 + 2k\theta^2 + \sigma^2\theta}{-k^2 + 2k} \right) + 10r^3 \\
\mathbb{E} [Q_{t+1}^5] &= \frac{1}{k(k-2)} (k^2r^5 + 5k^2r^4 + 10k^2r^3\theta - 2kr^5 + 10k^2r^3 + 30k^2r^2\theta \\
&\quad + 15k^2r\theta^2 - 10kr^4 - 20kr^3\theta + 10k^2r^2 + 30k^2r\theta + 15k^2\theta^2 - 20kr^3 \\
&\quad - 60kr^2\theta - 30kr\theta^2 - 15r\sigma^2\theta + 5k^2r + 10k^2\theta - 20kr^2 - 60kr\theta \\
&\quad - 30k\theta^2 - 15\sigma^2\theta + k^2 - 10kr - 20k\theta - 2k)
\end{aligned}$$

Podemos ver que el tercer momento tiene los mismos parámetros que el segundo momento, entonces no lo vamos a tener en cuenta al momento de estimar los parámetros. Además, ρ no está en ninguno de los momentos por lo que podemos asumir que no estará en ninguno de los momentos de mayor orden.

Recordemos que el j -ésimo momento de la muestra está dado por

$$\hat{\mu}_j = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n Q_{t+1}^j.$$

Podemos entonces igualar los momentos

$$1,0001023330901513 = 1 + r$$

$$1,0002370323567373 = (r + 1)^2 + \theta$$

$$1,0006038400266575 = \frac{1}{k(k-2)} (k^2r^4 + 4k^2r^3 + 6k^2r^2\theta - 2kr^4 + 6k^2r^2 + 12k^2r\theta + 3k^2\theta^2 - 8kr^3 - 12kr^2\theta + 4k^2r + 6k^2\theta - 12kr^2 - 24kr\theta - 6k\theta^2 - 3\sigma^2\theta + k^2 - 8kr - 12k\theta - 2k)$$

$$1,0008361416979612 = \frac{1}{k(k-2)} (k^2r^5 + 5k^2r^4 + 10k^2r^3\theta - 2kr^5 + 10k^2r^3 + 30k^2r^2\theta + 15k^2r\theta^2 - 10kr^4 - 20kr^3\theta + 10k^2r^2 + 30k^2r\theta + 15k^2\theta^2 - 20kr^3 - 60kr^2\theta - 30kr\theta^2 - 15r\sigma^2\theta + 5k^2r + 10k^2\theta - 20kr^2 - 60kr\theta - 30k\theta^2 - 15\sigma^2\theta + k^2 - 10kr - 20k\theta - 2k).$$

Para resolver este sistema de ecuaciones para cada uno de los parámetros usamos Maple. Obtuvimos que los parámetros son:

$$r \approx 1,023330902 \times 10^{-4}$$

$$k \approx 1,999999997$$

$$\theta \approx 3,235570437 \times 10^{-5}$$

$$\sigma \approx 3,002687163 \times 10^{-6}$$

Podemos ver que para hallar Q_{t+1} dado por 58 usando el método de momentos solo nos falta hallar ρ . Para esto hallamos Q_{t+1} usando los valores encontrados previamente, tomando ρ de -1 a 1 en incrementos de $0,1$ y eligiendo el que nos dé los valores de Q_{t+1} más cercanos a los de la muestra. Encontramos entonces que usando el método de momentos los parámetros son:

$$r \approx 1,023330902 \times 10^{-4}$$

$$k \approx 1,999999997$$

$$\theta \approx 3,235570437 \times 10^{-5}$$

$$\sigma \approx 3,002687163 \times 10^{-6}$$

$$\rho \approx -0,1$$

Para evaluar la calidad de los parámetros encontrados simulamos 4 veces el modelo de Heston discretizado hallado en 58 y lo comparamos con la TRM. Para verlo de forma más clara graficamos los S_{t+1} . Es decir, multiplicamos 58 por S_t a ambos lados obteniendo

$$S_{t+1} = S_t + S_t r + S_t \sqrt{vt} (\rho Z_1 + \sqrt{1 - \rho^2} Z_2),$$

y evaluamos en los parámetros hallados por el método de momentos.

La siguiente gráfica muestra 4 simulaciones del modelo de Heston que parte del uso de variables aleatorias, evaluado en los parámetros encontrados mediante el método de momentos, y la gráfica de la TRM entre el año 2000 y el 2022.

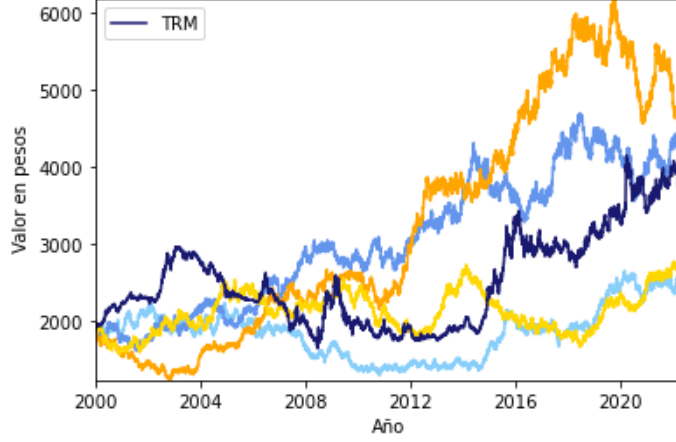


Figura 1: Simulaciones método de momentos

5.3. ESTIMACIÓN DE MÁXIMA VEROSIMILITUD

Para usar la estimación de máxima verosimilitud debemos hallar la función de verosimilitud $L(r, \theta, \sigma, k, \rho)$ dada por el producto de la función de densidad de probabilidad de cada observación de la variable aleatoria. Es decir,

$$L(r, \theta, \sigma, k, \rho) = \prod_{t=1}^n f(Q_{t+1}, v_{t+1} | r, \theta, \sigma, k, \rho) \quad (61)$$

donde $f(Q_{t+1}, v_{t+1})$ es la función de densidad de probabilidad conjunta de Q_{t+1} y v_{t+1} . Para hallar $f(Q_{t+1}, v_{t+1})$ vamos a usar las ecuaciones discretizadas 58 y 59. Como $Z_v, Z_s \sim N(0, 1)$ podemos hallar las distribuciones de Q_{t+1} y v_{t+1} .

Tenemos que

$$v_{t+1} = v_t + k(\theta - v_t) + \sigma\sqrt{v_t}Z_1,$$

luego

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[v_{t+1}] &= \mathbb{E}[v_t + k(\theta - v_t) + \sigma\sqrt{v_t}Z_1] \\ &= v_t + k(\theta - v_t) + \sigma\sqrt{v_t}\mathbb{E}[Z_1] \\ &= v_t + k(\theta - v_t) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \text{Var}(v_{t+1}) &= \text{Var}(v_t + k(\theta - v_t) + \sigma\sqrt{v_t}Z_1) \\ &= \sigma^2 v_t. \end{aligned}$$

Ahora, para Q_{t+1} tenemos

$$Q_{t+1} = 1 + r + \sqrt{v_t}(\rho Z_1 + \sqrt{1 - \rho^2}Z_2)$$

podemos separar las variables aleatorias así:

$$Q_{t+1} = \underbrace{1 + r + \sqrt{v_t}\rho Z_1}_{Q_a} + \underbrace{\sqrt{v_t}\sqrt{1 - \rho^2} Z_2}_{Q_b}$$

luego,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Q_a] &= \mathbb{E}\left[1 + r + \sqrt{v_t}\rho Z_1\right] & \mathbb{E}[Q_b] &= \mathbb{E}\left[\sqrt{v_t}\sqrt{1 - \rho^2} Z_2\right] \\ &= 1 + r + \sqrt{v_t}\rho \mathbb{E}[Z_1] & &= \sqrt{v_t}\sqrt{1 - \rho^2} \cdot \mathbb{E}[Z_2] \\ &= 1 + r & &= 0 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \text{Var}(Q_a) &= \text{Var}(1 + r + \sqrt{v_t}\rho Z_1) & \text{Var}(Q_b) &= \text{Var}(\sqrt{v_t}\sqrt{1 - \rho^2} Z_2) \\ &= v_t \rho^2 \text{Var}(Z_1) & &= (1 - \rho^2) \cdot v_t \text{Var}(Z_2) \\ &= v_t \rho^2 & &= (1 - \rho^2) \cdot v_t. \end{aligned}$$

Por propiedades de variables aleatorias normales, tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Q_{t+1}] &= 1 + r \\ \text{Var}(Q_{t+1}) &= v_t \rho^2 + (1 - \rho^2) \cdot v_t \\ &= v_t (\rho^2 + 1 - \rho^2) \\ &= v_t. \end{aligned}$$

Usando lo anterior podemos concluir que $v_{t+1} \sim N(v_t + k(\theta - v_t), \sigma^2 v_t)$ y $Q_{t+1} \sim N(1 + r, v_t)$. Además, como Z_s y Z_v tienen correlación ρ , v_{t+1} y Q_{t+1} también tienen correlación ρ . Luego, usando la distribución normal bivariada obtenemos que

$$f(Q_{t+1}, v_{t+1}) = \frac{1}{2\pi\sigma v_t \sqrt{1 - \rho^2}} \exp \left[-\frac{(Q_{t+1} - 1 - r)^2}{2(1 - \rho^2)v_t} + \frac{\rho(Q_{t+1} - 1 - r)(v_{t+1} - v_t - k\theta + kv_t)}{(1 - \rho^2)\sigma v_t} - \frac{(v_{t+1} - v_t - k\theta + kv_t)^2}{2(1 - \rho^2)\sigma^2 v_t} \right].$$

Para facilitar los cálculos podemos hallar el logaritmo de la función de verosimilitud $l(r, \theta, \sigma, k, \rho)$, ya que optimizar esta función es equivalente a optimizar $L(r, \theta, \sigma, k, \rho)$. Tenemos que

$$l(r, \theta, \sigma, k, \rho) = \sum_{t=1}^n \ln(f(Q_{t+1}, v_{t+1}) | r, \theta, \sigma, k, \rho).$$

Entonces, la función que vamos a optimizar es

$$\begin{aligned}
l(r, \theta, \sigma, k, \rho) = \sum_{t=1}^n & \left(-\log(2\pi) - \log(\sigma) - \log(V_t) - \frac{1}{2} \log(1 - \rho^2) \right. \\
& - \frac{(Q_{t+1} - 1 - r)^2}{2V_t(1 - \rho^2)} + \frac{\rho(Q_{t+1} - 1 - r)(V_{t+1} - V_t - \theta k + kV_t)}{V_t\sigma(1 - \rho^2)} \\
& \left. - \frac{(V_{t+1} - V_t - \theta k + kV_t)^2}{2\sigma^2 V_t(1 - \rho^2)} \right). \tag{62}
\end{aligned}$$

Para optimizar la función $l(r, \theta, \sigma, k, \rho)$ se hallan sus derivadas parciales con respecto a cada uno de los parámetros, se igualan a cero y se halla el estimado de máxima verosimilitud de cada parámetro.

Ya tenemos los Q_{t+1} de la muestra pero nos falta hallar v_t y v_{t+1} . Como $Q_{t+1} \sim N(1 + r, v_t)$ sabemos que la varianza de Q_{t+1} es v_t , es decir, para hallar v_t de la muestra debemos sacar la varianza de los valores Q_{t+1} desde $t = 0$ hasta t . Por extensión obtenemos también v_{t+1} .

Finalmente, usando la estimación de máxima verosimilitud obtenemos que los parámetros son

$$\begin{aligned}
r &\approx 9,99991781 \times 10^{-5} \\
k &\approx 1,9 \\
\theta &\approx 1,79363923 \times 10^{-5} \\
\sigma &\approx 1,36214582 \times 10^{-3} \\
\rho &\approx -0,1
\end{aligned}$$

Para evaluar la calidad de los parámetros encontrados vamos a repetir el mismo proceso que en el método de momentos. Simulamos 4 veces el modelo de Heston discretizado,

$$S_{t+1} = S_t + S_t r + S_t \sqrt{v_t} (\rho Z_1 + \sqrt{1 - \rho^2} Z_2),$$

y evaluamos en los parámetros hallados por la estimación de máxima verosimilitud.

La siguiente gráfica muestra 4 simulaciones del modelo de Heston que parte del uso de variables aleatorias, evaluado en los parámetros encontrados mediante la estimación de máxima verosimilitud, y la gráfica de la TRM entre el año 2000 y el 2022.

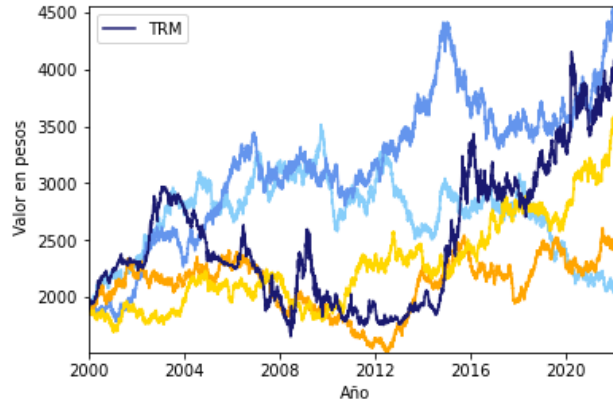


Figura 2: Simulaciones estimación de máxima verosimilitud

6. APLICACIÓN DEL MODELO

Teniendo el modelo de Heston debidamente parametrizado, podemos proceder a evaluar opciones europeas de tipo call. Recordemos que los parámetros de una opción tipo call son el vencimiento T y el precio strike E . En este caso proponemos que el subyacente es 1 USD cuyo valor está representado por la TRM. Es decir, proponemos una opción call para comprar 1 USD. Tenemos que el valor de la opción al llegar al vencimiento está dado por la función de pagos

$$F(S_T) = \max(S_T - E, 0)$$

donde S_T es el precio del subyacente en el vencimiento, es decir, el valor de la TRM en el momento T .

Nos interesa valorar 1 unidad de la opción call en un tiempo $t < T$, es decir, antes de su vencimiento, sabiendo que en el tiempo t el valor del subyacente es $S(t)$ que en nuestro caso es la TRM. Queremos estimar el valor de la opción pactada para ejercerse en la fecha futura T , esta función se representa como $C(S, t)$.

Con el simulador vamos a generar series de precios entre la fecha t y su vencimiento T usando $S = S(t)$ como valor inicial. De esta manera vamos a obtener n observaciones de $S(T)$. Vamos a llamar estos valores $S_k(T)$ para $k = 1, \dots, n$ y a hallar el siguiente valor esperado:

$$\mathbb{E}[F(S_k(T))] = \mathbb{E}[\max(S_k(T) - E, 0)].$$

Finalmente, para alcanzar el valor monetario de la opción call, el promedio calculado hay que verlo como un valor económico en la fecha T , que debe ser traído a valor presente en la fecha t . Esto lo hacemos con una estimación de valor presente usando la tasa libre de riesgo r que se ha observado en la economía en el mismo periodo y que suponemos constante. Este cálculo de valor presente de forma discreta es:

$$C(S, t) = \frac{\mathbb{E}[F(S_k(T))]}{(1 + r)^{T-t}}$$

y también se puede dar en forma continua como:

$$C(S, t) = \frac{\mathbb{E}[F(S_k(T))]}{e^{r(T-t)}}.$$

Para este caso vamos a tomar como tiempo inicial $t = 0$ el primero de enero del 2000, como fecha de vencimiento T el 20 de febrero del 2000, lo que implica que $T = 50$, y como precio de ejercicio vamos a tomar 1900. Teniendo en cuenta lo anterior, el valor inicial, dado por la TRM, es 1873,77. Es decir,

$$E = 1900$$

$$S = 1873,77$$

$$T = 50$$

Después de generar $n = 10,000$ observaciones de $S(T)$ usando el modelo de Heston parametrizado mediante

el método de momentos, y sacar su valor esperado de sus funciones de pagos, obtuvimos que

$$\mathbb{E}[F(S_k(50))] = 22,755113062060857.$$

Ahora, para calcular el valor presente $C(S, t)$, tomando el r obtenido mediante el método de momentos, vamos a tomar algunos valores de t que a su vez van a ir modificando el valor inicial S .

t	S	C(S,t)
0	1873.77	22.638989
10	1900.14	31.148879
20	1938.84	52.623096
30	1976.72	81.463284
40	1946.51	49.531702
50	1947.41	47.41

7. IMPLEMENTACIÓN COMPUTACIONAL

En este capítulo vamos a ver detalladamente los métodos usados para llegar a los resultados de las secciones anterior.

Primero, importamos los datos de la TRM que sacamos del excel tomado de [BAN] y dejamos únicamente los datos desde el primero de enero del 2000. Luego, creamos el array TRM y guardamos estos valores.

```
import numpy as np
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt
import math
import scipy as sp
from scipy.optimize import minimize
import scipy.stats as st
import random
import statistics

df = pd.read_excel('/Users/camiladorado/Desktop/catalina.xlsx')
df = df.iloc[2964:11101,0:2]
df.columns = ['fecha', 'TRM']
df.reset_index(inplace = True, drop = True)
TRM = df.iloc[:,1]
```

Usando los datos anteriores y teniendo en cuenta que $Q_{t+1} = \frac{S_{t+1}}{S_t}$, hallamos Q_{t+1} para cada t . Luego, creamos un nuevo array Q que contiene todos los Q_{t+1} hallados previamente.

```
def q(i):
    return TRM[i]/TRM[i-1]

Q = []
index = 1
while index < len(TRM):
    quo = q(index)
    index = index + 1
    Q.append(quo)
Q = np.asarray(Q)
```

Definimos la fórmula del j -ésimo momento de la muestra, hallamos los primeros 5 momentos y los agregamos a un nuevo array M .

```
def moment(f,n):
    return np.sum(f**n)/len(f)

M = []
```

```

index = 1
while index < 6:
    m = moment(Q, index)
    index = index +1
M.append(m)

```

Sacamos las varianzas de los Q_{t+1} para cada t y las incluimos en un nuevo array V .

```

def variance(i):
    return statistics.variance(Q[0:i+1])

#tenemos v_t, para hallar v_{t+1} debemos quitar el primer elemento
V = []
index = 1
while index < len(Q):
    v = variance(index)
    index = index +1
V.append(v)

```

Definimos el sistema de ecuaciones discretizado y una nueva función que genere múltiples veces el modelo de Heston discretizado. Esta nos va a retornar $n1$ arrays. Finalmente, evaluamos la función en los parámetros que obtuvimos mediante el método de momentos.

```

S0=IRM[0]
v0=V[0]
def generar_heston(r, theta, sigma, k, rho, T):
    #Definimos los contenedores que van a tener los valores de St y vt
    S_t=np.zeros(T)
    v_t=np.zeros(T)
    #asignamos el primer valor de vt y St
    v_t[0] = v0
    S_t[0] = S0
    for i in range(1,T):
        z1 = np.random.standard_normal()
        z2 = np.random.standard_normal()
        v_t[i]= v_t[i-1] + k * (theta - v_t[i-1]) + sigma *
            math.sqrt(v_t[i-1])*z1
        S_t[i]=S_t[i-1]+r*S_t[i-1]+ S_t[i-1]*math.sqrt(v_t[i-1])*
            (rho * z1 + np.sqrt(1-rho**2))*z2

    return S_t
    print (S_t)

def GH_eval(n1, r1, theta1, sigma1, k1, rho1, T1):
    result=[]
    for i in range(0,n1):
        result.append(generar_heston(r1, theta1, sigma1, k1, rho1, T1))

```

```

return result
GH_eval(4, 0.0001023330902,0.00003235570437,0.000003002687163,1.998,-0.1,8137)

```

Definimos la función a optimizar [62](#), teniendo en cuenta que debemos multiplicarla por -1 ya que el método va a minimizar la función y nuestro objetivo es maximizarla.

```

def loglikelihood(x):

    #PRIMER TERMINO

    term1a=-np.log(2*math.pi)-np.log(x[2])-(0.5)*np.log(1-x[4]**2)
                                                    -np.log(V[1:-1])

    term1=-1*term1a
    sum1=sum(term1)

    #SEGUNDO TERMINO

    t21=(Q[2:-1]-1-x[0])**2
    parte1coc1=np.multiply(2,V[1:-1])
    parte2coc1=np.multiply(2*x[4]**2,V[1:-1])
    restacoc1=np.subtract(parte1coc1, parte2coc1)
    term2=np.divide(t21,restacoc1)
    sum2=sum(term2)

    #TERCER TERMINO

    t31=(x[4]*(Q[2:-1]-1-x[0]))
    t321=np.subtract(V[2:],V[1:-1])
    t322=np.multiply(x[3],V[1:-1])
    t32=t321-x[1]*x[3]+t322
    t3=np.multiply(t31,t32)

    parte1coc2=np.multiply(x[2],V[1:-1])
    parte2coc2=np.multiply(x[2]*x[4]**2,V[1:-1])
    restacoc2=np.subtract(parte1coc2, parte2coc2)

    term3a=np.divide(t3,restacoc2)
    term3=-1*term3a
    sum3=sum(term3)

    #CUARTO TERMINO

    t411=np.subtract(V[2:],V[1:-1])
    t412=np.multiply(x[3],V[1:-1])
    t41=t411-x[1]*x[3]+t412

```

```

t4=(t41)**2

parte1coc3=np.multiply(2*x[2]**2,V[1:-1])
parte2coc3=np.multiply(2*(x[2]**2)*x[4]**2,V[1:-1])
restacoc3=np.subtract(parte1coc3, parte2coc3)

term4=np.divide(t4,restacoc3)
sum4=sum(term4)

return (sum1+sum2+sum3+sum4)

```

Optimizamos la función siguiendo las restricciones de cada parámetro como en [DHS14]. Los parámetros de este método en orden son, la función que vamos a minimizar, una estimación inicial, el método que usamos que en este caso fue L-BFGS-B y las restricciones definidas para cada parámetro. Finalmente, evaluamos la función con en parámetros obtenidos mediante estimación de máxima verosimilitud.

```

#MAXLIKE
x0_bounds=(None, None)
x1_bounds=(0, None)
x2_bounds=(0, None)
x3_bounds=(0, None)
x4_bounds=[-1,1]

bounds=(x0_bounds, x1_bounds, x2_bounds, x3_bounds, x4_bounds)
xi=np.array([0.0001,0.00003,0.000003,1.9,-0.1])
minim=minimize(loglikelihood, xi, method='l-bfgs-b', bounds=bounds)
print(minim.x)

GH_eval(4,9.99991271e-05,1.79363923e-05,1.36214582e-03,1.900, -0.1,8137)

```

Ahora, para la aplicación del modelo, definimos la función valorST que nos genera n observaciones de $S(T)$. Para distintos t iniciales solo debemos cambiar el valor inicial de la función generar_heston. Luego, usando los valores obtenidos en el método de momentos evaluamos la función.

```

def valorST(n, r, theta, sigma, k, rho, T):
    res=[]
    for i in range(0,n):
        arrhes=generar_heston(r, theta, sigma, k, rho, T)
        res.append(arrhes[-1])
    return res

Smom=valorST(10000, 0.0001023330902,0.00003235570437,0.000003002687163,
              1.998,-0.1, 51)

```

Para hallar las funciones de pagos para cada $S(T)$, definimos otra función y la evaluamos en los valores $S_k(T)$ obtenidos, tomando como precio de ejercicio 1900. Posteriormente, sacamos el valor esperado de estas funciones.

```
def funcion_pagos(St,E):  
    calls=[]  
    for s in St:  
        call= np.maximum(s-E,0)  
        calls.append(call)  
    return calls
```

```
Cmom=funcion_pagos(Smom,1900)
```

```
Exp=np.mean(Cmom)
```

Finalmente, definimos la función que calcula el valor presente, cuyos parámetros son la tasa libre de riesgo r , el tiempo actual t , y el tiempo de expiración T , y la evaluamos para nuestro caso.

```
def valpres(r,t,T):  
    vp=Exp/((1+r)**(T-t))  
    return vp
```


8. CONCLUSIÓN

En este proyecto se presentó una introducción a la valoración de opciones europeas tipo call. Primero mediante el modelo de Black-Scholes, que al tomar la volatilidad como constante presenta inconsistencias con el mercado, y posteriormente siguiendo el modelo de Heston, que como solución a este problema considera la volatilidad variable de tipo estocástico. En este desarrollo pudimos evidenciar lo complicada que es la valoración de opciones usando el cálculo estocástico.

Posteriormente, se vio una aplicación del modelo de Heston para la tasa de cambio. Teniendo en cuenta las características del mercado de divisas en Colombia, y su susceptibilidad a la nueva información que llegue al mercado de manera instantánea, el modelo de volatilidad estocástica de Heston es más preciso para representar la TRM. Después de realizar la estimación de los parámetros del modelo para la TRM, usando el método de momentos y la estimación de máxima verosimilitud, obtuvimos resultados prometedores. Si bien los parámetros obtenidos por ambos métodos son distintos, al analizar las gráficas obtenidas al realizar cuatro simulaciones para cada conjunto de parámetros, y su similitud con la gráfica de la TRM, podemos concluir que el modelo de Heston puede representar de forma correcta la tasa de cambio. Este desarrollo, a su vez, es útil para la valoración de opciones europeas tipo call sobre divisas, ya que su precio está dado por la TRM. Este proceso se puede expandir a otras opciones europeas tipo call para su correcta valoración.

9. REFERENCIAS

- [AK10] Ahlip, Rehez y Rik King: *Computational aspects of pricing foreign exchange options with stochastic volatility and stochastic interest rates*. Journal of Statistical Planning and Inference, 140(5):1256 – 1268, 2010, ISSN 0378-3758. <https://ezproxy.uniandes.edu.co:8443/login?url=https://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&db=edselp&AN=S0378375809003619&lang=es&site=eds-live&scope=site>.
- [BAN] BANREP: *Tasa Representativa del Mercado (trm - peso por dólar)*. <https://www.banrep.gov.co/es/estadisticas/trm>.
- [Cho16] Choe, Geon Ho: *Stochastic Analysis for Finance with Simulations*. Universitext. Springer International Publishing, 2016, ISBN 9783319255897. <https://ezproxy.uniandes.edu.co:8443/login?url=https://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&db=cat07441a&AN=cpu.758751&lang=es&site=eds-live&scope=site>.
- [DHS14] Dunn, R., Paloma Hauser, Tom Seibold y Hugh Gong: *Estimating Option Prices with Heston's Stochastic Volatility Model*. 2014. <https://www.valpo.edu/mathematics-statistics/files/2015/07/Estimating-Option-Prices-with-Heston%E2%80%99s-Stochastic-Volatility-Model.pdf>.
- [GB18] Guterding, Daniel y Wolfram Boenkost: *The Heston stochastic volatility model with piecewise constant parameters efficient calibration and pricing of window barrier options*. Journal of Computational and Applied Mathematics, 343:353 – 362, 2018, ISSN 0377-0427. <https://ezproxy.uniandes.edu.co:8443/login?url=https://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&db=edselp&AN=S0377042718302498&lang=es&site=eds-live&scope=site>.
- [GRMV07] Gaviria Ruano, Andrés Camilo y René Joaquín Meziat Vélez: *Análisis empírico del modelo de Heston en opciones sobre el índice SP500*. Uniandes, 2007. <https://ezproxy.uniandes.edu.co:8443/login?url=https://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&db=cat07441a&AN=cpu.295570&lang=es&site=eds-live&scope=site>.
- [Hes93] Heston, SL: *A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options*. Review of Financial Studies, 6(2):327, 1993, ISSN 08939454. <https://ezproxy.uniandes.edu.co:8443/login?url=https://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&db=bth&AN=4233696&lang=es&site=eds-live&scope=site>.
- [Hul87] Hull, Jonh y White, Alan: *The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities*. Journal of Finance (Wiley-Blackwell), 42(2):281 – 300, 1987, ISSN 00221082. <https://ezproxy.uniandes.edu.co:8443/login?url=https://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&db=bth&AN=4652553&lang=es&site=eds-live&scope=site>.
- [JK12] Jayanta K., Ghosh: *Introduction to Modeling and Analysis of Stochastic Systems, Second Edition V.G. Kulkarni*. International Statistical Review / Revue Internationale

- de Statistique, 80(3):487, 2012, ISSN 03067734. <https://ezproxy.uniandes.edu.co:8443/login?url=https://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&db=edsjsr&AN=edsjsr.41819877&lang=es&site=eds-live&scope=site>.
- [Ken10] Kennedy, Douglas: *Stochastic financial models*. Chapman Hall/CRC financial mathematics series. Chapman Hall/CRC, 2010, ISBN 9781420093452. <https://ezproxy.uniandes.edu.co:8443/login?url=https://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&db=cat07441a&AN=cpu.425294&lang=es&site=eds-live&scope=site>.
- [LFRVA⁺14] López Fuentes, David Alberto, Alvaro José Riascos Villegas, Viswanathan Arunachalam, Andrés Murcia Pabón y Alvaro José Riascos Villegas: *Superficies de volatilidad de opciones de tasa de cambio USDCOP: un enfoque con modelos de volatilidad estocástica*. Uniandes, 2014. <https://ezproxy.uniandes.edu.co:8443/login?url=https://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&db=cat07441a&AN=cpu.686693&lang=es&site=eds-live&scope=site>.
- [LS18] Lázaro Salcedo, Javier Jaher Alfonso: *An accurate Heston implementation with USD-COP data*. Universidad del Rosario, 2018. <https://repository.urosario.edu.co/bitstream/handle/10336/14418/Tesis%20Julio%202017.pdf;jsessionid=E4B452E28C74E564426EBB1B4873COD1?sequence=1>.
- [Mez] Meziat, René: *Notas de clase*.
- [Oks05] Oksendal, Bernt Karsten: *Stochastic differential equations: an introduction with applications*. Universitext. Springer, 2005, ISBN 3540047581. <https://ezproxy.uniandes.edu.co:8443/login?url=https://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&db=cat07441a&AN=cpu.276025&lang=es&site=eds-live&scope=site>.
- [Rom17] Roman, Jan R. M.: *Analytical Finance*. Springer International Publishing, 2017, ISBN 9783319340272. <https://ezproxy.uniandes.edu.co:8443/login?url=https://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&db=cat07441a&AN=cpu.813889&lang=es&site=eds-live&scope=site>.
- [Rou13] Rouah, Fabrice: *The Heston model and its extensions in Matlab and C*. Wiley finance series. John Wiley Sons, Inc., 2013, ISBN 9781118695173. <https://ezproxy.uniandes.edu.co/login?url=https://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&db=cat07441a&AN=cpu.798445&lang=es&site=eds-live&scope=site>.
- [WHD95] Wilmott, Paul, Sam Howison y Jeff Dewynne: *The mathematics of financial derivatives: a student introduction*. Cambridge University Press, 1995, ISBN 0521497892. <https://ezproxy.uniandes.edu.co:8443/login?url=https://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&db=cat07441a&AN=cpu.68345&lang=es&site=eds-live&scope=site>.
- [Zha16] Zhao, Ze: *Stochastic volatility models with applications in finance*. 2016. <https://ezproxy.uniandes.edu.co/login?url=https://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&db=msn&AN=MR3653617&lang=es&site=eds-live&scope=site>.