

**ESTIMACIÓN DE LA CONFIABILIDAD PARA UN SISTEMA SUELO –
CIMENTACIÓN EMPLEANDO SFEM Y CAMPOS ALEATORIOS**

ISAAC HERNÁNDEZ F.



**UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
FACULTAD DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA CIVIL Y AMBIENTAL
BOGOTÁ D.C.**

**ESTIMACIÓN DE LA CONFIABILIDAD PARA UN SISTEMA SUELO –
CIMENTACIÓN EMPLEANDO SFEM Y CAMPOS ALEATORIOS**

ISAAC HERNANDEZ F.

**Tesis para optar al título de
Magíster en Ingeniería Civil**

**Director:
MAURICIO SÁNCHEZ - SILVA
Ingeniero Civil – PhD.**



**UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
FACULTAD DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA CIVIL Y AMBIENTAL
BOGOTA D.C.**

AGRADECIMIENTOS

El autor desea expresar su más sincero agradecimiento al profesor Mauricio Sánchez - Silva por su continuo apoyo y motivación para llevar a buen término la presente investigación.

El autor agradece a los Ingenieros Emilio Bastidas y Orlando Arroyo por su constante colaboración a lo largo del proceso de investigación.

RESUMEN

En esta investigación se explora la confiabilidad de un sistema suelo – cimentación utilizando la teoría de campos aleatorios y el método de los elementos finitos estocásticos (SFEM). A través del algoritmo SFEM y usando diversas mallas estocásticas, de forma conjunta con un análisis lineal elástico sobre una malla determinística de elementos C4, se encontraron curvas de variación del índice de confiabilidad vs. la escala de fluctuación para casos con diverso número de variables aleatorias correlacionadas, encontrándose que conforme la escala de fluctuación aumenta la confiabilidad del sistema disminuye con tendencia hacia la convergencia conforme la escala crece sin límite. La metodología empleada presenta una forma sencilla para el estudio del problema de la variabilidad muestral y espacial de parámetros en sistemas intrincados.

ABSTRACT

In this work the reliability of a soil-footing system is explored by using random fields and stochastic finite element method (SFEM). Through the SFEM algorithm, stochastic meshes and a linear elastic analysis on a deterministic mesh of C4 elements, curves of the behavior of reliability index vs. scale of fluctuation for cases with different number of correlated random variables were developed. It was found that as the scale of fluctuation became higher the reliability diminished, showing tendency toward convergence when the scale grew without a limit. The methodology presented in this document is a simple way to study the important problem of the spatial and muestral variability of parameters in intricate systems

TABLA DE CONTENIDO

| | |
|---|----|
| 1. INTRODUCCIÓN | 1 |
| 2. CONCEPTOS TEORICOS PARA EL ANALISIS DE CAMPOS ALEATORIOS Y SFEM | 4 |
| 2.1. ASPECTOS GENERALES | 4 |
| 2.2. TEORÍA DE CAMPOS ALEATORIOS | 5 |
| 2.2.1. Definición de campo aleatorio | 5 |
| 2.2.2. Caracterización de un campo aleatorio | 7 |
| 2.2.3. Calificaciones de interés..... | 8 |
| 2.2.4. Discretización de campos aleatorios | 9 |
| 2.3. MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS ESTOCÁSTICOS (SFEM). . | 13 |
| 2.3.1. Generalidades acerca del método de los elementos finitos estocásticos | 13 |
| 2.3.2. Descripción del procedimiento SFEM..... | 14 |
| 2.3.3. Etapas críticas del proceso SFEM y alternativas para su manejo. | 16 |
| 2.4. RESUMEN DEL CAPITULO..... | 18 |
| 2.5. CONCLUSIONES..... | 19 |
| 3. MODELACIÓN DE LA INCERTIDUMBRE ASOCIADA | 20 |
| 3.1. Aspectos generales | 20 |
| 3.2. Componentes estocásticos considerados | 20 |
| 3.2.1. El suelo..... | 20 |
| 3.2.2. Descripción de parámetros aleatorios empleados..... | 21 |
| 3.3. Resumen del Capítulo | 22 |
| 3.4. Conclusiones | 23 |
| 4. MODELO ANALÍTICO DESARROLLADO..... | 24 |
| 4.1. Aspectos generales | 24 |
| 4.2. Descripción del modelo para el sistema suelo – cimentación estudiado . | 25 |
| 4.3. Parámetros aleatorios del modelo | 26 |
| 4.4. Discretización de campos aleatorios | 26 |
| 4.5. Implementación del procedimiento SFEM | 32 |
| 4.5.1. Función de estado límite | 33 |
| 4.5.2. Obtención de respuesta del sistema | 33 |
| 4.5.3. Proceso de obtención de derivadas parciales | 37 |
| 4.6. Resumen del capítulo | 38 |
| 4.7. Conclusiones | 38 |
| 5. RESULTADOS Y DISCUSIÓN..... | 40 |
| 5.1. Resultados..... | 40 |
| 5.2. Discusión | 42 |

| | |
|---------------------------------|----|
| 5.3. Resumen del capítulo | 43 |
| 5.4. CONCLUSIONES..... | 44 |
| 6. CONCLUSIONES | 45 |
| 7. BIBLIOGRAFÍA | 46 |
| 8. ANEXOS..... | 47 |

LISTA DE SÍMBOLOS

E : Módulo de Elasticidad o de Young

ν : Relación de Poisson

μ : Media, valor medio o esperado

σ : Desviación estándar

μ^N : Media, valor medio o esperado en el espacio transformado normal estándar

σ^N : Desviación estándar en el espacio transformado normal estándar

COV: Coeficiente de variación

ρ : Coeficiente de correlación

θ : Escala de fluctuación

β : Índice de confiabilidad

τ_{ult} : Esfuerzo cortante último

τ_{act} : Esfuerzo cortante actuante

t : vector índice de una locación espacial o temporal cualquiera

$g(\dots)$: Función de estado límite o de desempeño

$\nabla g(\dots)$: Gradiente de la función de estado límite

LISTA DE TABLAS

| | |
|--|----|
| Tabla 4-1. Valores característicos de los parámetros aleatorios considerados | 30 |
| Tabla 4-2. Matriz de factores de correlación para malla SFEM de 4 variables | 31 |
| Tabla 4-3. Matriz de factores de correlación para malla SFEM de 6 variables | 31 |
| Tabla 4-4. Matriz de factores de correlación para malla SFEM de 9 variables | 31 |
| Tabla 4-5. Matriz de factores de correlación para malla SFEM de 12 variables | 32 |

LISTA DE FIGURAS

| | |
|--|----|
| Figura 2-1. Ilustración de concepto de campo aleatorio. | 6 |
| Figura 2-2. Realización de un campo aleatorio..... | 6 |
| Figura 2-3. Discretización por métodos basados en asignación de aleatoriedad a puntos específicos | 10 |
| Figura 2-4. Discretización por el método del punto medio. Asignación de propiedades estocásticas a los centroides de los elementos de la partición. | 11 |
| Figura 2-5. Visualización del concepto de escala de fluctuación. | 11 |
| Figura 2-6. Ejemplo de función de estimación de coeficientes de correlación..... | 12 |
| Figura 2-7. Procedimiento recursivo para FORM..... | 15 |
| Figura 4-1. Modelo para el sistema suelo - cimentación analizado..... | 25 |
| Figura 4-2. Partición estocástica de 4 variables aleatorias | 27 |
| Figura 4-3. Partición estocástica de 6 variables aleatorias | 27 |
| Figura 4-4. Partición estocástica de 9 variables aleatorias | 28 |
| Figura 4-5. Partición estocástica de 12 variables aleatorias | 28 |
| Figura 4-6. Función de estimación de coeficientes de correlación..... | 30 |
| Figura 4-7. Partición o malla determinística empleada. | 34 |
| Figura 4-8. Interacción entre malla SFEM de cuatro variables aleatorias y partición determinística..... | 35 |
| Figura 4-9. Interacción entre malla estocástica de 6 variables aleatorias y partición determinística..... | 36 |
| Figura 4-10. Interacción entre malla estocástica de 9 variables aleatorias y partición determinística | 36 |
| Figura 4-11. Interacción entre malla estocástica de 12 variables aleatorias y partición determinística | 37 |
| Figura 5-1. Gráfica de Índice de confiabilidad vs. Escala de fluctuación. E y ν modelados como campos aleatorios, carga aplicada determinística | 41 |
| Figura 5-2. Gráfica de Índice de confiabilidad vs. Escala de fluctuación. E y ν modelados como campos aleatorios, carga aplicada como variable aleatoria | 41 |

1. INTRODUCCIÓN

Desde hace largo tiempo uno de los grandes desafíos a los que se enfrenta la ingeniería ha sido la limitación de los recursos y la necesidad creciente por maximizar la utilidad y el beneficio de las inversiones realizadas por las personas, corporaciones o estados. Sin embargo sólo desde hace unas cuantas décadas, la ingeniería ha dado una respuesta racional a tales restricciones. La aparición de la teoría de la confiabilidad así como las diversas herramientas conceptuales para la toma de decisiones bajo riesgo son la respuesta a la necesidad por inversión óptima de los recursos en el ámbito de la sociedad global actual. La confiabilidad, como una forma de modelación probabilística del riesgo, conduce a un conocimiento más íntimo de la naturaleza del problema bajo análisis, proporciona información del estado de las variables en la situación de falla y tiene en consideración la variabilidad natural de los parámetros permitiendo al sujeto decisor, el manejo de factores de seguridad apropiados desde los puntos de vista que se deseen considerar: económico, técnico, social, ambiental o cualquier otro que resulte conveniente.

La evolución y los avances de la teoría de la confiabilidad y su lenta pero progresiva aceptación han conducido a un manejo adecuado del riesgo, hecho que se ha explicitado de diversas formas, como por ejemplo, en la introducción de conceptos probabilísticos, como los factores de carga y resistencia en los códigos de construcción de diversos estados alrededor del mundo. Así pues el estudio de la confiabilidad de sistemas se ha convertido en una necesidad a la hora de tomar decisiones acerca de valores de los parámetros de diseño manejados en la práctica ingenieril.

De forma específica una necesidad crítica inherente a todo problema relacionado con la ingeniería civil es el estudio del suelo sobre el que las estructuras se soportan. El suelo es uno de los elementos más variables y menos conocidos en la gama de los materiales usados en la ingeniería estructural. De hecho, el estudio científico del suelo por parte de la ingeniería, inicio tan sólo hasta el siglo pasado con los trabajos del profesor alemán Karl Terzaghi. Dada la naturaleza variable de las propiedades del suelo, su estudio utilizando técnicas basadas en la teoría de la confiabilidad resulta ser natural.

Entre muchos desarrollos que han aparecido en el tiempo para el análisis de la variabilidad de los suelos así como de sistemas que impliquen variabilidad

espacial o temporal, es necesario destacar algunos bastante recientes debido a su versatilidad, como son la teoría de campos aleatorios (RF) y el método de los elementos finitos estocásticos (SFEM).

Los campos aleatorios son una aproximación a la explicación del comportamiento de sistemas donde uno o más parámetros presentan variación en el tiempo o en el espacio. La presencia de tal variación se convierte en un agente de incertidumbre por lo que posibles análisis involucrando tales sistemas presentan una respuesta netamente estocástica. Por otra parte pero relacionado con lo anterior, el método de los elementos finitos estocásticos es una alternativa para la obtención de análisis de confiabilidad, que por sus características resulta apropiado para sistemas con propiedades descritas por campos aleatorios.

Hasta el momento se han desarrollado diversas investigaciones sobre los campos aleatorios y también algunas acerca de SFEM. En el campo de RF es notable el trabajo de Vanmarcke (1984) [7] quien ideó la teoría hoy aceptada. En el ámbito de SFEM, se puede citar el trabajo pionero de Haldar & Mahadevan (2000). Los trabajos de Vanmarcke y especialmente de Fenton se han orientado al análisis de campos aleatorios para suelos. El trabajo de Haldar y Mahadevan se ha concentrado en la aplicación de SFEM para estructuras de concreto y acero. Hasta el momento no se han observado trabajos relacionados a la exploración de la confiabilidad del suelo con propiedades modeladas con campos aleatorios a través del empleo de SFEM, esto es con la combinación de las técnicas reseñadas. La referencia mas cercana a este problema puede encontrarse en Fenton & Griffiths (2000) [1] quienes analizan el problema de una cimentación superficial sobre un suelo con propiedades modeladas como campos aleatorios, pero limitan su análisis a determinar una distribución de probabilidad de falla para el sistema, sin obtener valores de confiabilidad a través de SFEM.

A partir de la ausencia expuesta, se da origen al problema tratado en esta investigación, el cual involucra la exploración de un análisis de confiabilidad aplicando los procedimientos que hacen parte del método de los elementos finitos estocásticos a un sistema suelo – cimentación superficial, donde dos de las propiedades del suelo se modelan como campos aleatorios y la magnitud de la carga aplicada se modela a su vez como una variable aleatoria.

Los objetivos de esta investigación son:

1. Aplicar los conceptos de la Teoría de campos aleatorios (RF) y el procedimiento SFEM en la estimación de la confiabilidad de un sistema suelo - cimentación.

2. Observar la influencia de la escala de fluctuación, como parámetro rector de la correlación, en la confiabilidad del sistema estudiado
3. Verificar la influencia del número de variables empleadas para la discretización de campos, en la confiabilidad del sistema estudiado

Las conclusiones que se muestran en este documento como resultado del análisis de confiabilidad realizado, pretenden describir la importancia de variables asociadas a cada campo aleatorio, como es el caso de la escala de fluctuación, así como la influencia de la forma en que la discretización del sistema estudiado se realice, todo ello a través de la variación experimentada en los valores del índice de confiabilidad para cada situación.

En el capítulo 2 se describen los principales elementos teóricos necesarios para la implementación y manejo de campos aleatorios así como las características más relevantes del proceso SFEM. Se hace hincapié en las formas de discretización de campos aleatorios y en como llevar a cabo etapas críticas del procedimiento SFEM.

En el tercer capítulo se presentan los parámetros que se modelaran como campos aleatorios. Los parámetros seleccionados introducirán los efectos probabilísticos al modelan y a través de ello permitirán la realización del análisis de confiabilidad buscado en esta investigación.

En el capítulo 4, se muestran las características del modelo del sistema suelo – cimentación sobre el que se desarrollan las actividades de la investigación. La interacción entre los parámetros manejados como campos aleatorios, el método de discretización y la implementación de SFEM en un sistema real son ampliamente descritos en este aparte.

En el capítulo 5 se presentan los resultados encontrados, producto de la aplicación de los conceptos teóricos del capítulo 2 en el sistema suelo – cimentación mostrado en el capítulo 4. Así mismo se presenta una discusión acerca del significado de los resultados, haciendo especial énfasis en la forma de variación de la confiabilidad con respecto a parámetros importantes para la discretización de campos aleatorios.

Finalmente en el capítulo 6, se discutirán algunos puntos de vista acerca del significado de los resultados encontrados así como posibles variaciones a los procesos ejecutados, los cuales permitan obtener resultados aún más significativos en el tema abordado.

2. CONCEPTOS TEORICOS PARA EL ANALISIS DE CAMPOS ALEATORIOS Y SFEM

El siguiente capítulo se escribe con los siguientes propósitos:

1. Introducir las herramientas conceptuales utilizadas para el análisis de incertidumbre a realizar sobre el comportamiento de cimentaciones sometidas a vibración por la maquinaria que soportan.
2. Exponer los conceptos y procedimientos involucrados en la implementación del método de los elementos finitos estocásticos.
3. Analizar las características y el manejo de los campos aleatorios para utilizarlos como alternativa de modelación de las variables estocásticas del problema en estudio.

2.1. ASPECTOS GENERALES

En este capítulo se aborda la descripción de las técnicas para llevar a cabo el análisis de confiabilidad. En términos generales el método de los elementos finitos estocásticos (SFEM, por sus siglas en inglés) es una ampliación de técnicas de ponderación de la incertidumbre mientras que un campo aleatorio es una alternativa para la modelación de parámetros aleatorios con un importante componente de variabilidad espacial o temporal.

Para el caso de SFEM, al ejecutar análisis donde el sistema es complejo o intrincado y las funciones de estado límite no eran explícitas, el seguimiento de la información y sus relaciones resultaba demasiado exigente para procedimientos como FORM, por lo que los profesores Haldar y Mahadevan [2] desarrollaron este procedimiento para facilitar tal tipo de situaciones. Al método clásico de concentración de propiedades en nodos por medio de mallas de elementos finitos, se le ha introducido el componente probabilístico convirtiéndolo en una valiosa herramienta para la modelación de la incertidumbre de sistemas intrincados.

Por otra parte, para situaciones con parámetros cuyos valores característicos son variables en el espacio o el tiempo, la modelación usual resulta insuficiente por lo

que es necesario utilizar alternativas como los campos aleatorios. Estos representan la variación de los parámetros críticos a través de una colección de variables aleatorias, las cuales son localizadas en puntos específicos de tal manera que en su conjunto, a través de una matriz de correlación conjunta, representan la variación del parámetro en las dimensiones que sea necesario (espaciales o temporal), articulándose de esta manera con lo propuesto por el procedimiento SFEM.

2.2. TEORÍA DE CAMPOS ALEATORIOS

La teoría de campos aleatorios fue desarrollada por Vanmarcke [7] en el año de 1984. Sus fundamentos están descritos en el libro *Random Fields: Analysis and Synthesis*. Un campo aleatorio es una alternativa para la modelación de parámetros que poseen además de la componente usual de variabilidad muestral, una componente de variabilidad asociada al espacio o al tiempo. El concepto representa en si mismo, un paso para modelar de forma más cercana a la realidad el comportamiento de sistemas y por tanto obtener valores mas certeros de confiabilidad para los sistemas analizados.

2.2.1. Definición de campo aleatorio

A pesar de que existen diversas aproximaciones para la definición de un campo aleatorio la presentada a continuación resulta apropiada para los propósitos de esta investigación: un campo aleatorio es una alternativa de modelación de parámetros que poseen componentes de variabilidad espacial o temporal, los cuales pueden ser descritos por medio de una colección finita de variables aleatorias asociadas a elementos de una partición estocástica (del espacio o del tiempo según corresponda) y completamente correlacionadas entre sí. Como resulta natural, las variables aleatorias mencionadas están plenamente caracterizadas por medio de una función de distribución de probabilidad, un valor esperado y un valor de varianza, los cuales a su vez guardan estrecha relación con los valores de partida del campo.

La definición expresada se muestra de forma gráfica en la Figura 1. En la ilustración puede observarse la modelación de un parámetro $X(t)$, una propiedad del plano mostrado. Por ser una variable aleatoria, el valor de la propiedad en cada punto está modelado por una distribución de probabilidad, con un valor esperado y una varianza, desviación estándar o coeficiente de variación (C.O.V.). Sin embargo, el parámetro X posee una componente de variabilidad espacial por lo que conforme se explora su comportamiento de punto a punto es probable que

se detecte variación en el comportamiento. Debe notarse que la variación que puede darse de punto a punto no es arbitraria, se encuentra limitada a través de la existencia de una matriz de correlación entre las diversas variables aleatorias descriptoras del campo.

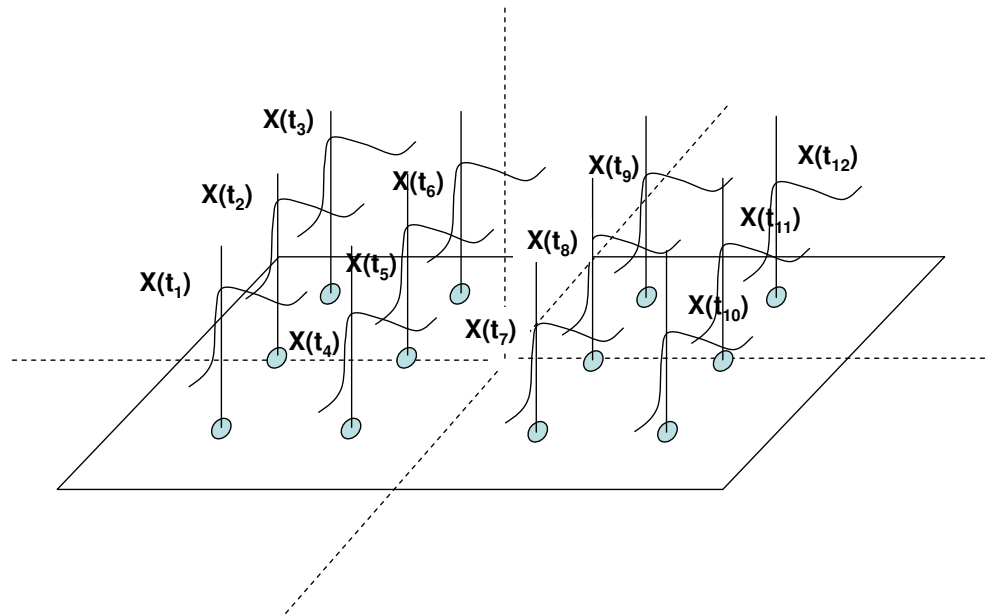


Figura 2-1. Ilustración de concepto de campo aleatorio.

En la Figura 2, se muestra una realización de un campo aleatorio. Una realización es un posible estado de las variables aleatorias descriptoras del campo. Obsérvese que los valores del conjunto de las variables siempre están relacionados entre sí para garantizar de forma adecuada el sentido de colección del campo.

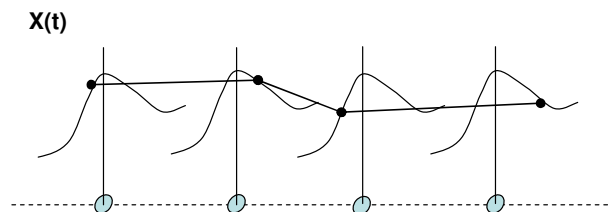


Figura 2-2. Realización de un campo aleatorio

2.2.2. Caracterización de un campo aleatorio

Para la caracterización de un campo es necesaria la introducción de diversos conceptos relacionados. Para poder ser manejado de forma numérica un campo aleatorio debe ser fraccionado en diversas variables aleatorias. Dado que tales variables provienen de un mismo campo aleatorio existe correlación entre ellas. Para considerar tal fenómeno se han desarrollado herramientas de medición denominadas promedio de ensamble (ensemble average). Las expresiones matemáticas utilizadas son las siguientes, Haldar & Mahadevan [2]:

- Expresión genérica para un promedio de ensamble:

$$E[g(X(t_1)), \dots, g(X(t_n))] = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} g(x_1, \dots, x_n) f_n(x_1, t_1, \dots, x_n, t_n) dx_1 \dots dx_n \quad \text{Ecuación 2-1}$$

Un promedio de ensamble es una estadística del campo, conformada por la suma de los aportes producidos por los estados del mismo en cada una de las locaciones espaciales o intervalos temporales.

Los siguientes promedios de ensamble son importantes para la caracterización de todo campo:

$$\alpha_i(t) = E[X^i(t)] \quad \text{Ecuación 2-2}$$

La Ecuación 2 es un promedio de ensamble de primer orden, corresponde al momento i-ésimo de X(t). A partir de lo anterior se tiene que el primer momento esto es, la media del campo se define como:

$$\alpha_1(t) = E[X(t)] \quad \text{Ecuación 2-3}$$

Existen promedios de ensamble de segundo orden:

$$\alpha_{ij}(t_1, t_2) = E[X^i(t_1)X^j(t_2)] \quad \text{Ecuación 2-4}$$

$$\mu_{ij}(t_1, t_2) = E\left[[X(t_1) - \alpha_1(t_1)]^i [X(t_2) - \alpha_1(t_2)]^j\right] \quad \text{Ecuación 2-5}$$

Los siguientes son casos especiales de los anteriores son:

$$\alpha_{11}(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] \quad \text{Ecuación 2-6}$$

conocida como la función de autocorrelación de $X(t_1)$ y $X(t_2)$.

$$\mu_{11}(t_1, t_2) = E[[X(t_1) - \alpha_1(t_1)][X(t_2) - \alpha_1(t_2)]] \quad \text{Ecuación 2-7}$$

llamada, la función de autocovarianza de $X(t_1)$ y $X(t_2)$. El valor de la varianza en un punto $X(t)$ se calcula como:

$$\text{Var}[X(t_1)] = \mu_{11}(t_1, t_1) \quad \text{Ecuación 2-8}$$

Finalmente, debe notarse que todos los anteriores promedios de ensamblaje hacen relación a la variabilidad muestral. Existen, así mismo promedios que hacen relación a la variación propia (de una sola muestra) del campo aleatorio. El más importante de ellos es:

$$X_{prom} = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t, \zeta) dt \quad \text{Ecuación 2-9}$$

X_{prom} denota un promedio temporal o espacial (dependiendo de la naturaleza del campo) sobre un intervalo T . El promedio total sobre la muestra se determina como:

$$Y = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t) dt \quad \text{Ecuación 2-10}$$

2.2.3. Calificaciones de interés

Los siguientes calificativos determinan propiedades y en algunos casos simplificaciones que pueden ser útiles para llevar a cabo la discretización y posterior manejo de campos aleatorios al interior de un modelo de análisis

- Homogeneidad: Un campo se dice homogéneo si su distribución de probabilidad de primer orden no depende de la posición en la cual se evalúe y si su distribución de probabilidad conjunta para dos locaciones cualesquiera solo depende de la distancia relativa entre ellos. La anterior definición se expresa por medio de las siguientes igualdades:

$$f(x, t) = f(x, t + c) \quad \text{Ecuación 2-11}$$

$$f(x_1, x_2, t_1, t_2) = f(x_1, x_2, \tau) \quad \text{Ecuación 2-12}$$

- Homogeneidad en el sentido amplio: Un campo aleatorio es homogéneo en el sentido amplio si su media es constante y su función de autocorrelación sólo depende de la distancia entre las locaciones espaciales o intervalos temporales considerados. Las expresiones para esta propiedad se expresan en las Ecuaciones 13 y 14:

$$E[X(t)] = \mu \quad \text{Ecuación 2-13}$$

$$E[X(t + \tau)X(t)] = R(\tau) \quad \text{Ecuación 2-14}$$

- Ergodicidad: Un campo aleatorio homogéneo se denomina ergódico, si sus promedios de ensamble son iguales a promedios temporales (o espaciales) apropiados. De la anterior definición se desprende que un proceso aleatorio es ergódico en la media, si:

$$Y = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t) dt = E[X(t)] = \mu \quad \text{Ecuación 2-15}$$

2.2.4. Discretización de campos aleatorios

La estrategia para llevar a cabo la discretización de un campo aleatorio está implícita en la definición ofrecida al inicio de esta sección. Dado que un campo se describe por un conjunto infinito de variables, la discretización apunta a una simplificación de tal conjunto, de tal manera que la modelación del campo pueda ser realizada por un número finito de ellas. Para realizar ese proceso, diversos autores han propuesto las metodologías que se describen a continuación [2]:

- Métodos basados en asignación de aleatoriedad a puntos específicos: Esta alternativa propone la descomposición del campo en múltiples variables aleatorias correlacionadas entre sí, dividiendo el sistema analizado a través de una partición y asignando el comportamiento aleatorio de cada elemento de la partición a una de las variables utilizadas para la discretización del campo. Así mismo asigna la variable aleatoria a uno o más puntos al interior de cada elemento. Dependiendo de a que locación o locaciones asigne el comportamiento aleatorio, esta alternativa toma los nombres de método del punto medio (mid-point method), si la asignación recae sobre el

punto medio o centroide del elemento de la partición o método de asignación nodal (nodal point method) en el caso en que la asignación se haga sobre los nodos de los elementos de la partición utilizada para llevar a cabo la discretización. La Figura 3 ilustra esta tendencia de discretización.

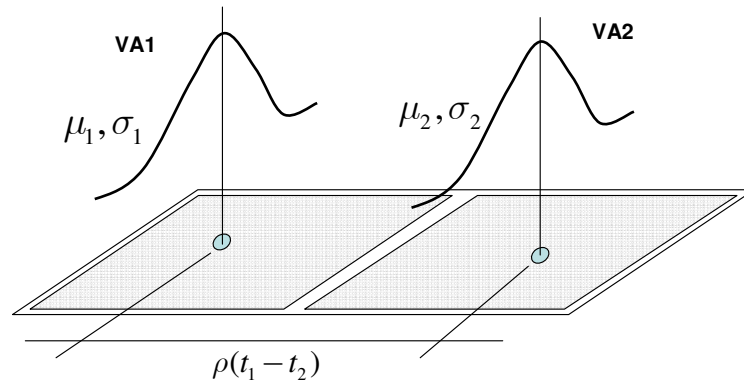


Figura 2-3. Discretización por métodos basados en asignación de aleatoriedad a puntos específicos

Para el caso específico del método del punto medio, la distribución de probabilidad, el valor esperado y la varianza de cada una de las variables aleatorias es igual a sus homólogas en el campo (Figura 4). La correlación del conjunto de variables se expresa por medio de una matriz de correlación la cual se obtiene a partir de una función para la modelación del decaimiento de la correlación, la distancia entre los centroides y la escala de fluctuación, un parámetro que puede ser entendido como la distancia al interior de la cual la correlación entre variables tiene un valor de importancia, esto es muy cercano a la unidad (Figura 5). La función de estimación de valores para la matriz de correlación usualmente corresponde a una exponencial negativa. Un ejemplo de tal tipo de función, su gráfica y expresión simbólica se muestra en la Figura 6.

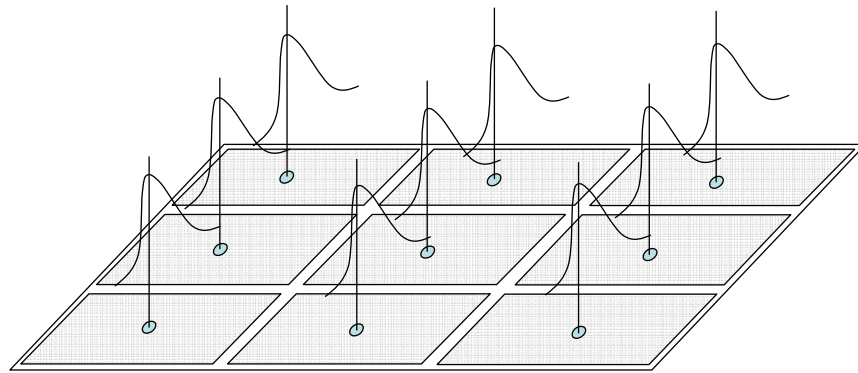


Figura 2-4. Discretización por el método del punto medio. Asignación de propiedades estocásticas a los centroides de los elementos de la partición.

Debe notarse que la escala de fluctuación es una propiedad intrínseca de cada campo y depende de las características y comportamiento del parámetro a modelar al interior del sistema al que pertenece. Cualquier conclusión que se obtenga de un sistema con parámetros como campos aleatorios habrá de depender del valor que se ha tomado para la escala, así como la forma de variación de está a lo largo de las direcciones coordenadas para la condición de variabilidad espacial. La anterior consideración abarca la situación desarrollada en está investigación. Un último detalle acerca de la escala es acerca de su obtención, la que depende de pruebas llevadas a cabo in situ. Para mas información acerca de cómo determinar un valor a la escala de fluctuación puede consultarse Jaksa et. al [3].

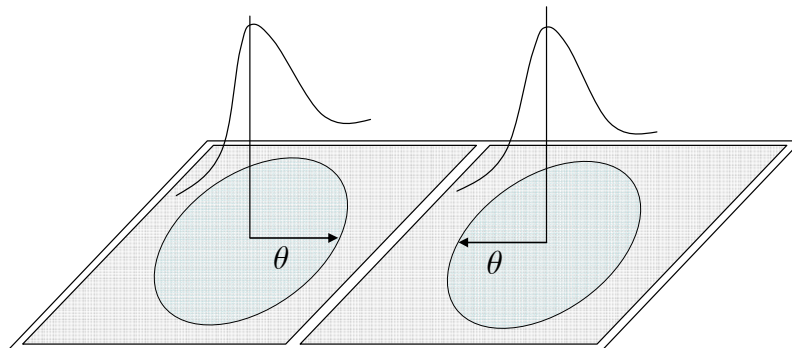


Figura 2-5. Visualización del concepto de escala de fluctuación.

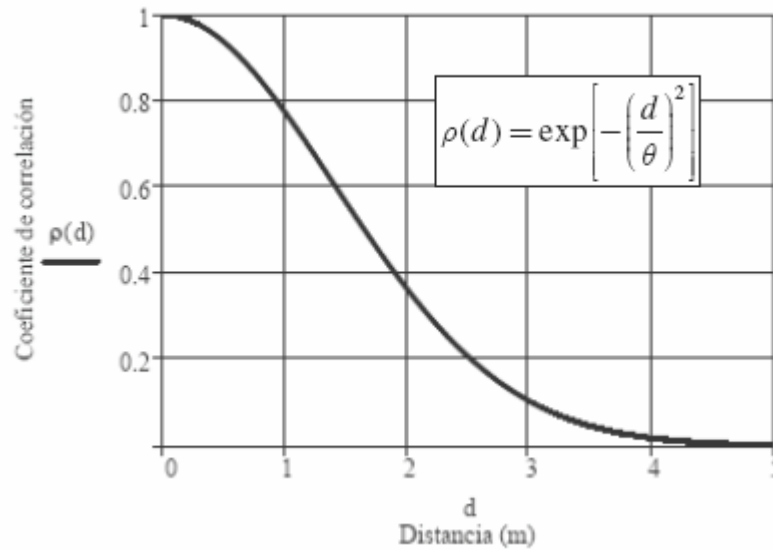


Figura 2-6. Ejemplo de función de estimación de coeficientes de correlación

- Métodos basados en el promedio sobre los elementos de la partición: de manera similar al anterior método, esta aproximación utiliza una partición estocástica del sistema analizado, sin embargo no realiza asignación puntual, en cambio propone obtener las características aleatorias de las variables utilizadas a partir del promedio del campo sobre los elementos de la partición. La expresión matemática de este procedimiento es:

$$X_i = \frac{1}{\Omega_i} \int_{\Omega_i} X(t) d\Omega_i \quad \text{Ecuación 2-16}$$

La consideración del promedio implica considerar diversos aspectos que pueden resultar desventajosos para llevar a cabo una modelación. El primero de ellos es el hecho de que si bien el valor esperado de las variables utilizadas es el mismo que el campo al cual están relacionadas, es posible que la distribución de probabilidad cambie. Otro aspecto se presenta al considerar que la varianza no es igual a la del campo sino que debe obtenerse por medio de expresiones matemáticas más complejas [2].

- Métodos basados en expansión por series: esta última alternativa representa la opción más elaborada aunque no por eso la más eficiente. Consiste en expresar el campo como una serie y a partir de tal desarrollo obtener las variables aleatorias que puedan representarlo.

2.3. MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS ESTOCÁSTICOS (SFEM).

Corresponde a esta sección el introducir el método de los elementos finitos estocásticos (Stochastic Finite Element Method, SFEM), el cual es la opción seleccionada para llevar a cabo el análisis de confiabilidad planteado en los objetivos de la investigación. Este método combina el método de los elementos finitos usual con la metodología de análisis de confiabilidad establecida en el procedimiento FORM (First Order Reliability Method) convirtiéndose en una alternativa de gran potencial para estimar la confiabilidad de sistemas con un grado importante de complejidad.

2.3.1. Generalidades acerca del método de los elementos finitos estocásticos

El método de los elementos finitos estocásticos (SFEM) es el resultado del trabajo de Haldar & Mahadevan, quienes en la búsqueda para mejorar las herramientas de estimación de confiabilidad concibieron la posibilidad de combinar el método de los elementos finitos para la estimación de respuesta de sistemas, con el procedimiento FORM para la obtención de valores de índices de confiabilidad o probabilidad de falla.

El procedimiento desarrollado posee importantes ventajas para estudiar la confiabilidad de sistemas con ciertas características específicas:

- Funciones de estado límite implícitas: Una función de estado límite (FEL) o función de desempeño expresa de forma matemática la frontera entre las zonas de falla y seguridad para el comportamiento de un sistema. El caso más sencillo de FEL se da cuando está directamente relacionada con los parámetros de entrada esto es, es posible observar en su expresión simbólica, la importancia de cada uno de las variables aleatorias que influyen sobre su valor. Sin embargo a medida que el sistema estudiado se torna más complejo es factible el perder tal conocimiento. La presencia de un número importante de elementos y de relaciones entre ellos pueden conducir a que la FEL no pueda expresarse de forma directa en términos de las variables de entrada, en tales casos la función de desempeño se conoce como implícita. Para la situación anterior, el procedimiento FORM estándar pierde capacidad de operación y es

- entonces cuando el proceso SFEM gana validez. El hecho de sólo necesitar la respuesta del sistema, sin conocer las relaciones explícitas de la FEL con los parámetros de entrada convierte al SFEM en una alternativa mucho más versátil.
- Sistemas intrincados: Debido al hecho de estar basado en el método de los elementos finitos, SFEM es una alternativa apropiada para el análisis de confiabilidad en este tipo de sistemas. Un paso importante para el proceso FORM es la obtención del valor de la función de estado límite, la cual sin lugar a dudas está basada en la respuesta del sistema, ya sea que esta se mida en términos de esfuerzo o de desplazamiento, como es el caso de los sistemas estructurales. Como es conocido el método de los elementos finitos es una de las herramientas más poderosas para el análisis de sistemas por lo que la dificultad asociada a lo intrincado que este pueda ser resulta apenas un factor de consideración.
- Campos aleatorios: Cuando los parámetros que comportan incertidumbre son modelados como campos aleatorios será necesaria la consideración de una importante cantidad de variables aleatorias asociadas a la discretización de estos. El procedimiento SFEM resulta fácil de implementar para situaciones como la descrita, lo cual combinado con la posibilidad de manejar las particiones estocásticas lo convierte en la alternativa precisa para este tipo de problemas.

2.3.2. Descripción del procedimiento SFEM

Dado que el procedimiento SFEM está basado en FORM es necesario considerar el significado de este último procedimiento para comprender a fondo cada una de las etapas de SFEM.

El método de confiabilidad de primer orden, FORM, es una de las alternativas más difundidas para llevar a cabo análisis de confiabilidad. En términos generales es un problema de optimización, por el cual se busca la minimización de la distancia entre la función de estado límite y el origen de coordenadas de un espacio transformado normal estándar, bajo la restricción de que la función de estado límite debe estar igualada a cero. Existen diversas versiones de FORM pero todas tienen un origen común en el método de Newton – Raphson, por lo que su implementación obliga a considerar las derivadas parciales de la función de estado límite con respecto a cada uno de los parámetros considerados. Una imagen inspirada en Haldar & Mahadevan [2] expone el procedimiento recursivo de FORM (Figura 7).

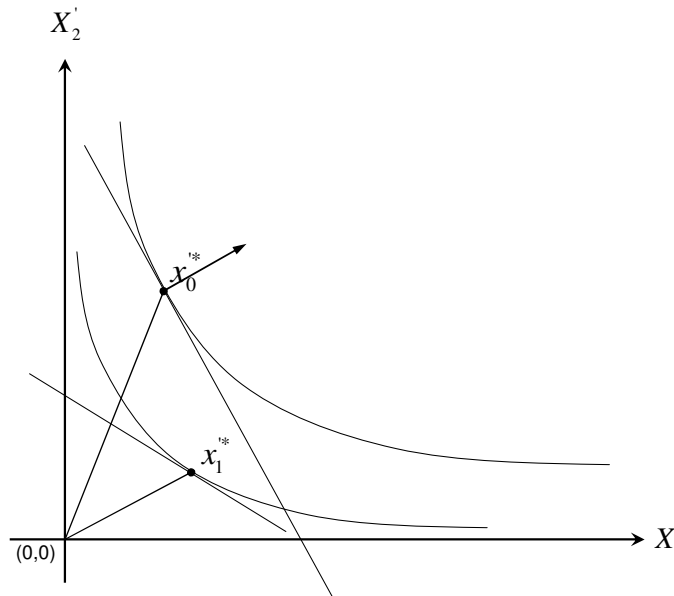


Figura 2-7. Procedimiento recursivo para FORM

El procedimiento FORM (y por tanto el proceso SFEM) es recursivo, consiste en el cálculo iterativo de valores de respuesta del sistema, cálculo de derivadas, estimación de un punto de diseño y cálculo de índice de confiabilidad, hasta que se encuentre convergencia en los valores de respuesta e índice de confiabilidad. A continuación se presentan de forma detallada las etapas del proceso SFEM.

- 1 Definir apropiadamente la función de desempeño.
- 2 Asumir valores iniciales para el punto de diseño. Usualmente se toman los valores esperados de las variables aleatorias. Obtener el valor de la función de desempeño $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ con los valores dados.
- 3 Calcular los valores de media y desviación estándar normales equivalentes en el punto de diseño. La obtención de los valores de media y desviación estándar normales equivalentes debe hacerse siguiendo el procedimiento de Rackwitz – Fiessler [4]. A partir de los nuevos valores, actualizar las coordenadas del punto de diseño en el espacio normal transformado utilizando la expresión:

$$x_i^{*} = \frac{x_i^{*} - \mu_{X_i}^N}{\sigma_{X_i}^N}$$

Ecuación 2-17

- 4 Calcular las derivadas parciales de la función de estado límite en el punto de diseño, con respecto a todas las variables estocásticas involucradas.

- 5 Calcular las derivadas parciales de las variables aleatorias en el espacio normal transformado. Para llevar a cabo esto, sólo deben multiplicarse los resultados del paso anterior por la desviación estándar en el espacio normal transformado de cada variable respectiva.
- 6 Calcular los nuevos valores de las coordenadas del punto de diseño en el espacio transformado normal estándar a través de la expresión:

$$X_{k+1}^* = \frac{1}{|\nabla g(X_k^*)|^2} \cdot [\nabla g(X_k^*)^T X_k^* - g(X_k^*)] \nabla g(X_k^*) \quad \text{Ecuación 2-18}$$

- 7 Calcular el índice de confiabilidad β a través de la expresión:

$$\beta = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i^*)^2} \quad \text{Ecuación 2-19}$$

- 8 Calcular las coordenadas del nuevo punto de diseño en el espacio original a través de la expresión:

$$x_i^* = \mu_{X_i}^N + \sigma_{X_i}^N x_i^* \quad \text{Ecuación 2-20}$$

En las Ecuaciones 17-20, μ representa el valor esperado, σ es la desviación estándar y la N en el superíndice es la notación para designar parámetros transformados al espacio normal equivalente, mientras que x_i^* es la representación de las componentes del punto de diseño en el espacio transformado y x_i son las mismas componentes pero en el espacio usual.

El procedimiento anterior es iterativo y se detiene cuando los valores de β y $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ convergen. La variación entre valores nuevos y anteriores de β y $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ debe ser menor o igual a un valor específico, usualmente 0.001.

2.3.3. Etapas críticas del proceso SFEM y alternativas para su manejo.

Al analizar las etapas del proceso descrito en el aparte anterior dos eventos deben considerarse con cuidado.

El primero de ellos es la estimación de la respuesta del sistema. Como se ha mencionado, SFEM está basado en el método de los elementos finitos, por lo que la obtención de respuesta pasa por un proceso de discretización determinística del sistema bajo análisis, esto es, la partición del sistema en elementos finitos cuyas características (número, forma, tamaño, dimensiones) dependerán de la clase de sistema estudiado así como el nivel de precisión que se desee.

Un segundo aspecto es la determinación de las derivadas parciales de la función de estado límite con respecto a cada uno de los parámetros de entrada. Se conocen tres alternativas para la realización de este proceso:

- 1 Método de las diferencias finitas: Esta aproximación emplea la definición en términos de límite de la derivada de una función para llegar a un valor de la derivada de la función con respecto a una variable dada en un punto conocido. El procedimiento involucra el conocer el punto para el que se quiere estimar la derivada, X_{1p} (valor de la variable con respecto a la cual se calcula la derivada) y como primer paso calcular la respuesta del sistema en esa condición $g(X_{1p}, X_2, \dots, X_n)$, el resultado obtenido se almacena, continuando a ejercer una pequeña perturbación en el valor de la variable ($X_{1p} + \Delta X$), con el valor encontrado se ejecuta una nueva evaluación de la respuesta del sistema $g(X_{1p} + \Delta X, X_2, \dots, X_n)$. La derivada buscada se obtiene aplicando la definición de derivada como la pendiente de la recta tangente a la función en el punto de análisis, esto es:

$$\frac{\partial g(X_1, X_2, \dots, X_n)}{\partial X_1} = \frac{g(X_{1p} + \Delta x, X_2, \dots, X_n) - g(X_{1p}, X_2, \dots, X_n)}{\Delta x}$$

Ecuación 2-21

Como es natural, el proceso debe repetirse para todas las variables involucradas en el proceso de estimación de la confiabilidad, por lo que será necesario el uso de un ciclo de programación así como una subrutina para dar solución al problema del cálculo de respuesta estructural. Como último detalle el valor de ΔX debe ser lo suficientemente pequeño para dar validez a la consideración de límite, pero no debe excederse en ello pues puede conducir a poca o nula sensibilidad del parámetro en la función de estado límite.

- 2 Una segunda alternativa es el método de la perturbación clásica el cual emplea el concepto de derivación sucesiva, más conocido como regla de la cadena. El método propone estudiar paso a paso la forma en que están relacionadas las variables con la función de estado límite. Dado que la función de desempeño se evalúa a partir de un valor de respuesta del sistema obtenido por medio de un análisis de elementos finitos, esta alternativa conduce a la necesidad de derivar la matriz de rigidez asociada al sistema, la cual depende (en tamaño y características) del modelo mismo que se haya desarrollado. Resulta obvio que este método representa cierta complejidad por el hecho de necesitar el cálculo

de una derivada de una matriz la cual sólo en muy poco casos puede obtenerse de forma simbólica. La regla matemática para este procedimiento se puede resume en las Ecuaciones 22-23.

$$G(X) = G[R(X), S(X)] \quad \text{Ecuación 2-22}$$

$$\frac{\partial G}{\partial Y_1} = \frac{\partial G}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial X_1} \frac{\partial X_1}{\partial Y_1} + \frac{\partial G}{\partial S} \frac{\partial S}{\partial X_1} \frac{\partial X_1}{\partial Y_1} \quad \text{Ecuación 2-23}$$

El segundo componente del lado derecho de la Ecuación 23 es la parte asociada con la respuesta del sistema. La componente de la derivada de X_1 respecto a Y_1 implica la derivada de una matriz, si el análisis se lleva a cabo por el método de los elementos finitos.

- 3 El tercer método de obtención de derivadas se denomina perturbación iterativa, el cual resulta apropiado para situaciones no lineales y al igual que el método anterior, implica obtener la derivada de matrices.

2.4. RESUMEN DEL CAPITULO

En este capítulo se expusieron las herramientas de modelación que han de ser utilizadas para el desarrollo del análisis de confiabilidad implementado en el curso de esta investigación. Se mostró el origen del método de los elementos finitos estocásticos, mostrando lo adecuado que resulta su uso para la modelación de sistemas complejos como el suelo. Se identificaron los principios de confiabilidad usados y los procedimientos para el desarrollo del método. En las secciones que trataron la modelación por campos aleatorios, se explicaron los conceptos de variabilidad en los cuales se soporta esta alternativa y se expusieron las definiciones de los promedios de ensamble para cada tipo de variabilidad manejada, haciendo explícita la importancia del uso de esta estrategia para parámetros con variabilidad muestral y espacial. En la sección sobre discretización de campos, se ha hecho hincapié en la información necesaria para una adecuada modelación en términos de variables aleatorias sencillas. El concepto de escala de fluctuación aparece como el parámetro a tener en cuenta, especialmente para la determinación de coeficientes de correlación para el conjunto de variables asociadas a los elementos de una malla estocástica.

2.5. CONCLUSIONES

- 1 Se han introducido las estrategias a usar para la modelación estocástica. El método de los elementos finitos estocásticos para la modelación de sistemas complejos y de forma correspondiente los campos aleatorios para las variables con variabilidad espacial han sido expuestos de forma global
- 2 El procedimiento de implementación del método de los elementos finitos se basa para su ejecución en FORM. Para su uso es necesario concentrar las propiedades del sistema analizado en puntos específicos del modelo. La aproximación por campos aleatorios para variables con componentes estocásticas espaciales necesita de la fragmentación del campo en diversas porciones, representadas por variables aleatorias correlacionadas. El parámetro escala de fluctuación es crítico para llevar a cabo este proceso.
- 3 El método de los elementos finitos estocásticos en conjunción con la estrategia de campos aleatorios resulta una aproximación interesante para la modelación de un sistema cimentación - suelo con parámetros aleatorios

3. MODELACIÓN DE LA INCERTIDUMBRE ASOCIADA

Los objetivos que motivan este capítulo son los siguientes:

1. Listar las variables de naturaleza estocástica que a considerar para el análisis de confiabilidad planteado como objetivo de la investigación.
2. Plantear una estrategia de valoración de la incertidumbre para cada una de las variables estocásticas involucradas.

3.1. Aspectos generales

En este capítulo se ejecuta la identificación de los parámetros que han de ser considerados como estocásticos y se dan lineamientos, acerca del estudio al que deben ser sometidos, para una apropiada modelación de la realidad del sistema suelo - cimentación. En esta reflexión se mostrará que el suelo como tal ha de ser discretizado como una red de elementos finitos en la que algunas de sus propiedades relevantes serán aproximadas como campos aleatorios. La definición final de los valores que han de tomar los anteriores, esto es media, desviación estándar y distribución de probabilidad, se hará en el capítulo siguiente, mas los lineamientos que tales decisiones habrán de satisfacer son planteados en la descripción a desarrollar en este capítulo.

3.2. Componentes estocásticos considerados

3.2.1. El suelo

En el ámbito del problema de la estabilidad de un sistema suelo –cimentación soportando carga, el componente crítico es el suelo.

El modelo del suelo para la modelación estocástica será un sector con un solo estrato homogéneo. La masa de suelo como tal será fragmentada en elementos finitos de área.

En la práctica para la caracterización de todo material se necesitan diversas propiedades. En el caso del suelo, las siguientes propiedades son importantes:

- Módulo de elasticidad o de Young
- Relación de Poisson

- Módulo de corte
- Angulo de fricción interna
- Resistencia al corte

Los tres primeros determinan la respuesta del sistema bajo la acción de cargas, medida tal respuesta en términos de esfuerzo o de deformación. Los dos últimos están ligados con la resistencia que ofrece el suelo a la acción de las cargas aplicadas.

Para este estudio las propiedades asociadas con la resistencia se manejarán como determinísticas mientras que el Módulo de Young y la relación de Poisson se modelaran como campos aleatorios.

3.2.2. Descripción de parámetros aleatorios empleados

Los siguientes son los parámetros cuyas componentes de variabilidad serán consideradas para el análisis:

1. *Módulo de Young, E*: El módulo de elasticidad esta asociado con la rigidez del suelo, particularmente con la oposición de este a experimentar deformaciones normales. Como factor de rigidez, esta presente en la matriz del material cuando se lleva a cabo un análisis por elementos finitos. El módulo E esta íntimamente relacionado con el módulo de corte G. Como es sabido, los parámetros fundamentales en el comportamiento de cualquier material elástico son el módulo de Young, el módulo de cortante y la relación de Poisson. Los anteriores están relacionados por la fórmula elástica

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Ecuación 3-1

Se concluye que debido a su importancia en la respuesta, el módulo E debe ser integrado al modelo del suelo como un campo aleatorio bidimensional de carácter espacial. Los valores de media y desviación serán definidos con claridad, en el momento de ejecutar el análisis de incertidumbre.

2. *El módulo de Poisson, ν* : El módulo o relación de Poisson establece un nexo entre la deformación longitudinal y lateral de un material elástico. Al igual que el módulo de Young es una de las variables características de todo material y aparece en la matriz del material en el método de los

elementos finitos. En el caso de de vibraciones en cimentaciones, el papel de la relación esta relacionado con la disipación de la energía introducida al sistema por la carga actuante y por tanto con el denominado amortiguamiento geométrico. Para la estimación de valores aproximados de media y desviación estándar para el parámetro existen diversas referencias geotécnicas. Por todo lo anterior, el módulo de Poisson se considerará como un campo aleatorio bidimensional de variabilidad espacial al ejecutar el análisis de incertidumbre.

3. *La carga aplicada, W* : La carga a la que va a estar sometida la cimentación es un factor importante. Es el componente del análisis que impone solicitaciones al sistema. En el caso de esta investigación, la carga se modela como una variable aleatoria. Dependiendo al origen de la sollicitación puede ser posible la introducción de una modelación más compleja como podría ser un campo aleatorio con variabilidad temporal. Un aspecto final de este componente de la incertidumbre hace relación a la forma como la carga se transmite a lo largo del suelo. Para este caso la modelación por elementos finitos tomará la responsabilidad de mostrar los patrones de comportamiento, por lo que no existe mayor inquietud en el aspecto del control de la transmisión.

3.3. Resumen del Capítulo

En este capítulo se ha realizado la asignación del tipo de modelación para las variables involucradas en el problema de investigación planteado. Para el componente suelo, se discutió la clasificación y naturaleza de dos variables estocásticas: el módulo de Poisson y el módulo de Young. Se ha resuelto que la mejor aproximación para ellos es la modelación como campos aleatorios con variabilidad en el espacio. Con base a análisis de sensibilidad para cada uno de ellos, será posible corroborar en etapas futuras la certeza de la apreciación.

Para el componente carga, la naturaleza y la importancia de esta hace imprescindible la utilización de la modelación probabilística. La variabilidad muestral por la que es afectada la carga justifica su modelación como una variable aleatoria.

Finalmente, el sistema de manera global será modelado a través de elementos finitos estocásticos. Para esta modelación se utilizarán distintas mallas de

fragmentación estocástica de acuerdo a los comportamientos de cada una de las variables analizadas.

3.4. Conclusiones

1. Las variables que se consideraron para el análisis de incertidumbre a realizar son: relación de Poisson, módulo de Young y la carga aplicada sobre el sistema.
2. Las estrategias a emplear para el análisis de incertidumbre son, el método de los elementos finitos estocásticos para el sistema en su conjunto, modelación por campos aleatorios espaciales bidimensionales para las propiedades del suelo mencionadas mientras que la carga aplicada se modelará como una variable aleatoria.

4. MODELO ANALÍTICO DESARROLLADO

En este capítulo se desarrollarán las siguientes actividades:

1. Presentar las características del modelo de sistema suelo – cimentación utilizado para llevar a término los objetivos de la investigación
2. Mostrar las etapas consideradas para ejecutar la discretización de los parámetros modelados como campos aleatorios, al interior del sistema suelo – cimentación.
3. Describir la forma en que se desarrollaron las aplicaciones computacionales necesarias para implementar el método de los elementos finitos estocásticos en la obtención de valores índices de confiabilidad para el sistema bajo estudio.

4.1. Aspectos generales

En este capítulo se da paso a la exposición de los procedimientos para discretizar los campos aleatorios seleccionados y para ejecutar los análisis de confiabilidad por medio del método de los elementos finitos estocásticos, SFEM.

El modelo presentado es un caso típico de estudio para el proyectista de cimentaciones. La presencia de una cimentación superficial soportando una carga la cual debe transmitir de forma adecuada al suelo es uno de los problemas típicos de la ingeniería de suelos y por tanto arroja mucha luz para la comprensión de la importancia de integrar los aspectos probabilísticos en el análisis de sistemas.

Para la obtención de resultados que satisfagan los objetivos de esta investigación se procederá a ejecutar un conjunto de análisis en los cuales se variarán el número de variables aleatorias utilizadas para la discretización de los campos así como el valor característico de la escala de fluctuación.

La forma en que se discretizan los campos aleatorios seleccionados y la implementación de SFEM, pretenden ser un punto de partida para futuras investigaciones usando las herramientas mencionadas, por lo cual se exponen con cierto nivel de detalle a medida que son tratadas en este capítulo.

4.2. Descripción del modelo para el sistema suelo – cimentación estudiado

El modelo para el sistema suelo –cimentación estudiado en esta investigación consiste de un sector rectangular o bloque de suelo de 5 m de base por 2 m de altura. El suelo es un único estrato de arcilla de consistencia media[6] con ángulo de fricción interna ϕ , igual a cero y un valor de cohesión C , igual a 40 MPa, por lo que la resistencia al corte de este es una función de tal valor solamente. En la superficie del bloque de suelo considerado descansa una cimentación de concreto con dimensiones de 1 m de base por 0.3 m de altura. Esta última recibe y transmite una carga distribuida con valor esperado de 110 kN/m. El patrón de transmisión de la carga desde la cimentación hacia el suelo es de tal forma que los valores en los extremos son la mitad del valor existente en el centro de la cimentación. Las características generales se ilustran en la Figura 8.

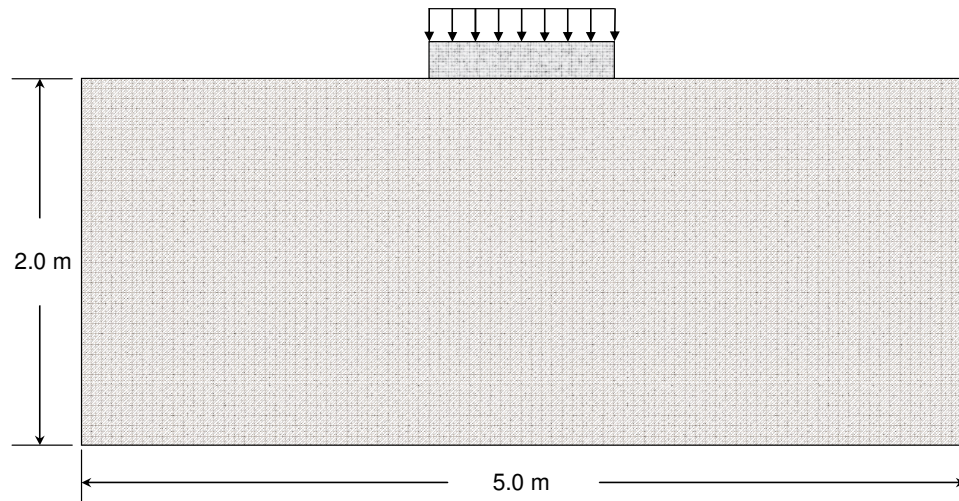


Figura 4-1. Modelo para el sistema suelo - cimentación analizado

Las dimensiones del sector de suelo fueron consideradas de la forma en que se muestran considerando los resultados de un análisis determinístico previo, en el cual se observó que los principales efectos de la acción de la carga se encontraban al interior del rango utilizado. Debe hacerse hincapié en la importancia de tal proceso, pues si se considera un cambio en las condiciones, por ejemplo de las dimensiones de la cimentación o el nivel de cargas actuantes esperadas la estimación mostrada en esta situación naturalmente es inaplicable.

4.3. Parámetros aleatorios del modelo

A partir de lo establecido en el capítulo 3, los parámetros que serán manejados como campos aleatorios son: el módulo de Young y la relación de Poisson mientras que la carga aplicada se modelará como una variable aleatoria, es decir sin componente de variabilidad espacial. Se llevarán a cabo dos tipos de simulaciones. En la primera de ellas se observará el comportamiento del sistema considerando sólo la variabilidad aportada por los parámetros modelados como campos aleatorios. En el segundo tipo, se considera el aporte de variabilidad asociado a la carga aplicada (modelada como variable aleatoria) en conjunto con los campos aleatorios del primer tipo de análisis. El objeto de esta metodología es el de validar los resultados que se encuentren luego de haber ejecutado análisis de confiabilidad sobre el sistema.

4.4. Discretización de campos aleatorios

La discretización de campos aleatorios del modelo se ejecutó por medio de la primera de las alternativas planteadas en el capítulo 2. El empleo del método del punto medio posee importantes ventajas para el manejo de la información que se origina con la discretización. Como se había mencionado, la distribución de probabilidad, la media y la desviación estándar se heredan directamente del campo con el que se encuentran relacionadas las variables aleatorias, quedando por definir sólo la forma en que se generará la matriz de correlación para el conjunto.

Para la discretización, el sistema analizado fue dividido en elementos de una partición estocástica (partición SFEM), donde cada elemento está relacionado con una variable aleatoria. Para esta investigación se consideraron cuatro particiones estocásticas las cuales difieren en el número de elementos que poseen. Se consideraron particiones SFEM con 4, 6, 9 y 12 elementos. Las Figuras 9-12 ilustran la forma de las citadas particiones:

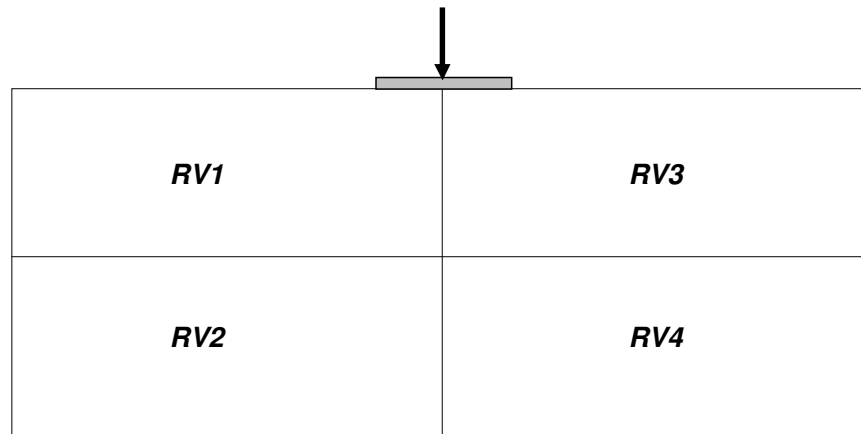


Figura 4-2. Partición estocástica de 4 variables aleatorias

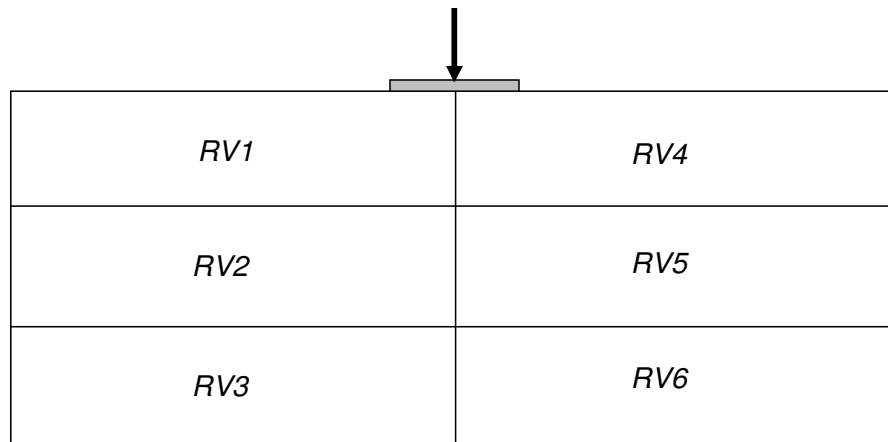


Figura 4-3. Partición estocástica de 6 variables aleatorias

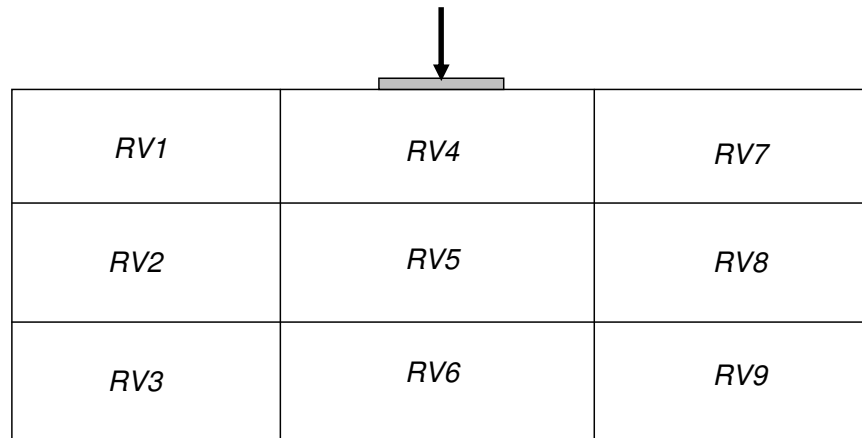


Figura 4-4. Partición estocástica de 9 variables aleatorias

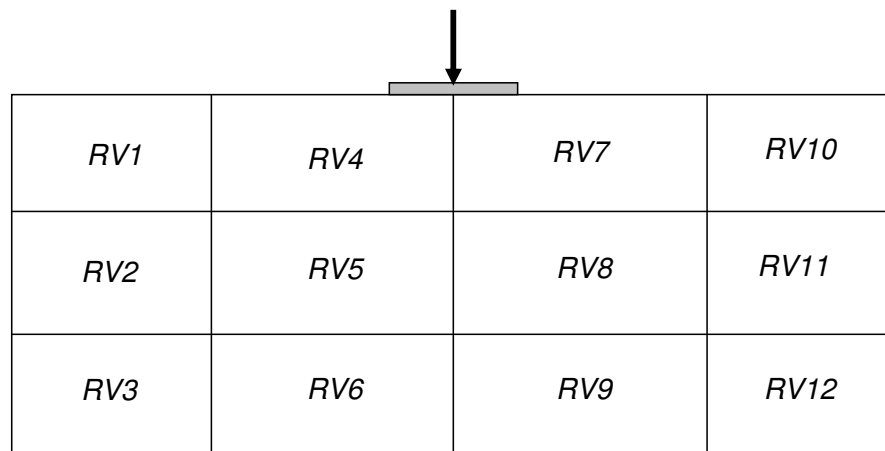


Figura 4-5. Partición estocástica de 12 variables aleatorias

Las variables aleatorias utilizadas para la discretización son representativas del sector geométrico al cual están asociadas, sin embargo para la estimación de la correlación entre ellas se supone que toda la variabilidad se concentra en el centroides de los elementos de la partición.

Para obtener los valores de la matriz de correlación se consideraron ciertas simplificaciones. La primera de ellas consistió en hacer que los dos campos tuviesen el mismo valor de escala de fluctuación. La sentencia anterior es realmente una simplificación debido a que, como se mencionado antes, la escala de fluctuación es un parámetro intrínseco, propio de cada campo. Sin embargo la influencia de esta suposición no es demasiado importante en el ámbito de esta investigación debido a que no se desea obtener un valor de confiabilidad específico para el sistema, sino más bien, describir como varia la confiabilidad conforme la escala de fluctuación cambia. La simplificación facilita el proceso de cálculo de índice de confiabilidad debido a que si esto no se hubiese hecho, se necesitarían mallas estocásticas distintas para cada parámetro, lo cual implicaría mucho más trabajo computacional así como nuevos valores de entrada para cada análisis realizado.

Una segunda simplificación, tal vez mucho más interesante que la primera consistió en la consideración de igualdad de la escala de fluctuación en las dos direcciones coordenadas manejadas. La expresión anterior es la forma en que se simula un comportamiento isotrópico, lo cual dadas las condiciones heterogéneas del suelo es una suposición poco cercana a la realidad. La igualación en los valores de θ_x y θ_y , tiene como objetivo la limitación de la complejidad del modelo. Valores distintos en las escalas de fluctuación vertical y horizontal conducirían a considerar una función de asignación de factores de correlación mucho más compleja debido a la variabilidad en ambas direcciones. Sin lugar a dudas, esta suposición limita la exactitud del modelo y por tanto debería ser considerada para futuros análisis relacionados con el tema planteado.

Planteadas las limitaciones asociadas con el análisis por documentar se procede ahora a exponer la parte final de la discretización: la obtención de la matriz de correlación.

Para llevar a cabo el cálculo de la matriz de correlación se considero apropiado el uso de una función exponencial negativa para la modelación del decaimiento de la correlación conforme la distancia entre variables aleatorias (centroides de los elementos de la partición estocástica) aumenta. La función utilizada se presenta en la Figura 13.

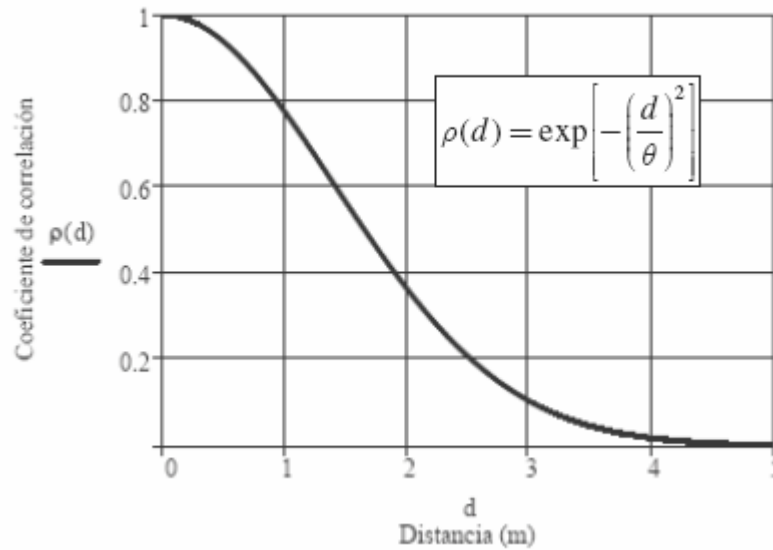


Figura 4-6. Función de estimación de coeficientes de correlación

Debe notarse que la función posee como núcleo, la relación entre la distancia y la escala de fluctuación, lo cual es comprensible a la luz de la definición de la escala como parámetro índice de la correlación al interior de todo campo. Para cumplir uno de los objetivos de la investigación se utilizaron tres valores de escala de fluctuación: 0.5 m, 1.0 m y 2.0 m.

Con lo anterior se completa el proceso de discretización. En la tabla 1 se presentan las características de los parámetros aleatorios utilizados.

Tabla 4-1. Valores característicos de los parámetros aleatorios considerados

| Variable | Media | Desviación estándar | Distribución de probabilidad |
|----------|-------|---------------------|------------------------------|
| E (MPa) | 100 | 25 | lognormal |
| ν | 0.3 | 0.06 | lognormal |
| W (kN/m) | 110 | 22 | lognormal |

A manera de ilustración, en las tablas 2-5 se muestran las matrices de correlación para cada partición estocástica cuando el valor de θ es de 2 m.

Tabla 4-2. Matriz de factores de correlación para malla SFEM de 4 variables

| | | | |
|-------|-------|-------|-------|
| 1.000 | 0.779 | 0.210 | 0.163 |
| 0.779 | 1.000 | 0.163 | 0.210 |
| 0.210 | 0.163 | 1.000 | 0.779 |
| 0.163 | 0.210 | 0.779 | 1.000 |

Tabla 4-3. Matriz de factores de correlación para malla SFEM de 6 variables

| | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1.000 | 0.885 | 0.613 | 0.210 | 0.185 | 0.128 |
| 0.885 | 1.000 | 0.885 | 0.185 | 0.210 | 0.185 |
| 0.613 | 0.885 | 1.000 | 0.128 | 0.185 | 0.210 |
| 0.210 | 0.185 | 0.128 | 1.000 | 0.885 | 0.613 |
| 0.185 | 0.210 | 0.185 | 0.885 | 1.000 | 0.885 |
| 0.128 | 0.185 | 0.210 | 0.613 | 0.885 | 1.000 |

Tabla 4-4. Matriz de factores de correlación para malla SFEM de 9 variables

| | | | | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1.000 | 0.885 | 0.613 | 0.527 | 0.466 | 0.323 | 0.077 | 0.068 | 0.047 |
| 0.885 | 1.000 | 0.885 | 0.466 | 0.527 | 0.466 | 0.068 | 0.077 | 0.068 |
| 0.613 | 0.885 | 1.000 | 0.323 | 0.466 | 0.527 | 0.047 | 0.068 | 0.077 |
| 0.527 | 0.466 | 0.323 | 1.000 | 0.885 | 0.613 | 0.527 | 0.466 | 0.323 |
| 0.466 | 0.527 | 0.466 | 0.885 | 1.000 | 0.885 | 0.466 | 0.527 | 0.466 |
| 0.323 | 0.466 | 0.527 | 0.613 | 0.885 | 1.000 | 0.323 | 0.466 | 0.527 |
| 0.077 | 0.068 | 0.047 | 0.527 | 0.466 | 0.323 | 1.000 | 0.885 | 0.613 |
| 0.068 | 0.077 | 0.068 | 0.466 | 0.527 | 0.466 | 0.885 | 1.000 | 0.885 |
| 0.047 | 0.068 | 0.077 | 0.323 | 0.466 | 0.527 | 0.613 | 0.885 | 1.000 |

Tabla 4-5. Matriz de factores de correlación para malla SFEM de 12 variables

| | | | | | | | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1.000 | 0.885 | 0.613 | 0.655 | 0.580 | 0.402 | 0.237 | 0.210 | 0.145 | 0.039 | 0.035 | 0.024 |
| 0.885 | 1.000 | 0.885 | 0.580 | 0.655 | 0.580 | 0.210 | 0.237 | 0.210 | 0.035 | 0.039 | 0.035 |
| 0.613 | 0.885 | 1.000 | 0.402 | 0.580 | 0.655 | 0.145 | 0.210 | 0.237 | 0.024 | 0.035 | 0.039 |
| 0.655 | 0.580 | 0.402 | 1.000 | 0.885 | 0.613 | 0.739 | 0.654 | 0.453 | 0.266 | 0.236 | 0.163 |
| 0.580 | 0.655 | 0.580 | 0.885 | 1.000 | 0.885 | 0.654 | 0.739 | 0.654 | 0.236 | 0.266 | 0.236 |
| 0.402 | 0.580 | 0.655 | 0.613 | 0.885 | 1.000 | 0.453 | 0.654 | 0.739 | 0.163 | 0.236 | 0.266 |
| 0.237 | 0.210 | 0.145 | 0.739 | 0.654 | 0.453 | 1.000 | 0.885 | 0.613 | 0.698 | 0.617 | 0.427 |
| 0.210 | 0.237 | 0.210 | 0.654 | 0.739 | 0.654 | 0.885 | 1.000 | 0.885 | 0.617 | 0.698 | 0.617 |
| 0.145 | 0.210 | 0.237 | 0.453 | 0.654 | 0.739 | 0.613 | 0.885 | 1.000 | 0.427 | 0.617 | 0.698 |
| 0.039 | 0.035 | 0.024 | 0.266 | 0.236 | 0.163 | 0.698 | 0.617 | 0.427 | 1.000 | 0.885 | 0.613 |
| 0.035 | 0.039 | 0.035 | 0.236 | 0.266 | 0.236 | 0.617 | 0.698 | 0.617 | 0.885 | 1.000 | 0.885 |
| 0.024 | 0.035 | 0.039 | 0.163 | 0.236 | 0.266 | 0.427 | 0.617 | 0.698 | 0.613 | 0.885 | 1.000 |

En este punto debería resultar obvio que el tamaño verdadero de las matrices de correlación es al menos el doble del mostrado pues para llevar a cabo la estimación de la confiabilidad del sistema es necesario manejar una única matriz en la cual estén relacionados todos los parámetros manejados. Dado que hay dos campos aleatorios el tamaño debe ser el doble, por otra parte dado que no se considera correlación explícita entre los campos los elementos asociados a tal condición serán cero. Por último, cuando se maneja la carga como una variable aleatoria, debe añadirse una fila y una columna más a la matriz de correlación.

4.5. Implementación del procedimiento SFEM

En el capítulo anterior se describieron cada una de las etapas del proceso SFEM, el cual se dijo, está basado en FORM. Lo particular del proceso SFEM está en el manejo de sistemas intrincados por medio de elementos finitos estocásticos así como el cálculo de derivadas parciales cuando están involucradas funciones de estado límite implícitas. En el caso del sistema suelo – cimentación manejado, la función de estado límite está basada en la comparación directa por medio de una diferencia de la resistencia y la sollicitación actuante presentes en un elemento finito particular de la malla determinística escogido como representativo del estado del sistema. El proceso iterativo de estimación de un índice de confiabilidad por medio de SFEM así como el método de los elementos finitos para la malla determinística se llevó a cabo por medio de aplicaciones desarrolladas por el autor trabajando sobre la aplicación Compaq Visual Fortran[®], el cual opera por medio de código escrito en Fortran 90. El código y las librerías desarrolladas para el problema manejado en esta investigación, es descrito de forma detallada en el Anexo 1. La mayor parte del manejo computacional desarrollado en esta investigación estuvo basado en Smith & Griffiths [5].

Para manejar la interacción de la información obtenida por la discretización de los campos aleatorios con el proceso de estimación de la confiabilidad se tuvieron que abordar ciertas situaciones de interés:

4.5.1. Función de estado límite

La función de estado límite utilizada fue:

$$G(R, S) = G(\tau_{ult}, \tau_{act}) = \tau_{ult} - \tau_{act} \quad \text{Ecuación 4-1}$$

Dado que el valor de τ_{ult} se ha considerado como un valor determinístico ($C = 40$ MPa), la aleatoriedad en la función de estado límite está concentrada en el esfuerzo cortante actuante.

La función de estado límite considerada es una simplificación del criterio de falla de Mohr – Coulomb, en el cual se ha considerado que no existe aporte a la resistencia por el efecto del esfuerzo normal actuante en conjunción con el valor del ángulo de fricción interna. Lo expresado es una limitación de este modelo y debería considerarse como un elemento por introducir para investigaciones futuras.

4.5.2. Obtención de respuesta del sistema

La obtención de respuesta en términos de esfuerzo cortante para el sistema analizado, considerando el efecto de las particiones estocásticas constituye uno de los ejes más importantes de la operación del análisis SFEM.

En primer lugar el sistema debe ser dividido en una malla de elementos finitos determinísticos de la forma usual, esto es como se haría para analizar una estructura o sistema cualquiera. La malla determinística para este modelo se constituyó por medio de 250 elementos del tipo C4 (cuadriláteros de 4 nodos), cuadrados de 0.2 m de longitud. La malla se restringió en las zonas laterales con apoyos de primer orden (restricción dirección x), mientras que en la base del modelo, se utilizaron apoyos de segundo orden (restricciones en direcciones x e y). La representación gráfica del modelo determinístico puede observarse en la Figura 14.

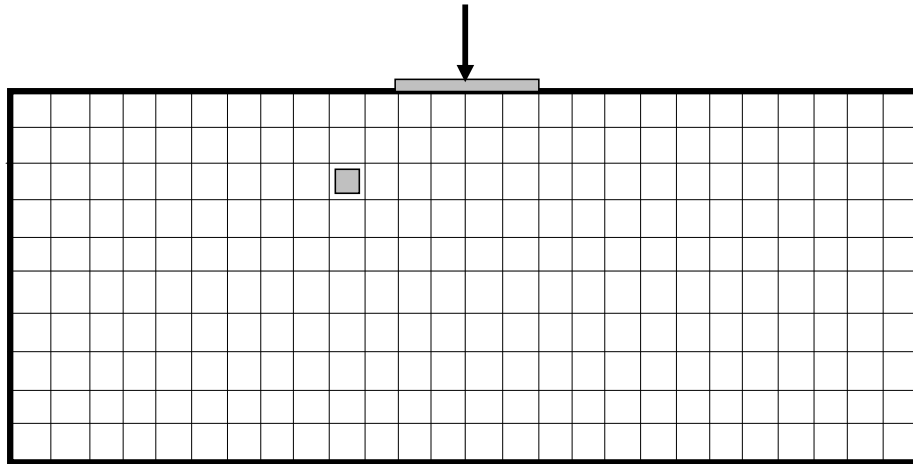


Figura 4-7. Partición o malla determinística empleada.

El elemento sombreado en la Figura 14 es la locación de control sobre la que se evalúa la función de estado límite. La obtención del elemento representativo se llevo a cabo por medio de un estudio preliminar con base a las características del sistema así como el nivel esperado de carga. Se observó que en las regiones cercanas al punto de aplicación la relación entre esfuerzo normal y esfuerzo cortante eran lo bastante bajas como para ser consideradas como locación de evaluación de la función de desempeño. De esta manera se concluyó que el elemento 84, ubicado a 0.8 m en la dirección X y 0.6 m en la dirección Y, considerados desde el centro del modelo, debía ser el elemento de control.

Para llevar a cabo el cálculo de esfuerzo cortante actuante es necesario conocer los valores de la matriz del material, los cuales para un análisis lineal elástico como el desarrollado están en función del módulo de Young y la relación de Poisson, parámetros que han sido modelados como campos aleatorios, por lo que la asignación de propiedades a los elementos finitos determinísticos depende de la forma en que los parámetros estocásticos han sido discretizados. Es en este punto cuando las mallas FEM (malla determinística usual) y SFEM interactúan de forma íntima. La Figura 15 muestra el caso de interacción entre la malla SFEM 1 (cuatro variables aleatorias empleadas para la descomposición) y la malla determinística de 250 elementos.

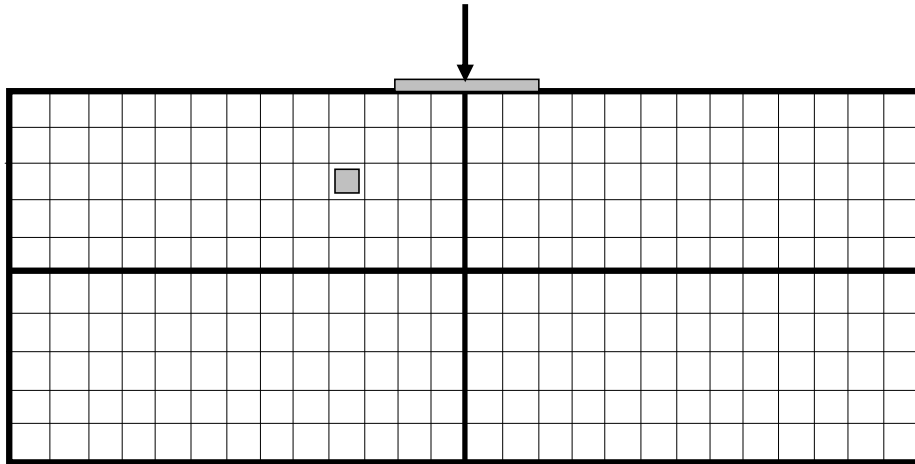


Figura 4-8. Interacción entre malla SFEM de cuatro variables aleatorias y partición determinística

En la Figura 15, la variable aleatoria 1 está asociada con el elemento finito estocástico ubicado en la esquina superior izquierda cuyas dimensiones son de 2.6 m de base por 1.0 m de altura. Las propiedades de esta variable aleatoria, específicamente el valor esperado son heredadas por los elementos finitos de la partición determinística que se encuentran en la zona del sistema cubierta por el elemento finito estocástico mencionado. El proceso sigue la misma lógica para las otras variables aleatorias así como para otras mallas con un mayor número de ellas. De esta forma los elementos finitos determinísticos obtienen las propiedades necesarias para llevar a cabo los procesos de integración y las operaciones matriciales necesarias para calcular los desplazamientos y en término final los esfuerzos necesarios para la evaluación de la función de estado límite. Debe notarse que los valores esperados y demás propiedades aleatorias no son invariantes, sino que cambian en cada ciclo hacia la convergencia del proceso SFEM, por lo que la matriz de rigidez y la respuesta del sistema sufren cambios de forma constante (gasto de recursos computacionales).

Las relaciones entre las otras mallas estocásticas y la partición determinística se muestra en las Figuras 16-19.

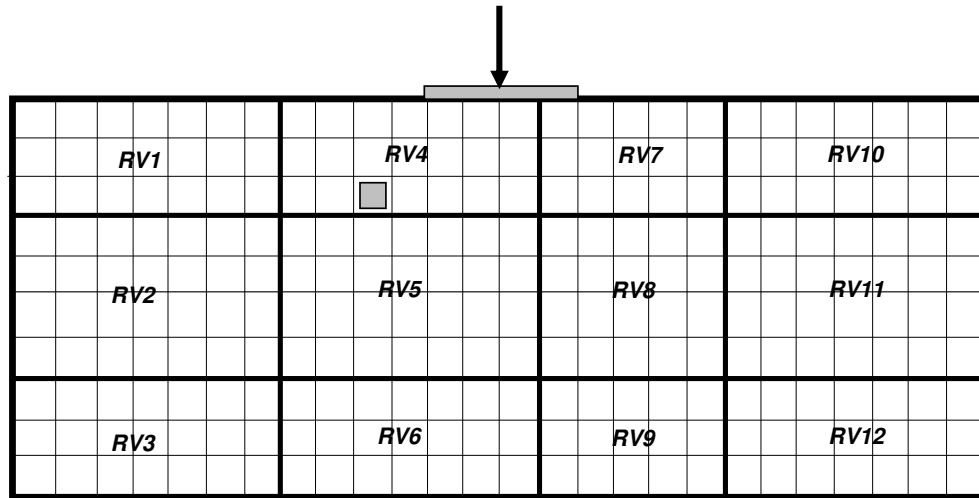


Figura 4-11. Interacción entre malla estocástica de 12 variables aleatorias y partición determinística

4.5.3. Proceso de obtención de derivadas parciales

Uno de los elementos que a primera vista puede considerarse problemático, en el ámbito del desarrollo de un proceso como SFEM es la obtención de las derivadas parciales. El hecho de que la función de desempeño sea implícita genera dudas importantes acerca de este proceso. Sin embargo a partir de los conceptos teóricos expuestos en el capítulo 2, se encuentra que el procedimiento tiene diversas formas de ser implementado. Para esta investigación se utilizó el primero de los métodos planteados. El método de las diferencias finitas es una alternativa confiable, que se apoya en un concepto universal como es la definición de la derivada como un límite conforme el tamaño de la perturbación se torna infinitesimal.

El uso de este método debe basarse en la forma como esta definida la función de estado límite. En este caso la función esta compuesta por componentes directamente asociados de forma unívoca con la resistencia y la sollicitación en el sistema. En el caso de la resistencia, esta se expresa por medio del esfuerzo cortante último, el cual es el valor de la cohesión de la arcilla (se ha despreciado el efecto del ángulo de fricción interna) mientras que la sollicitación es el valor del esfuerzo cortante actuante, el cual es el valor índice obtenido a partir de la respuesta del sistema. Al analizar los dos componentes se tiene que sólo comporta incertidumbre el componente de la sollicitación puesto que la cohesión del suelo se ha asumido de valor constante ($C = 40$ MPa). Así la derivada de la función de estado límite con respecto a los parámetros de entrada, se convierte en

la derivada del esfuerzo cortante actuante con respecto a las variables aleatorias en que se han descompuesto los parámetros del suelo modelados como campos y la variable aleatoria asociada a la carga en la situación que tal variabilidad sea considerada.

La forma en que el cálculo de derivadas parciales se llevó a cabo hace parte del algoritmo documentado en el Anexo 1.

4.6. Resumen del capítulo

En este capítulo se presentaron las características cuantitativas del sistema suelo – cimentación sobre el cual se llevaron a cabo estudios de la variación de la confiabilidad conforme se variaban el número de variables utilizadas para la discretización de campos aleatorios o la magnitud de la escala de fluctuación. De igual forma se mostraron las particiones estocásticas utilizadas y la forma en que estas interactúan con la malla de elementos finitos determinísticos de 250 componentes, la cual conforma la capa base para la obtención de la respuesta del modelo.

Finalmente se explico el proceso para obtener las derivadas parciales de la función de estado límite necesarias para el cálculo del índice de confiabilidad. Los algoritmos desarrollados en Fortran 90 se muestran en el Anexo 1 de este documento.

4.7. Conclusiones

1. Se presento el modelo del sistema suelo – cimentación empleado para los fines de esta investigación. Tal modelo está constituido por una cimentación superficial de 1m de ancho por 0.3 m de alto y un sector bidimensional de suelo de 5.0 m de base por 2. 0 m de altura. El modelo está restringido en la dirección horizontal en las zonas laterales y en los grados de libertad traslacionales en la base del sector del suelo analizado.
2. Se describieron los pasos ejecutados para la discretización del módulo de Young y la relación de Poisson, los dos campos aleatorios manejados en esta investigación, mostrando las mallas estocásticas, los valores de escala

de fluctuación empleados y las matrices de correlación entre las variables empleadas.

3. Al mostrar la forma en que se implementó el proceso SFEM se identificaron los principales problemas que se tuvieron que resolver en el momento de la creación del aplicativo empleado para ejecutar los análisis de confiabilidad necesarios para cumplir los objetivos del trabajo de investigación.

5. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Este capítulo tiene como fines los siguientes puntos:

1. Mostrar los resultados encontrados en términos de confiabilidad de la modelación de un sistema suelo - cimentación por medio de campos aleatorios y SFEM
2. Identificar tendencias en relación con la variación del índice de confiabilidad respecto a la escala de fluctuación y al número de variables aleatorias utilizadas para la discretización de campos.

5.1. Resultados

Los resultados mostrados a continuación son el producto de los análisis de confiabilidad ejecutados por medio de SFEM, considerando las componentes de variabilidad espacial y muestral de los dos campos aleatorios manejados así como el aporte de la aleatoriedad asociada a la carga aplicada al conjunto estudiado.

Los resultados encontrados se resumen en las Figuras 19-20. La denominación de las mallas se ha hecho de tal manera que la malla 1 (m1) corresponde a la partición SFEM de cuatro variables, la malla 2 (m2) a la partición de 6 variables y de la misma forma para las mallas subsiguientes.

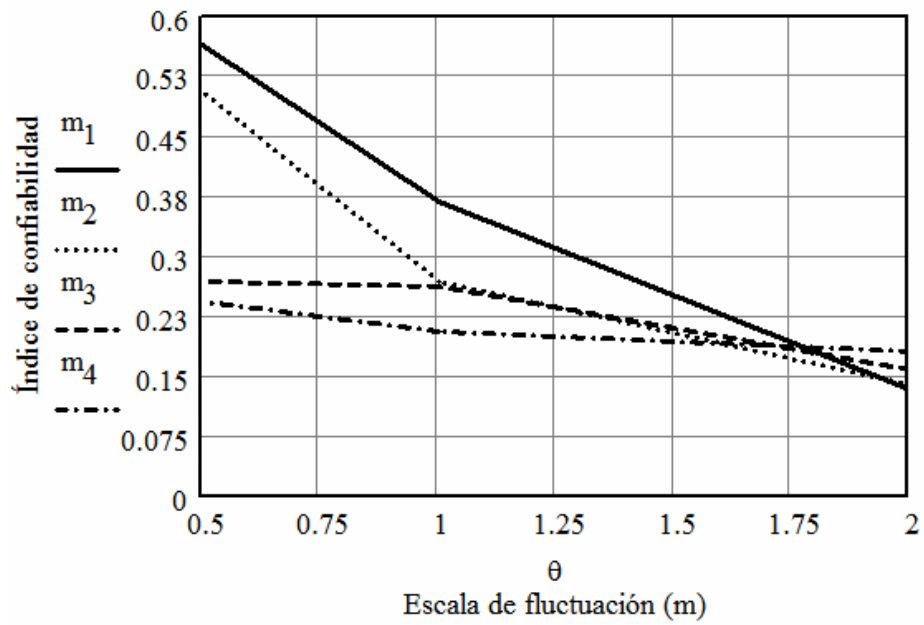


Figura 5-1. Gráfica de Índice de confiabilidad vs. Escala de fluctuación. E y ν modelados como campos aleatorios, carga aplicada determinística

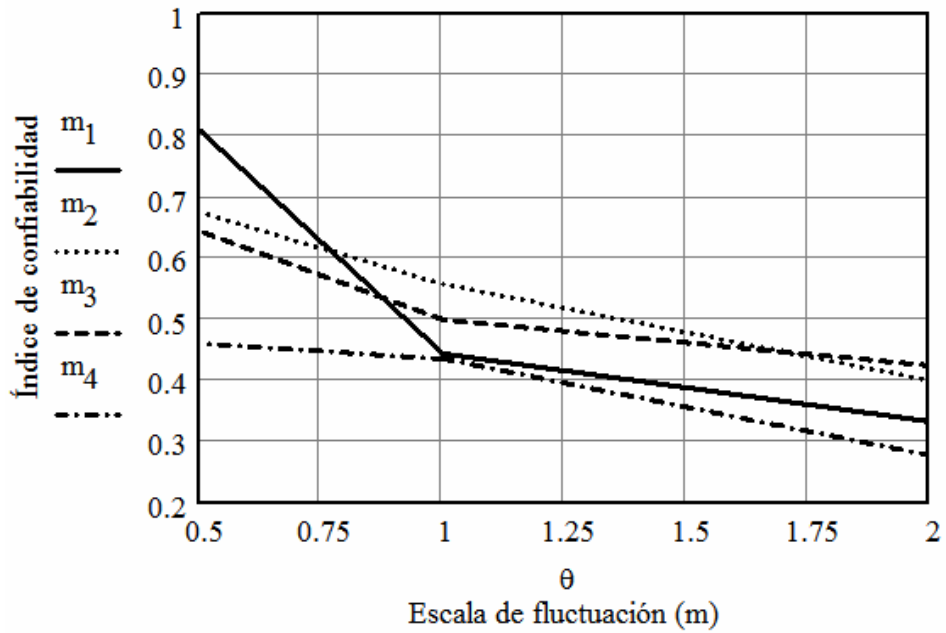


Figura 5-2. Gráfica de Índice de confiabilidad vs. Escala de fluctuación. E y ν modelados como campos aleatorios, carga aplicada como variable aleatoria

5.2. Discusión

En las Figuras 19-20, se muestran los resultados encontrados como curvas de comportamiento del índice de confiabilidad vs. la escala de fluctuación. De igual forma en cada gráfica están expresados los resultados para cada una de las mallas estocásticas mostradas en el capítulo 4. La primera de las gráficas (Figura 19) presenta resultados obtenidos bajo la condición de carga aplicada determinística. La Figura 20, presenta resultados con W , la carga modelada como una variable aleatoria.

Es posible observar que para ambas situaciones, el índice de confiabilidad exhibe una tendencia a disminuir conforme se aumenta el valor de la escala de fluctuación. En el caso de la Figura 19, para la malla 1 el valor del índice cambia desde un valor de 0.563 para una un valor de escala de 0.5 m, a 0.366 para un valor de 1 m y finalmente decae hasta 0.130 cuando la escala toma un valor de 2.0 m. Si bien la tendencia no es lineal, si se observa un continuo decaimiento en los valores de confiabilidad conforme el valor de θ aumenta. De igual forma la tendencia prevalece en los comportamientos para todas las mallas estocásticas sin importar si se considera o no W como una carga aleatoria.

La explicación de esta situación está relacionada con la definición misma de la escala. A medida que la escala aumenta en valor, las variables tienden a poseer valores de coeficientes de correlación mucho más grandes para un número mayor de ellas.

Otro aspecto notable es el comportamiento de las variables para valores importantes de la escala. Se observa una tendencia hacia un mismo valor de confiabilidad para todas las particiones SFEM, conforme la escala aumenta. En el caso de la Figura 19, donde el fenómeno es mucho más evidente, el índice de confiabilidad tiende hacia el valor 0.153. Para la Figura 20, la tendencia del índice de confiabilidad es hacia 0.357. La evidencia descrita puede ser explicada por el hecho que conforme la correlación, regida por el parámetro θ aumenta, el conjunto de variables aleatorias se comporta como una única variable aleatoria sin importar el tipo de partición SFEM al cual están asociadas, obteniéndose así el resultado en términos de confiabilidad que se podría esperar al considerar los parámetros no como campos (variabilidad espacial) sino sólo como variables aleatorias (variabilidad muestral).

Un fenómeno de interés radica en el hecho de que conforme el número de variables involucradas aumenta (mallas 3 y 4) la variación es notablemente menor, esto puede explicarse notando que en tales mallas existen más elementos en los

que los centroides se encuentran más cercanos entre sí, que en mallas menos densas (mallas 1 y 2), por lo que algunas de las variables asociadas se encuentran mucho más correlacionadas sin importar cuan grande sea el valor de la escala de fluctuación.

Un último punto de atención se tiene al observar la variación del valor del índice de confiabilidad entre las diversas mallas SFEM utilizadas. Parece existir una tendencia según la cual, la confiabilidad disminuye conforme se aumenta el número de variables involucradas, sin embargo, los comportamientos en valores mayores de la escala de fluctuación así como el comportamiento de las mallas 2-3 en la Figura 19 y 1 en la Figura 20 no permite garantizar la veracidad del fenómeno.

5.3. Resumen del capítulo

En este capítulo se expusieron los resultados obtenidos tras ejecutar diversos análisis de confiabilidad para el sistema suelo – cimentación modelado en esta investigación.

Los valores de confiabilidad obtenidos se expusieron de forma compacta a través de curvas de comportamiento del índice de confiabilidad vs. la escala de fluctuación para cada una de las mallas estocásticas consideradas así como para la situación en que la carga se consideraba de naturaleza estocástica.

La discusión realizada sobre los resultados mostró que el índice de confiabilidad tiende a disminuir conforme la escala de fluctuación aumenta, que los valores de confiabilidad tienden a la convergencia para valores grandes de θ y que no se puede concluir acerca del comportamiento de β respecto al número de variables aleatorias utilizadas para la discretización.

5.4. CONCLUSIONES

1. Se han mostrado los resultados obtenidos del análisis del sistema suelo – cimentación utilizando SFEM y la teoría de campos aleatorios.
2. Se encontró que el índice de confiabilidad tiende a disminuir conforme se incrementa el valor de la escala de fluctuación, de hecho, se pudo evidenciar que tal valor tiende a la convergencia conforme θ crece sin límite

6. CONCLUSIONES

1. Se ha mostrado el potencial de las técnicas descritas para la modelación de sistemas intrincados, con funciones de desempeño implícitas y parámetros con variación espacial o temporal. La alternativa de modelación de parámetros aleatorios como campos, con el objeto de considerar el componente de variabilidad espacial o temporal resulta del mayor interés y se vislumbra como una tendencia futura para análisis de confiabilidad en sistemas críticos para la sociedad
2. Se ha desarrollado una aplicación para la adecuada manipulación del método de los elementos finitos para el caso de los suelos encontrándose la marcada influencia de la correlación, expresado en términos de la escala de fluctuación, en la confiabilidad del sistema analizado. Lo anterior implica la necesidad por llevar a cabo estimaciones realistas del valor de la escala de fluctuación característico de los parámetros importantes para el desempeño del suelo frente a una situación de posible falla.
3. El análisis realizado abre puertas para realizar actividades más complejas, relacionadas con la modelación del comportamiento del suelo así como la optimización del diseño. Las distintas limitaciones marcadas a lo largo de este documento pueden ser empleadas como puntos de partida para llevar a cabo estudios mucho más cercanos a la realidad del sistema. Por otra parte esta investigación representa desde el punto de vista de la confiabilidad, el paso preliminar para llevar a cabo una optimización del diseño de sistemas del tipo estudiado

7. BIBLIOGRAFÍA

- [1] Fenton, G.A., & Griffiths, D.V. 2000. Bearing capacity of spatially random soils, *Proceedings of the Probabilistic Mechanics and Structural Reliability Conference*, Notre Dame, Indiana, Jul 24--26.
- [2] Haldar, A. & Mahadevan, S. 2000. *Reliability Assessment Using Stochastic Finite Element Analysis*. New York: John Wiley & Sons.
- [3] Jaksa et al. 2004. Horizontal Spatial Variability of Elastic Modulus in Sand from the Dilatometer. *Proceedings of the 9th Australia New Zealand Conference on Geomechanics*, Auckland, Vol. 1, pp. 289-294
- [4] Sánchez-Silva, M. 2004. *Introducción a la Confiabilidad y Evaluación de Riesgos Teoría y Aplicaciones en Ingeniería*. Bogotá: Ediciones Uniandes.
- [5] Smith, I.M. & Griffiths, D.V. 1998. *Programming the Finite Element Method*. New York: John Wiley & Sons.
- [6] Terzaghi, K. et al. 1996. *Soil Mechanics in Engineering Practice*. New York: John Wiley & Sons.
- [7] Vanmarcke, E.H. 1984. *Random Fields: Analysis and Synthesis*. Cambridge, Massachussets: The MIT Press.

8. ANEXOS

Anexo 1: Código fuente del aplicativo desarrollado para la implementación del método de los elementos finitos estocásticos

El código utilizado puede dividirse en dos partes. La primera de ellas es la programación de proceso SFEM como tal, con todas las etapas consignadas en el capítulo 2 de este documento (obtención respuesta, cálculo de derivadas parciales, entre otras). Una segunda porción es el método de los elementos finitos determinísticos. En esta última se emplearon funciones y subrutinas consignadas en librerías estáticas tomadas de Smith & Griffiths, 2000 [5]. La primera parte en su totalidad fue desarrollada por el autor. El primer programa se denomina lasfem y el código relacionado es el siguiente:

```

program lasfem
use sfem
implicit none
real, allocatable::pet(:,:), etp(:,:), upet(:,:), upetk(:,:), tov(:,:),
deltay(:,:), derivada(:,:
) &
,eigenrho(:,:),ms(:,:), diagsigma(:,:),ypet(:,:),mus(:,:),yupetk(:,:
real::gsfem01, gsfem02, beta01=5, beta02, deltab, deltag,
gsfem,edeltag=0.01,edeltab=0.01
integer:: i,j, error=29, kerror=1982, count=0, nvar
!1. Definición de los parámetros estocásticos que describen a las
!variables involucradas (ms) y de la matriz de correlación (rhomalla1).
!El número de ellas depende de la malla sfem
open (17,file='nvar.dat',status= 'old',action='read') !Numero de variables a
manejar
open (15,file='msc.dat',status= 'old',action='read') !Archivo de sigmas y mus!
open (16,file='eigenrho.dat',status= 'old',action='read') !Archivo de factores de
correlación
(eigen vectores)
open (14,file='resfem.res',status='replace',action='write') !Archivo de salida
"ciclo + beta +
gsfem"
open (13,file='resfem2.res',status='replace',action='write')!Archivo de salida
del final check
point
read(17,*)nvar
allocate (pet(nvar,1), etp(nvar,2), upet(nvar,1), upetk(nvar,1), tov(nvar,1),
deltay(nvar,2), der
ivada(nvar,1) &
,eigenrho(nvar,nvar), ms(nvar,2),
diagsigma(nvar,nvar),ypet(nvar,1),mus(nvar,1),yupetk(nvar,1)
)
do i=1,nvar
read(15,*)(ms(i,:)) !lectura de matriz (nvar,2) de mus y sigmas
read(16,*)(eigenrho(i,:)) !Lectura de matriz (nvar,nvar) de eigen vectores de
rhos
end do
pet(:,1) = ms(:,1) !Asignación de valores de partida a la matriz pet (nvar,
1)
call analisisfem(pet,nvar,gsfem) !Primera invocación del fem para iniciar FORM
gsfem01 = gsfem
diagsigma = 0.0
!2. Procedimiento FORM !Inicia el ciclo FORM
Do while (kerror /= error) !Control por centinela: kerror
conversionrf: do i = 1,nvar !transformación de Rackwitz-Fiessler

```

```

etp(i,1) = pet(i,1)*( 1 - log(pet(i,1)) + log(ms(i,1)) -0.5 * log(1 +
(ms(i,2)/ms(i,1))**
2))
etp(i,2) = pet(i,1)*sqrt(log(1 + (ms(i,2)/ms(i,1))**2))
mus(i,1) = etp(i,1)
diagsigma(i,i) = etp(i,2)
end do conversionrf !Las variables transformadas se guardan en etp(nvar,2
)
espaciotransf: do i = 1,nvar
upet(i,1) = (pet(i,1)-etp(i,1))/(etp(i,2)) !En upet se guarda el punto de diseño
X
1
end do espaciotransf
ypet = matmul(transpose(eigenrho),upet) !Estas son las Y: variables N
uncorrelated
tov = ypet !tov es un dummy para obtener derivadas
derivadas: do i = 1,nvar !Derivadas de las variables Y
ciclointerno: do j = 1,2
if (j == 1) then
tov(i,1) = ypet(i,1) + 0.000001 !Perturbación de Y
else
tov(i,1) = ypet(i,1) - 0.000001
end if
tov = (matmul(diagsigma,matmul(eigenrho,tov))) + mus !modificación en X
call analisisfem(tov,nvar,gsfem) !llamada a proceso fem
deltay(i,j) = gsfem
tov = ypet
end do ciclointerno
derivada(i,1) = ((deltay(i,1) - deltay(i,2))/(0.000002)) !dG/dY(i); son nvar Y's
end do derivadas
!yupetk es una matriz (nvar,1) que almacena los nuevos valores de las variables
!descorrelacionadas Y. A partir de tales valores y por medio de la transformación
! [X] = [diagsigma][T][Y] + [mus] se obtienen nuevos valores para el punto de
diseño
!en términos de las variables originales [X]
yupetk = ((sum(matmul(transpose(derivada),ypet)) - gsfem01) /
sum((matmul(transpose(derivada),d
erivada)))) * (derivada)
upetk = matmul(eigenrho,yupetk)
beta02 = sqrt(sum(matmul(transpose(upetk),upetk)))
deltab = abs(beta02 - beta01)
beta01 = beta02
! llevando las variables al espacio no transformado
! los nuevos valores se guardan en pet para reiniciar el ciclo si no converge
do i= 1,nvar
pet(i,1) = etp(i,1) + upetk(i,1) * etp(i,2)
end do
call analisisfem (pet,nvar,gsfem)
gsfem02 = gsfem
deltag = abs(gsfem02-gsfem01)
gsfem01 = gsfem02
count = count + 1
write(14, '(i5,2e12.4)'), count,beta01,gsfem01
If ((deltag<=edeltag).AND.(deltab<=edeltab)) then
error = 1982 !verificación con un centinela entero
write(13, '(1e12.4)'), pet
call BEEPQQ(4000, 1500)
end if
End Do
2
end program lasfem

```

La segunda parte del aplicativo se constituye por la aplicación para el cálculo de respuesta determinística. Esta parte hace las veces de subrutina y es constantemente llamada por la primera aplicación especialmente para el cálculo de las derivadas parciales en el procedimiento SFEM. El nombre de la subrutina es `sfem` y su código fuente se muestra a continuación:

```

module sfem
contains
!----rutina de calculo fem-----!
subroutine analisisfem(tev,nvar,gsfem)
!use new_library ; use geometry_lib ; use vlib
implicit none
real,intent(in)::tev(:, :)
real,intent(out)::gsfem
integer,intent(in)::nvar
!-----
! programa de deformación plana de un sólido elástico usando elementos C4
! numerados en la dirección Y.Las matrices km y B son obtenidas de forma
! analítica
!-----
integer::nels,nye,neq,nn,nr,nip,nodof=2,nod=4,nst=3,ndof,loaded_nodes, &
i,k,iel,ndim=2,elemtau,gptau,snels,s,t,c
real:: det,aa,bb,mtau,e,v ; character(len=15) :: element='cuadrilateral'
!-----Declaración de arreglos dinámicos-----
real , allocatable :: kv(:,),loads(:,),points(:,),dee(:,),coord(:,), &
jac(:,),der(:,),deriv(:,),weights(:,) &
bee(:,),km(:,),eld(:,),sigma(:,),g_coord(:,)
integer, allocatable :: nf(:,),g(:,),num(:,),g_num(:,),g_g(:,),kdiag(:)
integer :: malla(250,2)
!-----Entrada e inicialización-----
open (10,file='psfem.dat',status='old',action='read')
open (11,file='malla.dat',status='old',action='read')
read (10,*) nels,nye,nn,nip,aa,bb,e,v
ndof=nod*nodof
allocate (nf(nodof,nn),points(nip,ndim),g(ndof),g_coord(ndim,nn), &
dee(nst,nst),coord(nod,ndim),jac(ndim,ndim),g_g(ndof,nels), &
weights(nip),der(ndim,nod),deriv(ndim,nod),bee(nst,ndof), &
km(ndof,ndof),eld(ndof),sigma(nst),num(nod),g_num(nod,nels))
nf=1; read(10,*) nr ; if(nr>0)read(10,*)(k,nf(:,k),i=1,nr)
do i=1,250
read(11,*)(malla(i,:))
end do
call formnf(nf); neq=maxval(nf) ; allocate (kdiag(neq))
call sample(element,points,weights)
!----- Ciclo elemental para determinar la geometría global y la kdiag -----
kdiag=0
elements_1 : do iel =1,nels
call geometry_4qy(iel,nye,aa,bb,coord,num)
call num_to_g( num , nf, g); g_num(:,iel)=num
g_coord(:,num)=transpose(coord)
g_g(:,iel)=g ; call fkdiag(kdiag,g)
end do elements_1
kdiag(1)=1; do i=2,neq; kdiag(i)=kdiag(i)+kdiag(i-1); end do
allocate(kv(kdiag(neq)),loads(0:neq)); kv=0.0
1
!-----Integración y ensamblaje de rigideces elementales-----
elements_2: do iel = 1 , nels
ident: do s = 1, nels
if (iel == malla(s,1)) then
t = malla (s,2)
exit ident

```

```

end if
end do ident
num= g_num(:,iel); coord =transpose(g_coord(:,num));g=g_g(:,iel)
call analy4(km,coord,tev(t,1),tev(t + 0.5*(nvar-1),1)) ; call fsparv
(kv,km,g,kdiag)
!He localizado un -1 en las expresiones anteriores debido a la inclusión
!de una nueva variable aleatoria (la carga) por lo que nvar será ahora un
!número impar
end do elements_2
loads=0.0
!read (10,*) loaded_nodes,(k,loads(nf(:,k))), i =1,loaded_nodes)
!Asignación de cargas al grado de libertad asociado
c = 172
do i=1,6
if ((i == 1).OR.(i==6)) then
loads(172 + 20*i) = -0.1*tev(nvar,1)
else
loads(172 + 20*i) = -0.2*tev(nvar,1)
end if
end do
!-----Solución de ecuaciones-----
call sparin(kv,kdiag) ;call spabac(kv,loads,kdiag)
write(12,'(a)') "Componentes X-Despl Y-Despl"
do k=1,nn
write(12,'(i5,a,2e12.4)') k," ",loads(nf(:,k));
end do
write(12,'(a)'), " "
!-----Recuperación de esfuerzos en el PG y elemento de control-----
-----
num = g_num(:,83); coord =transpose( g_coord(:,num))
g = g_g(:,83) ; eld=loads(g)
write(12,'(a)'), " Esfuerzos en el nodo de control "
write(12,'(i10)'),83
ident2: do s = 1, nels
if (83 == malla(s,1)) then
t = malla (s,2)
exit ident2
end if
end do ident2
call bee4(coord,points,1,det,bee)
call deemat(dee,tev(t,1), tev(t + 0.5*(nvar-1),1))
sigma = matmul (dee,matmul(bee,eld))
write(12,'(i5)'),1
write(12,'(3e12.4)'),sigma
gsfem = 40.0 - abs(sigma(3))
!el valor de cohesión es típico de una arcilla rígida según Terzaghi, Peck &
Mesri
!25° fue el valor empleado para el ángulo de fricción interna
!se utiliza el valor de cortante producido por el criterio de falla de Mohr -
Coulomb
close(10,status='keep')
close(11,status='keep')
2
close(12,status='keep')
return
end subroutine analisisfem
end module sfem

```