

THÈSE

Préparée au :

LAAS-CNRS Laboratoire d'Analyse
et d'Architecture de Systèmes du CNRS
et l'Université des Andes, Bogotá-Colombie

En vue de l'obtention du :

Doctorat Systèmes Automatiques
Université Paul Sabatier Toulouse III
Doctorat en Ingénierie
Université des Andes Bogotá-Colombie

par :

Ricardo ARIZA URANGO
Ingénieur Navale Électronique
Ecole Navale de Cadettes Almirante Padilla
Cartagena-Colombie

COMMANDE ROBUSTE MULTICRITÈRE APPROCHE ESPACE D'ÉTAT ET \mathcal{LMI}

Soutenue le 25 juillet 2005 devant le jury :

President	Jean-Louis	CALVET
Rapporteurs	Mauricio Josep	DUQUE FUERTES
Examineurs	Joseph	AGUILAR
Directeurs de thèse	Jacques Alain	BERNUSSOU GAUTHIER

*A ma femme Martha,
son amour, tendresse et compréhension, ont été
mon appui pendant ce long chemin qu'est la vie.*

*A nos enfants : Hannya, Valentina et Ricardo,
qui sont ma plus pure motivation.*

*A ma Mère et à mon soeur Cecilia,
qui ont toujours attendu autant de moi.*

*et... finalement, à mon Père et à Jaime
mon frère, qui du ciel illuminent mon chemin.*

Remerciements

Ce travail a été développé dans le cadre d'une cotutelle de thèse entre *l'Université Paul Sabatier* de Toulouse, France et *l'Université des Andes* à Bogotá, Colombie. La recherche a été développée au **LAAS-CNRS (Laboratoire d'Analyse et Architecture de Systèmes du Centre National de la Recherche Scientifique)** dans le groupe MAC, (*Méthodes et Algorithmes en Commande*) et dans la *Faculté d'Ingénierie de l'Université des Andes*.

Je remercie **M. Jean Claude LAPRIE** et **M. Malik GHALLAB**, ancien et nouveau directeur du LAAS, de m'avoir permis de travailler dans le laboratoire. Je remercie ainsi **Mme. Sophie TARBOURIECH**, directeur de recherche au CNRS et nouvelle responsable du groupe MAC, qui m'a accepté dans son groupe.

Je tiens plus particulièrement à remercier **M. Jacques BERNUSSOU**, directeur de recherche au CNRS et ancien responsable du groupe MAC, qui non seulement m'a accepté dans son groupe, mais ainsi a été mon tuteur et mon conseiller direct pour le développement de ce travail. Je le remercie pour son dévouement, son professionnalisme, ses conseils et sa patience tout au long de ces cinq années, initialement pendant le développement du DEA et postérieurement pendant tout le développement de la thèse.

Je remercie ainsi **M. Alain GAUTIER**, Doyen de la Faculté d'Ingénierie de l'Université des Andes et mon tuteur en Colombie, merci par son soutien, son appui, sa confiance et sa collaboration.

Je souhaite exprimer ma gratitude à **LA MARINE DE LA COLOMBIE**, Institution militaire dont je fais partie, qui a financé mes études et mon séjour en France et m'a permis de développer ce travail.

Enfin, je veux ainsi remercier tous les membres du groupe MAC pour leur amitié, leur collaboration et leur appui durant les moments de doutes.

Table des matières

Dédicatoires	i
Remerciements	ii
Table des Matières	iii
Glossaire	v
Table des Figures	v
Avant Propos	1
1 Préliminaires	1
2 Solution du problème standard avec ARE	2
3 Solution du problème mixte $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ avec ARE	3
4 Stabilisation - Stabilisation Robuste	4
4.1 Introduction	4
4.1.1 Problème standard à temps continu	4
4.1.2 Problème standard à temps discret	8
4.1.3 Retour de sortie	12
5 Synthèse \mathcal{H}_2 et \mathcal{H}_∞	14
5.1 Normes \mathcal{H}_2 et \mathcal{H}_∞ avec \mathcal{LMI}	14
5.1.1 La norme \mathcal{H}_2 d'un modèle \mathcal{LTI}	14
5.1.2 La norme \mathcal{H}_∞ d'un modèle \mathcal{LTI}	16
5.2 Synthèse \mathcal{H}_2 à temps continu	17
5.2.1 Problème général	17
5.2.2 Retour d'état	18
5.2.3 Retour de sortie	21
5.3 Synthèse \mathcal{H}_2 à temps discret	24
5.3.1 Retour d'état	24
5.3.2 Retour de sortie	24
5.4 Synthèse \mathcal{H}_∞ à temps continu	27
5.4.1 Problème général	27
5.4.2 Retour d'état	28
5.4.3 Retour de sortie	30

5.5	Synthèse \mathcal{H}_∞ à temps discret	31
5.5.1	Retour d'état	32
5.5.2	Retour de sortie	32
6	Problème Multicritère $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$	34
6.1	Synthèse multicritère	34
6.1.1	Solution \mathcal{LMI} à temps continu	34
6.1.2	Solution \mathcal{LMI} à temps discret	37
7	Une Nouvelle Condition de Stabilité Robuste, Solution avec \mathcal{LMI}	40
7.1	Le “ \mathcal{G} Shaping” Paradigme	40
7.2	Optimisation \mathcal{LMI}	42
7.2.1	Extension à la caractérisation des spécifications \mathcal{H}_2 et \mathcal{H}_∞	43
7.2.2	Extension dans la paramétrisation des contrôleurs	45
8	Exemples Numériques	52
	Conclusions et Perspectives	53
	Bibliographie	55

Glossaire

Notations

Terme	Description
* s	* Variable de Laplace
* $\ \cdot \ _2$, $\ \cdot \ _\infty$	* Norme \mathcal{H}_2 et Norme \mathcal{H}_∞
* \otimes	* Opérateur de Kroeneker
* $\mathbf{1}$, $\mathbf{0}$	* Matrice Identité et Matrice Nulle (de dimensions appropriées)
* $trace$	* Trace d'une matrice : somme de ses éléments diagonaux

Abréviations

Terme	Description
* \mathcal{LMI}	* Inégalité Matricielle Linéaire
* \mathcal{BMI}	* Inégalité Matricielle Bilinéaire
* \mathcal{LTI}	* Linéaire Invariant dans le Temps
* \mathcal{LFT}	* Transformée Fractionnaire Linéaire
* \mathcal{FLDP}	* Fonctions de Lyapunov Dépendant des Paramètres

Dimensions

Terme	Description
* c	* Nombre d'entrées de commande $u \in \mathbb{R}^c$
* m	* Nombre de sorties de mesure $y \in \mathbb{R}^m$
* q	* Dimensions de vecteur d'entrée w
* p	* Dimensions de vecteur de sortie z
* n_o	* Nombre de paramètres incertain, modèles parallélotopiques
* n_p	* Nombre de sommets, modèles polytopiques

Ensembles

Terme	Description
* \mathbb{R} , \mathbb{C}	* Ensemble des nombres réels et nombres complexes
* $\mathbb{R}^{m \times n}$	* Ensemble des matrices à m lignes et n colonnes
* \mathbb{S}^n	* Ensemble des matrices symétriques de dimension n

Correcteurs

Terme	Description
* K	* Correcteur quelconque
* K_{re}	* Gain de retour d'état
* K_{res}	* Gain de retour d'état statique
* K_{red}	* Gain de retour d'état dynamique
* K_{rs}	* Correcteur dynamique de retour de sortie
* K_{rss}	* Correcteur dynamique de retour de sortie statique
* K_{rsd}	* Correcteur dynamique de retour de sortie dynamique

Vecteurs

Terme	Description
* x, \dot{x}	* État du système \mathcal{LTI} et sa dérivée temporelle
* u, y	* Entrées de commande et sortie de mesure
* w/z	* Entrées/Sorties quelconque
* w_1, w_2	* Perturbations d'entrée des transfert T_1 et T_2
* z_1, z_2	* Sorties de commande des transfert T_1 et T_2

Matrices

Terme	Description
* A	* Matrice dynamique d'un système
* B	* Matrice de commande d'un système
* C	* Matrice de mesure d'un système
* D	* Matrice de transmission directe d'un système
* \tilde{K}	* Matrice de changement de variable linéarisant
* $M(\Delta)$	* Matrice définissant le modèle incertain d'un système
* $\text{sym}(A)$	* $A + A'$ Matrice symétrique de la matrice A
* $M^{[i]}$	* Définit le i^{eme} sommet d'un polytope
* $M^{[i]}$	* Définit le i^{eme} axe d'un paralléloptope
* $\Delta, \mathbf{\Delta}$	* Matrice incertaine, ensemble des matrices incertaines
* $\Delta \in \mathbb{R}^{q\Delta \times p\Delta}$	* Opérateur incertain
* Δ_C, Δ_B	* $= \Delta(\mathbf{1} + D_{\Delta\Delta}\Delta)^{-1}, \quad = (\mathbf{1}\Delta D_{\Delta\Delta})^{-1}\Delta$
* $\begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix}$	* Matrice définissant la représentation d'état d'un système
* $\begin{bmatrix} A & B \\ * & C \end{bmatrix}$	* $\begin{bmatrix} A & B \\ B' & C \end{bmatrix}$
* $\begin{bmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{bmatrix}$	* Matrices de représentation d'état de un correcteur K
* $\begin{bmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \tilde{C} & \tilde{D} \end{bmatrix}$	* Matrices de changement de variable linéarisant

Avant Propos

Pour le résumé en français de la thèse en cotutelle rédigée en espagnol il a été pris le parti de conserver la structuration de cette dernière mais en réduisant à un simple descriptif rapide le contenu de certains chapitres pour conserver un contenu plus ample à ceux qui présentent le plus de proximité par rapport à l'objectif de cette thèse qui porte essentiellement sur le développement de l'approche \mathcal{LMI} (inégalités matricielles linéaires) à la synthèse de commandes robustes multicritère.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre introductif sont données, le plus souvent sous forme de rappel, quelques réflexions générales concernant le domaine des systèmes dynamiques linéaires invariants dans le temps en insistant sur le fait que, généralement, tout modèle n'est qu'une approximation plus ou moins précise du processus qu'il prétend représenter. Ceci introduit naturellement le domaine et l'intérêt associé de l'analyse et la commande des systèmes à représentation incertaine. La stabilité est, bien sûr, une des premières exigences à rechercher pour tout système physique et, dans le domaine des systèmes linéaires, la théorie de Lyapunov occupe une place centrale pour l'analyse et la synthèse des systèmes dynamiques. Les définitions et résultats de base de cette théorie sont rappelés. La stabilité, certes essentielle, n'est pas suffisante pour assurer un comportement convenable pour un système donné. Les éléments permettant d'aborder le problème de synthèse avec performances requises sont énoncés à travers la définition et le calcul des normes \mathcal{H}_2 et \mathcal{H}_∞ . L'approche de commande robuste consiste, dans un premier temps, à caractériser et modéliser en quelque sorte l'incertitude qui affecte le modèle représentatif de telle sorte que le processus réel corresponde à un modèle appartenant à la classe des modèles incertains incluant le modèle nominal. Le traitement du modèle incertain permet alors d'assurer un certain niveau de performances, on parle alors de performances garanties ou problème à coût garanti. Le problème de la modélisation incertaine (incertitudes non structurées, structurées) est traité avec un certain détail. Finalement, le chapitre se ferme sur un exposé concernant les inégalités matricielles non linéaires qui constituent l'outil en priorité développé dans le mémoire tant pour des problèmes d'analyse que pour des problèmes de synthèse.

Chapitre 2 et Chapitre 3

“Solution du problème standard avec équations algébriques de Riccati” et “Solution du problème mixte $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ avec équations algébriques de Riccati”

Ces deux chapitres constituent un survol d’un assez grand nombre de problèmes de synthèse de commande robuste (synthèse \mathcal{H}_∞) qui peuvent être abordés par le biais de l’outil “équations algébriques de Riccati”. Ce type d’outil a pris un rôle prééminent depuis l’avènement de l’approche d’espace d’état pour la synthèse de commandes multivariées, c’est à dire, depuis le début des années 70 avec les travaux de Kalman. On le rencontre dans la résolution du problème de commande optimale LQ (linéaire-quadratique) ainsi que dans celui, plus intéressant en pratique, du problème LQG (linéaire - quadratique - gaussien) qui, dans le cas d’horizon infini, propose une solution par résolution de deux équations algébriques de Riccati découplées. Le découplage mentionné est conséquence du principe de séparation bien connu où une loi de retour de sortie stabilisante est obtenue par estimation d’état (filtre dans le cas stochastique, observateur dans celui déterministe) appliqué à un retour d’état stabilisant.

Ce type d’approche de commande optimale, mathématique, basé sur l’utilisation d’un modèle nominal unique de représentation du processus à commander, souffrait, entre autres, d’un manque de garantie du point de vue robustesse. Ceci a surtout été mis en évidence dans le cas de synthèse LQG pour laquelle il a été observé, sur des exemples simples, une extrême sensibilité paramétrique de la solution pouvant conduire à l’instabilité. Cette découverte qui mettait à mal l’approche d’espace d’état, par ailleurs très puissante et conviviale pour la synthèse de commandes multivariées (difficiles en approche fréquentielle) suscitait, au début des années 80, le démarrage de nombre d’études qui ont constitué le début du domaine, encore vivant à l’heure actuelle, de la “Commande Robuste”. Le but central était (et le reste encore maintenant) de conférer à l’approche d’espace d’état quelques propriétés naturelles de l’approche fréquentielle (observées facilement pour le cas monovarié) de marges de stabilité (c’est à dire de robustesse) et de marges de performances (précision - rapidité). En d’autres termes il s’agissait de conférer à cette approche puissante au plan de la représentation, description, solution de problèmes par outils mathématiques une plus grande crédibilité au plan des applications pratiques industrielles.

Un pas essentiel dans cette direction fut réalisé par la définition et l’utilisation de la norme H_∞ qui a découlé de la caractérisation de gains équivalents pour les systèmes multivariés à partir des valeurs singulières de la matrice de transfert. Cette caractérisation, faite dans le domaine fréquentiel, a conduit au fait que les premiers outils de synthèse étaient, eux même, de type fréquentiel, donc, relativement complexes et lourds dans leur manipulation. Un pas essentiel vers l’objectif défini plus haut de rendre robustes les solutions des approches mathématiques d’espace d’état a été réalisé par le résultat développé dans le fameux papier DGKF (Doyle, Glover, Khargonekar, Francis). Il y a été montré que tout comme la résolution des problèmes LQ (retour d’état), LQG (retour de sortie dynamique) - problèmes qui, à l’heure actuelle, sont à mettre dans la classe des problèmes de synthèse \mathcal{H}_2 - la résolution du problème de synthèse \mathcal{H}_∞ , où il s’agit de borner la norme

H_∞ d'un transfert défini sur le processus à commander, est également possible à partir d'équation(s) algébrique(s) de Riccati (singulier pour le retour d'état, pluriel pour celui du retour de sortie). Toutefois, à la différence du cas \mathcal{H}_2 , et pour le cas de retour de sortie les matrices solution des deux équations de Riccati sont liées par la nécessité de devoir satisfaire une condition de borne (pas de satisfaction d'un principe de séparation dans ce cas).

Le chapitre 2 reprend essentiellement les résultats contenus dans le papier DGKF établissant le parallélisme mentionné ci-dessus des problèmes de synthèse \mathcal{H}_2 et de synthèse \mathcal{H}_∞ en termes de solution par équations de Riccati.

La synthèse \mathcal{H}_∞ , comme écrit précédemment, s'appuie sur la considération d'un gain équivalent pour (en fait, sur la valeur maximale de ce gain, on parle aussi de synthèse de pire cas). La solution du problème \mathcal{H}_∞ dans le domaine temporel (espace d'état) a été indubitablement une grande avancée en commande robuste mais l'aspect "optimisation" qui avait été au coeur des approches \mathcal{H}_2 (LQ - LQG) y était beaucoup moins couverte. La définition du problème multicritère, appelé problème mixte $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$, a répondu à cette demande en établissant, en quelque sorte, un, problème de minimisation \mathcal{H}_2 (commande optimale) sous une contrainte de robustesse de type \mathcal{H}_∞ . Ce problème mixte $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ ne possède pas de solution simple même pour la recherche d'une solution sous optimale.

Le chapitre 3 fournit une idée de la complexité du problème abordant des questions de base telles que l'unicité de la solution, l'ordre du compensateur optimal et, enfin, donnant quelques approches pour la recherche de solutions sous optimales par le biais d'équations algébriques de Riccati.

De ces résultats, il est apparent que l'utilisation d'équations algébriques de Riccati pour la résolution de problèmes multicritère - multicontrainte présente une complexité certaine et d'autant plus élevée que doivent être prises en compte des exigences multiples. C'est le cas, par exemple, pour la résolution de problèmes de commande \mathcal{H}_2 ou/et \mathcal{H}_∞ avec incertitudes structurées (paramètres incertains multiples), cas intéressant en pratique. La synthèse \mathcal{H}_∞ correspond à la résolution d'un problème de commande robuste avec incertitude non structurée (cas d'incertitude bornée en norme à un seul bloc).

La solution de ce type de problème au moyen de l'outil \mathcal{LMI} (inégalités matricielles linéaires) présente un avantage du point de vue de la simplicité de l'approche car cet outil permet sans difficulté, au plan théorique du moins, de traiter des problèmes avec nombreuses contraintes \mathcal{LMI} .

Chapitre 4

Stabilisation - Stabilisation Robuste

4.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'étude détaillée d'un problème fondamental en automatique : *“le problème de la stabilisation et plus exactement le problème de la stabilisation robuste”*, c'est-à-dire la stabilisation de systèmes avec modélisation incertaine, travail dans lequel l'utilisation des inégalités matricielles linéaires (\mathcal{LMI}), sera le fil conducteur pendant tout le développement de cette approche.

La solution du problème avec \mathcal{LMI} , permet de traiter le problème comme un problème d'optimisation convexe en utilisant, par exemple l'algorithme du point intérieur. Cette forme de solution du problème standard permet de faire une définition plus générale du problème et nécessite la seule hypothèse :

(A, B_2) est stabilisable et (C_2, A) est détectable.

4.1.1 Problème standard à temps continu

Retour d'état

Cas non incertain Soit le système :

$$\dot{x} = Ax + B_2u \quad (4.1)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, sont respectivement les vecteurs d'état, de commande. Le modèle du système en boucle fermée, avec $u = Kx$, où $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$, s'écrit alors :

$$\dot{x} = (A + B_2K)x \quad (4.2)$$

Théorème 4.1 [17] : *Le système \mathcal{LTI} (4.1) est stabilisable asymptotiquement en boucle fermée par la loi de commande $u = Kx$ si, et seulement s'il existe une matrice symétrique définie positive $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et une matrice $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$ telles que :*

$$AS + SA' + B_2R + R'B_2' < 0 \quad (4.3)$$

Le gain de retour d'état est alors donné par $K = RS^{-1}$.

Cas incertain

Incertitudes polytopiques Considérons le système (4.1) incertain ($A = A(\nu)$). Le domaine d'incertitude étant de type polytopique convexe, tel que :

$$\begin{aligned} A &\in \mathcal{D}_A \\ B_2 &\in \mathcal{D}_{B_2} \end{aligned}$$

avec

$$\mathcal{D}_A := \left\{ A : A = \sum_{i=1}^N \lambda_i A_i, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^N \lambda_i = 1 \right\} \quad (4.4)$$

$$\mathcal{D}_{B_2} := \left\{ B_2 : B_2 = \sum_{j=1}^M \mu_j B_{2j}, \mu_j \geq 0, \sum_{j=1}^M \mu_j = 1 \right\} \quad (4.5)$$

Nous nous plaçons ici dans le cas de la stabilité quadratique, où une seule fonction de Lyapunov est utilisée pour garantir la stabilité du système dans tout le domaine d'incertitudes.

Théorème 4.2 [11] : *Le système linéaire incertain défini en (4.1 et 4.4 et 4.5) est quadratiquement stabilisable par retour d'état $u = Kx$ si, et seulement s'il existe une matrice définie positive $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et une matrice $R \in \mathbb{R}^{m \times n}$ telles que :*

$$A_i S + S A_i' + B_{2j} R + R' B_{2j}' < 0, \quad \forall i = 1, 2, \dots, N; \quad \forall j = 1, 2, \dots, M \quad (4.6)$$

et le gain stabilisant est donné par $K = RS^{-1}$.

Retour de sortie dynamique

Seule est disponible pour l'élaboration d'une loi de commande, une sortie mesurée (information partielle), ce qu'est le cas en pratique.

Soit le système

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_2 u \\ y &= C_2 x \end{aligned} \quad (4.7)$$

on se propose de déterminer un compensateur dynamique (strictement propre) soit :

$$\begin{aligned} \dot{x}_c &= A_c x_c + B_c y \\ u &= C_c x_c \end{aligned} \quad (4.8)$$

le problème consiste à trouver les matrices $\{A_c; B_c; C_c\}$, telles que :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_2 C_c \\ B_c C_2 & A_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_c \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

soit asymptotiquement stable. Une condition nécessaire et suffisante est donnée par la théorie de Lyapunov :

\exists une matrice $\mathcal{P} = \mathcal{P}' > 0$ et les matrices $A_c ; B_c ; C_c$ telles que

$$\begin{bmatrix} A & B_2 C_c \\ B_c C_2 & A_c \end{bmatrix}' \mathcal{P} + \mathcal{P} \overbrace{\begin{bmatrix} A & B_2 C_c \\ B_c C_2 & A_c \end{bmatrix}}^A < 0 \quad (4.10)$$

Ce sont des inégalités matricielles bilinéaires \mathcal{BMI} ; mais pour le cas où $\dim x_c = \dim x$ il existe une transformation (projection) qui permet d'obtenir une condition équivalente qui peut s'exprimer comme \mathcal{LMI} .

On partitionne la matrice \mathcal{P} de Lyapunov en quatre blocs de dimension $n \times n$

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} X & U \\ U' & \hat{X} \end{bmatrix}; \quad \mathcal{P}^{-1} = \begin{bmatrix} Y & V \\ V' & \hat{Y} \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

Définissons T comme

$$T = \begin{bmatrix} Y & \mathbf{1} \\ V' & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{matrice régulière}) \Rightarrow \quad (4.12)$$

$$T' \mathcal{P} T > 0 \implies \begin{bmatrix} Y & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & X \end{bmatrix} > 0 \quad (4.13)$$

$$T' [\mathcal{A}' \mathcal{P} + \mathcal{P} \mathcal{A}] T < 0 \implies \begin{bmatrix} AY + YA' + B_2 R + R' B_2' & \mathcal{Z} + \mathcal{M} \\ \mathcal{Z}' + \mathcal{M}' & A'X + XA + LC_2 + C_2' L \end{bmatrix} < 0 \quad (4.14)$$

où

$$\mathcal{Z} = A + \begin{bmatrix} Y & R' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B_2 \\ C_2 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ L \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

en effectuant les changements de variables

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= VA_c' U' \\ R &= C_c V' \\ L &= UB_c \end{aligned} \quad (4.16)$$

La relation précédente n'est pas une \mathcal{LMI} du fait que \mathcal{Z} est bilinéaire par rapport aux inconnues ; toutefois, sans contraintes sur A_c , c'est-à-dire sur \mathcal{M} , il est possible d'effectuer un nouveau changement de variable

$$\mathcal{M} = -\mathcal{Z} + \tilde{\mathcal{M}} \quad (4.17)$$

et ainsi obtenir les \mathcal{LMI} par rapport à $(X, Y, R, L, \tilde{\mathcal{M}})$

$$\begin{bmatrix} Y & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & X \end{bmatrix} > 0 \quad (4.18)$$

$$\begin{bmatrix} AY + YA' + B_2 R + R' B_2' & \tilde{\mathcal{M}} \\ \tilde{\mathcal{M}}' & A'X + XA + LC_2 + C_2' L' \end{bmatrix} < 0$$

C'est une condition nécessaire et suffisante d'existence des matrices $\{A_c; B_c; C_c\}$ stabilisantes. En effet à partir de X, Y, R, L, \mathcal{M} , on obtient

$$C_c = R(V')^{-1} \quad (4.19)$$

Par choix de V régulière, on détermine U , tel que $UV' + XY' = \mathbf{1}$, et :

$$B_c = U^{-1} L \quad (4.20)$$

on calcule alors \mathcal{M} , puisque $\mathcal{M} = \tilde{\mathcal{M}} - \mathcal{Z}$, et enfin :

$$A_c = V^{-1} \mathcal{M} (U')^{-1} \quad (4.21)$$

Remarque 4.1 *il est possible de faire $\tilde{M} = 0$ et alors, la condition nécessaire et suffisante, devient*

$$\begin{aligned} Y > 0; \quad AY + YA' + B_2R + R'B_2 < 0 \\ X > 0; \quad A'X + XA + LC_2 + C_2'L' < 0 \end{aligned} \quad (4.22)$$

qui sont les conditions de stabilité et de détectabilité. Les deux conditions sont une condition nécessaire et suffisante de retour de sortie dynamique stabilisant.

Solution avec observateur

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_2u \\ y &= C_2x \end{aligned} \quad (4.23)$$

Les équations de l'observateur sont données par :

$$\begin{aligned} \dot{x}_o &= Ax_o + B_2u + L(C_2x_o - y) \\ u &= Kx_o \end{aligned} \quad (4.24)$$

Le problème consiste à trouver K et L qui stabilisent le système

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_2K \\ -LC_2 & A + B_2K + LC_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_o \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

La stabilisation du système global est obtenue en déterminant un gain de retour d'état K et un gain de filtre stabilisant respectivement $(A + B_2K)$ et $(A + LC_2)$ (**principe de séparation**), Ceci devient clair en effectuant le changement de variable

$$\varepsilon = x_o - x \quad (4.26)$$

le système équivalent est alors

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\varepsilon} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + B_2K & B_2K \\ \mathbf{0} & A + LC_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \varepsilon \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

$(A + B_2K)$ stable, la solution est trouvée en résolvant les \mathcal{LMI} :

$$\begin{aligned} P > 0 \\ AP + PA' + B_2R + R'B_2' < 0 \end{aligned} \quad (4.28) \quad \text{avec } K = RP^{-1}$$

et pour le cas dual : $(A + LC_2)$ stable, la solution est trouvée en résolvant les \mathcal{LMI} :

$$\begin{aligned} Q > 0 \\ A'Q + QA + C_2'S' + SC_2 < 0 \end{aligned} \quad (4.29) \quad \text{avec } L = Q^{-1}S$$

Il est impossible d'appliquer cette approche dans le cas avec incertitudes car, alors le principe de séparation ne s'applique plus. Il est impossible, par exemple d'écrire une relation telle que (4.27).

Cas incertain

Incertitudes polytopiques L'intérêt de la commande par retour de sortie, vient du fait que l'accès à tous les états du système n'est pas toujours possible. Le système décrit par (4.7) est maintenant considéré incertain. Le domaine d'incertitudes étant de type polytopique convexe est défini par :

$$\mathcal{D}_{\mathcal{A}} := \left\{ \mathcal{A} : \mathcal{A} = \sum_{i=1}^N \lambda_i \mathcal{A}_i \geq 0, \sum_{i=1}^N \lambda_i = 1 \right\} \quad (4.30)$$

L'approche de stabilité quadratique se caractérise par l'utilisation d'une seule fonction de Lyapunov garantissant la stabilité du modèle dans tout le domaine d'incertitudes.

Théorème 4.3 [17] : *S'il existe deux matrices symétriques définies positives $X, Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et les matrices $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $L \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et $F \in \mathbb{R}^{n \times q}$ solutions des inégalités matricielles suivantes :*

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} Y & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & X \end{bmatrix} > 0 \\ & \begin{bmatrix} H_i & Z_i + M \\ Z_i' + M' & G_i \end{bmatrix} < 0 \\ & \forall i = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (4.31)$$

Avec

$$\begin{aligned} H_i &:= A_i Y + Y A_i' + B_{2i} L + L' B_{2i}' \\ G_i &:= A_i' X + X A_i + F C_{2i} + C_{2i}' F' \\ Z_i &:= A_i + Y A_i' X + L' B_{2i}' X + Y C_{2i}' F' \end{aligned}$$

Alors le système incertain décrit par (4.7) incertain est quadratiquement stabilisable par retour de sortie dynamique du type (4.8). Ce problème n'est pas réductible à un problème LMI du fait de la présence des termes non linéaires Z_i .

4.1.2 Problème standard à temps discret

Retour d'état

Cas non incertain Soit le système linéaire à temps discret décrit avec représentation d'état :

$$x_{k+1} = A x_k + B_2 u_k \quad (4.32)$$

où $x_k \in \mathbb{R}^n$, $u_k \in \mathbb{R}^m$, sont les vecteurs d'état et de commande, avec $u_k = K x_k$, où $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$, il vient

$$x_{k+1} = (A + B_2 K) x_k \quad (4.33)$$

Théorème 4.4 [17] : *Un système (4.32) est stabilisable par retour d'état de type $u_k = K x_k$ si, et seulement si il existe une matrice symétrique définie positive $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$, et une matrice $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$, telles que*

$$\begin{bmatrix} S & AS + B_2 R \\ SA' + R' B_2' & S \end{bmatrix} > 0 \quad (4.34)$$

Le gain de retour d'état est donné par $K = RS^{-1}$.

Cas incertain

Incertitudes polytopiques

$$\begin{aligned} A &\in \mathcal{D}_A \\ B_2 &\in \mathcal{D}_{B_2} \end{aligned} \quad (4.35)$$

Théorème 4.5 [31] : *Le système linéaire incertain à temps discret défini par (4.32) est quadratiquement stabilisable par retour d'état du type $u_k = Kx_k$ si, et seulement s'il existe une matrice symétrique définie positive S et une matrice R telles que*

$$\begin{bmatrix} S & A_i S + B_{2i} R \\ S A_i' + R' B_{2i}' & S \end{bmatrix} > 0 \quad (4.36)$$

$$\forall i = 1, 2, \dots, N \quad \forall j = 1, 2, \dots, M$$

La preuve de ce théorème est directe vu la linéarité de (4.36) par rapport à A_i et B_i .

Comme dans le cas continu les conditions de stabilisabilité sont exprimées à l'aide de \mathcal{LMI} .

Retour de sortie dynamique

Cas non incertain Soit le système par retour de sortie dynamique :

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= A x_k + B_2 u_k \\ y_k &= C_2 x_k ; \quad y \in \mathbb{R}^q \end{aligned} \quad (4.37)$$

Avec un compensateur strictement propre de représentation d'état

$$\begin{aligned} x_{c_{k+1}} &= A_c x_{c_k} + B_c y_k \\ u_k &= C_c x_{c_k} \end{aligned} \quad (4.38)$$

Le système dynamique global s'exprime

$$\begin{aligned} X_{k+1} &= A_e X_k \\ z_k &= C_e X_k \end{aligned} \quad (4.39)$$

où la matrice A_e est donnée par

$$A_e := \begin{bmatrix} A & B_2 C_c \\ B_c C_2 & A_c \end{bmatrix}$$

Théorème 4.6 : *Le système à temps discret défini par (4.37) est stabilisable par retour de sortie dynamique avec un compensateur de type (4.38) si, et seulement s'il existe deux matrices symétriques définies positives X et $Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et les matrices $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $L \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et $F \in \mathbb{R}^{n \times q}$ solutions de l'inégalité matricielle suivante*

$$\begin{bmatrix} Y & \mathbf{1} & YA + FC_2 & Z + M \\ \mathbf{1} & X & A & AX + B_2 L \\ A'Y + C_2' F' & A' & Y & \mathbf{1} \\ Z' + M' & XA' + L'B_2' & \mathbf{1} & X \end{bmatrix} > 0 \quad (4.40)$$

avec

$$Z := YAX + YB_2L + FC_2X \quad (4.41)$$

D'après la théorie de Lyapunov pour les systèmes à temps discret, le système (4.39) est asymptotiquement stable si, et seulement s'il existe une matrice symétrique définie positive $P \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$

$$\begin{bmatrix} P & A_c P \\ P A_c' & P \end{bmatrix} > 0 \quad (4.42)$$

On partitionne P et P^{-1} en blocs de dimension $n \times n$

$$P := \begin{bmatrix} X & U \\ U' & \hat{X} \end{bmatrix} \quad P^{-1} := \begin{bmatrix} Y & V \\ V' & \hat{Y} \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

et l'on pré et post multiplie (4.42), respectivement, par T_e' et T_e :

$$T_e := \begin{bmatrix} Y & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ V' & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & Y & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & V' & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

Après avoir effectué le changement de variables suivant :

$$L := C_c U', \quad F := V B_c, \quad M := V A_c U' \quad (4.45)$$

on obtient alors l'inégalité matricielle linéaire (4.40), après changement de variable $M = \tilde{M} - Z$. La représentation entrée-sortie du compensateur dynamique est :

$$T_c(\xi) = C_c(\xi \mathbf{1} - A_c)^{-1} B_c = L(U')^{-1}(\xi \mathbf{1} - V^{-1} M (U')^{-1})^{-1} V^{-1} F = L(\xi V U' - M)^{-1} F \quad (4.46)$$

où $XY + VU' = \mathbf{1}$

$$T_c(\xi) = L(\xi(\mathbf{1} - YX) - M^{-1})F \quad (4.47)$$

Ce qui donne la représentation d'état du compensateur

$$\begin{aligned} (\mathbf{1} - YX)x_{k+1} &= Mx_k + Fy_k \\ u_k &= Lx_k \end{aligned} \quad (4.48)$$

et d'où $A_c := (\mathbf{1} - YX)^{-1}$; $B_c := (\mathbf{1} - YX)^{-1} F$; $C_c := L$; d'où l'on voit que le compensateur est défini uniquement par les matrices X , Y , L , F et M .

Cas incertain

Incertitudes polytopiques Soit le système incertain défini par (4.37), le domaine d'incertitudes du type polytopique convexe est défini par

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &:= \begin{bmatrix} A & B_2 \\ C_2 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \in \mathcal{D}_A \\ \mathcal{D}_A &:= \left\{ \mathcal{A} : \mathcal{A} = \sum_{i=1}^N \lambda_i \mathcal{A}_i, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^N \lambda_i = 1 \right\} \end{aligned} \quad (4.49)$$

Théorème 4.7 : *S'il existe deux matrices symétriques définies positives $X, Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et les matrices $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $L \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et $F \in \mathbb{R}^{n \times q}$ solutions des inégalités matricielles*

$$\begin{bmatrix} Y & \mathbf{1} & YA_i + FC_{2i} & Z_i + M \\ \mathbf{1} & X & A_i & A_i X + B_{2i} L \\ A_i' Y + C_{2i}' F' & A_i' & Y & \mathbf{1} \\ Z_i' + M' & X A_i' + L' B_{2i}' & \mathbf{1} & X \end{bmatrix} > 0 \quad (4.50)$$

$$\forall i = 1, 2, \dots, N$$

avec

$$Z_i := Y A_i X + Y B_{2i} L + F C_{2i} X \quad (4.51)$$

alors, le système incertain décrit par (4.37) est quadratiquement stabilisable par retour de sortie avec un compensateur de type (4.38).

Comme pour le cas continu il n'est pas possible de réduire cela à une expression \mathcal{LMI} .

Incertitudes bornées en norme Soit le système incertain avec représentation d'état :

$$\dot{x} = (A + DVE)x + B_2 u \quad (4.52)$$

où

$$VV' \leq \mathbf{1} \quad (4.53)$$

Le problème consiste à trouver un compensateur K tel que $(A + DVE + B_2 K)$ soit asymptotiquement stable $\forall V$, tel que $VV' \leq \mathbf{1}$.

Une condition suffisante de stabilité est :

$$\exists P = P' \geq 0 \text{ et } R$$

telles que

$$\begin{bmatrix} AP + PA' + B_2 R + R' B_2' + DD' & PE' \\ EP & -\mathbf{1} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.54)$$

solution avec \mathcal{LMI} par rapport à P et R ; $K = RP^{-1}$

Remarque 4.2 *Ce problème a une équivalence avec le problème suivant*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Dw + B_2 u \\ y &= x \\ z &= Ex \\ w &= Vz \end{aligned} \quad (4.55)$$

Le système de la figure (4.1) est stable si

$$\|E(s\mathbf{1} - A - B_2 K)^{-1} D\|_\infty < 1 \quad (4.56)$$

où $VV' \leq \mathbf{1}$.

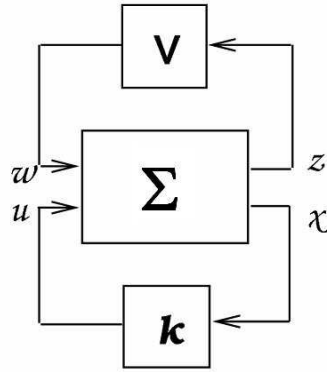


FIG. 4.1 – Modélisation du problème robuste

4.1.3 Retour de sortie

Soit le système incertain :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(\nu)x + B_2u \\ y &= C_2x \end{aligned} \quad (4.57)$$

Le problème est de déterminer $u(y)$ qui stabilise le système $\forall \nu$, où $u(y)$ est un opérateur dynamique linéaire.

Cas incertain

Incertitudes bornées en norme

Cas général

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A + DVE)x + B_2u ; \\ y &= C_2x \end{aligned} \quad (4.58)$$

$$\forall V : V'V \leq \mathbf{1}$$

Les équations du compensateur sont données par

$$\begin{aligned} \dot{x}_c &= A_c x_c + B_c y \\ u &= C_c x_c \end{aligned} \quad (4.59)$$

Ce problème consiste à trouver les matrices $\{A_c ; B_c ; C_c\}$, telles que

$$\begin{bmatrix} A + DVE & B_2C_c \\ B_cC_2 & A_c \end{bmatrix}$$

soit asymptotiquement stable $\forall V : V'V \leq \mathbf{1}$;

$$\begin{bmatrix} A + DVE & B_2C_c \\ B_cC_2 & A_c \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & B_2C_c \\ B_cC_2 & A_c \end{bmatrix}}_A + \underbrace{\begin{bmatrix} D \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}}_D V \underbrace{\begin{bmatrix} E & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_E \quad (4.60)$$

Une condition suffisante de stabilité est

$$\exists \mathcal{P} = \mathcal{P}' > 0$$

Chapitre 5

Synthèse \mathcal{H}_2 et \mathcal{H}_∞

Avant d'initier les études sur les différentes méthodes de solution avec \mathcal{LMI} , il est bon de partir de la définition du problème standard représenté dans la figure (5.1).

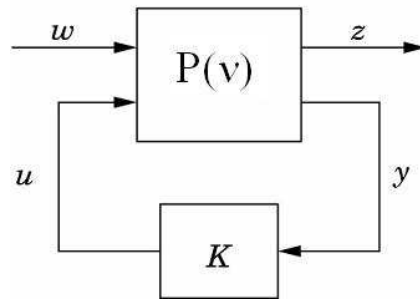


FIG. 5.1 – La forme standard

Dans le contexte linéaire le problème consiste à chercher un compensateur K qui stabilise le système de la figure (5.1), de telle façon que $\|T_{zw}\| \leq \gamma \quad \forall \nu$ (*incertitude*).

5.1 Normes \mathcal{H}_2 et \mathcal{H}_∞ avec \mathcal{LMI}

5.1.1 La norme \mathcal{H}_2 d'un modèle \mathcal{LTI}

La norme \mathcal{H}_2 d'un système nominal peut être interprétée comme la variance de la sortie pour une entrée bruit blanc gaussien centré et de variance unité, ou bien comme l'énergie de la sortie pour une entrée impulsionnelle. pour plus de détails voir [24].

Calcul de la norme \mathcal{H}_2

Soit le système avec représentation d'état :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_2 w_2(t) \\ z_2(t) &= C_2 x(t) + D_{22} w_2(t) \end{cases} \quad (5.1)$$

Le transfert $T_2 : w_2 \rightarrow z_2$ pour le système \mathcal{LTI} est décrit par la matrice :

$$T_2(s) = C_2(s\mathbf{1} - A)^{-1}B_2 + D_{22} \quad (5.2)$$

L'intégrale sur l'ensemble des fréquences est finie si, et seulement si, le système est stable et le transfert direct est nul (système strictement propre) : matrice A stable et $D_{22} = 0$.

Cas continu La norme \mathcal{H}_2 d'un système stable strictement propre est définie par :

$$\begin{aligned} \|T_2(s)\|_2^2 = \|T_{zw}(s)\|_2^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{trace}[T_{zw}(j\omega) T_{zw}(-j\omega)'] d\omega \\ &= \int_0^{+\infty} \text{trace}[G(t) G(t)'] dt \end{aligned} \quad (5.3)$$

où

$$G(t) = C_2 e^{At} B_2 = \mathcal{Laplace}^{-1}[G(s)]$$

comme :

$$G(s) = C_2 (s\mathbf{1} - A)^{-1} B_2 \implies \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned} \|T_{zw}\|_2^2 &= \int_0^\infty \text{trace} \left[B_2' e^{A't} C_2' C_2 e^{At} B_2 \right] dt \\ &= \text{trace} \left[B_2' \underbrace{\left\{ \int_0^\infty e^{A't} C_2' C_2 e^{At} dt \right\}}_Q B_2 \right] \\ &= \text{trace} [B_2' Q B_2] \end{aligned} \quad (5.5)$$

Avec \mathbf{Q} : “Gramien de Observabilité”, solution définie positive de l'équation de Lyapunov :

$$A'Q + QA + C_2' C_2 = \mathbf{0} \quad (5.6)$$

Ou de façon duale :

$$\|T_{zw}\|_2^2 = \text{trace} [C_2 P C_2'] \quad (5.7)$$

Avec \mathbf{P} : “le Gramien de Commandabilité”, solution définie positive de l'équation de Lyapunov :

$$AP + PA' + B_2 B_2' = \mathbf{0} \quad (5.8)$$

Cas discret

$$\begin{aligned} \|T_{zw}\|_2^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \text{trace} \left[T_{zw}(e^{jwT}) T_{zw}(e^{-jwT})' \right] d(wT) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \text{trace} \left[G(kT) G(kT)' \right], \text{ avec :} \\ G(kT) &= C_2 \sum_{l=0}^{k-1} A^{k-l} B_2 \end{aligned} \quad (5.9)$$

Il n'est pas nécessaire de retenir l'hypothèse de stricte propreté, le calcul de la norme \mathcal{H}_2 repose sur la détermination des gramien de commandabilité et d'observabilité :

$$\|T_{zw}\|_2^2 = \text{trace} \left[C_2 \ P \ C_2' \right] \quad (5.10)$$

Avec P = Gramien de Commandabilité solution de

$$APA' - P + B_2 B_2' = 0 \quad (5.11)$$

ou en forme duale :

$$\|T_{zw}\|_2^2 = \text{trace} \begin{bmatrix} B_2' & Q & B_2 \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

Avec $Q = \text{Gramien d'Observabilité}$ solution de

$$A'QA - Q + C_2'C_2 = 0 \quad (5.13)$$

On peut calculer la norme \mathcal{H}_2 du système (5.1) en résolvant le problème \mathcal{LMI} suivant :

Théorème 5.1 : La norme \mathcal{H}_2 du système (5.1) est l'optimum Γ_2 du problème d'optimisation \mathcal{LMI} :

$$\text{sous : } \begin{cases} \Gamma_2^2 = \min(\text{trace}(B_2'Q^+B_2)) \\ Q^+ > \mathbf{0} \\ A'Q^+ + Q^+A + C_2'C_2 < \mathbf{0} \end{cases} \quad (5.14)$$

ou en forme duale

$$\text{sous : } \begin{cases} \Gamma_2^2 = \min(\text{trace}(C_2P^+C_2')) \\ P^+ > \mathbf{0} \\ AP^+ + P^+A' + B_2B_2' < \mathbf{0} \end{cases} \quad (5.15)$$

Nous pouvons transformer les équations des grammiens (5.6 et 5.8) en inégalités :

$$\begin{cases} A'Q^+ + Q^+A + C_2'C_2 < \mathbf{0} \\ Q^+ > \mathbf{0} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} AP^+ + P^+A' + B_2B_2' < \mathbf{0} \\ P^+ > \mathbf{0} \end{cases}$$

où Q^+ et P^+ sont respectivement une borne supérieure du gramien d'observabilité $Q : Q < Q^+$ et du gramien de commandabilité $P : P < P^+$.

5.1.2 La norme \mathcal{H}_∞ d'un modèle \mathcal{LTI}

La norme \mathcal{H}_∞ d'un transfert $w_1 \rightarrow z_1$ indique la plus grande amplification sur toutes les fréquences pour une entrée sinusoïdale (ceci est immédiat par le cas *SISO* et étendu en utilisant le gain équivalent défini par des valeurs singulières pour le cas multivariable). Le coût \mathcal{H}_∞ caractérise la plus grande puissance susceptible d'être transmise par le système pour n'importe quel signal d'entrée d'énergie finie.

Calcul de la norme \mathcal{H}_∞

Soit le système \mathcal{LTI} :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_1 w_1(t) \\ z_1(t) = C_1 x(t) + D_{11} w_1(t) \end{cases} \quad (5.16)$$

la transfert $w_1 \rightarrow z_1$ est décrit par la matrice de transfert T_1 :

$$T_1(s) = C_1(s\mathbf{1} - A)^{-1}B_1 + D_{11} \quad (5.17)$$

La norme \mathcal{H}_∞ d'un système stable se définit par :

$$\Gamma_\infty = \|T_1(s)\|_\infty = \|T_{zw}(s)\|_\infty = \sup_w \bar{\sigma} [T_{zw}(j\omega)] = \max \frac{\|z_1\|_2}{\|w_1\|_2} \quad (5.18)$$

où $\bar{\sigma}$ est la valeur singulière maximale structurée ; c'est-à-dire :

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\lambda_{\max}(T_{zw}(-j\omega)'T_{zw}(j\omega))} \quad (5.19)$$

Le calcul de la norme \mathcal{H}_∞ d'un modèle \mathcal{LTI} est difficile du fait de la non existence d'une méthode de calcul direct de cette norme ; on peut utiliser un algorithme de bisection calculant les valeurs propres d'une matrice hamiltonienne pour déterminer si la norme \mathcal{H}_∞ du système est inférieure ou non à une valeur γ donnée.

Calcul de la norme \mathcal{H}_∞ avec \mathcal{LMI}

Comme pour la norme \mathcal{H}_2 , nous pouvons faire le calcul de la norme \mathcal{H}_∞ avec \mathcal{LMI} :

Théorème 5.2 : Soit le système défini par (5.16), alors la norme \mathcal{H}_∞ est l'optimum Γ_∞ du problème d'optimisation \mathcal{LMI} suivant :

$$\text{sous } \begin{cases} \Gamma_\infty^2 = \min(\gamma) \\ P > \mathbf{0} \\ \begin{bmatrix} A'P + PA + C_1'C_1 & PB_1 + C_1'D_{11} \\ B_1'P + D_{11}'C_1 & -\gamma\mathbf{1} + D_{11}'D_{11} \end{bmatrix} < \mathbf{0} \end{cases} \quad (5.20)$$

ou en forme duale :

$$\text{sous } \begin{cases} \Gamma_\infty^2 = \min(\gamma) \\ Q > \mathbf{0} \\ \begin{bmatrix} AX + XA' + B_1B_1' & XC_1' + B_1D_{11}' \\ C_1X + D_{11}B_1' & -\gamma\mathbf{1} + D_{11}D_{11}' \end{bmatrix} < \mathbf{0} \end{cases} \quad (5.21)$$

5.2 Synthèse \mathcal{H}_2 à temps continu

5.2.1 Problème général

Soit le système de la figure (5.2)

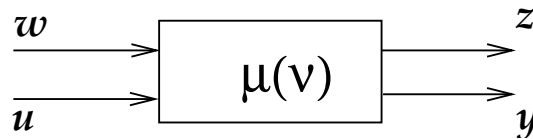


FIG. 5.2 – Synthèse \mathcal{H}_2

représenté par les équations d'état

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1w + B_2u \\ z &= C_1x + D_{12}u \\ y &= C_2x + D_{21}w \end{aligned} \quad (5.22)$$

où (z) représente la sortie commandée et (y) la sortie mesuré.

Le problème \mathcal{H}_2 consiste à déterminer une loi de commande u qui stabilise le système de la figure (5.2) et minimise la norme \mathcal{H}_2 de la fonction de transfert T_{zw} .

5.2.2 Retour d'état

Avec une loi de commande : $u = Kx$, le transfert de la entrée w à la sortie z est :

$$T_{zw} = (C_1 + D_{12}K)(s\mathbf{1} - A - B_2K)^{-1}B_1 \quad (5.23)$$

Cas sans incertitude

Le problème consiste en trouver une matrice de gain K qui stabilise le système et minimise $\|T_{zw}\|_2^2$.

$$\begin{aligned} & \min_K \text{trace} [B_1'PB_1] \\ \text{sous} & \\ & P > 0 \\ & (A + B_2K)'P + P(A + B_2K) + (C_1 + D_{12}K)'(C_1 + D_{12}K) = 0 \quad (\leq 0) \end{aligned} \quad (5.24)$$

ce qu'est équivalent à

$$\begin{aligned} & \min_K \text{trace} [W] \\ \text{sous} & \\ & P > 0 \\ & B_1'PB_1 \leq W \\ & (A + B_2K)'P + P(A + B_2K) + (C_1 + D_{12}K)'(C_1 + D_{12}K) \leq 0 \end{aligned} \quad (5.25)$$

Soit ; par complement de Schur et $Q = P^{-1}$

$$\min_K \text{trace} [W] \quad (5.26)$$

sous

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} W & B_1' \\ B_1 & Q \end{bmatrix} \geq 0 \\ & \begin{bmatrix} AQ + QA' + B_2R + R'B_2' & (C_1Q + D_{12}R)' \\ C_1Q + D_{12}R & -\mathbf{1} \end{bmatrix} \leq 0 \end{aligned} \quad (5.27)$$

Solution du problème avec \mathcal{LMI} par rapport à W, Q, R , d'où $K_{opt} = RQ^{-1}$

Un autre problème, d'intérêt est de trouver un compensateur K tel que

$$\|T_{zw}\|_2^2 \leq \mu \quad (5.28)$$

ce qu'est simplement résolu par

$$\text{trace} W \leq \mu \quad (5.29)$$

sous (5.27).

De façon alternative (Gramien de commandabilité) :

$$\begin{aligned} & \min_K \text{trace} [(C_1 + D_{12}K)P(C_1 + D_{12}K)'] \\ \text{sous} & \\ & (A + B_2K)P + P(A + B_2K)' + B_1B_1' = 0 \end{aligned} \quad (5.30)$$

Après opérations similaires à ce qui précède, il vient :

$$\begin{aligned}
& \min_K \text{trace } [W] \\
& \text{sous} \\
& P \geq 0 \\
& \begin{bmatrix} -W & C_1P + D_{12}R \\ (C_1P + D_{12}R)' & -P \end{bmatrix} \leq 0 \\
& \underbrace{AP + PA' + B_2R + R'B_2' + B_1B_1'}_{\text{Condition Stabilité}} \leq 0
\end{aligned} \tag{5.31}$$

Solution avec \mathcal{LMI} par rapport à P et R . Le gain de retour d'état est donné par $K = RP^{-1}$.

Cas incertain

Dans le cas incertain qui correspond à un problème de dimension infinie la formulation la plus "naturelle" est la suivante :

Problème 5.1 *Trouver un compensateur $K : (u = Kx)$ qui stabilise le système et*

$$\text{minimise } \left[\max_{\nu} \|T_{zw}\|_2^2 \right] \tag{5.32}$$

Ceci constitue la meilleure formulation, mais est peu utilisée à cause de la grande complexité mathématique qu'implique la solution du problème(5.32). La solution est cherchée par approximations itératives successives pour trouver une solution sous-optimale.

Le problème qui va être résolu est le suivant :

Problème 5.2 *Trouver un compensateur $K : (u = Kx)$ qui stabilise le système et minimise une borne supérieure de la norme \mathcal{H}_2 pour toute réalisation du système dans son domaine d'incertitudes, c'est-à-dire :*

$$\begin{aligned}
& \min \mu \\
& \text{sous} \\
& \|T_{zw}\|_2^2 \leq \mu, \quad \forall \nu
\end{aligned} \tag{5.33}$$

ou trouver un compensateur $K : (u = Kx)$, qui stabilise le système et :

$$\|T_{zw}\|_2^2 \leq \mu, \quad \forall \nu \tag{5.34}$$

Incertaines polytopiques Une solution au problème de la minimisation d'une borne supérieure de $\|T_{zw}\|_2^2 \forall \nu$ est :

$$\begin{aligned}
& \min \mu \\
& \text{sous} \\
& \text{trace } W \leq \mu \\
& \begin{bmatrix} W & B_1' \\ B_1 & Q \end{bmatrix} \geq 0 \\
& \begin{bmatrix} A_iQ + QA_i + B_2R + R'B_2' & (C_1Q + D_{12}R)' \\ C_1Q + D_{12}R & -\mathbf{1} \end{bmatrix} < 0 \\
& i = 1, 2, \dots, n_a
\end{aligned} \tag{5.35}$$

5.2.3 Retour de sortie

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(\nu)x + B_1w + B_2u \\ z &= C_1x + D_{12}u \\ y &= C_2x + D_{21}w \end{aligned} \quad (5.41)$$

Problème 5.4 Trouver une loi de commande $u(y)$ qui stabilise le système et minimise une borne de $\|T_{zw}\|_2^2$, $\forall \nu$.

Cas sans incertitude $A(\nu) = A$

Les équations d'état du compensateur s'expriment ainsi :

$$\begin{aligned} \dot{x}_c &= A_c x_c + B_c y \\ u &= C_c x_c \end{aligned} \quad (5.42)$$

le modèle étendu est :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_c \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} A & B_2 C_c \\ B_c C_2 & A_c \end{bmatrix}}_{\mathcal{A}} \begin{bmatrix} x \\ x_c \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} B_1 \\ B_c D_{21} \end{bmatrix}}_{\mathcal{B}} w \\ z &= \underbrace{\begin{bmatrix} C_1 & D_{12} C_c \end{bmatrix}}_{\mathcal{C}} \begin{bmatrix} x \\ x_c \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.43)$$

Avec les nouvelles matrices (\mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C}) la formulation équivalente est :

$$\begin{aligned} &\min_{A_c, B_c, C_c} \text{trace} [\mathcal{B}' \mathcal{P} \mathcal{B}] \\ \text{sous} & \quad \mathcal{A}' \mathcal{P} + \mathcal{P} \mathcal{A} + \mathcal{C}' \mathcal{C} \leq 0 \end{aligned} \quad (5.44)$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} &\min \text{trace } W \\ \text{sous} & \quad \begin{bmatrix} \mathcal{P} & \mathcal{P} \mathcal{B} \\ \mathcal{B}' \mathcal{P} & W \end{bmatrix} \geq 0 \\ & \quad \begin{bmatrix} \mathcal{A} \mathcal{P} + \mathcal{P} \mathcal{A} & \mathcal{C}' \\ \mathcal{C} & -\mathbf{1} \end{bmatrix} \leq 0 \end{aligned} \quad (5.45)$$

Partitionnant \mathcal{P} et \mathcal{P}^{-1} définissant T l'opérateur de projection il vient :

$$\begin{aligned} &\min \text{trace } [W] \\ \text{sous} & \quad \begin{bmatrix} Y & \mathbf{1} & B_1 \\ \mathbf{1} & X & X B_1 + L D_{21} \\ B_1' & (X B_1 + L D_{21})' & W \end{bmatrix} \geq 0 \\ & \quad \begin{bmatrix} A Y + Y A' + B_2 R + R B_2' & Z + M & Y C_1' + R' D_{12}' \\ Z' + M' & A' X + X A + L C_2 + C_2' L & C_1' \\ C_1 Y + D_{12} R & C_1 & -\mathbf{1} \end{bmatrix} \leq 0 \end{aligned} \quad (5.46)$$

avec $\mathcal{M} = -\mathcal{Z} + \tilde{\mathcal{M}}$. Solution avec \mathcal{LMI} par rapport à $W, X, Y, R, L, \tilde{\mathcal{M}}$; qui permet de trouver les matrices $\{A_c, B_c, C_c\}$ qui minimisent $\|T_{zw}\|_2^2$.

Cas incertain

Problème 5.5 Déterminer les matrices $\{A_c, B_c, C_c\}$ qui stabilisent le système et minimisent μ tel que $\|T_{zw}\|_2^2 \leq \mu, \forall \nu$.

Incertitudes polytopiques Le problème s'écrit :

$$\begin{aligned} & \min \mu \\ & \text{sous} \\ & \begin{aligned} & \text{trace } W \leq \mu \\ & \begin{bmatrix} \mathcal{P} & \mathcal{P}\mathcal{B} \\ \mathcal{B}'\mathcal{P} & W \end{bmatrix} \geq 0 \\ & \begin{bmatrix} \mathcal{A}'_i\mathcal{P} + \mathcal{P}\mathcal{A}_i & \mathcal{C}' \\ \mathcal{C} & -\mathbf{1} \end{bmatrix} \leq 0 \\ & i = 1, 2, \dots, n_o \end{aligned} \end{aligned} \quad (5.47)$$

Les transformations T et les changements de variable sont dépendants des blocs de la matrice de lyapunov \mathcal{P} , qu'est une matrice unique; alors tous les calculs se repèlent à l'identique sur tous les sommets \mathcal{A}_i , il vient alors :

$$\begin{aligned} & \min \mu \\ & \text{sous} \\ & \begin{aligned} & \text{trace } [W] \leq \mu \\ & \begin{bmatrix} Y & \mathbf{1} & B_1 \\ \mathbf{1} & X & XB_1 + LD_{21} \\ B'_1 & (XB_1 + LD_{21})' & W \end{bmatrix} \geq 0 \\ & \begin{bmatrix} A_i Y + Y A'_i + B_2 R + R' B'_2 & \mathcal{Z}_i + \mathcal{M} & Y C'_1 + R' D'_{12} \\ \mathcal{Z}'_i + \mathcal{M}' & A'_i X + X A_i + L C_2 + C'_2 L' & C'_1 \\ C_1 Y + D_{12} R & C_1 & -\mathbf{1} \end{bmatrix} \leq 0 \\ & i = 1, 2, \dots, n_o \end{aligned} \end{aligned} \quad (5.48)$$

C'est une \mathcal{BMI} (*inégalité matricielle bilinéaire*) à cause de la présence des \mathcal{Z}_i . Pour trouver une solution, il est nécessaire de développer un travail algorithmique plus grand (techniques de relaxation par exemple).

Incertitudes bornées en norme

$$\dot{x} = (A + DVE)x + B_1 w + B_2 u \quad (5.49)$$

Le système étendu s'écrit :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_c \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathcal{A} + \overbrace{\begin{bmatrix} D \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}}^{\mathcal{D}} V \underbrace{\begin{bmatrix} E & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\mathcal{E}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_c \end{bmatrix} + \mathcal{B} w \\ z &= \mathcal{C} \begin{bmatrix} x \\ x_c \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.50)$$

Avec les nouvelles matrices définies en (5.50), le formulation du problème peut s'exprimer comme :

$$\begin{aligned}
& \min \mu \\
& \text{sous} \\
& \text{trace } [W] \leq \mu \\
& \begin{bmatrix} \mathcal{P} & \mathcal{P}\mathcal{B} \\ \mathcal{B}'\mathcal{P} & W \end{bmatrix} \geq 0 \\
& \begin{bmatrix} (\mathcal{A} + DVE)' \mathcal{P} + \mathcal{P}(\bullet) & C' \\ C & -\mathbf{1} \end{bmatrix} \leq 0
\end{aligned} \tag{5.51}$$

soit

$$\begin{aligned}
& \min \mu \\
& \text{sous} \\
& \text{trace } [W] \leq \mu \\
& \begin{bmatrix} \mathcal{P} & \mathcal{P}\mathcal{B} \\ \mathcal{B}'\mathcal{P} & W \end{bmatrix} \geq 0 \\
& \begin{bmatrix} \mathcal{A}'\mathcal{P} + \mathcal{P}\mathcal{A} + \underbrace{\mathcal{P}D D' \mathcal{P}}_{\text{Schur}} + \mathcal{E}\mathcal{E}' & C' \\ C & -\mathbf{1} \end{bmatrix} \leq 0
\end{aligned} \tag{5.52}$$

il vient :

$$\begin{aligned}
& \min \mu \\
& \text{sous} \\
& \text{trace } [W] \leq \mu \\
& \begin{bmatrix} \mathcal{P} & \mathcal{P}\mathcal{B} \\ \mathcal{B}'\mathcal{P} & W \end{bmatrix} \geq 0 \\
& \begin{bmatrix} \mathcal{A}'\mathcal{P} + \mathcal{P}\mathcal{A} + \mathcal{E}\mathcal{E}' & C' & \mathcal{P}D \\ C & -\mathbf{1} & \mathbf{0} \\ D'\mathcal{P} & \mathbf{0} & -\mathbf{1} \end{bmatrix} \leq 0
\end{aligned} \tag{5.53}$$

Après transformations (P, P^{-1}, T) il vient

$$\begin{aligned}
& \min \mu \\
& \text{sous} \\
& \text{trace } [W] \leq \mu \\
& \begin{bmatrix} Y & \mathbf{1} & B_1 \\ \mathbf{1} & X & XB_1 + LD_{21} \\ B'_1 & (XB_1 + LD_{21})' & W \end{bmatrix} > 0 \\
& \begin{bmatrix} AY + YA' + B_2R + R'B'_2 + E'E & Z + M & YC'_1 + R'D'_{12} & D \\ Z' + M' & A'X + XA + LC_2 + C'_2L' & C'_1 & XD \\ C_1Y + D_{12}R & C_1 & -\mathbf{1} & \mathbf{0} \\ D' & D'X & \mathbf{0} & -\mathbf{1} \end{bmatrix} < 0
\end{aligned} \tag{5.54}$$

Avec $M = -Z + \tilde{M}$. Solution avec \mathcal{LMI} par rapport à $\mu, W, X, Y, R, L, \tilde{M}$; et puis détermination des matrices $\{A_c, B_c, C_c\}$.

5.3 Synthèse \mathcal{H}_2 à temps discret

5.3.1 Retour d'état

Théorème 5.3 : *Le système (4.32) est stabilisable par retour d'état et*

$$\|T_{z_k w_k}(\xi)\|_2^2 \leq \mu$$

si, et seulement si il existe deux matrices symétriques définies positives $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $W \in \mathbb{R}^{p \times p}$ et une matrice $R \in \mathbb{R}^{m \times n}$ solutions des inégalités matricielles

$$\text{trace}[W] \leq \mu \quad (5.55)$$

$$\begin{bmatrix} S & SC'_1 + R'D'_{12} \\ C_1 S + D_{12} R & W \end{bmatrix} \geq 0 \quad (5.56)$$

$$\begin{bmatrix} S & AS + B_2 R & B_1 \\ SA' + R'B'_2 & S & \mathbf{0} \\ B'_1 & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (5.57)$$

Le gain de retour d'état étant défini par $K = RS^{-1}$.

5.3.2 Retour de sortie

Cas sans incertitude

Théorème 5.4 [17] : *Le système (4.37) est stabilisable par retour de sortie dynamique de type (4.38) et*

$$\|T_{z_k w_k}\|_2^2 \leq \mu$$

si, et seulement si il existe une matrice symétrique définie positive $W \in \mathbb{R}^{p \times p}$ et les matrices $X, Y, \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $L \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $F \in \mathbb{R}^{n \times q}$ et $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ telles que

$$\text{trace}[W] \leq \mu \quad (5.58)$$

$$\begin{bmatrix} Y & \mathbf{1} & B_1 \\ \mathbf{1} & X & XB_1 + FD_{21} \\ B'_1 & B'_1 X + D'_{21} F' & W \end{bmatrix} > 0 \quad (5.59)$$

$$\begin{bmatrix} Y & \mathbf{1} & YA' + L'B'_2 & Z + M & YC'_1 + L'D'_{12} \\ \mathbf{1} & X & A' & A'X + C'_2 F' & C'_1 \\ AY + B_2 L & A & Y & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ Z' + M' & XA + FC_2 & \mathbf{1} & X & \mathbf{0} \\ C_1 Y + D_{12} L & C_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} > 0 \quad (5.60)$$

où les matrices L, F, M et Z sont définies au théorème (4.6).

Cas incertain

Incertitudes polytopiques

Théorème 5.5 [17] : *S'il existe deux matrices symétriques, définies positives $X, Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$, une matrice symétrique définie positive $W \in \mathbb{R}^{p \times p}$ et les matrices $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $L \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et $F \in \mathbb{R}^{n \times q}$ solutions des inégalités matricielles bilinéaires (\mathcal{BMI}) suivantes*

$$\begin{bmatrix} Y & \mathbf{1} & B_1 \\ \mathbf{1} & X & XB_1 + FD_{21} \\ B_1' & B_1'X + D_{21}'F' & W \end{bmatrix} > 0 \quad (5.61)$$

$$\begin{bmatrix} Y & \mathbf{1} & YA_i' + L'B_{2i}' & Z_i + M & YC_1' + L'D_{12}' \\ \mathbf{1} & X & A_i' & A_i'X + C_{2i}'F' & C_1' \\ A_iY + B_{2i}L & A_i & Y & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ Z_i' + M' & XA_i + FC_{2i} & \mathbf{1} & X & \mathbf{0} \\ C_1Y + D_{12}L & C_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} > 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, N \quad (5.62)$$

où :

$$Z_i = YA_i'X + YC_{2i}'F' + L'B_{2i}'X$$

le système incertain à temps discret (4.37), avec des incertitudes polytopiques, est quadratiquement stabilisable par retour de sortie dynamique avec un compensateur de type (4.38), et

$$\|T_{z_k w_k}\|_2^2 < \text{trace}[W]$$

La présence des variables d'optimisation apparaissant bilinéairement dans Z_i , ne nous permet pas de résoudre ce problème directement en utilisant les outils de résolution \mathcal{LMI} . Afin de déterminer le compensateur, nous utilisons un algorithme par décomposition croisée, le quel s'appuie sur la résolution alternative de deux problèmes linéaires, en relaxant alternativement certaines variables d'optimisation :

Problème 5.6 Premier problème :

Supposons qu'à l'itération j les matrices X_j, Y_j, L_j, F_j et M_j satisfassent les inégalités (5.61 et 5.62) et considérons le problème d'optimisation convexe avec contraintes \mathcal{LMI} suivant :

$$\begin{aligned} & \min_{X, Q_1, F, S_1, W} \text{trace}[W] \\ \text{sous} & \begin{bmatrix} Q_1 & Q_1 & Q_1 B_1 \\ Q_1 & X & XB_1 + FD_{21} \\ B_1' Q_1 & B_1' X + D_{21}' F' & W \end{bmatrix} > 0 \\ & \begin{bmatrix} Q_1 & Q_1 & A_{ij}' Q_1 & A_{ij}' X + C_{2i}' F' + S_1 & C_j' \\ Q_1 & X & A_i' Q_1 & A_i' X + C_{2i}' F' & C_1' \\ Q_1 A_{ij} & Q_1 A_i & Q_1 & Q_1 & \mathbf{0} \\ XA_{ij} + FC_{2i} + S_1' & XA_i + FC_{2i} & Q_1 & X & \mathbf{0} \\ C_j & C_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} > 0 \\ & \forall i = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (5.63)$$

où

$$A_{ij} := A_i + B_{2i}L_jY_j^{-1}, \quad C_j := C_1 + D_{12}L_jY_j^{-1}$$

Les inégalités matricielles linéaires \mathcal{LMI} (5.63) sont obtenues ainsi :

- Multiplier l'inégalité (5.61) à gauche et à droite par $diag[Y^{-1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}]$
- Multiplier l'inégalité de (5.62) à gauche et à droite par $diag[Y^{-1}, \mathbf{1}, Y^{-1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}]$
- faire les changements de variable suivants : $Q_1 := Y^{-1}$ et $S_1 := Y^{-1}M$

La résolution du problème (5.63) conduit à une solution telle que :

$$trace[W] \leq trace[W_j]$$

et les matrices $Y = Q_1^{-1}$, L_j , X , F , $M = Q_1^{-1}S_1$, W étant faisables pour les inégalités (5.61 et 5.62) et pouvant servir à l'initialisation du problème dual suivant :

Problème 5.7 Second problème :

Supposons, comme précédemment, qu'à l'itération j les matrices X_j, Y_j, L_j, F_j et M_j sont faisables pour les inégalités (5.61 et 5.62), alors le problème dual s'écrit :

$$\begin{aligned} & \min_{Q_2, Y, L, S_2, W} \quad trace[w] \\ \text{sous} & \quad \begin{bmatrix} Y & Q_2 & B_1 \\ Q_2 & Q_2 & XB_j \\ B_1' & B_j' & W \end{bmatrix} > 0 \\ & \quad \begin{bmatrix} Y & Q_2 & YA_i' + LB_{2i}' & YA_{ij}' + LB_{2i}' + S_2 & YC_1' + LD_{12}' \\ Q_2 & X & Q_2A_i' & Q_2A_{ij}' & Q_2C_1' \\ A_iL + B_{2i}L & A_iQ_2 & Y & Q_2 & \mathbf{0} \\ A_{ij}Y + B_{2i}L + S_2' & A_{ij}Q_2 & Q_2 & Q_2 & \mathbf{0} \\ C_1Y + D_{12}L & C_1Q_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} > 0 \\ & \quad \forall i = 1, \dots, N \end{aligned} \tag{5.64}$$

où :

$$A_{ij} := A_i + X_j^{-1}F_jC_{2i} \quad B_j := B_1 + X^{-1}F_jD_{21}$$

Les \mathcal{LMI} (5.64) sont obtenues ainsi :

- Multiplier à gauche et à droite l'inégalité (5.61) par $diag[\mathbf{1}, X^{-1}, \mathbf{1}]$
- Multiplier à gauche et à droite l'inégalité (5.62) par $diag[\mathbf{1}, X^{-1}, \mathbf{1}, X^{-1}, \mathbf{1}]$
- Faire le changement de variable $Q_2 := X^{-1}$ et $S_2 := MX^{-1}$

La résolution du problème (5.64) conduit à une solution telle que :

$$trace[W] \leq trace[W_j]$$

Les matrices $Y = Q_1^{-1}$, L_j , X , F , $M = Q_1^{-1}S_1$ sont faisables pour les inégalités (5.61 et 5.62) et peuvent servir à l'initialisation du problème (5.6). L'utilisation simultanée des problèmes (5.6 et 5.7), conduit à l'algorithme suivant.

Algorithme 5.1 :

★ **Étape 1 :** A l'itération $j = 0$, on pose Y_0 , L_0 , X_0 , F_0 , et M_0 comme solution admissible.

- ★ **Étape 2** : Avec les matrices Y_j et L_j , résolution du problème (5.6) et détermination de la valeur courante du coût $\alpha_j := \text{trace}[W_j]$. La solution optimale donne les matrices X_j et F_j , qui vont être utilisées à l'étape 3.
- ★ **Étape 3** : Avec les matrices X_j et F_j , résolution du problème (5.7) et détermination de la valeur courante du coût $\beta_j := \text{trace}[W_j]$. La solution optimale donne les matrices Y_j et L_j qui vont être utilisées à l'étape 2.
- ★ **Étape 4** : Si $\alpha_j - \beta_j < \epsilon$, avec $\epsilon > 0$ mais suffisamment petit alors $\implies Y_j, L_j, X_j, F_j$ et M sont les solutions du problème, STOP. Sinon, $j \leftarrow j + 1$ et retourner à l'étape 2.

Cet algorithme, qui, à partir d'une solution admissible faisable, résout alternativement deux problèmes convexes (5.6 et 5.7) avec contraintes \mathcal{LMI} , génère une séquence de solutions admissibles à coût décroissant.

Si nous ne possédons pas de solution admissible faisable pour initialiser l'algorithme par décomposition croisée, il est possible d'en obtenir une, si elle existe, en résolvant le problème de valeur propre généralisée suivant :

$$\begin{array}{l} \min_{X,Y,L,F,M} \lambda \\ \text{sous} \end{array} \left[\begin{array}{cccc} Y - \lambda Y & \mathbf{1} & Y A'_i + L' B'_{2i} & Z_i + M \\ \mathbf{1} & X - \lambda X & A'_i & A'_i X + C'_{2i} F' \\ A_i Y + B_{2i} L & A_i & Y - \lambda Y & \mathbf{1} \\ Z'_i + M' & X A_i + F C_{2i} & \mathbf{1} & X - \lambda X \end{array} \right] > 0 \quad (5.65) \\ \forall i = 1, 2, \dots, N$$

Et en utilisant l'algorithme (5.1) par relaxation, on résout deux problèmes d'optimisation convexes avec contraintes \mathcal{LMI} . L'initialisation de ces deux problèmes se faisant avec une valeur très grande de λ , ainsi les contraintes sont satisfaites. Et lorsque $\lambda < 0$, l'on dispose d'une solution faisable pour initialiser le problème avec les inégalités (5.61 et 5.62).

Remarque 5.1 Il est possible de montrer que le problème H_2 est une généralisation du problème LQ .

5.4 Synthèse \mathcal{H}_∞ à temps continu

5.4.1 Problème général

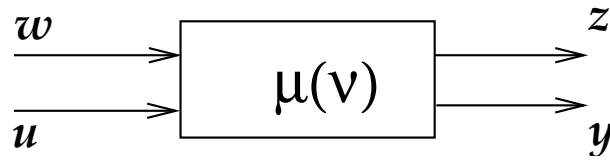
Soit les équations d'état du système

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(\nu)x + B_1 w + B_2 u \\ z &= C_1 x + D_{12} u \\ y &= C_2 x + D_{21} w \end{aligned} \quad (5.66)$$

Le problème général \mathcal{H}_∞ consiste à faire la synthèse d'une loi de commande de type rétro-action qui :

- Stabilise le système
- Vérifie que

$$\|T_{zw}\|_\infty < \gamma \quad \forall \nu \quad (5.67)$$

FIG. 5.3 – Synthèse \mathcal{H}_∞ **Cas strictement propre**

$$\|C(s\mathbf{1} - A)^{-1}B\|_\infty < \gamma \quad \text{et stable} \quad (5.68)$$

si, et seulement si :

$$\begin{aligned} & \exists P = P' > 0 \\ \text{tel que} & \begin{bmatrix} AP + PA' + BB' & PC' \\ CP & -\gamma\mathbf{1} \end{bmatrix} < 0 \end{aligned} \quad (5.69)$$

ou, de manière équivalente, si et seulement si,

$$\begin{aligned} & \exists Q = Q' > 0 \\ \text{tel que} & \begin{bmatrix} A'Q + QA + C'C & QB \\ B'Q & -\gamma\mathbf{1} \end{bmatrix} < 0 \end{aligned} \quad (5.70)$$

Cas propre

$$\|C(s\mathbf{1} - A)^{-1}B + D\|_\infty < \gamma \quad \text{et stable} \quad (5.71)$$

si et seulement si,

$$\begin{aligned} & \exists P = P' > 0 \\ \text{tel que} & \begin{bmatrix} AP + PA' & B & PC' \\ B' & -\gamma\mathbf{1} & D' \\ CP & D & -\gamma\mathbf{1} \end{bmatrix} < 0 \end{aligned} \quad (5.72)$$

ou, de manière équivalente, si et seulement si,

$$\begin{aligned} & \exists Q = Q' > 0 \\ \text{tel que} & \begin{bmatrix} A'Q + QA & QB & C' \\ B'Q & -\gamma\mathbf{1} & D' \\ C & D & -\gamma\mathbf{1} \end{bmatrix} < 0 \end{aligned} \quad (5.73)$$

Solution avec \mathcal{LMI} .

5.4.2 Retour d'état

$$\begin{aligned} u &= Kx \\ T_{zw} &= (C_1 + D_{12}K)(s\mathbf{1} - A - B_2K)^{-1}B_1 \end{aligned} \quad (5.74)$$

Cas sans incertitude

Le problème consiste à déterminer un compensateur K stabilisant qui satisfait

$$\|T_{zw}\|_\infty < \gamma \quad (5.75)$$

Une condition nécessaire et suffisante s'écrit :

$$\begin{aligned} & \exists P = P' > 0 \text{ et } R \\ \text{telle que :} & \left[\begin{array}{cc} AP + PA' + B_2R + R'B'_2 + B_1B'_1 & PC'_1 + R'D'_{12} \\ C_1P + D_{12}R & -\gamma^2\mathbf{1} \end{array} \right] < 0 \end{aligned} \quad (5.76)$$

Solution \mathcal{LMI} par rapport à P et R , le gain par retour d'état est donné par $K = RP^{-1}$.

Cas incertain

Incertitudes polytopiques Le problème consiste à déterminer la norme \mathcal{H}_∞ du transfert T_{zw} tel que

$$\begin{aligned} & \|T_{zw}\|_\infty < \gamma \quad \forall A \in \mathcal{D}_A \\ \text{une condition suffisante est :} & \\ & \exists P = P' > 0 \text{ et } R \\ \text{tel que :} & \left[\begin{array}{cc} A_iP + PA'_i + B_2R + R'B'_2 + B_1B'_1 & PC'_1 + R'D'_{12} \\ C_1P + D_{12}R & -\gamma^2\mathbf{1} \end{array} \right] < 0 \\ & i = 1, 2, \dots, n_a \end{aligned} \quad (5.77)$$

Par combinaison linéaire convexe des inégalités matricielles on peut arriver à une solution \mathcal{LMI} par rapport à P et R , le gain de retour d'état est donné par $K = RP^{-1}$.

Incertitudes bornées en norme Le problème consiste à trouver la norme \mathcal{H}_∞ de la fonction de transfert $\|T_{zw}\|_\infty$ de manière que

$$\begin{aligned} \|T_{zw}\|_\infty = \|(C_1 + D_{12}K)(s\mathbf{1} - A - DVE - BK)^{-1}B_1\|_\infty < \gamma \\ \text{(et stable)} \quad \forall V : V'V \leq \mathbf{1} \end{aligned} \quad (5.78)$$

ce qui s'écrit :

$$\begin{aligned} & \exists P = P' > 0, \\ \text{tel que :} & \left[\begin{array}{cc} (A + DVE)P + P(A + DVE)' + B_2R + R'B'_2 + B_1B'_1 & PC'_1 + R'D'_{12} \\ C_1P + D_{12}R & -\gamma^2\mathbf{1} \end{array} \right] < 0 \end{aligned} \quad (5.79)$$

Une condition suffisante est :

$$\begin{aligned} & \exists P = P' > 0 \\ \text{tel que} & \left[\begin{array}{ccc} AP + PA' + B_2R + R'B'_2 + B_1B'_1 + DD' & PC'_1 + R'D'_{12} & PE' \\ C_1P + D_{12}R & -\gamma^2\mathbf{1} & \mathbf{0} \\ EP & \mathbf{0} & -\mathbf{1} \end{array} \right] < 0 \end{aligned} \quad (5.80)$$

Solution avec \mathcal{LMI} par rapport à P et R . Le gain de retour d'état est donné par $K = RP^{-1}$.

5.4.3 Retour de sortie

Soit les équations d'état (5.66), les équations d'état du compensateur admissible sont données par :

$$\begin{aligned} \dot{x}_c &= A_c x_c + B_c (C_2 x + D_{21} w) \\ u &= C_c x_c \end{aligned} \quad (5.81)$$

Sous forme étendue

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_c \end{bmatrix} &= \mathcal{A} \begin{bmatrix} x \\ x_c \end{bmatrix} + \mathcal{B} w \\ z &= \mathcal{C} \begin{bmatrix} x \\ x_c \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.82)$$

Cas sans incertitude

Le problème consiste à minimiser la norme \mathcal{H}_∞ du transfert T_{zw} tel que

$$\|T_{zw}\|_\infty < \gamma \quad (\text{et stable}) \quad (5.83)$$

ce qui s'écrit :

$$\begin{aligned} &\exists \mathcal{P} = \mathcal{P}' > 0 \\ \text{tel que} & \begin{bmatrix} \mathcal{A}'\mathcal{P} + \mathcal{P}\mathcal{A} + \mathcal{C}'\mathcal{C} & \mathcal{P}\mathcal{B} \\ \mathcal{B}'\mathcal{P} & -\gamma\mathbf{1} \end{bmatrix} < 0 \end{aligned} \quad (5.84)$$

En multipliant à droite par

$$\begin{bmatrix} T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

et à gauche par

$$\begin{bmatrix} T' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

On obtient les \mathcal{LMI} suivantes

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} Y & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & X \end{bmatrix} > 0 \\ \text{donde } \mathcal{M} = -\mathcal{Z} + \tilde{\mathcal{M}} & \begin{bmatrix} \frac{AY + YA' + B_2 R + R' B_2'}{\mathcal{Z}' + \mathcal{M}'} & \mathcal{Z} + \mathcal{M} \\ \frac{B_1'}{C_1 Y + D_{12} R} & \frac{A'X + XA + LC_2 + C_2' L'}{(XB_1 + LD_{21})'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 & YC_1' + R'D_{12}' \\ XB_1 + LD_{21} & C_1' \\ -\gamma\mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} \end{bmatrix} < 0 \end{aligned} \quad (5.85)$$

Solution avec \mathcal{LMI} par rapport à X , Y , R , L , $\tilde{\mathcal{M}}$, et le but est de chercher les matrices $\{A_c, B_c, C_c\}$.

Cas incertain

Incertaines bornées en norme

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_c \end{bmatrix} &= (\mathcal{A} + \mathcal{D}V\mathcal{E}) \begin{bmatrix} x \\ x_c \end{bmatrix} + \mathcal{B} w \\ z &= \mathcal{C} \begin{bmatrix} x \\ x_c \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.86)$$

Le problème consiste à minimiser la norme \mathcal{H}_∞ de la fonction de transfert T_{zw} tel que

$$\|T_{zw}\|_\infty < \gamma \quad \forall V \text{ (et stable)} \quad (5.87)$$

Soit :

$$\begin{aligned} & \exists \mathcal{P} = \mathcal{P}' > 0 \\ & \text{tel que} \\ & \begin{bmatrix} (\mathcal{A} + \mathcal{D}V\mathcal{E})'\mathcal{P} + \mathcal{P}(\bullet) & \mathcal{P}\mathcal{B} & \mathcal{C}' \\ & \mathcal{B}'\mathcal{P} & -\gamma\mathbf{1} & \mathbf{0} \\ & \mathcal{C} & \mathbf{0} & -\mathbf{1} \end{bmatrix} < 0 \end{aligned} \quad (5.88)$$

Une condition suffisante est :

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A}'\mathcal{P} + \mathcal{P}\mathcal{A} & \mathcal{P}\mathcal{B} & \mathcal{C}' & \mathcal{P}\mathcal{D} & \mathcal{E}' \\ (\bullet)' & -\gamma\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ (\bullet)' & (\bullet)' & -\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathcal{D}'\mathcal{P} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathcal{E} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{1} \end{bmatrix} < 0 \quad (5.89)$$

5.5 Synthèse \mathcal{H}_∞ à temps discret

Le problème consiste à trouver un compensateur stabilisant pour le système (4.32), garantissant $\|T_{z_k w_k}\|_\infty < \gamma$.

Pour aborder ce problème nous allons utiliser une définition du lemme borné réel pour les systèmes à temps discret [27] :

Lemme 5.1 [17] : Soit une fonction de transfert discrète

$$T(z) = D + C(z\mathbf{1} - A)^{-1}\hat{B}$$

Les expressions suivantes sont alors équivalentes :

- i. $\|D + C(z\mathbf{1} - A)^{-1}B\|_\infty < \gamma$ et A est stable au sens des systèmes à temps discret (i.e. $|\lambda_i(A)| < 1$);
- ii. Il existe une matrice symétrique définie positive P telle que

$$\begin{bmatrix} A'PA - P & A'PB & \mathcal{C}' \\ B'PA & B'PB - \gamma\mathbf{1} & D' \\ C & D & -\gamma\mathbf{1} \end{bmatrix} < 0; \quad (5.90)$$

- iii. Il existe une matrice symétrique définie positive P telle que

$$\begin{bmatrix} -\text{inv}(P) & A & B & \mathbf{0} \\ A' & -P & \mathbf{0} & \mathcal{C}' \\ B' & \mathbf{0} & -\gamma\mathbf{1} & D' \\ \mathbf{0} & C & D & -\gamma\mathbf{1} \end{bmatrix} < 0 \quad (5.91)$$

5.5.1 Retour d'état

Théorème 5.6 [17] : *Le système (4.32) est stabilisable par retour d'état et $\mathcal{H}_\infty < \gamma$ si, et seulement si il existe une matrice symétrique définie positive $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et une matrice $R \in \mathbb{R}^{m \times n}$ telles que*

$$\begin{bmatrix} -S & AS + B_2R & B_1 & \mathbf{0} \\ SA' + R'B'_2 & -S & \mathbf{0} & SC'_1 + R'D'_{12} \\ B'_1 & \mathbf{0} & -\gamma\mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & C_1S + D'_{12}R & \mathbf{0} & -\gamma\mathbf{1} \end{bmatrix} < 0 \quad (5.92)$$

Le gain stabilisant par retour d'état est donné par $K = RS^{-1}$.

Ce théorème est conséquence du lemme borné réel pour les systèmes à temps discret.

5.5.2 Retour de sortie

Cas sans incertitude

Théorème 5.7 [17] : *Le système (4.37) est stabilisable par retour de sortie dynamique, par un compensateur de type (4.38) et $\|T_{z_k w_k}\|_\infty < \gamma$ si, et seulement si il existe deux matrices symétriques, définies positives $X, Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et les matrices $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $L \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et $F \in \mathbb{R}^{n \times q}$ telles que :*

$$\begin{bmatrix} -X & -\mathbf{1} & Z + M & XA + FC_2 & XB_1 + FD_{21} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{1} & -Y & AY + B_2L & A & B_1 & \mathbf{0} \\ Z' + M' & YA' + L'B'_2 & -Y & -\mathbf{1} & \mathbf{0} & YC'_1 + L'D'_{12} \\ A'X + C'_2F' & A' & -\mathbf{1} & -X & \mathbf{0} & C'_1 \\ B'_1X + D'_{21}F' & B'_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\gamma\mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & C_1Y + D_{12}L & C_1 & \mathbf{0} & -\gamma\mathbf{1} \end{bmatrix} < 0 \quad (5.93)$$

avec :

$$\begin{aligned} L &= C_c V', \quad F = UB_c, \quad M = UA_c V' \\ Z &= YA'X + YC'_2F' + L'B'_2X \end{aligned}$$

Cas incertain

Incertitudes polytopiques Le problème consiste à déterminer une commande robuste garantissant la stabilité et garantissant aussi que $\|T_{z_k w_k}(z)\|_\infty < \gamma$ pour le système (4.37).

Théorème 5.8 [17] : *S'il existe deux matrices symétriques, définies positives $X, Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et des matrices $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $L \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et $F \in \mathbb{R}^{n \times q}$ solutions des **BMI** suivantes :*

$$\begin{bmatrix} -X & -\mathbf{1} & Z_i + M & XA_i + FC_{2i} & XB_1 + FD_{21} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{1} & -Y & A_iY + B_{2i}L & A_i & B_1 & \mathbf{0} \\ Z'_i + M' & YA'_i + L'B'_{2i} & -Y & -\mathbf{1} & \mathbf{0} & YC'_1 + L'D'_{12} \\ A'_iX + C'_{2i}F' & A'_i & -\mathbf{1} & -X & \mathbf{0} & C'_1 \\ B'_1X + D'_{21}F' & B'_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\gamma\mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & C_1Y + D_{12}L & C_1 & \mathbf{0} & -\gamma\mathbf{1} \end{bmatrix} < 0 \quad (5.94)$$

$$\forall i = 1, 2, \dots, N$$

avec :

$$Z_i = Y A'_i X + Y C'_{2i} F' + L' B'_{2i} X \quad (5.95)$$

Alors, le système incertain (4.37) avec les incertitudes polytopiques de type (4.49) est quadratiquement stabilisable par retour de sortie dynamique de type (4.38) et $\|T_{z_k w_k}\|_\infty < \gamma$.

Pour prouver le dernier théorème, du fait de la dépendance linéaire de (5.91) par rapport à A_e , B_e et C_e et donc A_i , B_{2i} et C_{2i} , il est aisé de vérifier que :

$$\forall \mathcal{A}_e := \begin{bmatrix} A_e & B_e \\ C_e & \mathbf{0} \end{bmatrix} \in \mathcal{D}_A : \|T_{z_k w_k}\|_\infty < \gamma$$

S'il existe une matrice $P \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ solution des inégalités matricielles suivantes :

$$\begin{bmatrix} -inv(P) & A_{ei} & B_{ei} & \mathbf{0} \\ A'_{ei} & -P & \mathbf{0} & C'_{ei} \\ B'_{ei} & \mathbf{0} & -\gamma \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & C_e & \mathbf{0} & -\gamma \mathbf{1} \end{bmatrix} < 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, N \quad (5.96)$$

en appliquant à chacune des inégalités matricielles précédentes le même développement que celui conduit pour le théorème (5.7) on obtient l'inégalité matricielle (5.94). Ce résultat rentre bien dans l'approche quadratique dans le quelle une matrice unique est utilisée pour tester les propriétés de stabilisabilité du système incertain et également pour fournir une borne supérieure à la norme \mathcal{H}_∞ .

Chapitre 6

Problème Multicritère $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$

Bien que les théories \mathcal{H}_2 et \mathcal{H}_∞ individuelles soient parfaitement maîtrisées, le problème mixte $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ reste jusqu'à maintenant un problème très largement ouvert. En effet, mis à part quelques résultats particuliers analytiques, nous ne disposons pas de la solution littérale du problème ni de la solution numérique que pourrait apporter le cadre de travail LMI. Une première explication vient de la difficulté de l'ordre des correcteurs mixtes. Aussi bien dans le cadre \mathcal{H}_2 que dans le cadre \mathcal{H}_∞ , il est connu qu'il existe un correcteur optimal ou sous-optimal d'ordre au plus égal à l'ordre du système. Cela signifie que l'on dispose toujours d'une solution d'ordre borné. Dans le cas mixte, le problème est d'autant plus compliqué que dans les cas réellement intéressants, il est prouvé que l'ordre du correcteur est infini et qu'il est impossible de trouver une réalisation finie stabilisante à ce correcteur.

Dans le chapitre 3, Nous avons abordé le problème de l'unicité et l'ordre du compensateur pour le problème mixte $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$; maintenant nous faisons une approche du problème mixte $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ avec \mathcal{LMI} .

6.1 Synthèse multicritère

6.1.1 Solution \mathcal{LMI} à temps continu

Pour l'étude de la synthèse multicritère, soit le système de la figure (6.1), avec représentation dans l'espace d'état

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= A(\nu) x + B_{12} w_2 + B_{1\infty} w_\infty + B_2 u \\
 z_2 &= C_{12} x + D_{12_2} u \\
 z_\infty &= C_{1\infty} x + D_{12_\infty} u \\
 y &= C_2 x + D_{22} w_2 + D_{2\infty} w_\infty
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

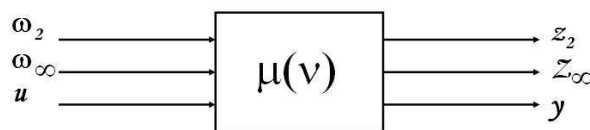


FIG. 6.1 – Problème multicritère

où, $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $w \in \mathbb{R}^l$ sont respectivement les vecteurs d'état, de commande et de perturbation, $z_\infty \in \mathbb{R}^{p-r}$ et $z_2 \in \mathbb{R}^r$ sont les vecteurs des sorties commandées, et $y \in \mathbb{R}^q$

est le vecteur des sorties mesurées.

Le problème multicritère, consiste à développer la synthèse de $u(y)$ qui

- 1 -Stabilise le système en boucle fermée.
- 2 -Vérifie que $\|T_{z_2 w_2}\|_2^2 < \mu$
- 3 -Vérifie que $\|T_{z_\infty w_\infty}\|_\infty < \gamma$ pour tout ν .

Cas non incertain $A(\nu) = A$

Retour d'état $u = Kx$ avec $K = RP^{-1}$, R et P solutions de :

$$\begin{cases} \text{pour } \mathcal{H}_2 < \mu, & \begin{cases} \text{trace}[W] \leq \mu \\ \begin{bmatrix} W & B'_{12} \\ B_{12} & P \end{bmatrix} \geq 0 \end{cases} \\ \text{pour } \mathcal{H}_\infty < \gamma, & \begin{cases} \begin{bmatrix} AP + PA' + B_2R + R'B'_2 & (C_{12}P + D_{12_2}R)' \\ (C_{12}P + D_{12_2}R) & -\mathbf{1} \end{bmatrix} \leq 0 \\ \begin{bmatrix} AP + PA' + B_2R + R'B'_2 + B_{1\infty}B'_{1\infty} & (C_{1\infty}P + D_{12_\infty}R)' \\ (C_{1\infty}P + D_{12_\infty}R) & -\gamma\mathbf{1} \end{bmatrix} < 0 \end{cases} \end{cases} \quad (6.2)$$

Retour de sortie dynamique

Avec un retour se sortie dynamique du type :

$$\begin{aligned} \dot{x}_c &= A_c x_c + B_c y \\ u &= C_c x_c \end{aligned}$$

le système étendu en boucle fermé s'écrit :

$$\begin{aligned} \dot{X} &= A_e X + B_e \omega \\ z_\infty &= C_{e_\infty} X \\ z_2 &= C_{e_2} X \end{aligned} \quad (6.3)$$

où

$$\begin{aligned} A_e &:= \begin{bmatrix} A & B_2 C_c \\ B_c C_2 & A_c \end{bmatrix}; & B_e &:= \begin{bmatrix} B_1 \\ B_c D_{21} \end{bmatrix}; \\ C_{e_\infty} &:= [C_{1\infty} \quad D_{12_\infty} C_c]; & C_{e_2} &:= [C_{12} \quad D_{12_2} C_c] \end{aligned}$$

On obtient alors les deux fonctions de transferts suivantes :

$$\begin{aligned} T_{z_\infty w}(s) &:= C_{e_\infty} (s\mathbf{1} - A_e)^{-1} B_e \\ T_{z_2 w}(s) &:= C_{e_2} (s\mathbf{1} - A_e)^{-1} B_e \end{aligned}$$

Cas sans incertitudes Une condition suffisante de stabilisabilité et de performance $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ pour le cas de retour de sortie est énoncée dans le théorème qui suit :

Théorème 6.1 : *S'il existe deux matrices symétriques définies positives $X, Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$, une matrice symétrique définie positive $W \in \mathbb{R}^{p \times p}$ et les matrices $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $L \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et $F \in \mathbb{R}^{n \times q}$ solutions des inégalités matricielles suivantes :*

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} Y & \mathbf{1} & B_1 \\ \mathbf{1} & X & XB_1 + FD_{21} \\ B'_1 & B'_1X + D'_{21}F' & W \end{bmatrix} > 0 \\
 & \begin{bmatrix} H(Y, L) & Z + M & YC'_{12} + L'D_{122} \\ Z' + M' & G(X, F) & C'_{12} \\ C_{12}Y + D_{122}L & C_{12} & -\mathbf{1} \end{bmatrix} < 0 \\
 & \begin{bmatrix} H(Y, L) & Z + M & B_1 & YC'_{1\infty} + L'D_{12\infty} \\ Z' + M' & G(X, F) & XB_1 + FD_{21} & C'_{1\infty} \\ B'_1 & B'_1X + D'_{21}F' & -\gamma\mathbf{1} & \mathbf{0} \\ C_{1\infty}Y + D_{12\infty}L & C_{1\infty} & \mathbf{0} & -\gamma\mathbf{1} \end{bmatrix} < 0
 \end{aligned} \tag{6.4}$$

avec

$$Z := A + YA'X + YC'_2F' + L'B'_2X$$

et

$$\begin{aligned}
 H(Y, L) &:= YA' + AY + B_2L + L'B'_2 \\
 G(X, F) &:= A'X + XA + C'_2F' + FC_2
 \end{aligned}$$

Alors, le système \mathcal{LTI} est stabilisable par un retour de sortie dynamique, de plus :

$$\begin{aligned}
 & \|T_{z_\infty w}(s)\|_\infty < \gamma \\
 \text{et} & \|T_{z_2 w}(s)\|_2^2 < \text{trace}[W]
 \end{aligned}$$

Cas incertain avec incertitudes polytopiques La condition suffisante par le cas sans incertitudes peut être étendu au cas avec incertitudes polytopiques, ajoutant encore du conservatisme :

Théorème 6.2 : *S'il existe deux matrices symétriques définies positives $X, Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$, une matrice symétrique définie positive $W \in \mathbb{R}^{p \times p}$ et les matrices $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $L \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et $F \in \mathbb{R}^{n \times q}$ solutions des inégalités matricielles suivantes :*

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} Y & \mathbf{1} & B_1 \\ \mathbf{1} & X & XB_1 + FD_{21} \\ B'_1 & B'_1X + D'_{21}F' & W \end{bmatrix} > 0 \\
 & \begin{bmatrix} H_i & Z_i + M & YC'_{12} + L'D_{122} \\ Z'_i + M' & G_i & C'_{12} \\ C_{12}Y + D_{122}L & C_{12} & -\mathbf{1} \end{bmatrix} < 0 \\
 & \begin{bmatrix} H_i & Z_i + M & B_1 & YC'_{1\infty} + L'D_{12\infty} \\ Z'_i + M' & G_i & XB_1 + FD_{21} & C'_{1\infty} \\ B'_1 & B'_1X + D'_{21}F' & -\gamma\mathbf{1} & \mathbf{0} \\ C_{1\infty}Y + D_{12\infty}L & C_{1\infty} & \mathbf{0} & -\gamma\mathbf{1} \end{bmatrix} < 0 \\
 & \forall i = 1, 2, \dots, N
 \end{aligned} \tag{6.5}$$

avec

$$Z_i := A_i + YA'_iX + YC'_{2_i}F' + L'B'_{2_i}X$$

et

$$\begin{aligned} H_i &:= Y A'_i + A_i Y + B_2 L_i + L' B'_{2_i} \\ G_i &:= A'_i X + X A_i + C'_{2_i} F' + F C_{2_i} \end{aligned}$$

Alors, le système \mathcal{LTI} est quadratiquement stabilisable par retour de sortie dynamique, de plus :

$$\begin{aligned} & \|T_{z_\infty w}(s)\|_\infty < \gamma \\ \text{et} & \|T_{z_2 w}(s)\|_2^2 < \text{trace}[W] \end{aligned}$$

La résolution de ce type de problème peut être abordé au moyen de l'algorithme de décomposition croisée décrit auparavant.

6.1.2 Solution \mathcal{LMI} à temps discret

Retour de sortie dynamique

Le système linéaire à temps discret est défini par la représentation d'état suivante :

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= A x_k + B_1 w_k + B_2 u_k \\ z_{k_\infty} &= C_{1_\infty} x_k + D_{12_\infty} u_k \\ z_{k_2} &= C_{1_2} x_k + D_{12_2} u_k \\ y_k &= C_2 x_k + D_{21} w_k \end{aligned} \tag{6.6}$$

Le but de la commande mixte est de minimiser $\|T_{z_{k_2} w_k}(z)\|_2$, en garantissant

$$\|T_{z_{k_\infty} w_k}(z)\|_\infty < \gamma$$

γ étant fixé à priori. Cela grâce à un retour de sortie dynamique de type :

$$\begin{aligned} x_{c_{k+1}} &= A_c x_{c_k} + B_c y_k \\ u_k &= C_c x_{c_k} \end{aligned}$$

on obtient alors le système global en boucle fermée :

$$\begin{aligned} X_{k+1} &= A_e X_k + B_e w_k \\ z_{k_\infty} &= C_{e_\infty} X_k \\ z_{k_2} &= C_{e_2} X_k \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} A_e &:= \begin{bmatrix} A & B_2 C_c \\ B_c C_2 & A_c \end{bmatrix}; & B_e &:= \begin{bmatrix} B_1 \\ B_c D_{21} \end{bmatrix}; \\ C_{e_\infty} &:= [C_{1_\infty} \quad D_{12_\infty} C_c]; & C_{e_2} &:= [C_{1_2} \quad D_{12_2} C_c] \end{aligned}$$

On obtient alors les deux fonctions de transferts suivantes :

$$\begin{aligned} T_{z_{k_\infty} w_k}(z) &:= C_{e_\infty} (z\mathbf{1} - A_e)^{-1} B_e \\ T_{z_{k_2} w_k}(z) &:= C_{e_2} (z\mathbf{1} - A_e)^{-1} B_e \end{aligned}$$

Cas sans incertitude Une condition suffisante de stabilité robuste et de performance est donnée par le théorème suivant :

Théorème 6.3 : *S'il existe deux matrices symétriques définies positives $X, Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$, une matrice symétrique définie positive $W \in \mathbb{R}^{p \times p}$ et les matrices $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $L \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et $F \in \mathbb{R}^{n \times q}$ solutions des inégalités matricielles suivantes :*

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} Y & \mathbf{1} & B_1 \\ \mathbf{1} & X & XB_1 + FD_{21} \\ B'_1 & B'_1X + D'_{21}F' & W \end{bmatrix} > 0 \\
 & \begin{bmatrix} Y & \mathbf{1} & YA' + L'B'_2 & Z + M & YC'_1 + L'_1 + L'D'_{12} \\ \mathbf{1} & X & A' & A'X + C'_2F' & C'_1 \\ AY + B_2L & A & Y & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ Z' + M' & XA + FC_2 & \mathbf{1} & X & \mathbf{0} \\ C_1Y + D_{12}L & C_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} > 0 \\
 & \begin{bmatrix} -X & -\mathbf{1} & Z + M & XA + FC_2 & XB_1 + FD_{21} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{1} & -Y & AY + B_2L & A & B_1 & \mathbf{0} \\ Z' + M' & YA' + L'B'_2 & -Y & -\mathbf{1} & \mathbf{0} & YC'_1 + L'D'_{12} \\ A'X + C'_2F' & A' & -\mathbf{1} & -X & \mathbf{0} & C'_1 \\ B'_1X + D'_{21}F' & B'_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\gamma\mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & C_1Y + D_{12}L & C_1 & \mathbf{0} & -\gamma\mathbf{1} \end{bmatrix} < 0
 \end{aligned} \tag{6.7}$$

avec

$$Z = YA'X + YC'_2F' + L'B'_2X$$

alors le système linéaire à temps discret décrit par (6.6) est stabilisable par retour de sortie dynamique de type (4.38), de plus :

$$\begin{aligned}
 & \|T_{z_{k_\infty} w_k}(z)\|_\infty < \gamma \\
 & \text{et} \\
 & \|T_{z_{k_2} w_k}(z)\|_2^2 < \text{trace}[W]
 \end{aligned}$$

Ce théorème est une conséquence directe des théorèmes (5.4 et 5.7).

Cas incertain avec incertitudes polytopiques

Théorème 6.4 : *S'il existe deux matrices symétriques définies positives $X, Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$, une matrice symétrique définie positive $W \in \mathbb{R}^{p \times p}$ et les matrices $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $L \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et $F \in \mathbb{R}^{n \times q}$ solutions des inégalités matricielles suivantes :*

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} Y & \mathbf{1} & B_1 \\ \mathbf{1} & X & XB_1 + FD_{21} \\ B'_1 & B'_1X + D'_{21}F' & W \end{bmatrix} > 0 \\
& \begin{bmatrix} Y & \mathbf{1} & YA'_i + L'B'_{2i} & Z_i + M & YC'_1 + L'_1 + L'D'_{12} \\ \mathbf{1} & X & A'_i & A'_iX + C'_{2i}F' & C'_1 \\ A_iY + B_{2i}L & A_i & Y & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ Z'_i + M' & XA_i + FC_{2i} & \mathbf{1} & X & \mathbf{0} \\ C_1Y + D_{12}L & C_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} > 0 \\
& \begin{bmatrix} -X & -\mathbf{1} & Z_i + M & XA_i + FC_{2i} & XB_1 + FD_{21} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{1} & -Y & A_iY + B_{2i}L & A_i & B_1 & \mathbf{0} \\ Z'_i + M' & YA'_i + L'B'_{2i} & -Y & -\mathbf{1} & \mathbf{0} & YC'_1 + L'D'_{12} \\ A'_iX + C'_{2i}F' & A'_i & -\mathbf{1} & -X & \mathbf{0} & C'_1 \\ B'_1X + D'_{21}F' & B'_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\gamma\mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & C_1Y + D_{12}L & C_1 & \mathbf{0} & -\gamma\mathbf{1} \end{bmatrix} < 0 \\
& \forall i = 1, 2, \dots, N \tag{6.8}
\end{aligned}$$

avec

$$Z_i = YA'_iX + YC'_{2i}F' + L'B'_{2i}X$$

alors le système incertain (6.6) à temps discret, avec incertitudes polytopiques, est quadratiquement stabilisable par retour de sortie dynamique de type (4.38), de plus :

$$\begin{aligned}
& \|T_{z_{k_\infty} w_k}(z)\|_\infty < \gamma \\
& \text{et} \\
& \|T_{z_{k_2} w_k}\|_2^2 < \text{trace}[W]
\end{aligned}$$

Ce théorème est une conséquence directe des théorèmes (5.5 et 5.8). L'algorithme de minimisation de la norme \mathcal{H}_2 du transfert $[T_{z_{k_2} w_k}(z)]$ sous la contrainte $\|T_{z_{k_\infty} w_k}(z)\|_\infty < \gamma$, est, du fait de la non linéarité des inégalités matricielles, un algorithme par décomposition croisée du même type que ceux utilisés pour le commande à coût garanti \mathcal{H}_2 et \mathcal{H}_∞ .

Chapitre 7

Une Nouvelle Condition de Stabilité Robuste, Solution avec \mathcal{LMI}

Introduction

Ce chapitre est consacré au développement de nouvelles conditions de stabilité qui contiennent comme cas particulier, la théorie de stabilité de Lyapunov pour les systèmes certains, comme la condition de stabilité quadratique pour les systèmes incertains [3], [63], [64], [65], [66], [67]. La nouvelle condition de stabilité robuste, est développée sur les systèmes incertains à temps discret avec incertitude du type polytopique. Cette nouvelle condition permet, dans le cas incertain, de tester la stabilité avec l'utilisation de fonctions de Lyapunov dépendant des paramètres dérivées de conditions \mathcal{LMI} . La nouvelle condition permet un découplage formel entre la matrice de Lyapunov et les matrices dynamiques du système. Cette nouvelle condition est étendue au cas de synthèse H_2 , H_∞ et surtout de synthèse multiobjectif pour laquelle elle apporte une amélioration par rapport à l'approche quadratique.

7.1 Le “ \mathcal{G} Shaping” Paradigme

Soit le système linéaire incertain à temps discret

$$x_{k+1} = A(\alpha) x_k \quad (7.1)$$

La matrice dynamique $A(\alpha)$ appartient au polytope défini par

$$\mathcal{A} := \left\{ A(\alpha) : A(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i A_i, \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0 \right\} \quad (7.2)$$

Définition 7.1 *Le système (7.1) est robustement stable dans le domaine incertain (7.2) si tous les valeurs propres de la matrice $A(\alpha)$ ont des valeurs inférieures à un en module pour tous les valeurs de α tel que $A(\alpha) \in \mathcal{A}$.*

Utilisant la théorie de stabilité de Lyapunov, une variable matricielle symétrique peut être utilisée pour vérifier la stabilité d'un système linéaire.

Considérons le système \mathcal{LTI} à temps discret suivant

$$x(k+1) = Ax(k) + Bw(k) \quad (7.3)$$

$$z(k) = Cx(k) + Dw(k) \quad (7.4)$$

où le vecteur d'état $x \in \mathbb{R}^n$ et tous les autres vecteurs et matrices ont des dimensions appropriés. Le système (7.3-7.4) est asymptotiquement stable si et seulement s'il existe une matrice symétrique $P = P' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ telle que la \mathcal{LMI}

$$\begin{bmatrix} P & AP \\ PA' & P \end{bmatrix} > 0 \quad (7.5)$$

soit faisable.

Alors, il est possible de convertir la définition (7.1) dans une condition équivalente donnée par le lemme suivant :

Lemme 7.1 [64] *Le système (7.1) est robustement stable dans le domaine incertain (7.2) si, et seulement si il existe une matrice $P(\alpha) = P(\alpha)' > 0$ telle que*

$$A(\alpha)'P(\alpha)A(\alpha) - P(\alpha) < 0; \quad \forall \alpha \quad (7.6)$$

Il n'existe pas de moyen général et systématique pour déterminer $P(\alpha)$ comme fonction des paramètres incertains α . L'approche quadratique contraint à la recherche d'une seule matrice de Lyapunov $P(\alpha) = P$ entraînant du conservatisme, ainsi :

Lemme 7.2 [64] *Le système incertain (7.1) est robustement stable dans le domaine incertain (7.2) si*

$$A_i'PA_i - P < 0; \quad \forall i = 1, \dots, N \quad (7.7)$$

Le théorème suivant présente une nouvelle condition de Lyapunov.

Théorème 7.1 [64] : *Les conditions suivantes sont équivalentes*

i. Il existe une matrice symétrique $P > 0$ tel que

$$A'PA - P < 0 \quad (7.8)$$

ii. Il existe une matrice symétrique P et une matrice \mathcal{G} telles que

$$\begin{bmatrix} P & A'\mathcal{G}' \\ \mathcal{G}A & \mathcal{G} + \mathcal{G}' - P \end{bmatrix} > 0 \quad (7.9)$$

En appliquant le complément de Schur par rapport au bloc (2,2) dans (7.9), on récupère (7.8), en choisissant $\mathcal{G} = \mathcal{G}' = P > 0$, alors (i) implique(ii). Le bloc (1,1) de (7.9) donne $P > 0$. Multipliant (7.9) par $T := \begin{bmatrix} \mathbf{1} & -A' \end{bmatrix}$ à gauche, et par T' à droite, on obtient (7.8), donc (ii) implique (i).

La condition (ii) introduit la nouvelle matrice \mathcal{G} , définissant une nouvelle inégalité matricielle linéaire \mathcal{LMI} où la matrice de Lyapunov P n'est impliquée dans aucun produit avec la matrice dynamique du système A . Il est à noter que \mathcal{G} n'a aucune contrainte de symétrie; ceci permet d'écrire une nouvelle condition de stabilité robuste, qu'est moins conservative par la présence d'un nouveau degré de liberté donné par l'introduction de la matrice \mathcal{G} .

Théorème 7.2 [64] : *Le système incertain (7.1) est robustement stable dans le domaine incertain (7.2) s'il existe des matrices symétriques P_i et une matrice \mathcal{G} telles que*

$$\begin{bmatrix} P_i & A_i' \mathcal{G}' \\ \mathcal{G} A_i & \mathcal{G} + \mathcal{G}' - P_i \end{bmatrix} > 0 \quad \forall i = 1, \dots, N \quad (7.10)$$

Avec le même développement de preuve du théorème (7.1), il est possible de montrer que si (7.10) existe, alors il existe une matrice de Lyapunov dépendant des paramètres

$$P(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i P_i \quad (7.11)$$

définie positive pour toutes les valeurs de α tel que $A(\alpha) \in \mathcal{A}$. La détermination des matrices P_i , $i = 1, \dots, N$ et \mathcal{G} peut être développée facilement en utilisant des méthodes de solution \mathcal{LMI} . Il est clair que ce nouveau résultat comprend celui déjà connu de stabilité quadratique puisque si (7.10) existe pour une seule matrice $P_i = P$, alors la condition nécessaire par rapport au lemme (7.2) est obtenu imposant que $\mathcal{G} = \mathcal{G}' = P$ comme dans le théorème (7.1).

Cette nouvelle condition de stabilité, peut facilement être étendue au problème de stabilisabilité. Soit le système linéaire à temps discret

$$x_{k+1} = A(\alpha) x_k + B(\beta) u_k \quad (7.12)$$

où la matrice dynamique $A(\alpha)$ est contenue dans \mathcal{A} comme le définit (7.2) et $B(\beta)$ est à l'intérieur du polytope convexe défini par

$$\mathcal{B} := \left\{ B(\beta) : B(\beta) = \sum_{j=1}^M \beta_j B_j, \sum_{j=1}^M \beta_j = 1, \beta_j \geq 0 \right\} \quad (7.13)$$

Théorème 7.3 [64] : *Le système incertain (7.12) est robustement stabilisable dans le domaine incertain (7.2 et 7.13) s'il existe des matrices symétriques P_{ij} et des matrice \mathcal{G} telles que*

$$\begin{bmatrix} P_{ij} & A_i \mathcal{G} + B_j L \\ \mathcal{G}' A_i' + L' B_j' & \mathcal{G} + \mathcal{G}' - P_{ij} \end{bmatrix} > 0 \quad (7.14)$$

pour tout $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, M$. Si (7.14) est faisable, alors un compensateur robuste de retour d'état est donné par

$$\mathcal{K} = L \mathcal{G}^{-1} \quad (7.15)$$

Pour la preuve de ce théorème on utilise une version transpose du théorème (7.2), la transposition des matrices A_i et \mathcal{G} permet le changement de variable $L = \mathcal{K} \mathcal{G}$. Le problème de stabilisabilité robuste par retour d'état pour l'ensemble des incertitudes admissibles, revient à chercher une solution faisable pour un nombre fini de \mathcal{LMI} .

7.2 Optimisation \mathcal{LMI} pour la conception de compensateurs multi-objectif

Il est fait, dans ce paragraphe une extension de la "nouvelle" condition au problème de synthèse \mathcal{H}_2 et \mathcal{H}_∞ .

7.2.1 Extension à la caractérisation des spécifications \mathcal{H}_2 et \mathcal{H}_∞

Soit le système discret \mathcal{LTI} (7.3-7.4), où $\mathcal{H}_{wz}(\zeta)$ représente le transfert entre l'entrée (w) et la sortie (z). Les lemmes suivants caractérisent les normes \mathcal{H}_2 et \mathcal{H}_∞ en forme de \mathcal{LMI} . Bien que non nécessaire, nous développons le cas où $D = 0$.

Lemme 7.3 [69] (Norme \mathcal{H}_2). $\|\mathcal{H}_{zw}(\zeta)\|_2^2 < \mu$ si, et seulement si, il existe des matrices symétriques P et W satisfaisant

$$\begin{aligned} & \text{trace}(W) < \mu \\ & \begin{bmatrix} W & CP \\ PC' & P \end{bmatrix} > 0 \\ & \begin{bmatrix} P & AP & B \\ PA' & P & \mathbf{0} \\ B' & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} > 0 \end{aligned} \quad (7.16)$$

Lemme 7.4 [69] (Norme \mathcal{H}_∞). $\|\mathcal{H}_{wz}(\zeta)\|_\infty^2 < \mu$ si, et seulement si, il existe une matrice symétrique P telle que

$$\begin{bmatrix} P & AP & B & \mathbf{0} \\ PA' & P & \mathbf{0} & PC' \\ B' & \mathbf{0} & \mathbf{1} & D' \\ \mathbf{0} & CP & D & \mu\mathbf{1} \end{bmatrix} > 0 \quad (7.17)$$

Les deux conditions requièrent que la matrice A soit Schur-stable car l'inégalité de Lyapunov (7.5) apparaît comme un des blocs diagonaux internes. Par utilisation de la nouvelle condition, le calcul des normes devient :

Théorème 7.4 [69] (Extension dans la caractérisation de la norme \mathcal{H}_2) : $\|\mathcal{H}_{zw}(\zeta)\|_2^2 < \mu$ si, et seulement si, il existe une matrice \mathcal{G} et des matrices symétriques P et W telles que

$$\begin{aligned} & \text{trace}(W) < \mu \\ & \begin{bmatrix} W & C\mathcal{G} \\ \mathcal{G}C' & \mathcal{G} + \mathcal{G}' - P \end{bmatrix} > 0 \\ & \begin{bmatrix} P & A\mathcal{G} & B \\ \mathcal{G}A' & \mathcal{G} + \mathcal{G}' - P & \mathbf{0} \\ B' & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} > 0 \end{aligned} \quad (7.18)$$

soient faisables.

Preuve : [64], [67] :

(nécessaire) Choisir $\mathcal{G} = \mathcal{G}' = P$ pour récupérer le lemme (7.3).

(suffisante) : En supposant que les inégalités (7.18) sont faisables, alors $\mathcal{G} + \mathcal{G}' > P > 0$, implique que \mathcal{G} est non-singulière. Comme P est définie positive, alors $(P - \mathcal{G})'P^{-1}(P - \mathcal{G}) \geq 0$, soit $\mathcal{G}'P^{-1}\mathcal{G} \geq \mathcal{G} + \mathcal{G}' - P$ ainsi

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} W & C\mathcal{G} \\ \mathcal{G}C' & \mathcal{G}'P^{-1}\mathcal{G} \end{bmatrix} > 0 \\ & \begin{bmatrix} P & A\mathcal{G} & B \\ \mathcal{G}A' & \mathcal{G}'P^{-1}\mathcal{G} & \mathbf{0} \\ B' & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} > 0 \end{aligned}$$

Alors, comme \mathcal{G} est non singulière et en multipliant la première de ces inégalités à droite par $T := \text{diag}[\mathbf{1}, \mathcal{G}^{-1}P]$ et à gauche par T' on récupère la deuxième inégalité dans (7.16). La troisième inégalité dans (7.16) est récupérée en multipliant la deuxième inégalité par $T := \text{diag}[\mathbf{1}, \mathcal{G}^{-1}P, \mathbf{1}]$ à gauche et par T' à droite, pour conclure la preuve.

Avec le même procédé, il est possible d'étendre le calcul de la norme \mathcal{H}_∞ (7.4)

Théorème 7.5 (Extension dans la caractérisation de la norme \mathcal{H}_∞) : $\|\mathcal{H}_{wz}(\zeta)\|_\infty^2 < \mu$ si, et seulement si il existe une matrice \mathcal{G} et une matrice symétrique P telles que

$$\begin{bmatrix} P & A\mathcal{G} & B & \mathbf{0} \\ \mathcal{G}A' & \mathcal{G} + \mathcal{G}' - P & \mathbf{0} & \mathcal{G}'C' \\ B' & \mathbf{0} & \mathbf{1} & D' \\ \mathbf{0} & C\mathcal{G} & D & \mu\mathbf{1} \end{bmatrix} > 0 \quad (7.19)$$

soit faisable.

Il est intéressant de remarquer quelques caractéristiques importantes des conditions données :

1. Il est toujours possible de substituer la matrice de Lyapunov P par la matrice \mathcal{G} quand multipliée par la matrice C , ceci permet une paramétrisation du compensateur indépendante de P .
2. Comme dans le cas standard, une preuve de stabilité peut se faire en extrayant le bloc diagonal (7.9) des inégalités (7.18 et 7.19).
3. Comme dans [64], la variable \mathcal{G} est une matrice sans contrainte de symétrie.
4. Il y a séparation de la variable instrumentale de Lyapunov P et des matrices dynamiques du système A , B , C et D .

Cette dernière propriété par rapport à P , A , B , C et D donne un chemin pour obtenir des coûts garantis \mathcal{H}_2 et \mathcal{H}_∞ fondés sur les conditions \mathcal{LMI} de fonctions de Lyapunov dépendant des paramètres [26]. Faisons l'hypothèse que la matrice M définie par

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad (7.20)$$

Appartient au polyèdre convexe Φ .

$$\Phi := \left\{ M(\xi) : M(\xi) = \sum_{i=1}^N \xi_i M_i, \xi_i \geq 0, \sum_{i=1}^N \xi_i = 1 \right\} \quad (7.21)$$

Les deux théorèmes suivants permettent de caractériser les coûts garantis \mathcal{H}_2 et \mathcal{H}_∞ :

Théorème 7.6 [69] (Extension du coût garanti \mathcal{H}_2) : S'il existe des matrices symétriques W_i , P_i , $i = 1, \dots, N$ et une matrice \mathcal{G} telles que

$$\begin{aligned} & \text{trace}(W_i) < \mu \\ & \begin{bmatrix} W_i & C_i\mathcal{G} \\ \mathcal{G}C'_i & \mathcal{G} + \mathcal{G}' - P_i \end{bmatrix} > 0 \\ & \begin{bmatrix} P_i & A_i\mathcal{G} & B_i \\ \mathcal{G}A'_i & \mathcal{G} + \mathcal{G}' - P_i & \mathbf{0} \\ B'_i & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} > 0 \end{aligned} \quad (7.22)$$

sont vérifiés par tout $i = 1, \dots, N$, où les matrices A_i , B_i , C_i et D_i définissent les matrices limites M_i , $i = 1, \dots, N$; alors, l'inégalité $\|\mathcal{H}_{wz}(\zeta)\|_2^2 < \mu$ est satisfaite pour toutes les matrices M dans le domaine Φ .

Théorème 7.7 [69] (Extension du coût garanti \mathcal{H}_∞) : S'il existe des matrices symétriques P_i , $i = 1, \dots, N$ et une matrice \mathcal{G} telles que

$$\begin{bmatrix} P_i & A_i \mathcal{G} & B_i & \mathbf{0} \\ \mathcal{G} A_i' & \mathcal{G} + \mathcal{G}' - P_i & \mathbf{0} & \mathcal{G}' C_i' \\ B_i' & \mathbf{0} & \mathbf{1} & D_i' \\ \mathbf{0} & C_i \mathcal{G} & D_i & \mu \mathbf{1} \end{bmatrix} > 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (7.23)$$

où les matrices A_i , B_i , C_i et D_i définissent les matrices limites M_i , $i = 1, \dots, N$; alors l'inégalité $\|\mathcal{H}_{wz}(\zeta)\|_\infty^2 < \mu$ est satisfaite pour toutes les matrices M dans le domaine Φ .

La nouvelle condition contient les coûts garantis \mathcal{H}_2 et \mathcal{H}_∞ données par la stabilité quadratique comme cas particulier.

7.2.2 Extension dans la paramétrisation des contrôleurs

On montre ici que le changement de variables introduit dans [11] et [67] peut être utilisé dans ce contexte pour donner des solutions au problème par retour d'état et de plus est il possible de développer un changement de variable linéarisant pour la nouvelle condition de stabilité. Les problèmes de synthèse par retour de sortie peuvent ainsi être traités par optimisation \mathcal{LMI} .

Soit le système discret \mathcal{LTI} suivant :

$$x(k+1) = Ax(k) + B_1 w(k) + B_2 u(k) \quad (7.24)$$

$$z(k) = C_1 x(k) + D_{11} w(k) + D_{12} u(k) \quad (7.25)$$

$$y(k) = C_2 x(k) + D_{21} w(k) \quad (7.26)$$

où le vecteur d'état $x \in \mathbb{R}^n$ et toutes les autres matrices et vecteurs ont des dimensions appropriés. Le système commandé s'écrit :

$$\tilde{x}(k+1) = \tilde{A} \tilde{x}(k) + \tilde{B} w(k) \quad (7.27)$$

$$z(k) = \tilde{C} \tilde{x}(k) + \tilde{D} w(k) \quad (7.28)$$

Retour d'état

$$u(k) = \mathcal{K} x(k) \quad (7.29)$$

cette structure produit un système de la forme (7.27-7.28) où $\tilde{x}(k) = x(k)$ et les matrices en boucle fermée sont données par

$$\tilde{A} := A + B_2 \mathcal{K}, \quad \tilde{B} := B_1 \quad (7.30)$$

$$\tilde{C} := C_1 + D_{12} \mathcal{K}, \quad \tilde{D} := D_{11} \quad (7.31)$$

Par rapport aux contraintes de la norme \mathcal{H}_2 , supposant $D_{11} = 0$, on fait la transformation non linéaire suivant (changement de variable linéarisant)

$$X := \mathcal{G} \quad L := \mathcal{K} \mathcal{G} \quad P := \mathcal{P} \quad (7.32)$$

Théorème 7.8 [69] (Retour d'état \mathcal{H}_2) : Il existe un compensateur de la forme (7.29) tel que $\|\mathcal{H}_{wz}(\zeta)\|_2^2 < \mu$ si, et seulement si, les \mathcal{LMI}

$$\begin{aligned} & \text{trace}(W) < \mu, \\ & \begin{bmatrix} W & C_1X + D_{12}L \\ (\bullet)' & X + X' - P \end{bmatrix} > 0 \\ & \begin{bmatrix} P & AX + B_2L & B_1 \\ (\bullet)' & X + X' - P & \mathbf{0} \\ (\bullet)' & (\bullet)' & \mathbf{1} \end{bmatrix} > 0 \end{aligned} \quad (7.33)$$

sont vérifiées, où les matrices X , L et les matrices symétriques P et W sont les variables.

Le même changement de variable permet linéariser les contraintes de norme \mathcal{H}_∞ dans le problème de synthèse.

Théorème 7.9 [69] (Retour d'état \mathcal{H}_∞) : Il existe un compensateur de la forme (7.29) tel que $\|\mathcal{H}_{wz}(\zeta)\|_\infty^2 < \mu$ si, et seulement si, la \mathcal{LMI}

$$\begin{bmatrix} P & AX + B_2L & B_1 & \mathbf{0} \\ (\bullet)' & X + X' - P & \mathbf{0} & X'C'_1 + L'D'_{12} \\ (\bullet)' & (\bullet)' & \mathbf{1} & D'_{11} \\ (\bullet)' & (\bullet)' & (\bullet)' & \mu\mathbf{1} \end{bmatrix} > 0 \quad (7.34)$$

est vérifiée, où les matrices X , L et la matrice symétrique P sont les variables.

Problème par retour de sortie dynamique

Le problème de commande par retour de sortie dynamique, est étudié pour un compensateur linéaire dynamique d'ordre plein

$$x_c(k+1) = A_c x_c(k) + B_c y(k) \quad (7.35)$$

$$u(k) = C_c x_c(k) + D_c y(k) \quad (7.36)$$

nous faisons l'hypothèse que la variable d'état du compensateur $x_c \in \mathbb{R}^n$. La connexion de ce compensateur avec le système (7.25-7.26) donne un système linéaire de la forme (7.27-7.28) où

$$\tilde{x}(k) := \begin{bmatrix} x(k) \\ x_c(k) \end{bmatrix} \quad (7.37)$$

et les matrices en boucle fermée sont

$$\tilde{A} := \begin{bmatrix} A + B_2D_cC_2 & B_2C_c \\ B_cC_2 & A_c \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} := \begin{bmatrix} B_1 + B_2D_cD_{21} \\ B_cD_{21} \end{bmatrix} \quad (7.38)$$

$$\tilde{C} := [C_1 + D_{12}D_cC_2 \quad D_{12}C_c], \quad \tilde{D} := [D_{11} + D_{12}D_cD_{21}] \quad (7.39)$$

De même que dans le cas par retour d'état, nous cherchons un changement de variable convenable, pour réduire la condition non linéaire en \mathcal{LMI} . La procédure est abordée en partitionnant les matrices \mathcal{K} , \mathcal{G} , et \mathcal{G}^{-1} :

$$\mathcal{K} := \begin{bmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{bmatrix}, \quad \mathcal{G} := \begin{bmatrix} X & ? \\ U & ? \end{bmatrix}, \quad \mathcal{G}^{-1} := \begin{bmatrix} Y' & ? \\ V' & ? \end{bmatrix} \quad (7.40)$$

où “?” représente les blocs sans importance pour la suite. De plus, on introduit la matrice de projection :

$$\mathcal{T} := \begin{bmatrix} \mathbf{1} & Y' \\ \mathbf{0} & V' \end{bmatrix} \quad (7.41)$$

Les transformations non linéaires (changement de variable)

$$\begin{bmatrix} Q & F \\ L & R \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} V & YB_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \mathcal{K} \begin{bmatrix} U & \mathbf{0} \\ C_2X & \mathbf{1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} X & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (7.42)$$

$$\begin{bmatrix} P & J \\ J' & H \end{bmatrix} := \mathcal{T}' \mathcal{P} \mathcal{T} \quad (7.43)$$

$$S := YX + VU \quad (7.44)$$

qui sont équivalentes à

$$Q := Y(A + B_2D_cC_2)X + VB_cC_2X + YB_2C_cU + VA_cU \quad (7.45)$$

$$L := D_cC_2X + C_cU \quad (7.46)$$

$$F := YB_2D_c + VB_c \quad (7.47)$$

$$R := D_c \quad (7.48)$$

$$S := YX + VU \quad (7.49)$$

ont des propriétés de linéarisation par rapport à la synthèse par retour de sortie dynamique. Les propriétés linéarisantes de cette transformation sont exprimées dans les identités suivantes :

$$\mathcal{T}' \mathcal{A} \mathcal{G} \mathcal{T} = \begin{bmatrix} AX + B_2L & A + B_2RC_2 \\ Q & YA + FC_2 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{T}' \mathcal{B} = \begin{bmatrix} B_1 + B_2RD_{21} \\ YB_1 + FD_{21} \end{bmatrix} \quad (7.50)$$

$$\mathcal{C} \mathcal{G} \mathcal{T} = \begin{bmatrix} C_1X + D_{12}L & C_1 + D_{12}RC_2 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{D} = D_{11} + D_{12}RD_{21} \quad (7.51)$$

Le plus important dans ce point est que la matrice \mathcal{T} , (définie originellement dans [55] et [80]) par rapport au bloc partitionné de la matrice symétrique de Lyapunov \mathcal{P} , maintient ses propriétés linéarisantes même si la matrice symétrique de Lyapunov \mathcal{P} est remplacée par la matrice instrumentale non symétrique \mathcal{G} . Il est important de remarquer que l'identité

$$\mathcal{T}'(\mathcal{G} + \mathcal{G}')\mathcal{T} = \begin{bmatrix} X + X' & \mathbf{1} + S' \\ (\bullet)' & Y + Y' \end{bmatrix} \quad (7.52)$$

contient la variable additionnelle S définie dans (7.44), qui n'apparaît pas dans la formulation standard [55]-[80].

Nous définissons d'autres variables additionnelles associées à la matrice de Lyapunov

$$\begin{bmatrix} P & J \\ (\bullet)' & H \end{bmatrix} = \tilde{T}' \tilde{P} \tilde{T} \quad (7.53)$$

ainsi

$$\mathcal{T}'(\mathcal{G} + \mathcal{G}' - \mathcal{P})\mathcal{T} = \begin{bmatrix} X + X' & \mathbf{1} + S' \\ \mathbf{1} + S & Y + Y' \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P & J \\ J' & H \end{bmatrix} \quad (7.54)$$

Les conditions \mathcal{LMI} pour la synthèse \mathcal{H}_2 et \mathcal{H}_∞ par retour de sortie sont obtenues en utilisant le changement de variable (7.42-7.44) uni à la matrice de transformation \mathcal{T} définie dans (7.41).

Théorème 7.10 [69] (Retour de sortie \mathcal{H}_2) : Il existe un compensateur de la forme (7.35-7.36) tel que l'inégalité $\|\mathcal{H}_{wz}(\zeta)\|_2^2 < \mu$ existe si, et seulement si, les \mathcal{LMI}

$$\text{trace}(W) < \mu \quad (7.55)$$

$$\begin{bmatrix} W & C_1X + D_{12}L & C_1 + D_{12}RC_2 \\ (\bullet)' & X + X' - P & \mathbf{1} + S' - J \\ (\bullet)' & (\bullet)' & Y + Y' - H \end{bmatrix} > 0 \quad (7.56)$$

$$\begin{bmatrix} P & J & AX + B_2L & A + B_2RC_2 & B_1 + B_2RD_{21} \\ (\bullet)' & H & Q & YA + FC_2 & YB_1 + FD_{21} \\ (\bullet)' & (\bullet)' & X + X' - P & \mathbf{1} + S' - J & \mathbf{0} \\ (\bullet)' & (\bullet)' & (\bullet)' & Y + Y' - H & \mathbf{0} \\ (\bullet)' & (\bullet)' & (\bullet)' & (\bullet)' & \mathbf{1} \end{bmatrix} > 0 \quad (7.57)$$

$$D_{11} + D_{12}RD_{21} = \mathbf{0} \quad (7.58)$$

sont vérifiés, où les matrices X, L, Y, F, Q, R, S, J et les matrices symétriques P, H et W sont les variables.

De façon similaire le théorème (7.5) peut être transformé en le théorème suivant

Théorème 7.11 [69] (Retour de sortie \mathcal{H}_∞) : Il existe un compensateur de la forme (7.35-7.36) tel que l'inégalité $\|\mathcal{H}_{wz}(\zeta)\|_\infty^2 < \mu$ existe si, et seulement si, la \mathcal{LMI}

$$\begin{bmatrix} P & J & AX + B_2L & A + B_2RC_2 & B_1 + B_2RD_{21} & \mathbf{0} \\ (\bullet)' & H & Q & YA + FC_2 & YB_1 + FD_{21} & \mathbf{0} \\ (\bullet)' & (\bullet)' & X + X' - P & \mathbf{1} + S' - J & \mathbf{0} & X'C'_1 + L'D'_{12} \\ (\bullet)' & (\bullet)' & (\bullet)' & Y + Y' - H & \mathbf{0} & C'_1 + C'_2R'D'_{12} \\ (\bullet)' & (\bullet)' & (\bullet)' & (\bullet)' & \mathbf{1} & D'_{11} + D'_{21}R'D'_{12} \\ (\bullet)' & (\bullet)' & (\bullet)' & (\bullet)' & (\bullet)' & \mu\mathbf{1} \end{bmatrix} > 0 \quad (7.59)$$

est vérifiée, où les matrices X, L, Y, F, Q, R, S, J et les matrices symétriques P et H sont les variables.

Les inégalités dans les théorèmes (7.10 et 7.11) sont obtenues par substitution des matrices en boucle fermée (7.38-7.39) et en appliquant une congruence adéquate dans la transformation basée sur la matrice de transformation \mathcal{T} pour les conditions d'analyse étendues définies antérieurement. La linéarité est récupérée en utilisant le changement de variable (7.42-7.44) et les identités (7.50-7.54). Par exemple l'inégalité (7.59) est obtenue de (7.19) en multipliant à droite pour la matrice $T := \text{diag}[\mathcal{T}, \mathcal{T}, \mathbf{1}, \mathbf{1}]$ et à gauche pour T' . Cette transformation dans (7.19) produit

$$\begin{bmatrix} T'PT & T'AGT & T'B & \mathbf{0} \\ T'GA'T & T'(G + G' - P)T & \mathbf{0} & T'G'C' \\ B'T & \mathbf{0} & \mathbf{1} & D' \\ \mathbf{0} & CGT & D & \mu\mathbf{1} \end{bmatrix} > 0 \quad (7.60)$$

avec la remarque que l'inégalité (7.59) utilise les identités (7.50-7.51). Une manipulation similaire est utilisée pour les inégalités (7.55-7.59). Cet outil fournit les arguments demandés pour montrer la condition nécessaire des théorèmes (7.10 et 7.11). La condition suffisante est récupérée avec un argument constructif : d'abord, noter qu'un compensateur peut être obtenu de la synthèse des variables en réalisant le changement de variable (7.42-7.44) ainsi

$$\mathcal{K} = \begin{bmatrix} V^{-1} & -V^{-1}YB_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q - YAX & F \\ L & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^{-1} & \mathbf{0} \\ -C_2XU^{-1} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \quad (7.61)$$

La condition pour l'inversion de ces matrices est la non singularité des matrices U et V , ensuite considérer l'inégalité (7.59), et noter que toute solution faisable doit satisfaire

$$\begin{bmatrix} X + X' & \mathbf{1} + S' \\ \mathbf{1} + S & Y + Y' \end{bmatrix} > \begin{bmatrix} P & J \\ J' & H \end{bmatrix} > 0 \quad (7.62)$$

ce qui implique que X et Y sont des matrices non singulières. De plus, multipliant à gauche de (7.62) pour $T' = \begin{bmatrix} X^{-T} & -\mathbf{1} \end{bmatrix}$ et pour T à droite, on obtient

$$(S - YX)X^{-1} + X^{-T}(S - YX)' < 0 \quad (7.63)$$

ce qu'implique que $(S - YX)$ n'est pas singulière, alors il existe des matrices non singulières V et U qui satisfont (7.44). Alors, pour toute matrice non singulière U et V tel que $UV = S - YX$, la formule (7.61) fournit des matrices faisables pour le compensateur, provenant d'un ensemble de variables faisables dans le synthèse. Alors, données les matrices X, L, Y, F, Q, R, S, J de ces théorèmes, un compensateur faisable est obtenu en calculant (dans cet ordre)

$$D_c := R \quad (7.64)$$

$$C_c := (L - RC_2X)U^{-1} \quad (7.65)$$

$$B_c := V^{-1}(F - YB_2R) \quad (7.66)$$

$$A_c := V^{-1}[Q - Y(A + B_2D_cC_2)X - VB_cC_2X]U^{-1} - V^{-1}YB_2C_c \quad (7.67)$$

Comme dans le cas par retour d'état, la caractéristique la plus importante de cette nouvelle paramétrisation est la non dépendance d'aucune des matrices de Lyapunov P, J ou H . Cette propriété permet de faire l'extension au problème de commande multi-objectif.

Les résultats de stabilité robuste montrés dans [64] sont généralisés pour les appliquer aux normes \mathcal{H}_2 et \mathcal{H}_∞ . Par rapport à la synthèse de compensateurs de retour d'état, les théorèmes (7.8 et 7.9) sont généralisés pour être appliqués dans la synthèse robuste \mathcal{H}_2 et \mathcal{H}_∞ . Par analogie avec (7.20), une matrice M peut être définie comme

$$M := \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \end{bmatrix} \quad (7.68)$$

Cette définition et les théorèmes (7.6 et 7.7) permettent d'obtenir la version suivante modifiée des théorèmes (7.8 et 7.9) :

Théorème 7.12 [69] (Retour d'état \mathcal{H}_2 robuste) : Il existe un compensateur de la forme (7.29) tel que $\|\mathcal{H}_{wz}(\zeta)\|_2^2 < \mu$, pour tout $M \in \Phi$, si les \mathcal{LMI}

$$\begin{aligned} & \text{trace}(W_i) < \mu \\ & \begin{bmatrix} W_i & (C_1)_i X + (D_{12})_i L \\ (\bullet)' & X + X' - P_i \end{bmatrix} > 0 \\ & \begin{bmatrix} P & A_i X + (B_2)_i L & (B_1)_i \\ (\bullet)' & X + X' - P_i & \mathbf{0} \\ (\bullet)' & (\bullet)' & \mathbf{1} \end{bmatrix} > 0 \\ & i = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (7.69)$$

sont vérifiées, où les matrices A_i , $(B_1)_i$, $(B_2)_i$, $(C_1)_i$ et $(D_{12})_i$ définissent les matrices limites M_i , $i = 1, \dots, N$ et les matrices X , L et les matrices symétriques P_i , $i = 1, \dots, N$ sont les variables.

Théorème 7.13 [69] (Retour d'état \mathcal{H}_∞ robuste) : Il existe un compensateur de la forme (7.29), tel que l'inégalité $\|\mathcal{H}_{wz}(\zeta)\|_\infty^2 < \mu$ soit satisfaite, pour tout $M \in \Phi$ si la \mathcal{LMI}

$$\begin{bmatrix} P_i & A_i X + (B_2)_i L & (B_1)_i & \mathbf{0} \\ (\bullet)' & X + X' - P_i & \mathbf{0} & X'(C_1)'_i + L'(D_{12})'_i \\ (\bullet)' & (\bullet)' & \mathbf{1} & (D_{11})'_i \\ (\bullet)' & (\bullet)' & (\bullet)' & \mu \mathbf{1} \end{bmatrix} > 0 \quad (7.70)$$

$i = 1, \dots, N$

est vérifiée, où les matrices A_i , $(B_1)_i$, $(B_2)_i$, $(C_1)_i$, $(D_{11})_i$ et $(D_{12})_i$ définissent les matrices limites M_i , $i = 1, \dots, N$ et les matrices X , L et les matrices symétriques P_i , $i = 1, \dots, N$ sont les variables.

Contrôle Multiobjectif

La paramétrisation des compensateur recherchés ne dépend pas des matrices instrumentales de lyapunov, cette propriété peut être exploitée pour la solution de problèmes multiobjectif. Le problème multiobjectif pour le système (7.24-7.26) peut se définir de manière à satisfaire de multiples contraintes \mathcal{H}_2 y \mathcal{H}_∞ en boucle fermée pour des transferts du type :

$$\mathcal{H}_{w_i z_i}(\zeta) := L_i \mathcal{H}_{wz}(\zeta) R_i \quad (7.71)$$

les matrices L_i et R_i définissant divers canaux entrée - sortie. A partir de (7.24-7.26), une réalisation en espace d'état du système $\mathcal{H}_{wz}(\zeta)_i$ en boucle fermée s'obtient en remplaçant les matrices B_1 , C_1 , D_{21} , D_{12} y D_{11} par

$$(B_1)_i := B_1 R_i, \quad (C_1)_i := L_i C_1, \quad (7.72)$$

$$(D_{21})_i := D_{12} R_i, \quad (D_{12})_i := L_i D_{12}, \quad (D_{11})_i := L_i D_{11} R_i \quad (7.73)$$

dans les matrices en boucle fermée (7.30-7.31) o (7.38-7.39). IL est ainsi possible d'aborder le problème de robustesse et de performances \mathcal{H}_2 y \mathcal{H}_∞ des fonctions de transfert associées aux paires de signaux :

$$w_i := R_i w \quad z_i := L_i z \quad (7.74)$$

Supposant N contraintes définies sur N transferts l'application des théorèmes (7.4 y 7.5) conduira en prendre en compte les variables suivantes :

- Les paramètres de la commande
- Les matrices instrumentales $\mathcal{G}_i, \mathcal{P}_i, i = 1, \dots, N$

Comme il est recherché une loi de commande (unique bien sûr pour toutes les contraintes) paramétrisée en fonction des matrices instrumentales \mathcal{G}_i , il est nécessaire, de manière similaire à l'approche quadratique, d'imposer la contrainte suivante :

$$\mathcal{G}_i = \mathcal{G}, \quad i = 1, \dots, N \quad (7.75)$$

Cette contrainte qui assure le même contrôleur pour chacune des spécifications de performances ne détruit pas, bien sûr, le caractère \mathcal{LMI} du problème à résoudre. L'intérêt de l'utilisation de la nouvelle approche vient du fait que les matrices P_i associées à chacune des contraintes de performances. Ceci est un avantage certain par rapport à l'approche quadratique qui impose une contrainte beaucoup plus forte :

$$\mathcal{P}_i = \mathcal{P} = \mathcal{G} = \mathcal{G}', \quad i = 1, \dots, N \quad (7.76)$$

Il faut noter que cette nouvelle approche inclut l'approche quadratique ce qui fait que toutes les qualités de l'approche quadratique sont automatiquement conférées à cette nouvelle approche. L'amélioration des résultats a un prix lié au fait que le nombre de variables est accru et, donc, également la charge de calcul.

Chapitre 8

Exemples Numériques

Dans ce court chapitre est donnée une brève description des illustrations numériques qui ont été développées dans le mémoire en espagnol.

Un premier exemple simple mono entrée mono sortie est abordé sur le problème mixte ou multicritère. Il a permis de mettre en évidence la relative complexité du problème sur lequel ont pu être mises en oeuvre différentes approches et estimé leur degré de sous optimalité.

Un second exemple, également simple, a servi d'illustration à un problème abordé rapidement dans le mémoire, problème encore ouvert à la recherche, le retour de sortie statique. La synthèse a été menée sur la problématique multicritère, problème mixte.

Enfin, un exemple de taille plus importante a été traité sur une application à un problème de commande de vol d'un hélicoptère.

Conclusions et Perspectives

Le travail exposé dans la thèse constitue une étude relativement détaillée des problèmes de commande robuste tant en temps continu qu'en temps discret. Dans un chapitre introductif rappelant certaines définitions et concepts relatifs au problème de stabilité, en particulier ceux liés à la Théorie de Lyapunov, il est fait un examen assez détaillé des diverses formes d'incertitudes en usage dans le domaine de la commande robuste. Les normes \mathcal{H}_2 et \mathcal{H}_∞ sont mentionnées comme critères permettant la synthèse de commandes avec exigence de performances. Enfin, l'outil \mathcal{LMI} qui constitue le fil rouge de notre travail est présenté.

Les chapitres deux et trois portent sur un rappel de travaux et résultats développés dans le contexte de la commande robuste et synthèse \mathcal{H}_∞ et l'utilisation de l'outil équations algébriques de Riccati. Il est rappelé que tout comme la synthèse \mathcal{H}_2 , incluant la synthèse LQ et LQG , la synthèse \mathcal{H}_∞ est passible d'un traitement à partir d'équations matricielles de Riccati, avec la différence notable de l'existence, dans le cas de retour de sortie dynamique, d'un couplage entre les solutions des deux équations, traduisant la perte du principe de séparation. Une attention particulière a été portée sur le problème de synthèse mixte $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ dont l'intérêt pratique vient du fait qu'il s'adresse à un problème alliant des exigences multicritères de performances \mathcal{H}_2 et de robustesse \mathcal{H}_∞ . Ce rappel montre la complexité des problèmes multicritères et la relative difficulté de les aborder par le biais des équations matricielle non linéaires que sont les équations de Riccati. Il est raisonnable de dire que l'approche par \mathcal{LMI} de ce type de problème multicritère se révèle plus simple et efficace surtout dans le cas, intéressant en pratique, où seraient à prendre en compte des incertitudes de type structuré. Les chapitres suivants s'attachent à illustrer et démontrer cette assertion.

Le chapitre quatre est tout entier dévoué à visiter en certains détails le problème de base qu'est le problème de stabilisation dans les cas nominaux et incertains. Certains problèmes restent difficiles à solutionner par la simple mise en oeuvre des \mathcal{LMI} , c'est le cas de la stabilisation en présence d'incertitudes polytopiques mais en ce cas est donné un algorithme efficace travaillant par relaxation et décomposition croisée.

Le chapitre 5 porte sur la synthèse \mathcal{H}_2 et \mathcal{H}_∞ qui toutes deux sont abordables en grande partie au moyen de techniques \mathcal{LMI} , à l'exception reconnue dans le chapitre précédent des incertitudes polytopiques. Tous ces résultats s'inscrivent dans ce qu'est appelé approche quadratique qui consiste à adopter l'utilisation d'une même matrice instrumentale, matrice de Lyapunov, servant en particulier à tester les propriétés de stabilité, entraînant à l'évidence un degré de suffisance aux résultats obtenus.

Cette même approche est préconisée dans le chapitre 6 pour traiter du problème mixte, multicritère, $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$. Il est montré que, en théorie du moins, l'approche \mathcal{LMI} permet le traitement de problèmes avec un grand nombre de contraintes, la suffisance des résultats étant toujours la conséquence de l'utilisation d'une matrice de Lyapunov unique.

Le chapitre 7 présente un résultat novateur qui permet, en restant dans l'approche \mathcal{LMI} , de réduire sensiblement le conservatisme de l'approche quadratique. Ce résultat est obtenu par l'introduction de variables matricielles supplémentaires dans l'équation de Lyapunov qui permettent un découplage formel entre matrice de Lyapunov et commande. Cela permet notamment de définir des fonctions de Lyapunov dépendant des paramètres d'incertitude, donc des fonctions multiples ce qui a pour effet la réduction du conservatisme. Il est montré que le même résultat peut être étendu à la synthèse \mathcal{H}_2 , à la synthèse \mathcal{H}_∞ et, de façon bien plus intéressante, à la synthèse multicritère, le résultat nouveau permettant de particulariser les matrices instrumentales de Lyapunov en fonction de chacun des critères. Ce gain est à payer au prix d'une tâche plus lourde de calcul.

Le chapitre 8 présente quelques résultats numériques d'illustration.

Il reste encore un champ assez vaste pour des investigations futures dans ce domaine de commande robuste et notamment pour tout ce qui pourrait améliorer les conditions qui toutes présentent encore un certain degré de conservatisme en présence d'incertitudes structurées. C'est surtout vers les applications que l'auteur du présent mémoire se consacrera à l'avenir et, du fait de sa position, vers celles liées au domaine maritime.

Bibliographie

- [1] D. Arzelier, D. Paucelle, R. Ariza, “Un méthode itérative pour la synthèse mixte $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ par retour de sortie statique”, *Conference Internationale Francophone d’Automatique CIFA*, Nantes, France, 2002.
- [2] D. Arzelier, D. Paucelle, R. Ariza, “Un metodo iterativo para la synthèse mixta $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ por realimentación de salida”, *Conferencia Latinoamericana de Control Automatico IFAC*, Guadalajara, Mexico, 2002.
- [3] O. Bachelier, J. Bernussou, M.C. Oliveira and J.C. Geromel, “Parameter dependant Lyapunov control design : numerical evaluation”, *Proceedings of the 38th IEEE Conference of Decision and Control*, Phoenix, Ar., USA, pp.293-297, 1999.
- [4] R.T Bambang, E. Shimemura and K. Uchida, “Mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ Output Feedback Control via \mathcal{LMI} Part I : Design for \mathcal{LTI} Systems”, *Asian Control Conference*, Tokio, Jp, pp.319-322, 1994.
- [5] B. R. Barmish, “Necessary and sufficient conditions for quadratic stability of an uncertain system”, *Journal of Optimization Theory and Application*, Vol 46. pp. 399-408, 1985.
- [6] S.P. Battacharyya, H. Chapellat, L.H. Keel, “Robust Control : the Parametric - Approach”, *Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ*, 1997.
- [7] E. Baeyens and P. Khargonekar, “Some examples in mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ control”, *Proceeding of the American Control Conference*, pp. 1608-1612, Baltimore, Maryland, USA,1994.
- [8] D.S. Bernstein, W.M. Haddad, “LQG control with an \mathcal{H}_∞ performance bound : a Riccati equation approach”, *Proceeding of the American Control Conference*, pp. 796-802, Atlanta, GA, USA,1988.
- [9] D.S. Bernstein, W.M. Haddad, “LQG control with an \mathcal{H}_∞ performance bound : a Riccati equation approach”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol 34, No.3, pp. 293-305, 1989.
- [10] J. Bernussou, J Geromel and P. Peres, “Stabilisabilité de systèmes linéaires : test par programmation linéaire”, *Académie des Sciences, Serie I*, pp. 683-688, 1988.
- [11] J. Bernussou, J Geromel and P. Peres, “A linear programming oriented procedure for quadratic stabilization of uncertain systems”, *System and Control Letters*, Vol. 13, pp.65-72, 1989.
- [12] K.M. Black, “A new algorithm for solving a mixed H_2/H_∞ optimization problem”, *Proceeding of the American Control Conference*, pp. 1157-1158,USA,1991.
- [13] S.P. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron and V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, Philadelphia, PA :SIAM, 1994.

- [14] X. Chen, J.T. Wen, “A linear matrix inequality approach to the general mixed H_2/H_∞ control problem”, *Proceeding of the American Control Conference*, Seattle, Washington, 1995.
- [15] M. Chilali, “Méthodes \mathcal{LMI} pour l’Analyse et la Synthèse Multi-Critère”, *Thèse Doctorat, Paris IX*, Paris, France, 1996.
- [16] P. Colaneri, J.C. Geromel, A. Locatelli, “Control Theory and Design : An RH_2-RH_∞ Viewpoint”, *Academic Press*, San Diego, USA, 1997.
- [17] C. Courties, “Sur la commande robuste et L.P.V. de systemes a paramètres lentement variables”, *Thèse Doctorat*, Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse, 1999.
- [18] J. Daafouz, “Robustesse en performance des systèmes linéaires incertains : placement de pôles et coût garanti”, *Thèse de Doctorat*, Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse, 1997.
- [19] P. Dorato, L. Menini and C. Treml, “Robust multi-objective feedback design with linear guaranteed-cost bounds”, *13th Triennial World Congress*, pp. 267-272, San Francisco, USA, 1996.
- [20] J. Doyle, “Guaranteed margins for LQG regulators”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol 23, No.4, pp. 756-757, 1978.
- [21] J. Doyle, “Analysis of feedback systems with structured uncertainties”, *IEE Proceedings*, Vol. 129, pt. D, No. 6, pp. 242-252, 1982.
- [22] J. Doyle, K. Zhou, B. Bodenheimer, “Optimal control with mixed \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ objectives”, *Proceeding of the American Control Conference*, Pittsburgh, USA, 1989.
- [23] J. Doyle, K. Zhou, K. Glover, B. Bodenheimer, “Mixed \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ objectives II : optimal control”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol 39, No.8, pp. 1575-1587, 1994.
- [24] F. Paganini and E. Feron, “Linear matrix inequality methods for robust \mathcal{H}_2 analysis : a survey with comparisons”, Chapitre 7 in *Advances in linear matrix inequality methods in control*, édité par L. El Ghaoui et S. Niculescu, SIAM, 1997.
- [25] M.K.H. Fans. A.L. Tits and J.C. Doyle, “Robustness in the presence of mixed parametric uncertainty and unmodeled dynamics”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol 36, No.1, pp. 25-38, 1991.
- [26] E. Feron, P. Apkarian and P. Gahinet, “Analysis and synthesis of robust control systems via parameter-dependent Lyapunov functions”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol 41, No.7 pp. 1041-1046, 1996.
- [27] P. Gahinet and P. Apkarian, “A linear matrix inequality approach to \mathcal{H}_∞ control”, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Vol 4, pp. 421-448, 1994.
- [28] P. Gahinet, “Explicit controller formulas for \mathcal{LMI} -based H_∞ synthesis”, *Automatica*, Vol 32, No.7 pp. 1007, 1014, 1996.
- [29] P. Gahinet, P. Apkarian and M. Chilaly, “Affine parameter-dependent Lyapunov functions and real parametric uncertainty”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol 41, No.3 pp. 436-442, 1996.
- [30] F. Garofalo, G. Celentano and L. Glielmo, “Stability robustness of interval matrices via lyapunov quadratic forms”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol 38, No.2 pp. 281-284, 1993.

- [31] J. C. Geromel, P. Peres and J. Bernussou, "A convex parameter space method for linear control design of uncertain systems", *SIAM Journal on Control and Optimization*, Vol 29. pp. 381-402, 1991.
- [32] J. Geromel, P. Peres and S. Souza, "Mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ control for continuous-time linear systems", *Proceeding of the 31th Conference on Decision Control*, pp. 3717-3722, Tucson, Arizona,USA, 1992.
- [33] J. Geromel, J. Bernussou and P. Peres , "Decentralized control through parameter space optimization", *Automatica*, Vol. 30 pp. 1565-1578, 1994.
- [34] J. C. Geromel, P. Peres and JS. R. de Souza, "Convex analysis of output feedback control problems : robust stability and performance", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol 41. pp. 997-1003, 1996.
- [35] J. C. Geromel, P. Peres and JS. R. de Souza, "A convex approach to the mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ control problem for discrete time uncertain system", *SIAM Jouernal on Control and Optimization*, Vol 33. pp. 1816-1833, 1995.
- [36] J. C. Geromel, M.C. de Oliveira and L. Hsu, " \mathcal{LMI} Characterization of Structural and Robust Stability", *Linear Algebra and its Applications*, Vol 285. pp. 68-80, 1998.
- [37] J. C. Geromel, M.C. de Oliveira and J. Bernussou, "Robust filtering of discrete-time linear systems with parameter dependent Lyapunov functions", *Procceding of the 38th IEEE Conference on Decisions and Control*Phoenix, AZ, USA, pp. 570-575, 1999.
- [38] J. C. Geromel, J. Bernussou and M.C. de Oliveira, " \mathcal{H}_2 norm optimization with constrained dynamic output feedback controllers : decentralized and reliable control", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol 44. pp. 1449-1454, 1999.
- [39] K. Glover, D. Mustafa, "Derivation of the maximum entropy \mathcal{H}_∞ -controller and a state-space formula for its entropy", *Int. J. Control*, Vol. 50, No. 3, pp. 899-916, 1989.
- [40] S. Gupta, "Robust Stability Analysis Using \mathcal{LMI} : Beyond Small Gain ans Passivity", *Int. J. of Robust and Nonlinear Control*, Vol 6. pp. 953-968, 1996.
- [41] W.M. Haddad, D.S. Bernstein, "Generalized Riccati equations for the full- and reduced-order mixed-norm $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ standard problem", *Systems and Control Letters*, Vol. 14, pp. 185-197, 1990.
- [42] W.M. Haddad and V. Kapila, "Robust stabilization for discrete-time systems with slowly time-varying uncertainty", *J. Franklin Inst. Eng. Appl. Math*, 333 B (1) pp. 71-84, 1996.
- [43] B. Halder, B. Hassibi, T. Kailath, "Linearly combined suboptimal mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ controllers", *Proceeding of the 36th Conference on Decision Control*, pp. 434-439, San Diego, California,USA, 1997.
- [44] B. Halder, B. Hassibi, T. Kailath, "Design of optimal mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ static state feedback controllers", *Proceeding of the American Control Conference*, pp. 3239-3243, Philadelphia, Pennsylvania, USA, 1998.
- [45] B. Halder and T. Kailath, " \mathcal{LMI} based design of mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ controllers : the state feedback case", *Proceeding of the American Control Conference*, pp. 1866-1870, San Diego, California,USA, 1999.
- [46] H.A. Hindi, B. Hassibi, S.P. Boyd, "Multiobjective $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ -optimal control via finite dimensional Q -parametrization and linear matrix inequalities", *Proceeding of the American Control Conference*, pp. 3244-3249, Philadelphia, Pennsylvania, USA,1998.

- [47] H. Ito, H. Ohmori and A. Sano, "A methodology for robust performance design with multiple objectives", *Proceeding of the American Control Conference*, pp. 454-457, Seattle, Washington, USA, 1995.
- [48] P. Khargonekar and M. Rotea, "Mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ control : a convex optimization - approach", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol 36, No.7, pp. 823-837, 1991.
- [49] V. Kharitonov, "Asymptotic stability of an equilibrium position of a family of systems of linear differential equations", *Differentsial Uravneniya*, 14, , pp. 2086-2088, 1978.
- [50] F. Leibfritz, "A LMI-base algorithm for designing suboptimal static H_2/H_∞ output feedback controllers", *GAMM 99*, Annual Meeting, Metz, France, April 12-16, 1999.
- [51] F. Leibfritz, "An LMI-base algorithm for designing suboptimal $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ output feedback controllers", *SICON*, Vol.39, No.6, pp.1711-1735, 2000.
- [52] W.S. Levine, M. Athans, "On the determination of the optimal constant output feedback gains for linear multivariable systems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-15, No.2, February 1970.
- [53] A.C. de Lima, R.M. Sales, "Numerical investigations of algorithms for H_2/H_∞ controllers synthesis", *Proceeding of the American Control Conference*, pp. 2401-2405, Baltimore, USA, 1994.
- [54] D.J.N. Limebeer, B.D.O. Anderson, B. Hendel, "A Nash game approach to mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ Control", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol 39, No.1, pp. 69-82, 1994.
- [55] I. Masubuchi, A. Ohoara and N. Suda, " \mathcal{LMI} -base controller synthesis : A unified formulation and solution", *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Vol. 8, pp. 669-686, 1998.
- [56] A. Megretski, "On the order of optimal controllers in the mixed H_2/H_∞ control", *Proceedings of the Conference on Decision and Control*, Buena Vista, Fl., pp. 3173-3174, 1994.
- [57] A. Megretski, "Power Distribution Approach in Robust Control", *IFAC Congress*, Sydney, Australia, pp. 399-402, 1993.
- [58] D. Mustafa, K. Glover, "Controllers which satisfy a closed-loop \mathcal{H}_∞ -norm bound and maximize an entropy integral", *Proceedings of the Conference on Decision and Control*, Austin, TX, 1988.
- [59] D. Mustafa, "Relations between maximum-entropy/ \mathcal{H}_∞ control and combined \mathcal{H}_∞ /LQG control", *Systems and Control Letters*, Vol. 12, pp. 193- 203, 1989.
- [60] D. Mustafa, "Combined \mathcal{H}_∞ /LQG control via the optimal projection equations : on minimizing the LQG cost bound", *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Vol. 1, pp. 99-109, 1991.
- [61] D. Mustafa, K. Glover, D.J.N. Limebeer, "Solutions to the \mathcal{H}_∞ general distance problem which minimize an entropy integral", *Automatica*, Vol. 27, No. 1, pp. 193-199, 1991.
- [62] E. Nobuyama, P.P. Khargonekar, "A generalization in mixed H_2/H_∞ control with state feedback", *Systems and Control Letters*, Vol. 25, pp. 289-293, 1995.

- [63] M.C. Oliveira, J.C. Geromel and L. Hsu “ \mathcal{LMI} characterization of structural and robust stability : the discret-time case, Linear application”, *to appear*, 1999.
- [64] M.C. Oliveira, J. Bernussou and J.C. Geromel, “A new discrete-time robust stability condition”, *Sistem and Control Letters*, Vol 37, pp. 261-265, 1999.
- [65] M.C. Oliveira, J.C. Geromel and J. Bernussou, “An \mathcal{LMI} optimization approach to multiobjective and robust \mathcal{H}_∞ controller design for discrete-time systems”, *Proceedings of the Control and Decision Conference*, Phoenix, Ar., USA, décembre 1999.
- [66] M.C. Oliveira, J.C. Geromel and J. Bernussou, “An \mathcal{LMI} optimization approach to multiobjective controller design for discrete-time systems”, *Proceedings of the 38th IEEE Conference of Decision and Control*, Phoenix, Ar., USA, pp.3611-3616, 1999.
- [67] M.C. Oliveira, J. Bernussou and J.C. Geromel, “A new approach to Lyapunov based controller design”, *Submitted paper*.
- [68] M.C. Oliveira, J.C. Geromel and J. Bernussou, “Design of dynamic output feedback decentralized controllers via a separation procedure”, *International Journal of Control*, Vol. 73, No. 5, pp. 371-381, 2000.
- [69] M.C. Oliveira, J.C. Geromel and J. Bernussou, “Extended \mathcal{H}_2 and H_∞ norm - characterizations and controller parametrizations for discrete-time systems”, *International Journal of Control*, Vol. 75, No. 9, pp. 666-679, 2002.
- [70] D. Peaucelle, “Formulation générique de problèmes en analyse et commande robuste par les fonctions de Lyapunov dépendant des paramètres”, *Thèse Doctorat*, Université Paul Sabatier Toulouse III, France, 2000.
- [71] D. Peaucelle, D. Arzelier, “An efficient numerical solutions for H_2 static output feedback synthesis”, *Proceeding of the European Control Conference*, Porto 2001.
- [72] R.M. da Veiga Pessôa and R.M. Sales, “On the solution of coupled Riccati equations used in mixed \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ optimal control”, *Systems and Control Letters*, Vol. 33, pp. 115-124, 1998.
- [73] D.B. Ridgely, C.P. Mracek, L. Valavani, “Numerical solutions of the general mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ optimization problem”, *Proceeding of the American Control Conference*, pp. 1353-1357, Chicago, 1992.
- [74] D.B. Ridgely, L. Valavani, M. Dahleh, G. Stein, “Solution to the general mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ control problem - necessary conditions for optimality”, *Proceeding of the American Control Conference*, pp. 1348-1352, Chicago, 1992.
- [75] M. Rotea, P. Khargonekar, “ \mathcal{H}_2 -optimal control with an \mathcal{H}_∞ -constraint : the state feedback case”, *Automatica*, Vol 27, pp. 307-316, 1991.
- [76] M. Rotea, A.E. Frazho, “ Bounds on solutions to \mathcal{H}_∞ algebraic Riccati equations and \mathcal{H}_2 properties of \mathcal{H}_∞ central solutions”, *Systems and Control Letters*, Vol. 19, pp. 341-352, 1992.
- [77] A. Saberi, B.M. Chen, P. Sannuti, U.L. Ly, “Simultaneous H_2/H_∞ optimal : the state feedback case”, *Automatica*, Vol. 29, No. 6, pp. 1611-1614, 1993.
- [78] C. Scherer, “Multiobjective H_2/H_∞ control”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol 40, No.6, pp. 1054-1063, 1995.
- [79] C. Scherer, P. Gahinet and M. Chilali, “Multiobjctive output-feedback control via \mathcal{LMI} optimization”, *13th Triennial World Congress*, pp. 249-254, San Francisco, USA, 1996.

- [80] C. Scherer, P. Gahinet and M. Chilali, "Multiobjective output-feedback control via \mathcal{LMI} optimization", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol 42, No.7, pp. 896-911, 1997.
- [81] D.D. Siljak, "Large Scale Dynamic System : Stability and Structure", NJ, North Holland, 1978.
- [82] T. Shimomura and T. Fujii, "An iterative method for mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ control design with uncommon \mathcal{LMI} solutions", *Proceedings of the American Control Conference*, pp. 3292-3296, San Diego, California,USA, 1999.
- [83] R. Skelton, T. Iwasaki, K. Grigoriadis, "A Unified Algebraic Approach to Linear Control Design, Taylor and Francis series in System and Control", 1998.
- [84] M. Steinbuch, O.H. Bosgra, "Necessary conditions for static and fixed order dynamic mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ optimal control", *Proceeding of the American Control Conference*, Boston, pp. 1137-1142, 1991.
- [85] M. Steinbuch, O.H. Bosgra, "Robust performance in $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ optimal control", *Proceedings of the Conference on Decision and Control*, Brighton, pp. 549-550, 1991.
- [86] M. Sznaier, "An exact solution to general SISO mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ problems via convex optimization", *IEEE transactions on automatic control*, Vol 39, No.12, pp. 2511-2517, 1994.
- [87] Y. Theodor, U. Shaked, "Output-feedback mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ control - a dynamic game approach", *Int. J. Control*, Vol. 64, No. 2, pp. 263-279, 1996.
- [88] J.C. Ullauri, D.E. Walker, D.B. Ridgely, "Reduced order mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ optimization with multiple \mathcal{H}_∞ constraints", *Proceedings of AIAA Guidance, Navigation and Control Conference*, Scottsdale, AZ, 1994.
- [89] R. J. Veillette, S. V. Medanic and W. R. Perkins, "Design of reliable control system", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 37, pp. 280-304, 1992.
- [90] B. Vroemen and B. de Jager, "Multiobjective control : an overview", *Proceedings of the 36th Conference on Decision Control*, pp. 440-445, San Diego, California,USA, 1997.
- [91] D. Walker and B. Ridgely, "Uniqueness of the general mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ optimal controller", *Proceedings of the American Control Conference*, pp. 1453-1457, Seattle, Washington,USA,1995.
- [92] S.R. Wells, D.B. Ridgely, "Using increased order controllers in mixed H_2/H_∞ optimization", *Proceedings of the American Control Conference*, Chicago, Il, 1992.
- [93] J.C. Willems, "Dissipative Dynamical Systems.Part I : General Theory. Part II : Linear Systems with Quadratic Supply Rates", *Arch. Rational Mach. Analysis*, Vol. 45, pp. 321-393, 1972.
- [94] H.H. Yeh, S.S. Banda, A.G. Sparks, D.B. Ridgely, "Loopshaping in mixed \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ control", *Int. J. Control*, Vol. 56, No. 5, pp. 1059-1078, 1992.
- [95] H.H. Yeh, S.S. Banda, "Necessary and sufficient conditions for mixed \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ optimal control", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol 37, No.3, pp. 355-358, 1992.
- [96] K. Zhou, "On the parametrization of \mathcal{H}_∞ controllers", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol 37, No.9, pp. 1443-1446, 1992.

- [97] K. Zhou, K. Glover, B. Bodenheimer, J. Doyle, "Mixed \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ performance - objectives I : robust performance analysis", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol 39, No.8, pp. 1564-1574, 1994.
- [98] K. Zhou, *Essentials of robust control*, Prentice Hall International, 1996.
- [99] K. Zhou, *Robust and Optimal Control*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1996.