UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
FACULTAD ECONOMIA
PROGRAMA DE ECONOMÍA PARA GRADUADOS
PEG.

CICLOS ECONÓMICOS REALES, UNA NUEVA APLICACIÓN AL CASO COLOMBIANO.

JOSÉ REYES CASTAÑEDA GONZÁLEZ
CODIGO 199717063

BOGOTÁ, DICIEMBRE DE 2005

ÍNDICE

	Página
1.METODOLOGÍA	4
2 EL MODELO	6
3. EQUILIBRIO.	9
4. ESTADO ESTACIONARIO	11
5 LINEARIZACIÓN	12
6. SOLUCIÓN NUMÉRICA	14
9 RESULTADOS DE LA ESTIMACIÓN Y PRUEBAS DE HIPÓTESIS	24
10 CONCLUSIÓN	28

INTRODUCCIÓN

La aproximación de los ciclos económicos reales[1](real business cycle RBC) a las fluctuaciones económicas, originada en el trabajo pionero de Finn Kydalnd y Edward Prescott (1982), John Long y Charles Plosser (1983); presenta una fundamentación consistente de la teoría macroeconómica en la microeconomía. La explicación soporta su análisis en las elecciones intertemporales de los agentes económicos, que deciden sobre aspectos tales como consumo presente frente al consumo futuro, trabajo presente frente al trabajo futuro.

A diferencia del enfoque keynesiano, esta teoría propone que los ciclos son una respuesta eficiente a variaciones exógenas y no representan una falla en los mecanismos del mercado. En el modelo básico de los ciclos reales, las perturbaciones del producto originadas en shocks aleatorios a la tecnología, motivan el ajuste del ahorro y la inversión en los individuos, suaviza el consumo y ajusta el empleo en respuesta a cambios en los precios relativos del ocio y la productividad laboral.

Si bien no existe un consenso sobre las causas que explican el desplazamiento cíclico de las variables macroeconómicas, revisiones realizadas en los años noventa por Bennet McCallum (1989) y Plosser (1989), ilustran cómo a pesar de un número importante de temas no resueltos, los estudios realizados en el contexto RBC se acercan con éxito a

[1]Los ciclos económicos son una forma de fluctuación que se encuentra en la actividad económica agregada de las naciones que organizan su trabajo principalmente en empresas de negocios; un ciclo consiste en expansiones que ocurren más o menos al mismo tiempo en múltiples actividades económicas, seguidas en forma similar, por recesiones del mismo modo generales, estas contracciones y recuperaciones, se funden en la fase de expansión del siguiente ciclo; esta secuencia de ciclos describen desviaciones sincronizadas alrededor de la tendencia de la variable y se presentan en forma recurrente pero no periódica.

la explicación de las regularidades empíricas que caracterizan las fluctuaciones económicas; reconociendo de la misma manera, la capacidad predictiva que ha demostrado su aplicación en los países industrializados.

En Colombia, las publicaciones sobre este enfoque son relativamente escasas. Se reconocen, en particular, los trabajos realizados por Suescún (1997), Arango (1997), Hammann - Riascos (1998) y Llinas (2003). El trabajo de Suescún establece que los ciclos económicos colombianos están más asociados con los shocks de oferta que los términos de intercambio, como lo sugerían anteriores trabajos[2]. Consecuentemente, en el artículo de Hamann y Riascos los autores logran, mediante choques a la productividad total de factores, reproducir buena parte de las características empíricas de la economía colombiana. Por su parte, el trabajo de Llinas logra simular la economía colombiana sólo con choques al precio del petróleo, reproduciendo aproximadamente el 80% de la volatilidad del producto.

Los últimos estudios invitan a desarrollar nuevas investigaciones: mientras Llinas afirma que todavía falta mucho por explicar con respecto a la determinación del ciclo económico colombiano; Hamman y Riascos determinan que su modelo puede ser utilizado como punto de partida para otros artículos en Colombia. La continuación de los mismos sugiere la idea de analizar nuevas variables, estudiando el efecto que sobre el comportamiento del ciclo económico colombiano puedan tener otros agregados de interés como la oferta monetaria o el gasto público; no obstante, si en general los estudios realizados hasta el momento pueden tener limitaciones en relación a su capacidad de reproducir las regularidades

[2] Florez (1974), Díaz – Alejandro (1976), Cárdenas (1991), Ocampo (1989); explicaban el ciclo económico colombiano más determinado por las variaciones en los términos de intercambio y especialmente el precio del café.

empíricas de los ciclos económicos colombianos, se pueden sugerir métodos alternativos para estudiar el comportamiento de la economía en cuestión.

De aquí surge la necesidad de elaborar este trabajo, el cual se realiza con el objetivo de establecer, mediante una prueba de hipótesis, si los momentos generados por el modelo utilizado son consistentes con los momentos de los datos; o en otras palabras, establecer, bajo un criterio estadístico, hasta dónde la economía artificial usada para el estudio de las fluctuaciones económicas puede proporcionar una réplica adecuada de la realidad económica estudiada.

Para estos efectos se tomó como referente de análisis el denominado por King Plosser y Rebelo, Modelo Neoclásico Básico. A partir de este esquema teórico se incorporó la deuda externa del país para analizar los resultados y resolver el objetivo planteado.

La estructura que sigue el documento es la siguiente: el primer capítulo presenta la metodología, haciendo claridad sobre la variante empleada en este trabajo: para realizar la prueba de hipótesis se requiere estimar los parámetros mediante una técnica econométrica en lugar de realizar la calibración de los parámetros del modelo; Paso seguido se especifica el modelo utilizado, las condiciones de equilibrio y el estado estacionario; debido a que las condiciones de equilibrio del modelo son altamente no lineales, se procede a desarrollar una linearización de primer orden en torno al estado estacionario; posteriormente, se realiza la solución numérica del modelo, la estimación y las pruebas de hipótesis. Finalmente, en su última parte, el documento presenta las conclusiones.

Este documento realiza un “ejercicio negativo”, en el cual se observa que bajo la utilización de una estimación econométrica un modelo que parte de las definiciones y relaciones dadas por la literatura de los RBC, con una variante de deuda externa, no reproduce adecuadamente los momentos de los datos implicados en las variables utilizadas según la de prueba estadística realizada. Este aspecto se constituye en un marco de reflexión sobre la importancia de lograr estimaciones econométricas de los parámetros de la economía colombiana que sirvan como referentes de insumo en los modelos RBC.

1. METODOLOGÍA

El procedimiento para la realización de los estudios, en el marco de la literatura RBC, sugiere solucionar un problema de maximización de utilidad dinámico estocástico, en el cual, la solución conduce a las leyes de movimiento de las variables. La solución del modelo se define a partir del estado estacionario de la economía, en esta condición de equilibrio, el modelo es parametrizado y generalmente calibrado[3] para determinar el valor de los parámetros; shocks tecnológicos, de gasto público, de términos de intercambio o de oferta monetaria; se propagan en la economía y se desarrollan simulaciones del modelo para comparar las magnitudes de las volatilidades, autocorrelaciones y correlaciones cruzadas con las generadas por los datos; de esta forma, se compara la economía artificial con la economía real. La capacidad del modelo para replicar estas características empíricas de los ciclos económicos permitirá realizar ejercicios de impulso respuesta que examinan el comportamiento de las variables frente a choques generados en las variables exógenas.

[3] Esto corresponde a usar las condiciones primer orden del problema de maximización y evaluarlas en el estado estacionario.

En este estudio se sigue la metodología tradicional, con excepción de la calibración del modelo, la cual es remplazada por la estimación de los parámetros realizada por medio del método generalizado de momentos (Generalized Method of Moments GMM). Con los resultados de esta estimación se procede a dar solución del modelo y a determinar las leyes de movimiento del mismo; en este caso, las condiciones de equilibrio del problema de maximización son altamente no lineales, por lo que para su solución se requieren métodos numéricos. Siguiendo la metodología de King, Plosser y Rebelo, se realiza una linearización de las condiciones de eficiencia alrededor del estado estacionario, expresando las variables en términos de sus desviaciones porcentuales de estado estacionario; la solución del modelo es presentada por los autores mencionados y en este texto se presenta de manera más detallada. Sargent y Cooley explican este método de solución.

La estimación realizada por GMM permite definir un test estadístico, en el cual, bajo la hipótesis nula el modelo es capaz de reproducir los momentos de los datos. Este test estadístico no es desarrollado en los trabajos convencionales y representa una novedad para el caso colombiano.

La estimación y la realización de la prueba hipótesis realizada en este trabajo, representan una novedad para Colombia, debido a que en primera instancia, el valor de los parámetros de las ecuaciones que determinan la trayectoria intertemporal de las variables es por lo regular calibrado; de otra parte, el test que permite definir la validez del modelo es examinado bajo un criterio estadístico, en contraste con la comparación de los momentos que realiza el investigador.

En lo referente a la parte computacional, se emplearon los algoritmos de King, Plosser y Rebelo, haciendo las variaciones requeridas para el modelo desarrollado en este trabajo. La metodología realizada se basa en estos autores, por lo que el lector puede referirse a la bibliografía de este documento para un mejor entendimiento de los procedimientos realizados.

2 EL MODELO

En este estudio se modela una economía pequeña y abierta con deuda externa, que está sujeta a shocks exógenos generados en la productividad total de factores. Este esquema es una extensión al modelo neoclásico básico, caso indivisible, con deuda y tasa de interés externas. La siguiente presentación caracteriza el modelo mediante la explicación de las preferencias y el ambiente que enfrentan los agentes.

La justificación para definir este modelo se debe a las actuales condiciones de endeudamiento colombiano y la reciente experiencia de países emergentes como Argentina. De tal manera, es interesante examinar que consecuencias puede producir una perturbación en la deuda externa en la economía nacional, para cuyos efectos, este modelo puede proporcionar un importante punto de partida para considerar cómo se afectarían variables como el consumo, el ocio, el empleo y la inversión ante este tipo de eventos.

2.1 Las preferencias

En esta economía artificial existe un número grande de individuos, todos idénticos, con un horizonte de vida infinito, como es habitual en la literatura RBC. Prescindiendo de los problemas de heterogeneidad y distribución suponemos que los individuos pueden ser agregados en único agente representativo.

Existe un planificador central benevolente que representa este agente representativo. En cada momento del tiempo t, él maximiza el valor presente de la función de bienestar descontado por un parámetro beta (β) que representa la tasa subjetiva de descuento, asociada con una tasa de impaciencia intertemporal. Las preferencias están establecidas sobre sendas estocásticas de un solo bien de consumo (c) y el tiempo de ocio (1-n)[4]. El ocio es ponderado en la función de bienestar (parámetro gamma γ), las expectativas de los agentes (operador E) están determinadas con base en la información conocida hasta el momento t. Bajo estas especificaciones el problema secuencial que enfrenta el planeador social es:

$$\max \quad U = E_0 \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[\log(c_t) + \gamma (1 - n_t) \right] \right\}$$

2.2 El Ambiente

Las restricciones tecnológicas y económicas que enfrentan los agentes en esta economía son:

La tecnología

La tecnología agregada está representada por una función Cobb - Douglas, con rendimientos constantes a escala que satisface las propiedades neoclásicas estándar. El producto total esta sujeto a choques estocásticos y se describe como:

[4] n representa el trabajo, en este modelo se supone que el trabajo es indivisible como en Hansen, es decir que las fluctuaciones en el mercado de trabajo obedecen al margen extensivo, los agentes deciden trabajar una jornada laboral completa o no trabajan; con esto se indica que la entrada y salida de trabajadores es determinante en el ciclo laboral y no así las horas trabajadas o margen intensivo como en el modelo divisible.

$$y_t = A_t k_t^{\theta} n_t^{1-\theta}$$

Donde y_t producto, n_t trabajo, k_t capital, A_t corresponde a un parámetro de productividad multifactorial agregada, el proceso estocástico de esta variable viene dado por la siguiente relación:

$$A_{t+1} = \rho A_t + \varepsilon_{t+1}$$

Donde E_t es *i.i.d.* con media cero y varianza σ^2.

Las dotaciones

El trabajo n_t y el ocio (l_t) están normalizados, en cada período del tiempo t el planeador social no puede exceder el equivalente a una unidad de dotación.

$$l_t + n_t = 1$$

Ley de acumulación del capital.

La dinámica del capital está dada por la siguiente relación:

$$k_{t+1} = (1-\delta)k_t + i_t$$

Donde: k_t capital, delta δ es la tasa de depreciación del capital e i_t es la inversión.

Restricción de recursos

La restricción presupuestal de esta economía está dada por:

$$y_t + D_t = (1 + r^*)D_{t-1} + c_t + i_t + \frac{\phi}{2}(k_{t+1} - k_t)^2$$

Donde se usa una función de costos de ajustes en el acervo de capital para capturar la volatilidad presente en esta variable. El valor de la deuda externa (D_t) el valor de la tasa de interés mundial (r_t^*) de la misma, restringen la disponibilidad de recursos. El país es un tomador de precios de esta tasa de interés, por lo que este valor esta determinado exógenamente.

3 EQUILIBRIO.

El problema que enfrenta el planeador central es[5]:

$$\max \quad U = E_0 \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[\log(c_t) + \gamma(1 - n_t) \right] \right\}$$

Sujeto a:

$$D_t = (1 + r^*)D_{t-1} + c_t + i_t + \frac{\phi}{2}(k_{t+1} - k_t)^2 - y_t$$

$$l_t + n_t = 1$$

$$k_{t+1} = (1 - \delta)k_t + i_t$$

$$A_{t+1} = \rho A_t + \varepsilon_{t+1}$$

[5] Este modelo es presentado por "Grohé Stephanie -Uribe Martin y Schmitt" Closing Small open Economy Models. National Bureau of Economic Research, Working Paper 9270, octubre de 2002.

El Lagrangiano asociado con este problema de optimización es:

$$\ell = E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \left\{ \beta^t \left[\ln(c_t) + \gamma(1-n_t) \right] + \Lambda_t \left[A_t k_t^{\theta} n_t^{1-\theta} + D_t + (1-\delta)k_t - \frac{\phi}{2}(k_{t+1}-k_t)^2 - (1+r^*)D_{t-1} - c_t - k_{t+1} \right] \right\}$$

Con k_0 y D_0 dados

Condiciones de eficiencia.

La solución al problema del agente representativo satisface las siguientes condiciones necesarias para un óptimo[6].

$$c_t : \frac{\beta^t}{c_t} - \Lambda_t = 0$$

$$n_t : -\beta^t \gamma + \Lambda_t (1-\theta) A_t k_t^{\theta} n_t^{-\theta} = 0$$

$$k_{t+1} : \Lambda_t \left[-1 - \phi(k_{t+1} - k_t) \right] + E_t \Lambda_{t+1} \left[\theta A_{t+1} k_{t+1}^{\theta-1} n_{t+1}^{1-\theta} + (1-\delta) + \phi(k_{t+2} - k_{t+1}) \right] = 0$$

$$D_t : \Lambda_t - E_t \Lambda_{t+1} (1+r^*) = 0$$

$$\Lambda_t : A_t K_t^{\theta} n_t^{1-\theta} + D_t + (1-\delta)k_t - \frac{\phi}{2}(k_{t+1}-k_t)^2 - (1+r^*)D_{t-1} - c_t - k_{t+1} = 0$$

Condiciones de transversalidad:

$\lim_{t\to\infty} \Lambda_t D_t = 0;$

$\lim_{t\to\infty} \Lambda_t k_t = 0;$

[6] Donde se ha invocado el supuesto de expectativas racionales, en el sentido de establecer que en equilibrio la probabilidad subjetiva de los agentes coincide con la probabilidad implicada en el modelo. Por lo tanto, los agentes conocen el modelo y realizan previsiones perfectas del mismo.

Condiciones de Primer Orden:

Dividiendo las cinco ecuaciones primer orden por β_t se obtiene el siguiente resultado dónde $\lambda_t = \frac{\Lambda_t}{\beta^t}$:

$$\frac{1}{c_t} - \lambda_t = 0 \quad (1)$$

$$-\gamma + \lambda_t (1-\theta) A_t k_t^{\theta} n_t^{-\theta} = 0 \quad (2)$$

$$\lambda_t [-1 - \phi(k_{t+1} - k_t)] + \beta E_t \lambda_{t+1} \left[\theta A_{t+1} k_{t+1}^{\theta-1} n_{t+1}^{1-\theta} + (1-\delta) + \phi(k_{t+2} - k_{t+1})\right] = 0 \quad (3)$$

$$\lambda_t (1 - \psi(D_t - D)) - \beta E_t \lambda_{t+1} (1 + r^*) = 0 \quad (4)$$

$$A_t K_t^{\theta} n_t^{1-\theta} + D_t + (1-\delta) k_t - \frac{\phi}{2}(k_{t+1} - k_t)^2 - (1 + r^*) D_{t-1} - c_t - k_{t+1} = 0 \quad (5)$$

4. ESTADO ESTACIONARIO

Para hallar la solución del modelo se hace uso de la condición de estado estacionario, esta condición de equilibrio de largo plazo se define eliminando los subíndices del tiempo de las cinco anteriores ecuaciones.

$$\frac{1}{c} - \lambda = 0 \quad (6)$$

$$-\gamma + \lambda (1-\theta) A k^{\theta} n^{-\theta} = 0 \quad (7)$$

$$-\lambda + \beta \lambda \left[\theta A k^{\theta-1} n^{1-\theta} + (1-\delta)\right] = 0 \quad (8)$$

De esta ecuación se obtiene la siguiente igualdad, $\beta\left[\theta A k^{\theta-1} n^{1-\theta} + (1-\delta)\right] = 1$ que es utilizada para llegar a la siguiente expresión:

$$\lambda - \beta\lambda\left(1 + r^*\right) = 0 \quad (9)$$

La ecuación 5 de estado estacionario queda representada de la siguiente manera:

$$Ak^{\theta} n^{1-\theta} - \delta k - r^* D - c = 0 \quad (10)$$

5 LINEARIZACIÓN

El siguiente procedimiento consiste en realizar una aproximación de primer orden por la serie de Taylor de las condiciones de primer orden entorno o alrededor del estado estacionario definido anteriormente, diferenciando totalmente estas ecuaciones se obtiene:

$$c_t : -\frac{1}{c^2} dc_t - d\lambda_t = 0 \quad (11)$$

$$\begin{aligned} n_t &: \left(1-\theta\right) Ak^{\theta} n^{-\theta} d\lambda_t + \lambda \left(1-\theta\right) k^{\theta} n^{-\theta} dA_t \\ &+ \theta\lambda \left(1-\theta\right) Ak^{\theta-1} n^{-\theta} dk_t - \theta\left(1-\theta\right)\lambda\ Ak^{\theta} n^{-\theta-1} dn_t = 0 \quad (12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_{t+1} &: - d\lambda_t - \phi\lambda\ dk_{t+1} + \phi\lambda\ dk_t + E_t d\lambda_{t+1} + \\ &+ \beta\lambda\theta\ k^{\theta-1} n^{1-\theta} E_t dA_{t+1} + \beta\lambda\ \theta\left(\theta - 1\right) Ak^{\theta-2} n^{1-\theta} E_t dk_{t+1} \\ &+ \beta\lambda\ \theta\left(1 - \theta\right) Ak^{\theta-1} n^{-\theta} E_t dn_{t+1} + \beta\lambda\ \phi E_t \left(dk_{t+2} - dk_{t+1}\right) = 0 \quad (13) \end{aligned}$$

$$D_t : .d\lambda_t - \beta\left(1 + r^*\right) E_t d\lambda_{t+1} = 0 \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \lambda_t &: k^{\theta} n^{1-\theta} dA_t + \theta Ak^{\theta-1} n^{1-\theta} dk_t + \left(1 - \theta\right) Ak^{\theta} n^{-\theta} dnt + dD_t \\ &+ \left(1 - \delta\right) dk_t - \left(1 + r^*\right) dD_{t-1} - dc_t - dk_{t+1} = 0 \quad (15) \end{aligned}$$

A continuación, las variables se representan como desviaciones porcentuales de primer orden en torno a los valores de estado estacionario. Todas las variables quedan expresadas de la siguiente manera: $\hat{z}_t = \dfrac{dz_t}{z}$.

Por la condición de estado estacionario $c = \lambda^{-1}$, multiplicando esta expresión por la ecuación (11) se obtiene:

$$-\hat{c}_t - \hat{\lambda}_t = 0 \quad (16)$$

Por las condiciones de estado estacionario en (2) $\gamma = \lambda(1-\theta)\dfrac{y}{n}$, dividiendo esta expresión en la ecuación (12) se obtiene:

$$\hat{\lambda}_t + \hat{A}_t + \theta\hat{k}_t - \theta\hat{n}_t = 0 \quad (17)$$

Dividiendo 13 por lambda y factorizando

$$[-\phi k + \beta\theta(\theta-1)y/k]E_t\hat{k}_{t+1} - \phi k\hat{k}_t - \hat{\lambda}_t + E_t\hat{\lambda}_{t+1} + \beta\theta\frac{y}{k}E_t\hat{A}_{t+1}$$

$$+\beta\theta\frac{y}{k}E_t\hat{A}_{t+1} + \beta\theta(1-\theta)\frac{y}{k}E_t\hat{n}_{t+1} + \beta k\phi E_t\hat{p}_{t+1} = 0 \quad (18)$$

Donde

$\hat{p}_t = E_t\hat{k}_{t+1} - \hat{k}_{t+2}; \hat{p}_{t+1} = E_t\hat{k}_{t+2} - \hat{k}_{t+1}$

Dividiendo 14 por λ_t

$$\hat{\lambda}_t - \beta(1+r^*)E_t\hat{\lambda}_{t+1} = 0 \quad (19)$$

Reexpresando 15:

$$\hat{A}_t + \theta\hat{k}_t + (1-\theta)\hat{n}_t + \frac{D}{y}\hat{D}_t + (1-\delta)\frac{k}{y}\hat{k}_t - (1+r^*)\frac{D}{y}\hat{D}_{t-1} - \frac{c}{y}\hat{c}_t - \frac{k}{y}\hat{k}_{t+1} = 0$$

$$\hat{A}_{t+1}+(\theta-\delta\frac{k}{y})E_t\hat{k}_{t+1}+(1-\theta)\hat{n}_{t+1}+\frac{D}{y}E_t\hat{D}_{t+1}-(1+r^*)\frac{D}{y}\hat{D}_t-\frac{c}{y}E_t\hat{c}_{t+1}-\frac{k}{y}E_t\hat{p}_{t+1}=0 \quad (20)$$

$$E_t\hat{k}_{t+1}-\hat{k}_t-\hat{p}_t=0 \quad (21)$$

6. SOLUCIÓN NUMÉRICA

Para computar la solución del sistema se expresan las anteriores ecuaciones en forma matricial: las dos primeras ecuaciones representan las variables de control ($\hat{c}_t,\hat{n}_t$) en función de las variables de estado ($\hat{k}_t,\hat{\lambda}_t,\hat{D}_t,\hat{p}_t$) y la variable exógena $\hat{A}_t$:

$$\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & \theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{c}_t\\ \hat{n}_t\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ \theta & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\hat{k}_t\\ \hat{\lambda}_t\\ \hat{D}_t\\ \hat{p}_t\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}\hat{A}_t$$

Mcc Mcs Mce

Los subíndices que denominan cada matriz de coeficientes corresponden en la terminología King Plosser y Rebelo a la matriz control control (Mcc), control estado (Mcs) y control exógena; esta notación se extiende a las demás ecuaciones y es retomada en el anexo que presenta la solución computacional obtenida para este caso.

Las demás ecuaciones representan matricialmente las variables de estado ($\hat{k}_t,\hat{\lambda}_t,\hat{D}_t,\hat{p}_t$) en función de las variables de control ($\hat{c}_t,\hat{n}_t$) y la variable exógena $\hat{A}_t$, para en el tiempo *t* y *t+1*:

$$\begin{bmatrix} \beta\theta(\theta-1)\frac{y}{k}-\phi k & 0 & \beta k\phi & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\beta(1+r*) \\ \theta-\delta\frac{k}{y} & \frac{D}{y} & -\frac{k}{y} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} E_t \begin{pmatrix} \hat{k}_{t+1} \\ \hat{\lambda}_{t+1} \\ \hat{d}_{t+1} \\ \hat{p}_{t+1} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -\phi k & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -(1+r^*)\frac{D}{y} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \hat{k}_t \\ \hat{\lambda}_t \\ \hat{D}_t \\ \hat{p}_t \end{pmatrix} =$$

Mss ^{0} Mss ^{1}

$$\begin{pmatrix} 0 & -\beta\theta(1-\theta)\frac{y}{k} \\ 0 & 0 \\ \frac{c}{y} & -(1-\theta) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} E_t \begin{pmatrix} \hat{c}_{t+1} \\ \hat{n}_{t+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{c}_t \\ \hat{n}_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\beta\theta\frac{y}{k} \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} E_t \hat{A}_{t+1} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \hat{A}_t$$

Msc ^{0} Msc ^{1} Mse ^{0} Mse ^{1}

Donde Mss ^{0}, Mss ^{1}, Msc ^{0} Msc ^{1} Mse ^{0} Mse ^{1}, corresponden, en la notación King Plosser y Rebelo a los parámetros de las variables estado estado, estado control y estado exógeno en el tiempo t+1 y t, respectivamente.

Existen otras variables cuyo desplazamiento intertemporal se requiere conocer y no están incorporadas en el sistema anterior; ellas son el producto (y_t), la productividad promedio w_t y la inversión i_t. Expresadas en términos de desviaciones porcentuales de estado estacionario y organizadas en forma matricial se obtiene:

$$\hat{y}_t = \hat{A}_t + \theta\hat{k}_t + (1-\theta)\hat{n}_t$$

La productividad promedio viene dada por la siguiente expresión: $w_t = \frac{y}{n} = A_t k_t^{\theta} n_t^{-\theta}$, por lo tanto:

$$\hat{w}_t = \hat{A}_t + \theta\hat{k}_t - \theta\hat{n}_t$$

Definiendo la inversión como $i_t = A_t k_t^{\theta} n_t^{1-\theta} - c_t$, se obtiene:

$$\hat{i}_t = \frac{y}{i}\hat{A}_t + \theta\frac{y}{i}\hat{k}_t + (1-\theta)\frac{y}{i}\hat{n}_t - \left(\frac{y}{i}\right)\left(\frac{c}{y}\right)\hat{c}_t$$

Estas variables se expresan matricialmente de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \hat{y}_t \\ \hat{w}_t \\ \hat{i}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & (1-\theta) & \theta & 1 \\ 0 & -\theta & \theta & 1 \\ \left(-\frac{y}{i}\right)\left(\frac{c}{y}\right) & (1-\theta)\left(\frac{y}{i}\right) & \theta\frac{y}{i} & \frac{y}{i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{c}_t \\ \hat{n}_t \\ \hat{k}_t \\ \hat{A}_t \end{bmatrix}$$

Fc Fx Fe

Donde se han conformado las variables extras en función de las variables de control (Fc), las variables de estado (Fx) y la variable exógena.

Con las variables expresadas en términos de sus desviaciones porcentuales de estado estacionario y conformadas las matrices respectivas se procede a parametrizar el modelo

6.1 Parametrización

Las matrices anteriores están conformadas por parámetros y relaciones de las variables en estado estacionario no conocidas, estos últimos valores son parametrizados usando las condiciones de estado estacionario.

Por definición, el factor de descuento esta relacionado con la tasa de interés mundial:

$$\beta = \frac{1}{1+r^*}$$

De la ecuación 3 de estado estacionario, la relación producto capital esta dada por estos parámetros:

$$\frac{y}{k} = \frac{\beta^{-1} - (1-\delta)}{\theta}$$

Definiendo $\frac{y}{k}$ a partir de la función de producción se obtiene: $\frac{y}{k} = \frac{Ak^{\theta} n^{1-\theta}}{k}$,de aquí se obtiene la relación trabajo y capital:

$$\frac{n}{k} = \left(\frac{\beta^{-1} - (1-\delta)}{A\theta} \right)^{\frac{1}{(1-\theta)}}$$

Con $\frac{n}{k}$ parametrizado se obtiene, la relación producto trabajo:

$$\frac{y}{n} = A\left(\frac{k}{n}\right)^{\theta}$$

De la ecuación 2 de estado estacionario se obtiene el parámetro lambda:

$$\lambda = \left(\frac{\gamma}{(1-\theta)} \right) \frac{y}{n}$$

De la ecuación 5 de estado estacionario, es posible determinar el valor de estado estacionario en el trabajo:

$$n = k\left(\frac{\beta^{-1} - (1-\delta)}{A\theta} \right)^{\frac{1}{(1-\theta)}}$$

Utilizando la expresión anterior en la ecuación 10 de estado estacionario se obtiene, el valor del capital en estado estacionario:

$$k = \frac{r^{*}D - c}{A\left(\frac{k}{n}\right)^{\theta}\left(\frac{\beta^{-1}-(1-\delta)}{A\theta}\right)^{\frac{1}{(1-\theta)}} - \delta}$$

6.2 Estimación.

Antes de presentar los resultados de la estimación conviene realizar una breve explicación sobre el procedimiento realizado. La idea del método aplicado en este caso es desarrollado en dos etapas: en la primera, se hace uso de un conjunto de condiciones o ecuaciones que están implicadas en el modelo, las cuales son estimadas con las series de las variables y un valor dado arbitrariamente para cada parámetro; el resultado de esta primera etapa es una estimación de errores y parámetros que son usados; posteriormente, en la segunda etapa, donde se repite el proceso de la primera etapa. A continuación se expone en forma resumida este procedimiento indicando primero en teoría el desarrollo para luego exponer la aplicación realizada.

Se considera teóricamente que cuando el modelo es valido satisface la siguiente condición:

$E\left[f(X_t,\psi)\right]=0$ (I)

Donde ψ es un vector de parámetros y X_t es un vector de series de tiempo. El verdadero valor del vector de parámetros debe satisfacer:

$$\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} f\left(X_t, \psi\right) = 0 \text{ (II).}$$

Este problema puede plantearse bajo una forma cuadrática en la cual los parámetros adecuados son aquellos que minimizan la siguiente función objetivo:

$$J_t(\psi) = \left[\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} f\left(X_t, \psi\right)\right]' W_t \left[\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} f\left(X_t, \psi\right)\right] \text{ (III),}$$

Donde W_t es una matriz de ponderación (*weighting matriz),* simétrica definida positiva; las condiciones de primer orden de este problema de minimización son:

$$\frac{dJ_t(\psi)}{d(\psi)} = \left[\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \frac{df\left(X_t, \psi\right)'}{d\psi'}\right]' W_t \left[\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} f\left(X_t, \psi\right)\right] = 0 \text{ (IV),}$$

Para realizar la estimación en dos etapas se usa primero la matriz identidad como matriz de ponderación, el procedimiento arroja el siguiente estimador:

$$\hat{S}_T = \left[\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} f\left(X_t, \hat{\psi}_T^1\right)\right]' W_t \left[\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} f\left(X_t, \hat{\psi}_T^1\right)\right] \text{ (V)}$$

Donde el superíndice indica los estimadores de la primera etapa con la matriz W equivalente a la matriz identidad y no se consideran rezagos de tiempo en la estimación.

En la segunda etapa se reestima ψ usando la matriz de ponderación $W_t = \hat{S}_T^{-1}$ (VI) y se halla la matriz de varianzas y covarianzas que esta dada por:

$V_t = \left(D_t \, \hat{S}_T^{-1} D_T\right)^{-1}$ (VII)

Donde $D_T = \dfrac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \dfrac{df\left(X_t, \psi\right)'}{d\psi'}$

Para el caso particular de este modelo, la igualdad I se obtiene a partir de las condiciones de primer orden y de las definiciones dadas en el modelo para la variable aleatoria, de esta forma se determinan las siguientes ecuaciones para los parámetros que se requiere conocer.

A partir de las condiciones de primer orden se obtiene:

$$E_t\left[\gamma + (\theta - 1)\frac{y_t}{c_t n_t}\right] = 0 \quad (1)$$

$$E_t\left[(\delta - 1) + \frac{k_{t+1}}{k_t} - \frac{i_t}{k_t}\right] = 0 \quad (2)$$

$$E_t\left[y_t + D_t + (1-\delta)k_t - \frac{\phi}{2}(k_{t+1} - k_t)^2 - (1 + r^*)D_{t-1} - c_t - k_{t+1}\right] = 0 \quad (3)$$

$$E_t\left[\frac{1}{c_t}\left[-1 - \phi(k_{t+1} - k_t)\right] + \beta\frac{1}{c_{t+1}}\left[\theta\frac{y_{t+1}}{k_{t+1}} + (1-\delta) + \phi(k_{t+2} - k_{t+1})\right]\right] = 0 \quad (4)$$

$$E_t\left[\frac{1}{c_t}-\beta\frac{1}{c_{t+1}}\left(1+r^*\right)\right]=0 \quad (5)$$

Por la ley de movimiento para de la variable exógena:

$$E\left[\ln\left(A_t\right)-\ln\left(A\right)\left(1-\rho\right)-\rho\ln\left(A_{t-1}\right)\right]=0 \quad (6)$$

$$E\left[\left(\ln\left(A_t\right)-\ln\left(A\right)\left(1-\rho\right)-\rho\ln\left(A_{t-1}\right)\ln\left(A_{t-1}\right)\right)\right]=0 \quad (7)$$

$$E\left[\ln\left(A_t-\ln\left(A\right)\left(1-\rho\right)-\rho\ln\left(A_{t-1}\right)^2-\sigma^2\right)\right]=0 \quad (8)$$

$$E\left[\left(y_{hp,t}^2-\sigma_y^2\right)\right]=0 \quad (9)$$

$$E\left[c_{hp,t}^2-\left(\frac{\sigma_c}{\sigma_y}\right)y_{hp,t}^2\right]=0 \quad (10)$$

$$E\left[i_{hp,t}^2-\left(\frac{\sigma_i}{\sigma_y}\right)y_{hp,t}^2\right]=0 \quad (11)$$

$$E\left[n_{hp,t}^2-\left(\frac{\sigma_n}{\sigma_y}\right)y_{hp,t}^2\right]=0 \quad (12)$$

$$E\left[D_{hp,t}^2-\left(\frac{\sigma_D}{\sigma_y}\right)y_{hp,t}^2\right]=0 \quad (13)$$

$$E\left[n_{hp,t}^2-\left(\frac{\sigma_n}{\sigma_{y-n}}\right)\left(y-n\right)_{hp,t}^2\right]=0 \quad (14)$$

Siguiendo el procedimiento GMM se estiman estas ecuaciones. El subíndice indica que las series son filtradas por Hodrick y Prescott. Como no se conoce el valor de los parámetros, éstos se determinan con base en la teoría económica; de esta estimación se obtiene un vector de errores que son promediados (ecuación II) y se conforma la función objetivo de la primera etapa (ecuación V) con la matriz W definida como una matriz identidad y la minimización realizada mediante la ecuación IV, los resultados de la primera etapa son el insumo de la segunda etapa.

En la segunda etapa se replantea la función objetivo con la matriz de ponderación (ecuación VI) y el conjunto de parámetros hallados en la primera etapa, nuevamente se minimiza la función objetivo del GMM y se obtiene a partir de allí el conjunto de estimadores o valor de los parámetros, conjuntamente con su matriz de varianzas y covarianzas ecuación (VII). Estos resultados son presentados en el cuadro 1 del siguiente capítulo; las últimas salidas, corresponden a los segundos momentos que interesa conocer representandos por la volatilidad del producto (σ_y) y su magnitud comparada con las demás variables, el consumo $\frac{\sigma_c}{\sigma_y}$, la inversión $\frac{\sigma_i}{\sigma_y}$ la tasa de empleo $\frac{\sigma_n}{\sigma_y}$, la deuda externa $\frac{\sigma_D}{\sigma_y}$ y el coeficiente de correlación entre la productividad laboral promedio y la tasa de empleo $\rho_{n,y-n}$. De esta manera quedan definidos los momentos del modelo; el procedimiento subsiguiente consiste en definir entonces los momentos del modelo, para ello retomamos sus leyes de movimiento, estas son presentadas en el anexo de este documento.

Para las variables de estado las leyes de movimiento son:

$$x_{t+1} = \gamma_{xx} x_t + \gamma_{xz} z_t$$

Para las variables de coestado λ_t, las leyes de movimiento son:

$$\lambda_t = \gamma_{\lambda x} x_t + \gamma_{\lambda z} z_t$$

Para las variables de control las leyes de movimiento son

$u_t = \gamma_{ux} x_t + \gamma_{\lambda z} z_t$

Para las variables adicionales:

$$f_t = F_c u_t + F_x x_t + F_e z_t$$

$$f_t = \left[F_c \begin{pmatrix} \gamma_{ux} & \gamma_{uz} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_x & F_e \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x_t \\ z_t \end{pmatrix}$$

Las variables de estado y exógena se pueden representar de la siguiente forma:

$s_{t+1} = M s_t + \hat{e}_{t+1}$

Donde $s_t = \begin{pmatrix} x_t \\ z_t \end{pmatrix}, \quad \hat{e}_t = \begin{pmatrix} 0 \\ e_t \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} \gamma_{xx} & \gamma_{xz} \\ 0 & \Pi \end{pmatrix}$

Haciendo uso de s_t, las otras variables se pueden representar de la siguiente manera

$$\begin{pmatrix} \lambda_t \\ u_t \\ f_t \end{pmatrix} = H s_t$$

Donde $H = \begin{pmatrix} & \gamma_{uz} & \gamma_{\lambda z} \\ \gamma_{ux} & & \gamma_{uz} \\ Fc(& \gamma_{ux}\gamma_{uz}) \quad + & (Fx \quad Fe) \end{pmatrix}$

Con esta representación es posible expresar las variables de la siguiente forma

$$s_t = Ms_{t-1} + \hat{e}_t$$

$$s_t = M^2 s_{t-2} + \hat{e}_t + M\hat{e}_{t-1}$$

$$s_t = \hat{e}_t + M\hat{e}_{t-1} + M^2\hat{e}_{t-2}$$

Con esta representación media móvil es posible choquear la variable exógena, posteriormente se calculan los momentos del modelo y la matriz de varianzas y covarianzas que viene dada por la siguiente relación:

$$E\left[s_t \begin{pmatrix} \lambda_t \\ u_t \\ f_t \end{pmatrix}' \right] = E\left(s_t s_t' \; H' \right)$$

Definidos los momentos del modelo y de los datos, el procedimiento subsiguiente es el de determinar que tan grande o pequeña puede ser la distancia entre ellos, utilizando las matrices de varianzas y covarianzas respectivas se realiza un test de prueba en el cual bajo la hipótesis nula el modelo es capaz de reproducir los momentos de los datos.

7. RESULTADOS DE LA ESTIMACIÓN Y PRUEBAS DE HIPÓTESIS

En los subsiguientes cuadros se presentan los resultados de la estimación y test de hipótesis obtenida. En todos los casos las variables corresponden a series trimestrales para el período comprendido entre 1994 y 2000, expresadas en términos per capita a precios constantes de 1994 y filtradas por el filtro de Hodrick y Prescott. La fuente de la información es el Banco de la República con excepción del acervo de capital el cual es tomado del artículo de Llinas 2002. A partir de 2000 cambia la metodología de medición de la tasa de empleo, por lo que las series van sólo hasta este año, con el fin de seleccionar una base de datos lo más confiable posible. Debido a que en el largo plazo las constantes se mantienen es posible considerar el estudio vigente para los hechos económicos recientes.

De conformidad con los resultados que se presentan en el cuadro uno, la volatilidad presente en el consumo y el empleo son más altas que la del producto. En las demás variables la volatilidad es menor: la variable más volátil es el consumo seguida del empleo, la deuda y la inversión. El valor de la participación del capital en el trabajo, así como la tasa de depreciación y el parámetro de costos de ajuste del capital presentan valores razonables, así mismo, el valor de la ponderación del ocio en la función de utilidad; no obstante, para un nivel de confianza del 95% estos resultados no son significativos (cuadro 1).

La hipótesis nula, según la cual los momentos de los datos son capaces de reproducir los momentos del modelo, es rechazada en el test, que presenta en general p values cercanos a cero (cuadro 2). Con excepción de la volatilidad presente en el producto, lo anterior es valido para un nivel de confianza del 95%.

Cuadro 1

Parámetros y Errores Estándar Estimados del Modelo Indivisible con Deuda Externa

NOMBRE DEL PARÁMETRO	VALOR DEL PARÁMETRO	DESVIACIÓN ESTÁNDAR
Theta	0.4770	0.0005
Gamma	1.6809	0.0278

NOMBRE DEL PARÁMETRO	VALOR DEL PARÁMETRO	DESVIACIÓN ESTÁNDAR
Delta	0.2410	0.0097
Fhi	0.4990	0.2324
Sigma y	0.0100	0.0076
Sigma c / Sigma y	1.0005	0.1317
Sigma i/ Sigma y	0.9720	6.5731
Sigma n/ Sigma y	1.0004	0.1746
Sigma D/ Sigma y	0.9925	4.5417
Sigma n/ Sigma y-n	0.9999	0.0747
Rho	0.9600	0.0032
Sígma e	0.0009	10.7630

Cuadro 2

Prueba de Hipótesis de los Momentos del Modelo y de los Datos para el Modelo Indivisible con Deuda Externa

Momento	Momentos Modelo	Desviaciones Estándar	Momentos de los datos	Desviaciones estándar	Test	Pvalue
σ_y	0.0010	11.4643	0.0100	0.0076	0.0000	0.9994
$\frac{\sigma_c}{\sigma_y}$	3.2122	0.0326	1.0005	0.1317	198.4578	0
$\frac{\sigma_i}{\sigma_y}$	118.5879	5.2048	0.9720	6.5731	109.6744	0
$\frac{\sigma_n}{\sigma_y}$	4.1901	0.0272	1.0004	0.1746	276.1790	0
$\frac{\sigma_n}{\sigma_{y-n}}$	0.0135	0.0038	0.9925	4.5417	0.0464	0.8294

Momento	Momentos Modelo	Desviaciones Estándar	Momentos de los datos	Desviaciones estándar	Test	Pvalue
$\frac{\sigma_D}{\sigma_y}$	1.3045	0.0048	0.9999	0.0747	16.3490	0.0001
$\rho_{n,y-n}$	-0.9984	0.0004	-0.5004	0.1609	9.6016	0.0019

Los anteriores resultados llaman la atención con el fin de incorporar en el análisis del ciclo económico colombiano variantes diferentes, en particular, es importante contrastar la idea de agentes homogéneos versus agentes heterogéneos, tasas de descuento exógenas que no se modifican en el tiempo, idénticas para todos los agentes e independientes del nivel de ingreso versus tasas de descuento endogenizadas y dependientes de la utilidad en el consumo y el ocio; agregación exacta del modelo microeconómico versus microfundamentos alternativos.

En una crítica presentada por Hahn – Solow 1995, ellos exponen los microfundamentos de un modelo macro, en donde se analizan algunos aspectos de un mercado laboral que no funciona bajo competencia perfecta y que puede ser útil en la determinación de la fluctuación del empleo, la correlación entre los salarios y el empleo y el papel de la política monetaria.

8 CONCLUSIÓN

Este estudio tiene un alcance limitado. Más que una disertación teórica sobre la economía colombiana, lo que se quiere presentar es una aplicación empírica que sirva de marco de reflexión sobre los resultados presentados.

Una variación metodológica se ha presentado en este estudio, en el cual se ha realizado la estimación de los parámetros en estado estacionario para lograr una mejor representación de la realidad estudiada, ya que el valor de los parámetros incide junto con la estructura del modelo en la determinación de las leyes de movimiento de las variables y consecuentemente en la trayectoria intertemporal de las mismas. En este documento se realizaron estimaciones y pruebas de hipótesis que contrastan la capacidad del modelo para replicar los momentos de los datos a partir de un modelo que incorpora la deuda externa del país; el modelo en cuestión no es una adecuada representación de la realidad económica, implicada en los momentos de los datos.

Lo anterior lleva a considerar la necesidad de realizar más estudios para una adecuada representación del ciclo económico colombiano, y en particular, desarrollar nuevos trabajos en los que sea posible comparar parámetros calibrados y simulaciones que reproducen, en forma parcial, las características empíricas de la economía colombiana con parámetros que son estimados y momentos del modelo que son examinados bajo pruebas estadísticas.

BIBLIOGRAFIA

Arango, Luis Eduardo (1997). *On the character of output fluctations in Colombia.* Ph.D. dissertation. University of Liverpool.

Arango, Luis E., Castillo Mauricio (1999). *¿Son estilizadas las regularidades del ciclo económico? Una breve revisión de la literatura.* En: *Borradores de Economía* No 115. Banco de la República

Blanchard, O. Kahn, Ch. (1980). *The Solutión of Linear Difference Models Under Rational Expectations*. En: *Econometrica*, No 48 (5).

Burnside Craig (1999). *Real Cycle Models: Linear Aproximation and GMM Estimation.* Banco Mundial.

Cárdenas Mauricio (1991). *Coffee exports, endogenous state policies and the business cycle.* Ph.D. Dissertation University of California. Berkeley.

Cooley, T. Prescott, E. (1995). *Frontiers of Business Cycle Research.* Cooley, T. Editor. Princeton University Press.

Córdoba Martos Gonzalo (2002). *Lecciones Generales de Equilibrio General Computable.*

Díaz–Alejandro, Carlos (1976). *Foreign trade regimes and economic development: Colombia.* Columbia University Press.

Flórez, Luis Bernardo (1974). *El Sector Externo en los ciclos de la economía Colombiana*. En: *Cuadernos Colombianos* No 3.

Grohé Stephanie - Uribe Martin y Schmitt (2002). *Closing Small open Economy Models*. En: *National Bureau of Economic Research*. Working Paper 9270.

Hahn.- Solow, R. (1995). *A Critical Essay on Modern Macroeconomics,* MIT, Press.

Hamann Franz y Riascos, Álvaro, (1998) *Ciclos Económicos en una Economía Pequeña y Abierta. Una aplicación para Colombia*. En *Borradores Semanales de Economía.* No 89. Banco de la República.

Hansen, G. (1985). *Indivisible Labor and The Business Cycle*. En *Journal of Moneatry Economics.* 16.

King, R., Plosser, C., Rebelo, S (19889 a y b *Production Growth and the Business Cycles.* En *Journal of Monetary Economics.* 21.

King, R., Plosser, C., Rebelo, S (2001) *Production Growth and the Business Cycles.* Technical Appendix Universidad de Rochester.

King, R., Plosser, C., Rebelo S (2002) *Computational Economics*

Llínas Marco A, (2002) *Incidencia de la volatilidad de los precios del petróleo en la determinación del ciclo económico colombiano*. En *Desarrollo y Sociedad*. No 50.

McCallum, Benett t., *Real Business Cycle Models*. (1989). Modern Business Cycle Theory, Cambridge, Ma: Harvard University Press.

Mendoza Enrique. (1991). *Real Business Cycles in a Small Open Economy* En *American Economy Review,* September.

Ocampo, José Antonio. (1989). *Ciclo Cafetero y Comportamiento Macroeconómico en Colombia, 1940-1987*. Coyuntura Económica. Vol 19.

Posada Carlos Esteban. (1999). *Los ciclos económicos colombianos en el siglo XX.* En: *Borradores de Economía.* No 126. Banco de la República

Plosser, Charles I.,2 (1989) .*Understanding Real Business Cycles*. En Journal of economics Perspectives, Summer .

Sargent T, (2004). Recursive Macroeconomic Theory. Cap 1.

Suescún M., Rodrigo. (1997) *Commodity Booms, Dutch Disease and Real Business Cycles in a Small Open Economy. The Case off Cofee in Colombia*. En *Borradores Semanales de Economía.* No 73.

ANEXO

1. SOLUCIÓN NUMÉRICA DEL MODELO LEYES DE MOVIMIENTO DE LAS VARIABLES.

En este trabajo se utiliza el método de King, Plosser y Rebelo, las siguientes ecuaciones aparecen en el documento denominada Real Business Cycle Model: Linear Aproximation and Gmm Estimation, la notación es la misma, se adicionaron algunos pasos de álgebra. Los algoritmos de solución y el procedimiento posterior corresponden igualmente a estos autores y fueron modificados cuando era necesaria su adaptación a este modelo.

En el caso de las dos primeras ecuaciones estas se pueden escribir de la forma:

$$m_{cc}u_t = m_{cs}\begin{pmatrix} x_t \\ \lambda_t \end{pmatrix} + m_{ce} + z_{t.}$$

$$u_t = m_{cc}^{-1}m_{cs}\begin{pmatrix} x_t \\ \lambda_t \end{pmatrix} + m_{cc}^{-1}m_{ce} + z_{t.}$$

En donde u_t corresponde a las variables de control c_t, n_t , de otra parte x_t, λ_t corresponde a las variables de estado coestado respectivamentey z_t es la variable exógena.

De manera equivalente, para las restantes ecuaciones escritas en forma compacta se obtiene:

$$m_{ss}^0 E_t\begin{pmatrix} x_{t+1} \\ \lambda_{t+1} \end{pmatrix} + m_{ss}^1\begin{pmatrix} x_t \\ \lambda_t \end{pmatrix} = m_{sc}^0 E_t \mu_{t+1} + m_{sc}^0 u_t + m_{se}^0 E_t z_{t+1} + m_{se}^0 z_t$$

Combinando esta ecuación con la definida para u_t, se obtiene:

$$\left(m_{ss}^0 - m_{sc}^0 m_{cc}^{-1} m_{cs}\right) E_t \begin{pmatrix} x_{t+1} \\ \lambda_{t+1} \end{pmatrix} + \left(m_{ss}^1 - m_{sc}^1 m_{cc}^{-1} m_{cs}\right) \begin{pmatrix} x_t \\ \lambda_t \end{pmatrix} =$$
$$\left(m_{se}^0 - m_{sc}^0 m_{cc}^{-1} m_{ce}\right) E_t z_{t+1} + \left(m_{se}^1 - m_{sc}^1 m_{cc}^{-1} m_{ce}\right) z_t$$

De manera más resumida:

$$\bar{m}_{ss}^0 E_t \begin{pmatrix} x_{t+1} \\ \lambda_{t+1} \end{pmatrix} + \bar{m}_{ss}^1 \begin{pmatrix} x_t \\ \lambda_t \end{pmatrix} = \bar{m}_s^0 E_t z_{t+1} + \bar{m}_{se}^1 z_t$$

Posteriormente, se configuran las matrices que expresan el sistema dinámico fundamental en forma normal

Despejando la anterior ecuación se obtiene:

$$E_t \begin{pmatrix} x_{t+1} \\ \lambda_{t+1} \end{pmatrix} = -\left(\bar{m}_{ss}^0\right)^{-1} \bar{m}_{ss}^1 \begin{pmatrix} x_t \\ \lambda_t \end{pmatrix} + \left(\bar{m}_{ss}^0\right)^{-1} \bar{m}_{se}^0 E_t z_{t+1} + -\left(\bar{m}_{ss}^0\right)^{-1} \bar{m}_{se}^1 z_t$$
$$E_t \begin{pmatrix} x_{t+1} \\ \lambda_{t+1} \end{pmatrix} = W \begin{pmatrix} x_t \\ \lambda_t \end{pmatrix} + R E_t z_{t+1} + Q z_t$$

A continuación se determinan los vectores y valores propios de la matriz de transición de estado – coestado: matriz W. El Sistema dinámico esta gobernado por las raíces características y los vectores característicos de la matriz W, el comportamiento dinámico de la solución de este sistema lineal de primer orden depende de la naturaleza y valor de los eigenvalues, para hallar los vectores y valores propios se requiere diagonalizar la matriz W(suponiendo que los eigenvalues o raíces características de W, son distintas):

$$E_t\begin{pmatrix} x_{t+1} \\ \lambda_{t+1} \end{pmatrix} = P \wedge P^{-1}\begin{pmatrix} x_t \\ \lambda_t \end{pmatrix} + RE_t z_{t+1} + Qz_t$$

multiplicando por P^{-1};

$$P^{-1}E_t\begin{pmatrix} x_{t+1} \\ \lambda_{t+1} \end{pmatrix} = P^{-1}P \wedge P^{-1}\begin{pmatrix} x_t \\ \lambda_t \end{pmatrix} + P^{-1}RE_t z_{t+1} + P^{-1}Qz_t$$

definiendo

$$P^{-1}E_t\begin{pmatrix} x_{t+1} \\ \lambda_{t+1} \end{pmatrix} = E_t\begin{pmatrix} \tilde{x}_{t+1} \\ \tilde{\lambda}_{t+1} \end{pmatrix} \quad y \quad \wedge P^{-1}\begin{pmatrix} x_t \\ \lambda_t \end{pmatrix} = \wedge\begin{pmatrix} \tilde{x}_{t+1} \\ \tilde{\lambda}_{t+1} \end{pmatrix};$$

se obtiene :

$$E_t\begin{pmatrix} \tilde{x}_{t+1} \\ \tilde{\lambda}_{t+1} \end{pmatrix} = \wedge\begin{pmatrix} \tilde{x}_{t+1} \\ \tilde{\lambda}_{t+1} \end{pmatrix} + P^{-1}RE_t z_{t+1} + P^{-1}Qz_t$$

Para dar solución a cada ecuación posteriormente se realiza una partición de matrices:

$$\wedge = \begin{pmatrix} \wedge_1 & 0 \\ \wedge_2 & 0 \end{pmatrix} ;W = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix} ;R = \begin{pmatrix} R_x \\ R_\lambda \end{pmatrix} ;Q = \begin{pmatrix} Q_x \\ Q_\lambda \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} P^{11} & P^{12} \\ P^{21} & P^{22} \end{pmatrix} ;P^{-1} = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix}$$

$$W = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} \wedge_1 p^{11} + p_{12} \wedge_2 p^{21} & p_{11} \wedge_1 p^{12} + p_{12} \wedge_2 p^{22} \\ p_{21} \wedge_1 p^{11} + p_{22} \wedge_2 p^{21} & p_{21} \wedge_1 p^{12} + p_{22} \wedge_2 p^{22} \end{pmatrix}$$

Con todos los elementos de $\wedge_1$ menores que 1 y todos los elementos de $\wedge_2$ mayores que 1, la ecuación para $\tilde{x}_{t+1}$ será resuelta hacia atrás y la ecuación para $\tilde{\lambda}_{t+1}$ será resuelta hacia delante.

$$E_t\begin{pmatrix}\tilde{X}_{t+1}\\ \tilde{\lambda}_{t+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\wedge_1 & 0\\ \wedge_2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{X}_t\\ \tilde{\lambda}_t\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}P^{11} & P^{12}\\ P^{21} & P^{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}R_x\\ R_\lambda\end{pmatrix}E_t z_{t+1}+\begin{pmatrix}P^{11} & P^{12}\\ P^{21} & P^{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Q_x\\ Q_\lambda\end{pmatrix}z_t$$

$$E_t\begin{pmatrix}\tilde{X}_{t+1}\\ \tilde{\lambda}_{t+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\wedge_1 & 0\\ \wedge_2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{X}_t\\ \tilde{\lambda}_t\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}P^{11}R_x & P^{12}R_\lambda\\ P^{21}R_x & P^{22}R_\lambda\end{pmatrix}E_t z_{t+1}+\begin{pmatrix}P^{11}Q_x & P^{11}Q_\lambda\\ P^{21}Q_x & P^{22}Q_\lambda\end{pmatrix}z_t$$

Se observan dos ecuaciones una para $E_t\tilde{x}_{t+1}$ otra para $E_t\tilde{\lambda}_{t+1}$. de esta última se despeja $\tilde{\lambda}_t$ y se resuelve hacia delante esta ecuación, la cual da como resultado:

$$\tilde{\lambda}_t=-\sum_{j=0}^{\infty}\wedge_2^{-(j+1)}\left[(P^{21}R_x+P^{22}R_\lambda)E_tZ_{t+1+j}+\left(P^{21}Q_x+P^{22}Q_\lambda\right)E_tZ_{t+j}\right] \quad (1)$$

Retomando la ecuación de para $X_{t+1}=W_{11}X_t+W_{12}\lambda_t+R_xE_tZ_{t+1}+Q_xZ_t$

Las variables con el símbolo $(\tilde{\bullet})$ y las variables regulares están relacionadas de por la siguiente expresión:

$$\begin{pmatrix} \tilde{X}_t \\ \tilde{\lambda}_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P^{11} & P^{12} \\ P^{21} & P^{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_t \\ \lambda_t \end{pmatrix}$$

despejando $\lambda_t = -\left(P^{22}\right)^{-1} P^{21} x_t + \left(P^{22}\right)^{-1} \tilde{\lambda}_t$ *sustituyendo en la ecuación para* x_{t+1} :

$$x_{t+1} = \left(P_{11}\Lambda_1 P^{11} + P_{12}\Lambda_2 P^{21}\right)x_t - \left(P_{11}\Lambda_1 P^{12} + P_{12}\Lambda_2 P^{22}\right)\left(P^{22}\right)^{-1} P^{21} x_t +$$
$$\left(P_{11}\Lambda_1 P^{12} + P_{12}\Lambda_2 P^{22}\right)\left(P^{22}\right)^{-1} \tilde{\lambda}_t + R_x E_t z_{t+1} + Q_x z_t .$$

factorizando $P_{11}\Lambda_1$ *y* x_t

$$x_{t+1} = \left(P_{11}\Lambda_1\left[P^{11} - P^{12}\left(P^{22}\right)^{-1} P^{21}\right] + \right)x_t + \left(P_{11}\Lambda_1 P^{12} + P_{12}\Lambda_2 P^{22}\right)\left(P^{22}\right)^{-1} P^{22} \tilde{\lambda}_t + R_x E_t z_{t+1} + Q_x z_t .$$

La formula de la inversa particionada es la siguiente:

$$\left[P^{11} - P^{12}\left(P^{22}\right)^{-1} P^{21}\right] = P_{11}^{-1}$$
$$x_{t+1} = \left(P_{11}\Lambda_1 P_{11}^{-1}\right)x_t + \left(P_{11}\Lambda_1 P^{12} + P_{12}\Lambda_2 P^{22}\right)\left(P^{22}\right)^{-1} P^{22} \tilde{\lambda}_t + R_x E_t z_{t+1} + Q_x z_t \,(2)$$

x_{t+1} *esta en función de* $\tilde{\lambda}_t$ *la cual depende* z_t, sup*omiendo un* $AR(1)$:

$$z_{t+1} = \Pi z_t + E_{t+1}. \quad \textit{entonces} \quad E_t z_{t+j} = \Pi^j z_t$$

Remplazando esta expresión en (1).

$$\tilde{\lambda}_t = -\sum_{j=0}^{\infty} \wedge_2^{-(j+1)} \left[(P^{21} R_x + P^{22} R_\lambda) E_t Z_{t+1+j} + \left(P^{21} Q_x + P^{22} Q_\lambda\right) E_t Z_{t+j}\right]$$
$$\tilde{\lambda}_t = -\sum_{j=0}^{\infty} \wedge_2^{-(j+1)} \left(\Phi_0 E_t Z_{t+1+j} + \Phi_1 E_t Z_{t+j}\right)$$
$$\tilde{\lambda}_t = -\left[\sum_{j=0}^{\infty} \wedge_2^{-(j+1)} \left(\Phi_0 + \Phi_1\right) z_t\right]$$
$$\tilde{\lambda}_t = \psi z_t$$

Reemplazando en la ecuación 2:

Remplazando para λ_t

$$\lambda_t = -\left(P^{22}\right)^{-1} P^{21} x_t + \left(P^{22}\right)^{-1} + \psi z_t$$
$$\lambda_t = \gamma_{\lambda x} x_t + \gamma_{\lambda z} z_t$$

Para las variables de control

$$u_t = m_{cc}^{-1} m_{cs} \begin{pmatrix} I \\ -\left(P^{22}\right)^{-1} P^{21} \end{pmatrix} x_t + \left[m_{cc}^{-1} m_{ce} \begin{pmatrix} 0 \\ \left(P^{22}\right)^{-1} \psi \end{pmatrix} m_{cc}^{-1} m_{ce} \right] z_{t.}$$
$$u_t = \gamma_{ux} x_t + \gamma_{\lambda z} z_t$$

Para las variables adicionales:

$$f_t = F_c u_t + F_x x_t + F_e z_t$$

$$f_t = \left[F_c \begin{pmatrix} \gamma_{ux} & \gamma_{uz} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_x & F_e \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x_t \\ z_t \end{pmatrix}$$