

IEMC-I-06-16

FILTRO KALMAN DIFUSO COMO OBSERVADOR DE ESTADOS

HERNAN DARIO URIBE GONZALEZ

**UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
FACULTAD DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE ELECTRÓNICA
MAGISTER EN INGENIERÍA ELECTRÓNICA
BOGOTÁ D.C.
2006**

FILTRO KALMAN DIFUSO COMO OBSERVADOR DE ESTADOS

HERNAN DARIO URIBE GONZALEZ

Monografía presentada como requisito para optar por
el título de magíster en ingeniería electrónica.

Director
Ing. ALVARO TORRES M., ME., MSc., PhD.,

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
FACULTAD DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE ELECTRÓNICA
MAGISTER EN INGENIERÍA ELECTRÓNICA
BOGOTÁ D.C.
2006

A mis padres, porque sin su apoyo mis sueños nunca se alcanzarían.

Al ángel que me he encontrado en el camino y desde entonces me acompaña en cada proyecto de mi vida.

AGRADECIMIENTOS

El autor expresa su agradecimiento a:

Ing. ALVARO TORRES M., ME., MSc., PhD., director del proyecto, por su aporte, apoyo y orientación.

CONTENIDO

	pág.
INTRODUCCION	10
1. INTRODUCCIÓN A LA LÓGICA DIFUSA	12
1.1 CONJUNTOS CLASICOS Y CONJUNTOS DIFUSOS	12
1.2 OPERACIONES DE CONJUNTOS DIFUSOS	15
1.2.1 Contenido o subconjunto.	15
1.2.2 Unión o disyunción.	16
1.2.3 Intersección o conjunción.	16
1.2.4 Complemento o negación.	16
1.3 CORTE α Y PRINCIPIO DE RESOLUCION	16
1.4 INFERENCIA DIFUSA	16
1.5 CONTROL LOGICO DIFUSO Y SISTEMAS TAKAGI SUGENO	17
2. INTRODUCCIÓN AL FILTRO KALMAN	19

2.1 OBTENCION DEL ERROR DE COVARIANZA	20
2.1.1 Obtención del error de covarianza a priori.	20
2.1.2 Deducción de la covarianza del error a posteriori y la ganancia.	22
2.2 ALGORITMO Y PROCESO DE ESTIMACIÓN DEL FILTRO KALMAN	24
3. FILTRO KALMAN DIFUSO BASADO EN LYAPUNOV	25
3.1 DISEÑO DEL FILTRO KLD “KALMAN - LYAPUNOV - DIFUSO”	25
3.2 FUNCIONAMIENTO DEL FILTRO KLD	26
3.3 ALGORITMO Y PROCESO DE ESTIMACION DEL FILTRO LKD.	29
3.4 RESULTADO DE LAS SIMULACIONES.	30
4. CONCLUSIONES	33
BIBLIOGRAFÍA	34
ANEXO A	35
ANEXO B	38

LISTA DE TABLAS

	pág.
Tabla 1. Tabla de funciones de salida.	27
Tabla 2. Tabla de Reglas Difusas.	29
Tabla 3. Tabla de resultados para x_1 .	31
Tabla 4. Tabla de resultados para x_2 .	31
Tabla 5. Tabla de resultados para x_1 .	38
Tabla 6. Tabla de resultados para x_2 .	39

LISTA DE FIGURAS

	pág.
Figura 1. Función de Pertenencia para un conjunto clásico.	13
Figura 2. Conjuntos difusos para Bajo, Promedio, Alto.	14
Figura 3. Esquema de implementación de un sistema difuso.	17
Figura 4. Algoritmo del filtro Kalman.	24
Figura 5. Funciones de pertenencia de V .	27
Figura 6. Funciones de pertenencia de ΔV .	28
Figura 7. Funciones de pertenencia de S .	28
Figura 8. Algoritmo del Filtro KLD.	30
Figura 9. Resultado de la estimación de x_1 .	31
Figura 10. Resultado de la estimación de x_2 .	32
Figura 11. Resultado de la estimación de x_1 .	38
Figura 12. Resultado de la estimación de x_2 .	39

RESUMEN

El objetivo fundamental de este trabajo es desarrollar una metodología de diseño de un Filtro KLD (Kalman – Lyapunov – Difuso), el cual sea capaz de aprovechar la unión de los conceptos del Filtro Kalman, Lógica difusa y el criterio de estabilidad de Lyapunov.

El filtro propuesto se basa en un Filtro Kalman convencional que utiliza una función de Lyapunov como índice de desempeño y a su vez genera el conjunto de reglas difusas utilizadas por un sistema difuso; el motor de inferencia utilizado es un modelo *Takagi – Sugeno*, debido a su sencillez. El algoritmo presente en este trabajo está bajo dos principales principios, la ganancia de estado del filtro Kalman K y su razón de cambio ΔK , esta última calculada a través del sistema difuso.

En el siguiente trabajo se hace una breve introducción tanto a la lógica difusa como al filtro Kalman para al final se explique el desarrollo y funcionamiento del filtro propuesto.

Por último se utiliza un sistema de segundo orden para comparar el Filtro KLD y el filtro Kalman convencional para realizar un análisis de resultados preliminares y sacar algunas conclusiones.

INTRODUCCION

La teoría de control moderno se basa en el análisis y control a través de variables de estado; pero como es conocido en muchas circunstancias no es posible medir directamente los estados de los sistemas ya sea por factores físicos, económicos u otros; por lo cual se requieren los observadores de estado, los cuales deben ser capaces de realizar estimaciones y predicciones confiables. De la teoría de control, se sabe que, si todos los estados del sistema pueden ser estimados, se puede controlar satisfactoriamente el sistema, conociendo los requerimientos de este; los sistemas de control embebidos con un observador de estados son llamados controlador basado en observador.

En 1960 Rudolf Emil Kalman publico su famoso paper donde presento un filtro recursivo y estocástico, que estimaba los estados de un sistema o parte de ellos basado en la medición de las entradas y salidas del sistema, y de un modelo de la relación existente entre ellas, este filtro fue llamado Filtro Kalman. El filtro Kalman es un conjunto de ecuaciones matemáticas lineales que provee una solución recursiva del método de mínimos cuadrados, y una de sus principales fortalezas es la utilización de las variables de estado de ahí su amplia utilización en campos tales como: la navegación, determinación de orbitas para satélites, seguimiento de misiles y aviones, en radares, sonares, en GPS y otros dispositivos.

Debido a su primer paper en 1965 "*fuzzy sets*", Lofti Zadeh es considerado como el padre de la teoría difusa; en uno de sus paper Zadeh describe la lógica difusa como: "Unlike traditional logical systems, fuzzy logic is aimed at providing a model for modes of reasoning which are approximate rather than exact. In this perspective, the importance of fuzzy logic derives from the fact that almost all of human reasoning – and especially commonsense reasoning – is approximate in nature". Desde la introducción y las primeras aplicaciones a sistemas de control de la teoría difusa (Ebrahim Mamdani desarrollo el primer controlador difuso), esta ha ganado una gran aceptación en la comunidad científica, penetrado en muchos campos como son control de sistemas, identificación de sistemas, reconocimiento de patrones entre otros.

La principal característica y ventaja de la teoría difusa es que esta permite construir relaciones no lineales por medio de información heurística. En sistemas de control esta puede adquirir información o experiencia del operario la cual no esta presente inicialmente en la formulación matemática del sistema.

La lógica difusa es útil para abordar problemas que son muy difíciles para ser resueltos a través de métodos de control convencionales o matemáticos, y además esta puede representar sistemas complejos a través de modelos más sencillos aproximados con bastante precisión; sin embargo, las técnicas metodológicas de control convencional mantienen sus beneficios en muchas aplicaciones, por lo tanto como combinar la lógica difusa y teorías convencionales para obtener una integración que mantenga las ventajas de la teoría de control y además obtenga una mejor compensación y desempeño debido a la lógica difusa, se ha convertido en temas de reciente investigación. Pero hasta ahora pocos estudios se han hecho en el campo de la estimación u observación de estados.

La intención de este trabajo es combinar la lógica difusa con la teoría de estimación del Filtro Kalman y además estudiar las diferentes metodologías existentes para los FILTRO KALMAN DIFUSOS y escoger la más idónea, promover su desempeño si es posible, y comprobar su idoneidad y efectividad.

1. INTRODUCCIÓN A LA LÓGICA DIFUSA

En 1965 L.A. Zadeh introduce una lógica infinito valorada caracterizando el concepto de conjunto difuso y por extensión la lógica difusa. Los conjuntos difusos fueron diseñados para representar incertidumbre y vaguedad y proporcionar herramientas formalizadas para trabajar con la incertidumbre no probabilística presente en muchos problemas.

La lógica difusa tiene la capacidad de tratar con incertidumbre y ambiente ruidosos. Recientemente la lógica difusa ha sido ampliamente aplicada al procesamiento de señales, inteligencia artificial, control de servomotores, control de procesos industriales, exploración espacial e incluso hasta en economía y otros. Pero la mayoría de aplicaciones están orientadas hacia el campo del control, como lo son: controladores difusos, modelado difuso y sistemas expertos difusos. El núcleo de los controladores difusos es un conjunto de reglas lingüísticas que capturan el razonamiento humano de la experiencia y el conocimiento.

1.1 CONJUNTOS CLÁSICOS Y CONJUNTOS DIFUSOS

Un conjunto clásico es aquel que tiene una frontera nítida, es una colección de elementos definidos y distinguibles, los elementos del universo pertenecen o no pertenecen al conjunto.

Si consideramos el conjunto clásico A y el dominio de A sea x , donde x contiene todos los elementos que A puede tener, la función de pertenencia de un conjunto clásico esta definida por:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

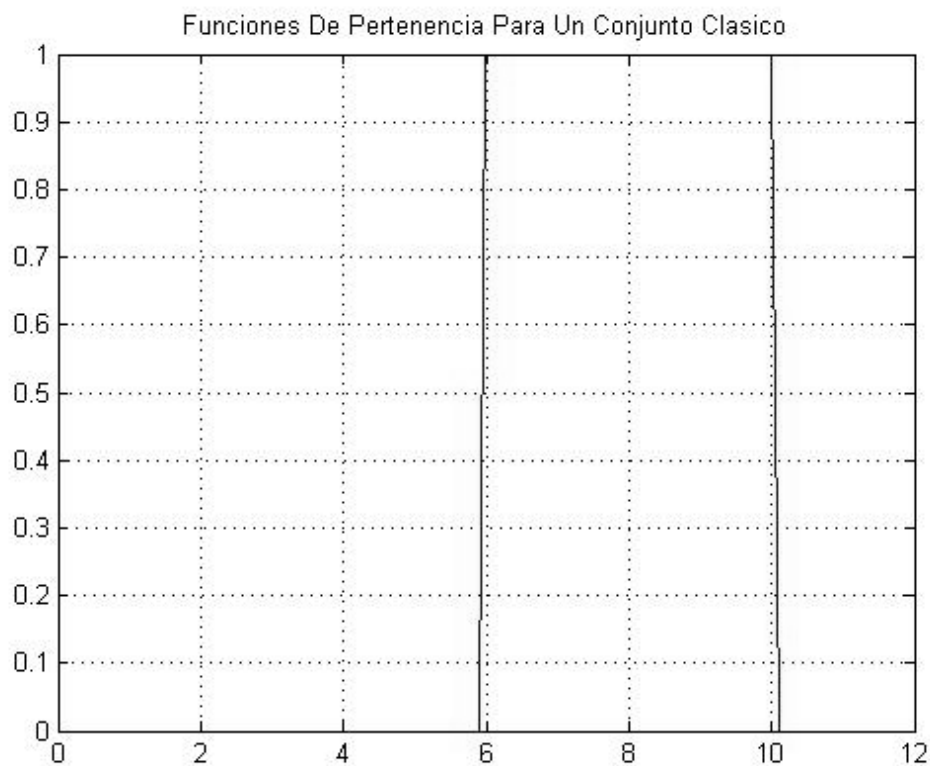
Por ejemplo,

$X = \text{Numeros entre } 0 \text{ y } 10$

$A = \{x, x > 5\} = \{6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10\}$

Por ejemplo si A representa el conjunto de las personas consideradas altas es obvio que no se tiene una frontera nítida, se puede decir que hay una frontera para el concepto de alto por ejemplo 1.80mts, ¿que se puede decir de una persona que mida 1.79mts o 1.81mts?, si una persona baja es aquella que esta por debajo de 1,60mts, se puede apreciar un intervalo donde no es claro si es alto o bajo, en estas situaciones es donde los conjuntos difusos entran a jugar un importante rol, permitiendo conjuntos en los cuales los grados de pertenencia tienen valores entre $[0,1]$.

Figura 1. Función de Pertenencia para un conjunto clásico



En la teoría difusa, es posible definir conjuntos los cuales tienen su frontera con cierta vaguedad, y es denotad por:

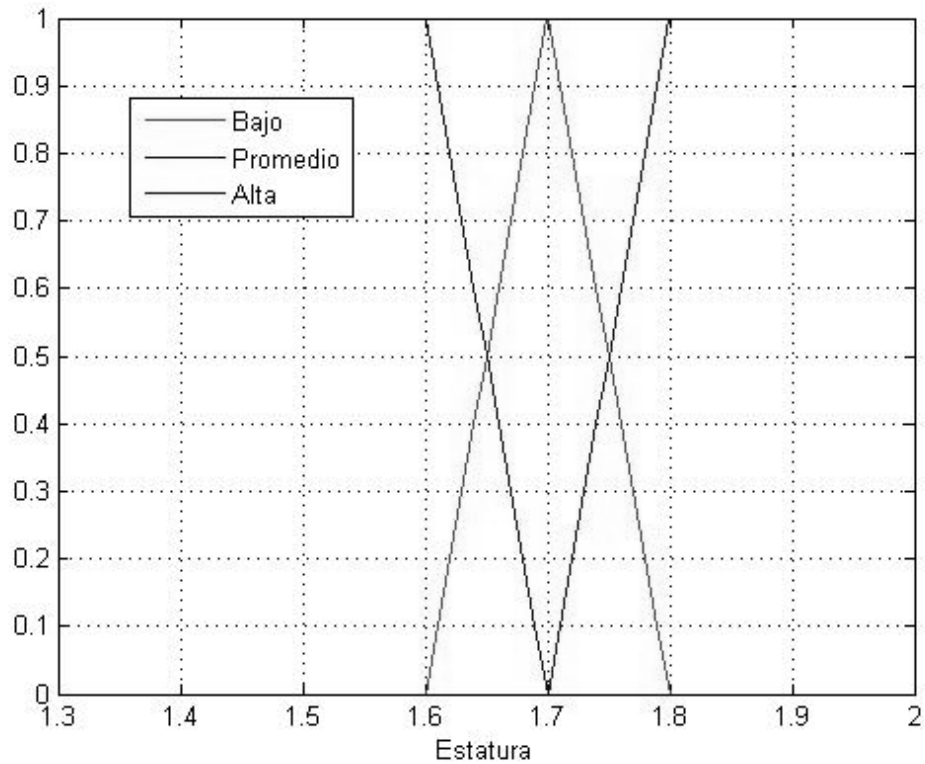
$$\begin{aligned} A &= \sum_{i=1}^j \mu_{A^0}(x_i) / x_i \\ &= \mu_{A^0}(x_1) / x_1 + \mu_{A^0}(x_2) / x_2 + \dots + \mu_{A^0}(x_m) / x_m \end{aligned}$$

La función de pertenencia para un conjunto difuso provee un valor el cual indica la posibilidad o el grado de pertenencia.

Por ejemplo se tiene un grupo de cinco estudiantes, se desea realizar la clasificación de la estatura del grupo dentro tres conjuntos difusos (Bajo \tilde{B} , Promedio \tilde{P} , Alto \tilde{A}).

$$S = \{1.58 \ 1.85 \ 1.81 \ 1.75 \ 1.62\}$$

Figura 2. Conjuntos difusos para Bajo, Promedio, Alto.



Los conjuntos difusos obtenidos son los siguientes

$$\tilde{A}_1^0 = \{\langle 1.58, \mu_{\tilde{A}_1^0}(1.58) \rangle, \langle 1.85, \mu_{\tilde{A}_1^0}(1.85) \rangle, \langle 1.81, \mu_{\tilde{A}_1^0}(1.81) \rangle, \langle 1.75, \mu_{\tilde{A}_1^0}(1.75) \rangle, \langle 1.62, \mu_{\tilde{A}_1^0}(1.62) \rangle\}$$

$$\tilde{A}_1^0 = \{(1.58, 0), (1.85, 1), (1.81, 1), (1.75, 5), (1.62, 0)\}$$

$$\tilde{P}_1^0 = \{\langle 1.58, \mu_{\tilde{P}_1^0}(1.58) \rangle, \langle 1.85, \mu_{\tilde{P}_1^0}(1.85) \rangle, \langle 1.81, \mu_{\tilde{P}_1^0}(1.81) \rangle, \langle 1.75, \mu_{\tilde{P}_1^0}(1.75) \rangle, \langle 1.62, \mu_{\tilde{P}_1^0}(1.62) \rangle\}$$

$$\tilde{P}_1^0 = \{(1.58, 0), (1.85, 0), (1.81, 0), (1.75, 0.5), (1.62, 0.2)\}$$

$$\tilde{B}_1^0 = \{\langle 1.58, \mu_{\tilde{B}_1^0}(1.58) \rangle, \langle 1.85, \mu_{\tilde{B}_1^0}(1.85) \rangle, \langle 1.75, \mu_{\tilde{B}_1^0}(1.75) \rangle, \langle 1.81, \mu_{\tilde{B}_1^0}(1.81) \rangle, \langle 1.62, \mu_{\tilde{B}_1^0}(1.62) \rangle\}$$

$$\tilde{B}_1^0 = \{(1.58, 1), (1.85, 0), (1.81, 0), (1.75, 0), (1.62, 0.8)\}$$

El grado de pertenencia del conjunto clásico S a las nociones difusas de estatura Baja, Promedio y Alta, puede ser cuantificada por medio de las diferentes funciones de pertenencia μ_{B^0} , μ_{P^0} y μ_{A^0} , tal que:

$$A^0 = \sum_{i=1}^n \mu_{B^0}(s_i) / s_i$$

El grado de membresía de S a la noción de estatura Baja, Promedio, Alta puede ser indicado por la suma de sus valores de las funciones de pertenencia, por

$$|A^0| = \sum_{s \in S} \mu_{B^0}(s)$$

El grado de pertenencia de S a la noción de Alto es:

$$|A^0| = 0 + 1 + 1 + 0.5 + 0 = 2.5$$

Promedio es:

$$|P^0| = 0 + 0 + 0 + 0.5 + 0.2 = 0.7$$

Bajo es:

$$|B^0| = 1 + 0 + 0 + 0 + 0.8 = 1.8$$

El análisis difuso de la estatura del grupo de estudiantes indica que este grupo puede ser significativamente clasificado como alto.

Como se puede apreciar las variables lingüísticas, son de una gran importancia, debido a su utilización para caracterizar conjuntos difusos

1.2 OPERACIONES DE CONJUNTOS DIFUSOS

Los conjuntos difusos tienen un número de operaciones que son cortamente descritas a continuación.

1.2.1 Contenido o subconjunto. El conjunto difuso A está contenido en el conjunto difuso B o A es un subconjunto de B si y solamente si $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ para todo x , en símbolos

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \mu_A(x) \leq \mu_B(x)$$

1.2.2 Unión o disyunción. La unión de dos conjuntos difusos A y B forma un conjunto difuso C cuya función de pertenencia relaciona a las de los conjuntos A y B como:

$$C = A \cup B$$

$$\mu_C(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x)) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x)$$

1.2.3 Intersección o conjunción. La intersección de dos conjuntos difusos A y B es un conjunto difuso C cuya función de pertenencia relaciona a las de los conjuntos A y B como:

$$C = A \cap B$$

$$\mu_C(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x)) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x)$$

1.2.4 Complemento o negación. El complemento de un conjunto difuso A, simbolizado por \bar{A} , es definido como:

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$$

1.3 CORTE α Y PRINCIPIO DE RESOLUCION

El corte α de un conjunto difuso es el conjunto en el cual los valores de la función de pertenencia son mayores o igual a α en el universo de discusión. Los cortes α son denotados como B_α^0

Una función de pertenencia puede ser representada aproximadamente en función de sus conjuntos de corte, por medio de:

$$B^0 = \int_0^1 \alpha B_\alpha^0$$

1.4 INFERENCIA DIFUSA

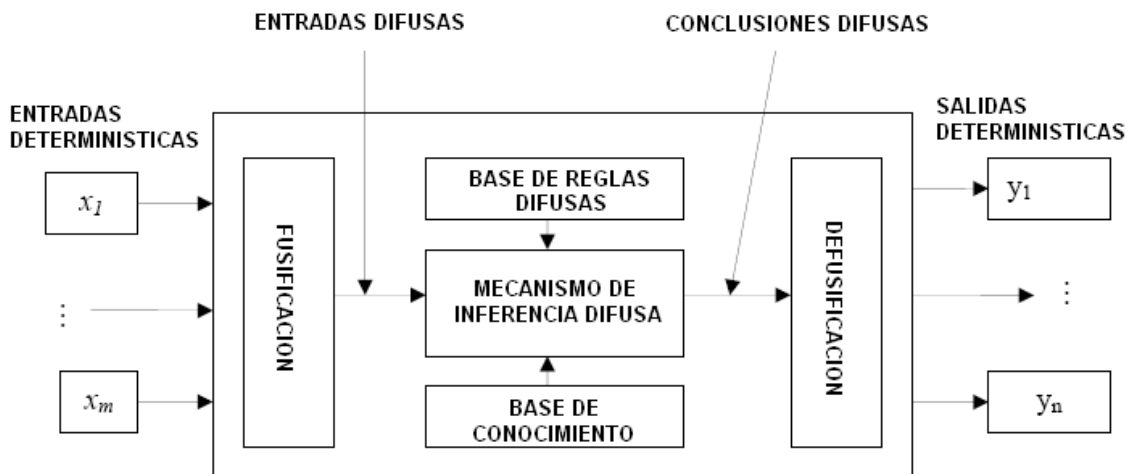
La estructura básica de un sistema de inferencia difusa consiste de tres componentes conceptuales:

- Una *base de reglas* que adopta reglas tipo *si → entonces*, si una condición es dada entonces una conclusión es inferida.
- Una *base de datos o diccionario* el cual define, el cual define las funciones de pertenencia utilizadas en las reglas difusas.
- Un *mecanismo de razonamiento*, el cual desarrolla el procedimiento de inferencia.

1.5 CONTROL LOGICO DIFUSO Y SISTEMAS TAKAGI SUGENO

El control difuso involucra la aplicación de inferencia difusa, las reglas de inferencia son lingüísticas y corresponden a conjuntos difusos. Las entradas son rusificadas y luego son aplicadas las reglas de inferencia lo cual produce salidas difusas. Las salidas difusas son transformadas en un valor para permitir su aplicación en sistemas físicos a través de un proceso llamado defusificación. Experiencia y conocimiento de expertos son esenciales para la creación de reglas difusas y funciones de pertenencia. El concepto general para la implementación de sistemas difusos se muestra en la Figura 3.

Figura 3. Esquema de implementación de un sistema difuso



Las reglas de inferencia son hechas bajo la subjetividad de un experto y su experiencia. Todas las reglas son generalmente evaluadas en paralelo y además deben ser aplicadas a todos los datos.

El uso de funciones matemáticas para establecer una relación entre las variables de entrada y salida como conclusión fue propuesto por *Takagi Sugeno* con el nombre de controladores difusos *Takagi Sugeno*; por ejemplo: *Si x es A , entonces $y = f(x)$* , donde A es un conjunto difuso y $y = f(x)$ es una función matemática.

2. INTRODUCCIÓN AL FILTRO KALMAN

El filtro Kalman utiliza un modelo interno para predecir la estimación inicial o a priori de los estados. Una corrección óptima que es una función del error entre la salida predicha y la salida actual del sistema es aplicada a la estimación de estados a priori para obtener un vector de salida refinado o a posteriori. En la formulación del filtro de Kalman, ambos el ruido del sistema (w) y el de medición (v) son tomados en cuenta. El ruido es considerado a ser blanco, lo cual significa que es aleatorio con media cero.

Considérese un sistema lineal discreto definido por la siguiente representación de estados:

$$X_{k+1} = A \times X_k + B \times U_k + w_k$$

$$Z_k = H \times X_k + v_k$$

Donde:

$X_k = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T$ Es el vector de estados o el conjunto mínimo de datos suficientes para describir el comportamiento dinámico del sistema.

$U_k = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n]^T$ Es el vector de entrada.

$Z_k = [z_1 \ z_2 \ \dots \ z_n]^T$ Es el vector de Salida.

A Es la matriz del sistema.

B Es la matriz de entrada.

H Es la matriz de salida.

w_k Es el ruido del sistema, asumido como aditivo, blanco y Gaussiano, con media cero y con matriz de covarianza $E[w_n \times w_k^T] = \begin{cases} Q_k & \text{para } n = k \\ 0 & \text{para } n \neq k \end{cases}$

v_k Es el ruido de la medición, asumido como aditivo, blanco y Gaussiano, con media cero y con matriz de covarianza $E[v_n \times v_k^T] = \begin{cases} R_k & \text{para } n = k \\ 0 & \text{para } n \neq k \end{cases}$

El ruido del sistema w_k no está correlacionado con el ruido de la medición v_k .

2.1 OBTENCION DEL ERROR DE COVARIANZA

Definiendo a:

\hat{X}_k^- Como la estimación a priori.

\hat{X}_k Como la estimación a posteriori.

Utilizando el modelo anterior del sistema para obtener la estimación a priori, se tiene que:

$$\hat{X}_{k+1}^- = A \times \hat{X}_k + B \times U_k$$

\hat{X}_k^- Es la estimación a priori y el error a priori asociado a esta estimación es:

$$e_k^- = X_k - \hat{X}_k^-$$

La matriz de covarianza del error a priori es obtenida como:

$$P_k^- = E[e_k^- \times e_k^{-T}]$$

Para obtener la corrección óptima que es aplicada a la estimación a priori de la anterior ecuación se necesitan expresiones matemáticas para las matrices de error a priori y a posteriori.

2.1.1 Obtención del error de covarianza a priori. El filtro de Kalman es un método recursivo, luego de predecir la estimación a priori usando el modelo del sistema, el filtro aplica una corrección óptima a la estimación a priori. La corrección óptima se deriva de examinar y expandir la ecuación de error a priori.

$$\begin{aligned} e_{k+1}^- &= X_{k+1} - \hat{X}_{k+1}^- = A \times X_k + B \times U_k + w_k - (A \times \hat{X}_k + B \times U_k) \\ &= A \times X_k - A \times \hat{X}_k + B \times U_k - B \times U_k + w_k \\ &= A \times (X_k - \hat{X}_k) + w_k \end{aligned}$$

La matriz de covarianza del error a priori se obtiene como:

$$\begin{aligned}
P_{k+1}^- &= E[e_{k+1}^- \times e_{k+1}^{-T}] = E\left[\left\{A \times (X_k - \hat{X}_k) + w_k\right\} \times \left\{A \times (X_k - \hat{X}_k) + w_k\right\}^T\right] \\
&= E\left[A \times (X_k - \hat{X}_k) \times (X_k - \hat{X}_k)^T \times A^T\right] + E\left[w_k \times (X_k - \hat{X}_k)^T \times A^T\right] + \\
&\quad E\left[A \times (X_k - \hat{X}_k) \times w_k^T\right] + E\left[w_k \times w_k^T\right]
\end{aligned}$$

Como w_k es ruido blanco y no correlacionado con $A \times (X_k - \hat{X}_k)$, los términos

$E\left[w_k \times (X_k - \hat{X}_k)^T \times A^T\right]$ y $E\left[A \times (X_k - \hat{X}_k) \times w_k^T\right]$ son igual a cero.

Se obtiene que:

$$\begin{aligned}
P_{k+1}^- &= E[e_{k+1}^- \times e_{k+1}^{-T}] = E\left[A \times (X_k - \hat{X}_k) \times (X_k - \hat{X}_k)^T \times A^T\right] + E\left[w_k \times w_k^T\right] \\
&= A \times E\left[(X_k - \hat{X}_k) \times (X_k - \hat{X}_k)^T\right] \times A^T + E\left[w_k \times w_k^T\right]
\end{aligned}$$

Sea e_k el error a posteriori y definido como:

$$e_k = X_k - \hat{X}_k$$

Entonces el correspondiente error de covarianza es obtenido como

$$P_k = E[e_k \times e_k^T]$$

Además,

$$E[w_k \times w_k^T] = Q_k$$

Se obtiene que:

$$P_{k+1}^- = E[e_{k+1}^- \times e_{k+1}^{-T}] = A \times P_k \times A^T + Q_k$$

Esta ecuación puede ser usada para proyectar la matriz de covarianza del error a priori para el próximo paso usando P_k , la covarianza del error a posteriori y Q_k , la matriz de covarianza del ruido del sistema.

2.1.2 Deducción de la covarianza del error a posteriori y la ganancia.

La corrección óptima del filtro de Kalman a la estimación de estados a priori X_k^- , consiste en la multiplicación de la ganancia de Kalman por el error de la estimación de la salida a priori, tal que:

$$\hat{X}_k = \hat{X}_k^- + K_k \times (y_k - C \times \hat{X}_k^-)$$

La ganancia de Kalman se encarga de minimizar la matriz de covarianza del error a posteriori P_k , y por lo tanto optimiza la estimación a posteriori X_k , el error a posteriori es escrito como:

$$\begin{aligned} e_k^- &= X_k - \hat{X}_k^- = X_k - \hat{X}_k^- + K_k \times (y_k - C \times \hat{X}_k^-) \\ &= X_k - \hat{X}_k^- + K_k \times (C \times X_k + v_k - C \times \hat{X}_k^-) \\ &= X_k - \hat{X}_k^- - K_k \times C \times X_k - K_k \times v_k + K_k \times C \times \hat{X}_k^- \\ &= (I - K_k \times C) \times X_k - (I - K_k \times C) \times \hat{X}_k^- - K_k \times v_k \\ &= (I - K_k \times C) \times (X_k - \hat{X}_k^-) - K_k \times v_k \end{aligned}$$

Entonces la matriz la matriz de covarianza del error a posteriori es:

$$\begin{aligned} P_k &= E[e_k^- \times e_k^{-T}] = E\left[\left\{(I - K_k \times C) \times (X_k - \hat{X}_k^-) - K_k \times v_k\right\} \times \left\{(I - K_k \times C) \times (X_k - \hat{X}_k^-) - K_k \times v_k\right\}^T\right] \\ &= E\left[(I - K_k \times C) \times (X_k - \hat{X}_k^-) \times (X_k - \hat{X}_k^-)^T \times (I - K_k \times C)^T\right] - \\ &\quad E\left[(I - K_k \times C) \times (X_k - \hat{X}_k^-) \times v_k^T \times K_k^T\right] - E\left[K_k \times v_k \times (X_k - \hat{X}_k^-)^T \times (I - K_k \times C)^T\right] + \\ &\quad E\left[K_k \times v_k \times v_k^T \times K_k^T\right] \end{aligned}$$

Como v_k es ruido blanco y no correlacionado con $(I - K_k \times C) \times (X_k - \hat{X}_k^-)$, los términos $E\left[(I - K_k \times C) \times (X_k - \hat{X}_k^-) \times v_k^T \times K_k^T\right]$ y

$E\left[K_k \times v_k \times (X_k - \hat{X}_k^-)^T \times (I - K_k \times C)^T\right]$ son igual a cero.

Se obtiene que:

$$\begin{aligned}
P_k &= E[e_k \times e_k^T] = E\left[(I - K_k \times C) \times (X_k - \hat{X}_k^-) \times (X_k - \hat{X}_k^-)^T \times (I - K_k \times C)^T\right] + E\left[K_k \times v_k \times v_k^T \times K_k^T\right] \\
&= (I - K_k \times C) \times E\left[(X_k - \hat{X}_k^-) \times (X_k - \hat{X}_k^-)^T\right] \times (I - K_k \times C)^T + K_k \times E[v_k \times v_k^T] \times K_k^T
\end{aligned}$$

Sea e_k el error a priori y definido como:

$$e_k^- = X_k - \hat{X}_k^-$$

Entonces el correspondiente error de covarianza es obtenido como

$$P_k^- = E[e_k^- \times e_k^{-T}]$$

Además,

$$E[v_k \times v_k^T] = R_k$$

Se obtiene que:

$$P_k = E[e_k \times e_k^T] = (I - K_k \times C) \times P_k^- \times (I - K_k \times C)^T + K_k \times R_k \times K_k^T$$

Reescribiendo:

$$\begin{aligned}
P_k &= (I - K_k \times C) \times P_k^- \times (I^T - C^T \times K_k^T) + K_k \times R_k \times K_k^T \\
&= (I - K_k \times C) \times P_k^- - (I - K_k \times C) \times P_k^- \times (C^T \times K_k^T) + K_k \times R_k \times K_k^T \\
&= (I - K_k \times C) \times P_k^- - P_k^- \times C^T \times K_k^T + K_k \times C \times P_k^- \times C^T \times K_k^T + K_k \times R_k \times K_k^T
\end{aligned}$$

La forma cuadrática $C \times P_k^- \times C^T + R_k$ se asume simétrica y definida positiva. Para minimizar P_k , se deriva la ecuación anterior con respecto a K_k y se iguala a cero.

$$0 = -P_k^- \times C^T + K_k \times C \times P_k^- \times C^T + K_k \times R_k$$

Se obtiene que

$$K_k = P_k^- \times C^T (C \times P_k^- \times C^T + R_k)^{-1}$$

Remplazando K_k en la ecuación de P_k se tiene:

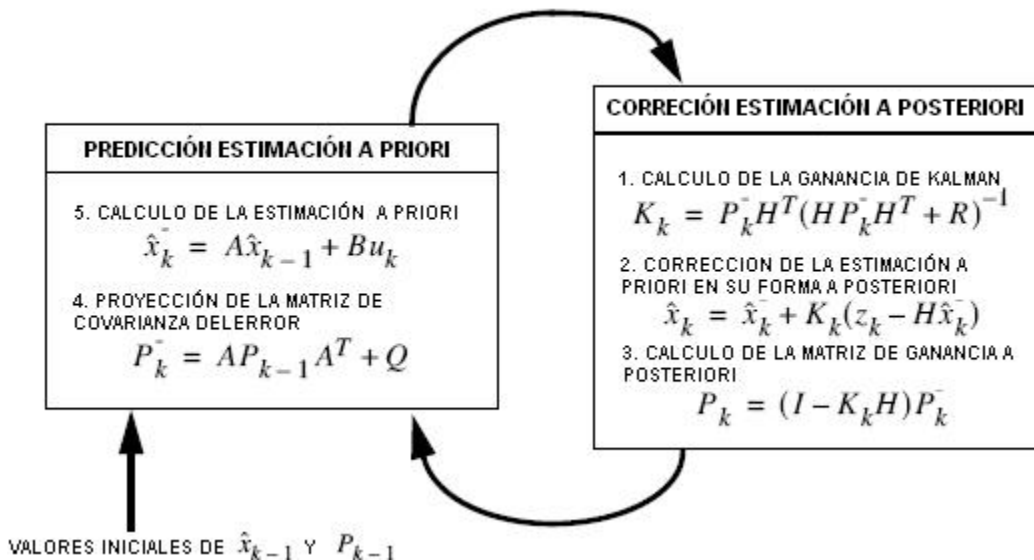
$$P_k = P_k^- - K_k \times C \times P_k^- = (I - K_k \times C) \times P_k^-$$

2.2 ALGORITMO Y PROCESO DE ESTIMACIÓN DEL FILTRO KALMAN

El objetivo del filtro Kalman es minimizar la covarianza de la matriz de error e_k con al intención de obtener una estimación óptima \hat{X}_k de la señal estocástica X_k .

El proceso de estimación involucra la computación de la ganancia de Kalman K_k (paso 1). Esta ganancia es usada en conjunto con el error en la predicción de la salida, para corregir la estimación del vector de estado en su forma a posteriori (paso 2). La matriz de covarianza del error es computada para la actualización a posteriori y una proyección de esta para el siguiente ciclo es obtenida (paso 3 y 4). Una estimación a priori de el vector de estados es predicho para el próximo ciclo de iteración usando el modelo del sistema (paso 5). En la Figura 4 son mostrados los pasos del algoritmo.

Figura 4. Algoritmo del filtro Kalman.



3. FILTRO KALMAN DIFUSO BASADO EN LYAPUNOV

El siguiente desarrollo es el planteamiento de un modelo difuso sencillo y novedoso para la estimación de estados basado en el filtro Kalman y en el criterio de estabilidad de Lyapunov. Este estimados difuso se basa en dos aspectos principales la matriz de ganancia de estado del filtro Kalman K y su razón de cambio ΔK la cual es calculada a través de la función de Lyapunov y su función de sensibilidad.

3.1 DISEÑO DEL FILTRO KLD “KALMAN - LYAPUNOV - DIFUSO”

La estabilidad de un sistema es un requerimiento básico para un sistema de control. El criterio de estabilidad de Lyapunov: *“Un sistema vibratorio es estable si su energía total se reduce continuamente, hasta alcanzar un estado de equilibrio”*, es una de las metodologías más utilizadas para analizar la estabilidad de un sistema.

De acuerdo con la teoría de Lyapunov, con la definición de una función positiva V_k y la verificación que su diferencia es negativa $\Delta V_k < 0$ garantiza la estabilidad del sistema. Por la anterior razón se utiliza la función de Lyapunov como un índice de desempeño para generar sistemáticamente las reglas difusas.

Se tiene entonces las ecuaciones de predicción a priori y a posteriori:

$$\hat{X}_k^- = A \times \hat{X}_{k-1} + B \times U_{k-1}$$

$$\hat{X}_k = \hat{X}_k^- + K_k^0 \times (z_k - C \times \hat{X}_k^-)$$

Donde K_k^0 es la matriz de ganancia de corrección difusa, que se diseña no solo para garantizar la estabilidad del sistema, y además hacer la estimación de estado \hat{X}_k acercarse al estado verdadero X_k .

Se define la función de Lyapunov como:

$$V_k = e_k^T e_k$$

Donde $e_k = [X_k - \hat{X}_k]$ es el vector de error de la estimación de estados. El objetivo principal del filtro difuso propuesto es determinar $K_k^{\%}$ tal que la diferencia de la función de Lyapunov $\Delta V_k = V_k - V_{k-1} < 0$ sea negativa.

La función de sensibilidad viene dada por:

$$S_k = \frac{\partial V_k}{\partial K_k^{\%}} = \frac{V_k - V_{k-1}}{K_k^{\%} - K_{k-1}^{\%}} = \frac{\Delta V_k}{\Delta K_k^{\%}}$$

Entonces:

$$\Delta V_k = \sum_i^m \sum_j^n \Delta V_{i_k} \approx \sum_i^m \sum_j^n \frac{\partial V_i}{\partial K_{ij}^{\%}} \Delta K_{ij}^{\%} \approx \sum_i^m \sum_j^n S_{ij} \Delta K_{ij}^{\%}$$

Donde $K_{ij}^{\%}$ es la ij -ésima entrada de la matriz de ganancia difusa y $\Delta K_{ij}^{\%}$ es el valor de la variación a ser determinado. El propósito del diseño de un sistema difuso es generar un posible $K_{ij}^{\%}$ tal que $\frac{\partial V_i}{\partial K_{ij}^{\%}} \Delta K_{ij}^{\%} < 0$ y además ΔV_k sea siempre negativa.

Por lo anterior la selección del signo de $K_{ij}^{\%}$ debe ser opuesto al de S_{ij} .

$$\text{signo}(\Delta \hat{K}_{ij}) = -\text{signo}\left(\frac{\partial V_i}{\partial \hat{K}_{ij}}\right) = -\text{signo}(S_{ij})$$

El ij -ésimo elemento de la matriz de ganancia difusa es representado como:

$$\hat{K}_{ij(k+1)} = \hat{K}_{ij(k)} + \Delta \hat{K}_{ij(k+1)}$$

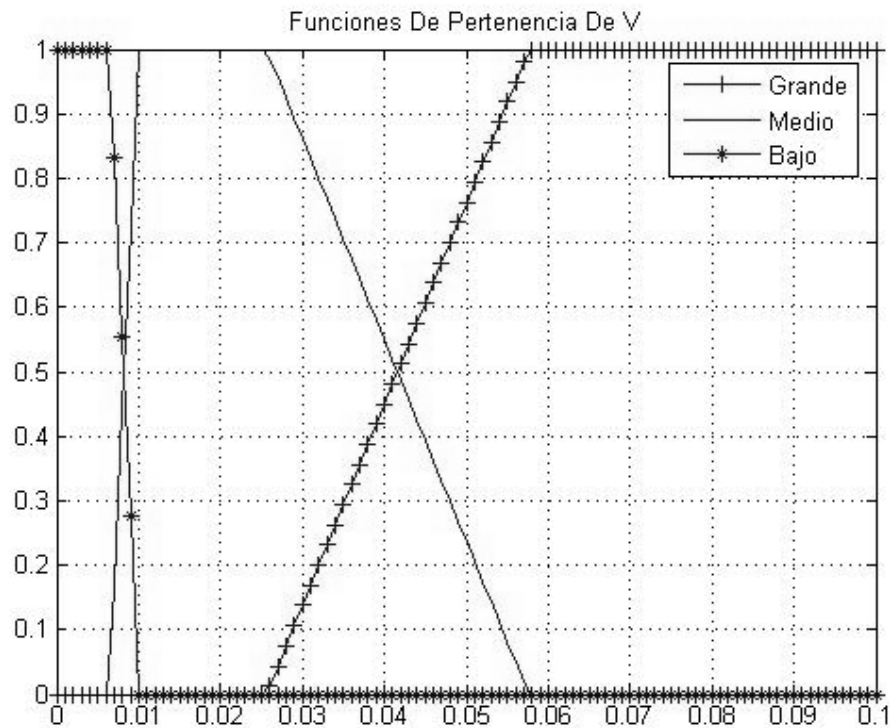
3.2 FUNCIONAMIENTO DEL FILTRO KLD

El funcionamiento del sistema se puede describir de la siguiente forma: La función de Lyapunov V_k se considera como la distancia entre el estado estimado y el estado actual, la principal intención del observador es disminuir la distancia entre el estado observado \hat{X}_k del estado real X_k tanto como sea posible, por esto la función V_k se descompone en tres partes: Grande, Medio y pequeño en la Figura 5

se puede apreciar las funciones de pertenencia utilizadas para las pruebas realizadas.

El signo de ΔV_k ilustra el cambio de V_k e indica si la estimación esta convergiendo o divergiendo al estado real; por lo anterior una acción de control mayor debe ser tomada si la estimación esta divergiendo $\Delta V_k \geq 0$ y una acción de control mediana se realiza para hacer que la estimación siga hacia el estado deseado y una acción pequeña si se cumple que V_k es pequeño y ΔV_k es negativo en la Figura 6 se puede apreciar las funciones de pertenencia para ΔV .

Figura 5. Funciones de pertenencia de V .



Las reglas del filtro difuso son expresadas como: $\Delta \hat{K}_{k+1} = FLDV(V_k, \Delta V_k, S_k)$, donde $FLD(\dots)$ indica una función de decisión lingüística difusa; las reglas difusas son expresadas en términos de tres variables de entrada y una variable de salida; Todas las reglas son vistas en la Tabla 2.

Tabla 1. Tabla de funciones de salida.

NVB	NMB	NB	NM	NS	NZ	C	PZ	PS	PM	PB	PMB	PVB
-0.3	-0.1	-0.05	-0.01	-0.001	-0.0005	0	0.0005	0.001	0.01	0.05	0.1	0.3

Figura 6. Funciones de pertenencia de ΔV .

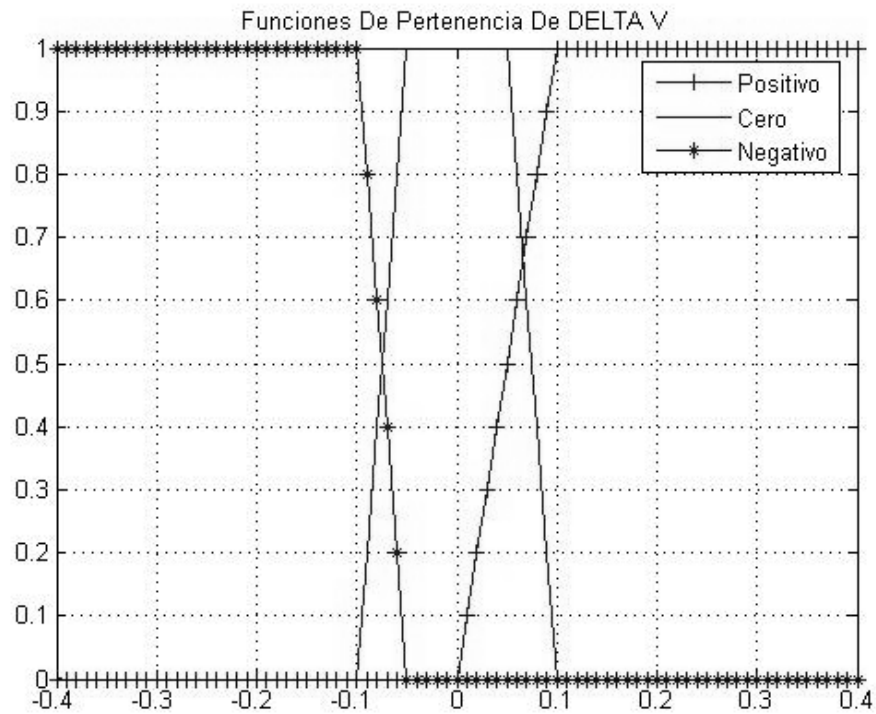


Figura 7. Funciones de pertinencia de S .

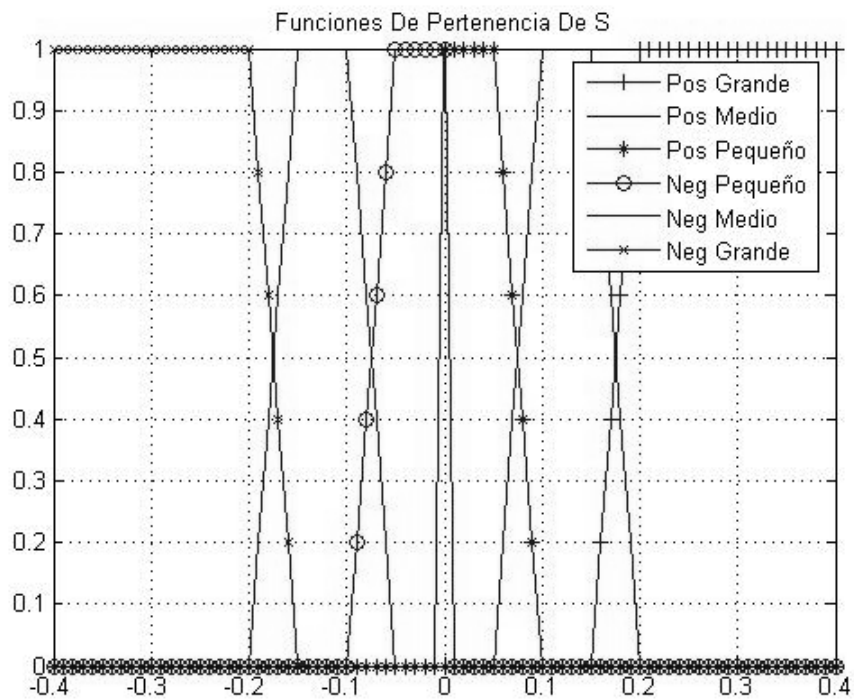


Tabla 2. Tabla de Reglas Difusas.

$\Delta K_{ij}(k+1)$			Sij					
			PB	PM	PS	NS	NM	NB
V(k) Grande	$\Delta V(k)$	P	NMB	NB	NVB	PVB	PB	PMB
		Z	NM	NMB	NB	PB	PMB	PM
		N	NS	NM	NMB	PMB	PM	PS
V(k) Medio	$\Delta V(k)$	P	NM	NMB	NB	PB	PMB	PM
		Z	NS	NM	NMB	PMB	PM	PS
		N	NZ	NS	NM	PM	PS	PZ
V(k) Pequeño	$\Delta V(k)$	P	NS	NM	NMB	PMB	PM	PS
		Z	ZR	NZ	NS	PS	PZ	ZR
		N	NZ	NS	NM	PM	PS	PZ

3.3 ALGORITMO Y PROCESO DE ESTIMACION DEL FILTRO LKD.

El objetivo del Filtro LKD es generar un posible K_{ij}^0 tal que $\frac{\partial V_i}{\partial K_{ij}^0} \Delta K_{ij}^0 < 0$ y además ΔV_k sea siempre negativa.

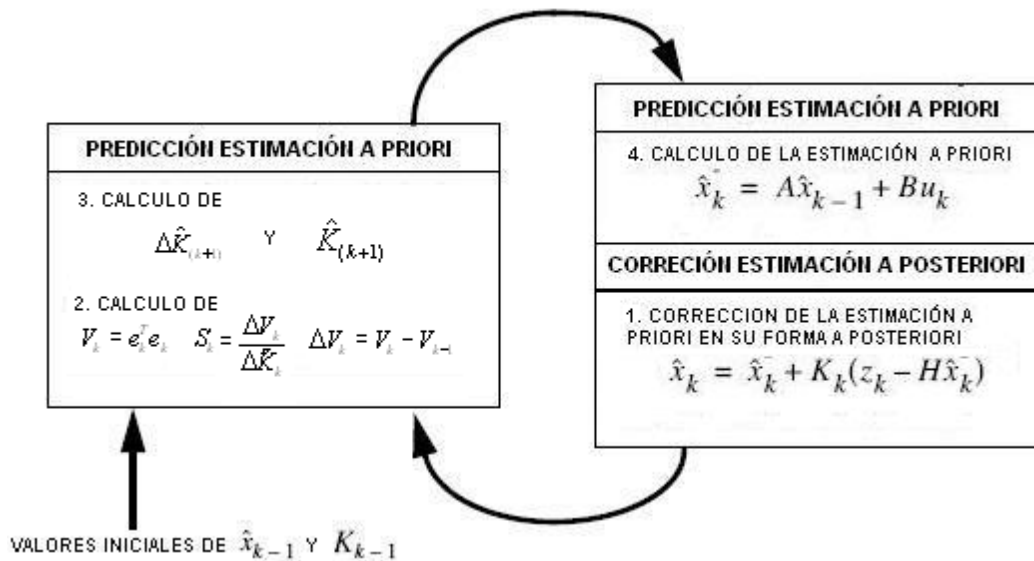
Se debe escoger una matriz de ganancia inicial apropiada K_0^0 ; debido a que es independiente de la suposición inicial de P_0 , entonces K_0^0 se calcula con las siguientes ecuaciones

$$A^T P A - P - A^T P H (H^T P H + R)^{-1} H^T P A_d + \Gamma Q \Gamma^T = 0$$

$$K_0 = P H^T R^{-1}$$

El proceso de estimación involucra el calculo de la estimación a posteriori \hat{X}_k a través del estado a priori calculado \hat{X}_k^- (ó el valor inicial de X_0) y la ganancia calculada en el anterior ciclo K_k^0 (paso 1). Luego se calcula el valor de la función de Lyapunov V_k , el valor de ΔV_k y de S_k para calcular el valor de $\Delta \hat{K}_{(k+1)}$ (paso 2).

Con el valor de $\Delta\hat{K}_{(k+1)}$ es calculada la ganancia $\hat{K}_{(k+1)}$ para el siguiente ciclo e igualmente el estado a priori \hat{X}_{k+1}^- para el siguiente ciclo (*paso 3 y 4*).
 Figura 8. Algoritmo del Filtro KLD.



3.4 RESULTADO DE LAS SIMULACIONES.

Para ilustrar la efectividad del Filtro KLD propuesto se considero un sistema lineal de segundo orden con los siguientes parámetros.

$$\xi = 0.3 \quad \omega = 6.28 \quad Q = 1 \quad R = 0.1$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\xi\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \omega^2 \end{bmatrix} w(t)$$

$$z(t) = x_1(t) + v(t)$$

$$Tmu = 0.01sg$$

Los resultados de la simulación se pueden apreciar en la Figura 9 para x_1 y en la Figura 10 para x_2 . Se puede apreciar que el filtro KLD es más cercano al valor real. Se realizaron 100 simulaciones de Monte Carlo y el promedio del valor medio y de la desviación estándar son mostrados en la Tabla 3 y Tabla 4, para x_1 y x_2 respectivamente. En donde se puede apreciar que el Filtro KLD tiene mejor

desempeño que el Filtro Kalman convencional.

Tabla 3. Tabla de resultados para x_1 .

	X1(t)	
	Media	Desviación Standard
Filtro Kalman	0.0882	0.1075
Filtro Difuso	0.0838	0.1014

Figura 9. Resultado de la estimación de x_1

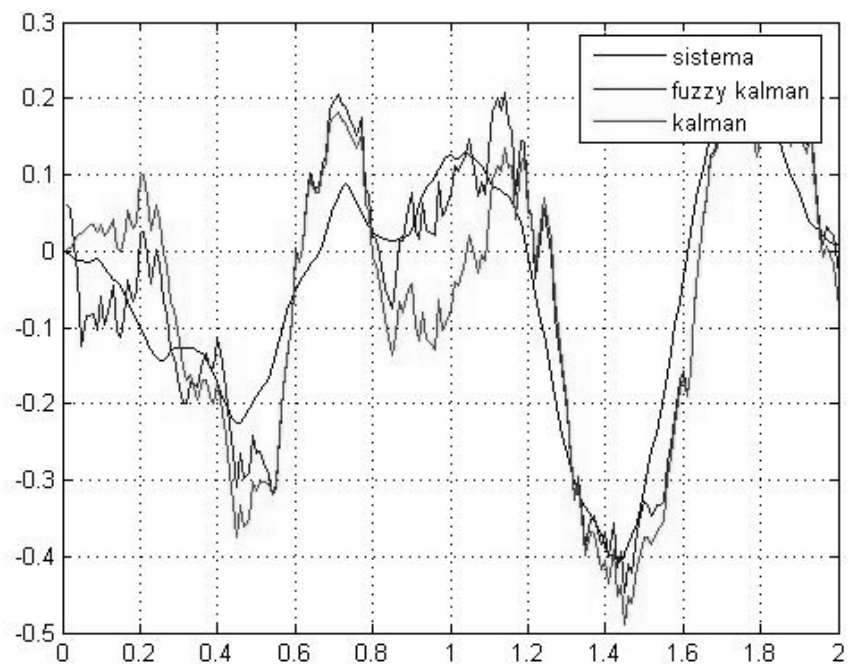
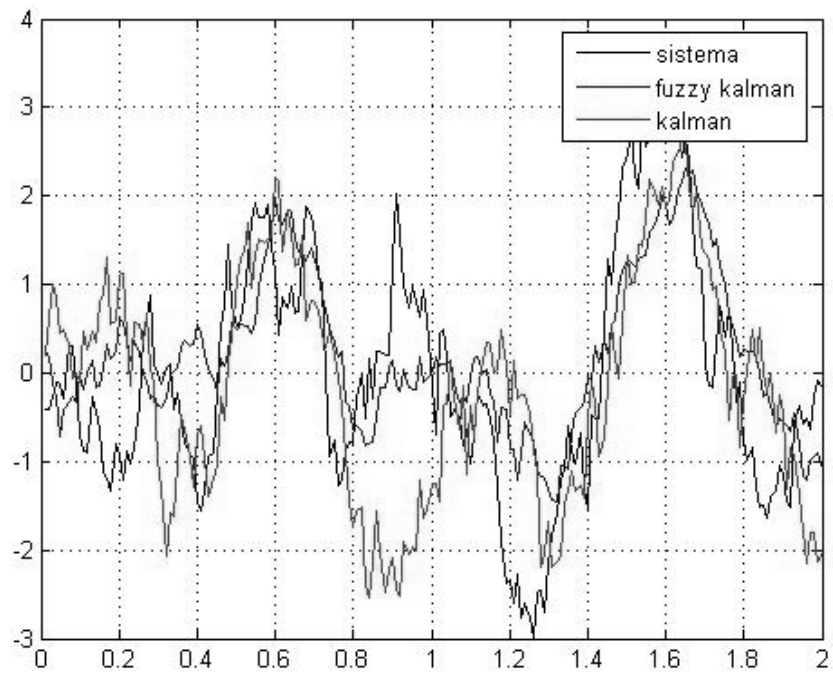


Tabla 4. Tabla de resultados para x_2 .

	X2(t)	
	Media	Desviación Standard
Filtro Kalman	1.1586	1.4193
Filtro Difuso	0.8908	1.0829

Figura 10. Resultado de la estimación de x_2



4. CONCLUSIONES

El Filtro KLD garantiza la estabilidad para la estimación y realiza una mejor estimación; adicionalmente, la ganancia del Filtro KLD puede ser obtenida sencillamente a través de reglas difusas basadas en la teoría de estabilidad de Lyapunov.

El filtro de Kalman necesita ser sintonizado de acuerdo a la matriz del sistema, el ruido y el nivel de incertidumbre, si las condiciones cambian invalidan la sintonización del filtro tales como un aumento en el ruido de medición. El estudio preliminar con la introducción de metodologías difusas de las simulaciones logra una mejor adaptación del proceso de estimación a características cambiantes del sistema y ruido.

Las ventajas principales del Filtro KLD son su bajo costo computacional y su facilidad al ser implementado.

BIBLIOGRAFÍA

GELB ARTHUR, Joseph F. Kasper Jr., Raymond A. Nash Jr., Charles F. Price, Arthur A. Sutherland Jr., Applied optimal estimation. The M.I.T. press, 2001.

JANG J. S. ROGER, Ned Gulley, Matlab Fuzzy Logic Toolbox. Mathworks 1997.

MCGINNITY S., G. Irwin, Nonlinear Kalman Filtering Using Fuzzy Local Linear Models. Control Engineering Research Group, Department of Electrical and Electronic Engineering, The Queen's University of Belfast, Belfast, UK, BT9 5AH.

MENDEL JERRY M., "Fuzzy Logic Systems for Engineering: A Tutorial". IEEE 1995.

MESA A. GRANDE, Observadores Difusos y Control Adaptable Difuso Basado en Observadores. Centro de investigación y de estudios avanzados del instituto politécnico nacional, 2003, pp. 49–56.

PEI NENG SHENG, Desing of Fuzzy Logic Based Estimators And Their Applications. National Cheng Kung University, Taiwan, China, 2002.

TORRES ALVARO, Estimación con base en mediciones. Universidad de los Andes, Facultad de Ingeniería, 2004.

WELCH G., G. Bishop, An Introduction to the Kalman Filter. Department of Computer Science, University of North Carolina at Chapel Hill, Chapel Hill, NC 27599-3175, April 5, 2004

ANEXO A

El siguiente es el código desarrollado en Matlab para la simulación realizada.

EL siguiente código crea el sistema difuso tipo *Takagi - Sugeno*

```

sis=newfis('Sistema','sugeno','min','max','prod','max','wtaver')

sis=addvar(sis,'input','V',[0 1]);
sis=addmf(sis,'input',1,'big','trapmf',[0.0256 0.0576 1 1.5]);
sis=addmf(sis,'input',1,'medium','trapmf',[0.0064 0.01 0.0256 0.0576]);
sis=addmf(sis,'input',1,'small','trapmf],[-0.01 -0.0064 0.0064 0.01]);

sis=addvar(sis,'input','DeltaV',[-1 1]);
sis=addmf(sis,'input',2,'Positivo','trapmf',[0 0.1 1 2]);
sis=addmf(sis,'input',2,'Zero','trapmf',[-0.1 -0.05 0.05 0.1]);
sis=addmf(sis,'input',2,'Negativo','trapmf',[-2 -1 -0.1 -0.05]);

sis=addvar(sis,'input','S',[-1 1]);
sis=addmf(sis,'input',3,'PG','trapmf',[0.15 0.2 1 1.1]);
sis=addmf(sis,'input',3,'PMe','trapmf',[0.05 0.1 0.15 0.2]);
sis=addmf(sis,'input',3,'PP','trapmf',[0 0 0.05 0.1]);
sis=addmf(sis,'input',3,'NP','trapmf',[-0.1 -0.05 0 0]);
sis=addmf(sis,'input',3,'NMe','trapmf',[-0.2 -0.15 -0.1 -0.05]);
sis=addmf(sis,'input',3,'NG','trapmf',[-1.1 -1 -0.2 -0.15]);

sis=addvar(sis,'output','DeltaK',[-1 1]);
sis=addmf(sis,'output',1,'NVB','constant',[-0.1]);
sis=addmf(sis,'output',1,'NMB','constant',[-0.05]);
sis=addmf(sis,'output',1,'NB','constant',[-0.02]);

sis=addmf(sis,'output',1,'NM','constant',[-0.01]);
sis=addmf(sis,'output',1,'NS','constant',[-0.001]);
sis=addmf(sis,'output',1,'NZ','constant',[-0.0005]);

sis=addmf(sis,'output',1,'PZ','constant',[0.0005]);
sis=addmf(sis,'output',1,'PS','constant',[0.001]);
sis=addmf(sis,'output',1,'PM','constant',[0.01]);

sis=addmf(sis,'output',1,'PB','constant',[0.02]);
sis=addmf(sis,'output',1,'PMB','constant',[0.05]);
sis=addmf(sis,'output',1,'PVB','constant',[0.1]);

sis=addmf(sis,'output',1,'ZR','constant',[0.00001]);

ruleList=[ ...

```

1 1 1 2 1 1
1 1 2 3 1 1
1 1 3 1 1 1
1 1 4 12 1 1
1 1 5 10 1 1
1 1 6 11 1 1
1 2 1 4 1 1
1 2 2 2 1 1
1 2 3 3 1 1
1 2 4 10 1 1
1 2 5 11 1 1
1 2 6 9 1 1
1 3 1 5 1 1
1 3 2 4 1 1
1 3 3 2 1 1
1 3 4 11 1 1
1 3 5 9 1 1
1 3 6 8 1 1
2 1 1 4 1 1
2 1 2 2 1 1
2 1 3 3 1 1
2 1 4 10 1 1
2 1 5 11 1 1
2 1 6 9 1 1
2 2 1 5 1 1
2 2 2 4 1 1
2 2 3 2 1 1
2 2 4 11 1 1
2 2 5 9 1 1
2 2 6 8 1 1
2 3 1 6 1 1
2 3 2 5 1 1
2 3 3 4 1 1
2 3 4 9 1 1
2 3 5 8 1 1
2 3 6 7 1 1
3 1 1 5 1 1
3 1 2 4 1 1
3 1 3 2 1 1
3 1 4 11 1 1
3 1 5 9 1 1
3 1 6 8 1 1
3 2 1 13 1 1
3 2 2 6 1 1
3 2 3 5 1 1
3 2 4 8 1 1
3 2 5 7 1 1
3 2 6 13 1 1
3 3 1 6 1 1
3 3 2 5 1 1
3 3 3 4 1 1
3 3 4 9 1 1
3 3 5 8 1 1
3 3 6 7 1 1

IEMC-I-06-16

```
];  
sis=addrule(sis,ruleList);
```

El siguiente código es el utilizado para el calculo de K_0

```
[P L G] = dare(AD', CD', Gamma*Q*Gamma', R);  
K0 = P*CD'*inv(R);
```

El siguiente código es el utilizado para el calculo de V

```
e(:,k) = (Xa(:,k) - Xeaposteriori(:,k));  
M1(:,k) = e(1,k)*e(1,k);  
M2(:,k) = e(2,k)*e(2,k);
```

El siguiente código es el utilizado para el calculo de ΔV

```
deltaM1(:,k) = M1(:,k) - M1(:,k-1);  
deltaM2(:,k) = M2(:,k) - M2(:,k-1);
```

El siguiente código es el utilizado para el calculo de S

```
S1(:,1) = deltap1(:,1)/deltak1(:,1);  
S2(:,1) = deltap2(:,1)/deltak2(:,1);
```

El siguiente código es el utilizado para el calculo de ΔK

```
deltak1(:,2) = evalfis([If1(:,1) deltalp1(:,1) S1(:,1)], sis);  
deltak2(:,2) = evalfis([If2(:,1) deltalp2(:,1) S2(:,1)], sis);
```

ANEXO B

Se realizaron pruebas adicionales con el siguiente sistema.

$$\xi = 0.2 \quad \omega = 5 \quad Q = 4.77 \quad R = 0.01$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\xi\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \omega^2 \end{bmatrix} w(t)$$

$$z(t) = x_1(t) + v(t)$$

$$T_{mu} = 0.01 \text{sg}$$

Los resultados obtenidos después de 100 simulaciones de Monte Carlo de la estimación de estados del sistema a la respuesta de un escalón unitario son:

Tabla 5. Tabla de resultados para x_1 .

	X1(t)	
	Media	Desviación Standard
Filtro Kalman	0.0301	0.0382
Filtro Difuso	0.0286	0.0362

Figura 11. Resultado de la estimación de x_1

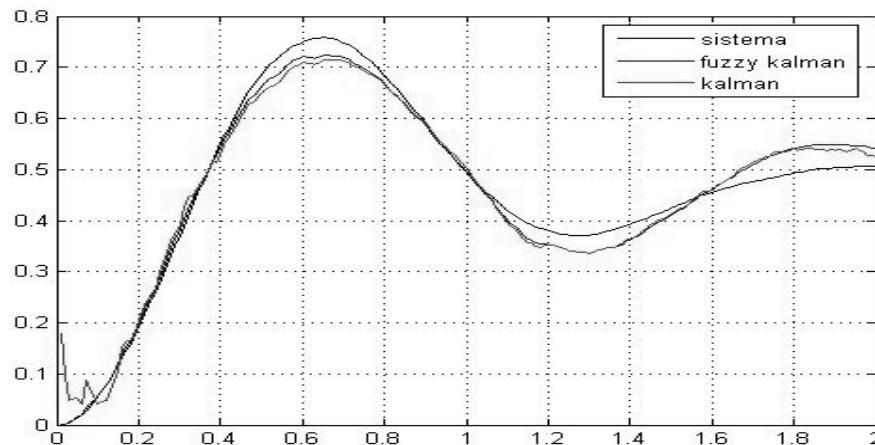


Tabla 6. Tabla de resultados para x_2 .

	X2(t)	
	Media	Desviación Standard
Filtro Kalman	0.1699	0.2157
Filtro Difuso	0.1620	0.2021

Figura 12. Resultado de la estimación de x_2 