TRANSFORMACIONES SUPERSIMETRICAS Y SUS GENERALIZACIONES EN MECANICA CUANTICA

by

José Orlando Organista Rodríguez

Submitted to the Departamento de Física
in partial fulfillment of the requirements for the degree of

Maestria en Física

at the

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES

Junio 2006

Signature of Author ....
Departamento de Física
12 de Diciembre de 2005

Accepted by ....
Dr. Marek Nowakowski
Director de Tesis

Índice general

Capítulo 1

Introducción

Mecánica Cuántica Supersimétrica [1],[2], métodos de factorización de operadores diferenciales [4], transformación de Darboux [3], generalización de Crum de la transformación de Darboux [5], y condición de invarianza de forma de potenciales compañeros supersimétricos [6] junto con una transformación definida a través de esta condición han sido en las últimas dos décadas una área activa de la física matemática. En particular, uno de los tópicos de mayor investigación ha sido el relacionado con operadores de Schrödinger iso-espectrales y la solubilidad analítica de problemas tipo Sturm-Liouville. Estas investigaciones han permitido una mayor comprensión en problemas de autovalores y ha servido como fuente de nuevas ideas y generalizaciones [14]. Distintos campos de la física han encontrado útiles estos desarrollos de la física matemática, basta nombrar los títulos de los últimos 5 libros [10], [11],[12],[13],[14], que recopilan algunos resultados obtenidos dentro de esta área: "Darboux Transformation and Solitons" (1991), "Supersymmetric Methods in Quantum and Statistical Physics" (1996), "Supersymmetry in Quantum Mechanics" (2001), "Supersymmetry in Quantum and Classical Mechanics" , (2001), "Mathematical Methods of Factorization and Feedback Approach for Biological Systems"(2005).

En esta introducción se muestran algunos momentos importantes en el desarrollo de estos temas de la física matemática con el fín de contextualizar la importancia del trabajo que se presenta en los capítulos subsiguientes y apreciar los resultados obtenidos y que están en el capítulo 4 de este trabajo de tesis.

En 1882 el geómetra francés G. Darboux establece un teorema relativo a ecuaciones diferenciales lineales de la forma

$$\frac{d^2y}{dx^2} = (f(x) + m)\, y \tag{1.1}$$

El teorema afirma que "cada vez que se sabe integrar la ecuación (1.1) para todos los valores de la constante m , se puede obtener una cadena infinita de ecuaciones, con el parámetro m contenido de la misma forma y para las cuales la integración será posible para todos los valores del parámetro".

Este teorema apareció por primera vez como un ejercicio en un libro famoso de ecuaciones diferenciales (1926),[15]. y actualmente se puede interpretar como un teorema de iso-espectralidad y/o covarianza de la ecuación de Schrödinger (ecuaciones tipo Schrödinger con el mismo espectro). El teorema se convirtió posteriormente (1981), [10], en la transformada de Darboux y como veremos más adelante esta transformada resultó ser equivalente a las transformaciones supersimétricas en mecánica cuántica.

El caso de iso-espectralidad de Darboux está íntimamente relacionado con los métodos de factorización de operadores diferenciales. Los métodos de factorización son procedimientos algebraicos potentes para determinar los valores y funciones propias de los operadores diferenciales. Dos momentos históricos importantes en este tema son dados en 1941 y 1951: En 1940-41, E. Schrödinger, [19], presenta una serie de artículos donde establece sus resultados de investigaciones sistemáticas sobre métodos y aplicaciones de factorizaciones de ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de segundo órden; en el artículo de 1941 presenta cuatro casos de factorización de la ecuación hipergeométrica. Recordemos que esta ecuación permite encontrar la función de Gauus desde la cual muchas funciones que ocurren en física son o casos especiales o un caso límite.

Una década después L. Infeld y T. E. Hull (1951), [4], escribieron un artículo influyente de más de 40 páginas dedicadas a un nuevo método de factorización de ecuaciones del tipo

$$\frac{d^2y}{dx^2} + r(x,m)\, y + \lambda y = 0 \tag{1.2}$$

En su artículo presentan seis casos de factorización los cuales contienen aplicaciones a modelos de la teoría de Maxwell y a la teoría cuántica. Es un estudio exhaustivo que pretende categorizar los problemas de potenciales solubles analíticamente (sistemas integrables).

En 1955 M.M. Crum, establece una generalización de la transformada de Darboux [5]. Su resultado permite escribir las soluciones de una familia de ecuaciones diferenciales tipo Schrödinger (Crum denominó a esta familia sistema asociado tipo Sturm Liouville) como un cociente de deteminantes Wronskianos. El caso para $n = 1$ corresponde a la transformada de Darboux. Es interesante mencionar que Crum, no hace referencia a Darboux. Esta metodología evita los pasos intermedios para la solubilidad de uno de los miembros de la familia generada iterativamente desde la metodología de Darboux.

En 1976 Wahlquist generaliza la metodología establecida por Crum a ecuaciones no lineales, en particular a la ecuación de Korteweg-de Vries.

En dos artículos que presenta en 1979, Matveev generaliza la propiedad de covarianza de Darboux a ecuaciones de evolución de la forma

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \sum_{m=0}^{n} u_m (x,t) \frac{\partial^m f}{\partial x^m} \tag{1.3}$$

con coeficientes escalares o matriciales y a ecuaciones diferenciales-en diferencias y puramente en diferencias (ecuaciones de evolución discretas), de la forma

$$\frac{\partial f_n}{\partial t} = \sum_{m=0}^{n} b_m (n,t) f_{n+m} \quad , \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, ... \tag{1.4}$$

Vale la pena mencionar que en estos dos artículos el autor usa por primera vez, directamente en el título, la expresión Transformada de Darboux.

Ahora bien, después de los estudios detallados sobre sistemas analíticos y discretamente integrables todo parecía suficientemente ordenado. Sin embargo, en 1981, E. Witten en la sección 6 ("some models") de su renombrado artículo "Dynamical Breaking of Supersymmetry", [2], muestra un caso en mecánica cuántica donde se ilustra de manera sencilla el rompimiento dinámico de una teoría supersimétrica. Pronto se notó que este "modelo de juguete" generaba un nuevo punto de vista en el estudio de la teoría de potenciales solubles en mecánica cuántica no relativista. El modelo de juguete presentado por E. Witten junto con un trabajo previo de Nicolai, [1], puede señalarse como el inicio de lo que actualmente se conoce en la literatura como mecánica cuántica supersimétrica (SUSY QM). Tomando la definición dada por Witten un sistema cuántico supersimétrico es un sistema en el cual hay operadores Q_i (conocidos como supercargas) que conmutan con el Hamiltoniano,

$$[Q_i, H] = 0 \quad , \quad i = 1, ..., N, \tag{1.5}$$

y satisfacen el álgebra

$$\{Q_i, Q_j\} = \delta_{ij} H \tag{1.6}$$

Para el caso $N = 2$ el Hamiltoniano supersimétrico está determinado por el par de Hamiltonianos relacionados por una transformada de Darboux. Esta relación entre SUSY QM y la transformación de Darboux fue notada por Borisov, Andrianov y Ioffe en sus estudios de Hamiltonianos matriciales multidimensionales, [16]. Desde entonces *las ideas de supersimetría* han sido exitosamente aplicadas a muchos problemas *en mecánica cuántica no relativista*[12].

Los potenciales correspondientes a cada Hamiltoniano del caso $N = 2$, se conocen como potenciales compañeros supersimétricos. Se tuvo más claridad con el descubrimiento de una simetría oculta en un par de potenciales compañeros supersimétricos. Esta simetría fue descubierta por Genhdenstein en 1983 y se conoce como invarianza de forma. Dos potenciales compañeros supersimétricos, u, u_1 se dicen que son invariantes de forma si

$$u_1 (x; a) = u (x; f (a)) + R (f (a)) \tag{1.7}$$

donde el potencial u_1 es la transformada de Darboux del potencial u y a representa los parámetros del potencial. SUSY QM junto con la condición de invarianza de forma permiten obtener el espectro y las funciones propias en una forma puramente algebraica, análogo al método de operadores de creación y destrucción para el potencial tipo oscilador. Como se mostrará más adelante, para potenciales invariantes de forma, el espectro viene determinado por

$$E_n = \sum_{k=1}^{n} R \left(f^k (a) \right) \tag{1.8}$$

y las funciones propias por

$$\psi_n (x; a) = \prod A^\dagger \left(x; f^k (a) \right) \psi_1 (x; a_{n+1}) \tag{1.9}$$

Así, las ideas supersimétricas junto con el resultado ("Shape Invariance Potentials") establecido por Gendenshtein[6] han permitido una mayor comprensión de porqué ciertos potenciales son analíticamente solubles. Además han permitido una conexión íntima entre las técnicas supersimétricas y el método de factorización para la ecuación de Schrödinger y esta conexión se ha hecho a través del resultado antiguo establecido por *Darboux* [3].

La condición matemática necesaria en el método de factorización (transformada de Darboux) corresponde a la condición física de invarianza de forma de los potenciales compañeros (SUSY partner potentials)

De esta forma las transformaciones supersimétricas, la transformada de Darboux, La transformada de Crum y la transformación que induce la condición de invarianza de forma de potenciales compañeros supersimétricos han llegado a convertirse en una área de investigción activa de la física matemática.

Matemáticamente todas estas transformaciones (transformaciones supersimétricas o equivalentemente la transformación de Darboux, La transformación de Crum, y la transformación inducida por la condición de invarianza de forma) no se muestran en forma evidente como equivalentes. Por ejemplo la transformación de Darboux no es la solución más general de la ecuación de Ricatti y por lo tanto no nos ofrece la transformación más general en conexión con potenciales iso-espectrales. Igualmente, la generalización de la transformación de Darboux, es decir, la transformación de Crum, parece mucho más complicada que la transformación iterativa de Darboux y pareciera generar nuevas familias de potenciales solubles. La complejidad aparente de la transformación de Crum contrasta con la sencillez de la transformación inducida por la condición de invarianza de forma.

Surge entonces la necesidad de al menos clasificar aquellas transformaciones de acuerdo a la complejidad o generalidad y descubrir las relaciones entre estas transformaciones. Después de dos capítulos preparatorios, donde desarrollamos el marco teórico básico, y de la demostración de algunos afirmaciones fundamentales (lemas) presentamos nuestro resultado fundamental: Bajo la condición de invarianza de forma y permitiendo el uso de transformaciones de Darboux de órden superior las tres transformaciones de un problema original de Sturm-Liouville son iguales. El resultado se basa en un teorema el cual nosotros establecimos y probamos. Tiene que ver con las transformaciones de Darboux de órden superior de potenciales invariantes de forma, denotados por $u\,[D]_k$. El teorema afirma que dado el potencial original satisfaciendo la condición de invarianza de forma, todos los potenciales vecinos $u\,[D]_k$, $u\,[D]_{k+1}$ son también mutuamente invariantes de forma. El teorema es probado por inducción, sin embargo, el proceso de inducción para potenciales, está entrelazado con un proceso de inducción para las funciones de onda, esta última conexión la hemos llamado invarianza de forma de las funciones de onda.

Nota. Uno de los jurados (A. Reyes) de este trabajo de grado hizo notar la existencia de un artículo[22], donde se consideran cadenas de transformaciones de Darboux para una ecuación matricial de Schrödinger. Los autores logran fórmulas alternativas que involucran deteminantes que se pueden considerar como generalizaciones de las fórmulas de determinantes tipo Crum-Krein.

Capítulo 2

La Transformada de Darboux

Sistemas integrables exactamente han atraido siempre la atención tanto de físicos como de matemáticos. Bajo ciertas circunstancias existe la posibilidad de construir, a partir de la solubilidad exacta de ciertas ecuaciones diferenciales (de interés para la física), nuevos sistemas integrables exactamente (de particular interés están los problemas de valores propios). La transformación de Darboux y la transformación de Crum son dos procedimientos que permiten construir familias de potenciales solubles a partir de un problema de Sturm-Liouville soluble exactamente. En este capítulo presentamos las transformadas de Darboux y de Crum. Ilustramos la riqueza de estos teoremas con un par de ejemplos.

2.1. La proposición de Darboux

Darboux estableció el siguiente teorema (1882):

Proposición 1 *Si la solución general $\psi = \psi(x)$ de la ecuación*

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = \{u(x) + \lambda\}\psi \tag{2.1}$$

es conocida para todos los valores de λ y si denotamos la solución particular para $\lambda = \lambda_1$ como $\psi = f(x)$, entonces, la solución general de la ecuación

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left\{f(x)\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{f(x)}\right) + \lambda - \lambda_1\right\}y \tag{2.2}$$

para $\lambda \neq \lambda_1$ *es*

$$y = \psi' (x) - \frac{f' (x)}{f (x)} \psi (x) \tag{2.3}$$

La demostración de este teorema junto con la solución de los ejemplos que se muestran en seguida, se encuentra en el apéndice (A).

Dos ejemplos sencillos, tomando $u (x) = 0$, permiten apreciar el poder de esta proposición.

1. Teniendo en cuenta la ecuación inicial

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = \lambda\psi \tag{2.4}$$

con $\lambda_1 = 0$, se puede integrar la ecuación

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left\{ \frac{2}{x^2} + \lambda \right\} y \tag{2.5}$$

Tomando esta última ecuación como inicial y repitiendo el proceso una y otra vez, con $\lambda_1 = 0$ se obtiene una familia de ecuaciones integrables de la forma,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left\{ \frac{m (m-1)}{x^2} + \lambda \right\} y \tag{2.6}$$

donde m representa un número entero.

2. Teniendo en cuenta la ecuación inicial

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = \lambda\psi \tag{2.7}$$

pero ahora escogiendo $\lambda_1 = -1$, se genera la familia de sistemas integrables:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left\{ \frac{m (m-1)}{\sin^2 x} + \frac{n (n-1)}{\cos^2 x} + \lambda \right\} y \tag{2.8}$$

donde m y n representan números enteros.

Comentarios:

- La proposición de Darboux permite generar un nuevo potencial soluble,

$$u\,[D] \equiv f\,(x)\,\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{f\,(x)}\right)\ , \tag{2.9}$$

  por $[D]$ queremos distinguir la transformación de Darboux de otras transformaciones, por ejemplo la transformación de Crum $[C]$.

- Las soluciones (2.3) de la nueva ecuación son determinadas por las soluciones de la ecuación original.

$$y = \psi'\,(x) - \frac{f'\,(x)}{f\,(x)}\psi\,(x) \tag{2.10}$$

- Aplicando reiteradamente la proposición de Darboux a las nuevas ecuaciones que se van generando se obtiene una familia de sistemas integrables exactamente.

- Aún en el caso más simple, $u\,(x) = 0$, la transformada de Darboux permite la construcción de ecuaciones no triviales (2.5).

- Nótese que dentro de una familia, los nuevos potenciales, *no alteran su dependencia espacial* , los parámetros son los que van cambiando.

- El espectro de la nueva ecuación diferencial es el mismo que el de la ecuación inicial, excepto por el valor propio inicial que realiza la transformada.

- Nótese que la ecuación diferencial inicial en la proposición de Darboux (2.1), no hace uso de condiciones de frontera. Esta libertad se refleja en la arbitrariedad de elección de λ_1

2.2. La proposición de Darboux como transformada

La proposición de Darboux (2.1), se puede adecuar para que se constituya fundamentalmente en un método y pueda posteriormente generalizarse y compararse con otros métodos de generación de sistemas integrables. La adecuación que nos interesa en nuestro trabajo es exigir que el problema inicial sea un problema de Sturm-Liouville [17].

Consideremos el problema de Sturm-Liouville

$$-\psi_s'' + u\psi_s = \lambda_s\psi_s \tag{2.11}$$

En tal caso los valores propios se pueden ordenar en forma creciente

$$\lambda_1 < \lambda_2 < ... < \lambda_n < \lambda_{n+1}... \tag{2.12}$$

Sean, $\psi_1, \psi_2, ..., \psi_n, ...$las funciones propias, respectivamente, correspondientes a los valores propios.

La proposición de Darboux se puede iniciar con $\lambda = \lambda_1$, y $f(x) = \psi_1(x)$. De esta forma el nuevo potencial (2.9) y sus soluciones respectivas (2.10) se pueden interpretar como transformaciones tanto del potencial como de las funciones propias originales. Denotamos estas transformaciones por

$$u \longrightarrow u[D]_{[1]} \quad , \quad \psi_s \longrightarrow \psi[D]_{[1],s} \ , \tag{2.13}$$

y teniendo encuenta (2.9, 2.10), se definen como:

$$\begin{cases} u[D]_{[1]} & \equiv & u - 2\frac{d}{dx}\frac{\psi_1'}{\psi_1} \\ \\ \psi[D]_{[1],s} & \equiv & \psi_s' - \frac{\psi_1'}{\psi_1}\psi_s \quad , \quad s > 1 \end{cases} \tag{2.14}$$

Esta transformación es la que se conoce como transformada de Darboux. [10].

La proposición de Darboux escrita en estos términos establece que la ecuación (2.11) *es covariante con respecto a la transformada de Darboux*. Es decir,

$$-\psi''[D]_{[1],s} + u[D]_{[1]}\psi[D]_{[1],s} = \lambda_s\psi[D]_{[1]} \tag{2.15}$$

Nótese que la tranformada de Darboux (2.14) se puede escribir en términos de los determinantes Wronskianos

$$W_{1,s} \equiv W(\psi_1, \psi_s) \quad \text{y} \quad W_1 \equiv \psi_1 \tag{2.16}$$

es decir,

$$\begin{cases} u[D]_{[1]} & = & u - 2\frac{d^2}{dx^2}\ln W_1 \\ \\ \psi[D]_{[1],s} & = & \frac{W_{1,s}}{W_1} \quad , \quad s > 1 \end{cases} \tag{2.17}$$

2.3. Transformada de Darboux de Orden Superior

Para el problema de Sturm-Liouville (2.11), se puede definir iterativamente la transformada de Darboux; por ejemplo, si tomamos como ecuación inicial la ecuación (2.15) el siguiente sistema integrable es,

$$-\psi''\left[D\right]_{[2],s} + u\left[D\right]_{[2]}\psi\left[D\right]_{[2],s} = \lambda_s \psi\left[D\right]_{[2]}$$

donde

$$\begin{cases} u\left[D\right]_{[1]} & \rightarrow & u\left[D\right]_{[2]} & \equiv & u\left[D\right]_{[1]} - 2\frac{d}{dx}\frac{\psi'[D]_{[1],2}}{\psi[D]_{[1],2}} \\ \psi\left[D\right]_{[1],s} & \rightarrow & \psi\left[D\right]_{[2],s} & \equiv & \psi'\left[D\right]_{[1],s} - \frac{\psi'[D]_{[1],2}}{\psi[D]_{[1],2}}\psi\left[D\right]_{[1],s} \quad , \quad s > 2 \end{cases} \tag{2.18}$$

En general, podemos definir transformaciones de Darboux de órden superior, iterativamente, mediante:

$$\begin{cases} u\left[D\right]_{[k-1]} \rightarrow & u\left[D\right]_{[k]} & \equiv u\left[D\right]_{[k-1]} - 2\frac{d}{dx}\frac{\psi'[D]_{[k-1],k}}{\psi[D]_{[k-1],k}} \\ \psi\left[D\right]_{[k-1],s} \rightarrow & \psi\left[D\right]_{[k],s} & \equiv \psi'\left[D\right]_{[k-1],s} - \frac{\psi'[D]_{[k-1],k}}{\psi[D]_{[k-1],k}}\psi\left[D\right]_{[k-1],s} \quad , \quad s > k \end{cases} \tag{2.19}$$

lo cual define el k-ésimo sistema integrable

$$-\psi''\left[D\right]_{[k],s} + u\left[D\right]_{[k]}\psi\left[D\right]_{[k],s} = \lambda_s \psi\left[D\right]_{[k]}$$

En términos de determinantes Wronskianos, la transformada de Darboux de órden superior se escribe como

$$\begin{cases} u\left[D\right]_{[k-1]} & \rightarrow & u\left[D\right]_{[k]} = u\left[D\right]_{[k-1]} - 2\frac{d^2}{dx^2}\ln W\left(\psi\left[D\right]_{[k-1],k}\right) \\ \psi[D]_{[k-1],s} & \rightarrow & \psi[D]_{[k],s} = \dfrac{W\left(\psi[D]_{[k-1],k}\, ,\, \psi[D]_{[k-1],s}\right)}{\psi[D]_{[k-1],k}}, \quad s > k \end{cases} \tag{2.20}$$

2.4. El teorema de Crum

El resultado de Crum nos ofrece otro método de construir familias de potenciales integrables. Evita las iteraciones y pasos intermedios de la transformada de Darboux de órden superior y nos lleva directamente al k-ésimo sistema integrable.

En esta sección presentamos brevemente el resultado de Crum (1955) [5]. Haremos uso de una identidad sobre la cual el resultado está parcialmente basado. Esta identidad es un elemento clave para la obtención de nuestros resultados que se presentan en el último capítulo.

Sea W_k el Wronskiano de las funciones $\psi_1, \psi_2, ..., \psi_k$, es decir,

$$W_k \equiv W(\psi_1, \psi_2, ..., \psi_k) = \det A \quad , \quad A_{ij} = \frac{d^{i-1}\psi_j}{dx^{i-1}} \quad i, j = 1, 2, ..., k \tag{2.21}$$

y $W_{k,s}$ el Wronskiano definido por

$$W_{k,s} = W(\psi_1, \psi_2, ..., \psi_k, \psi_s) \tag{2.22}$$

Teorema 2 *Si $\psi_1, \psi_2, ..., \psi_n$ son las soluciones del problema regular de Sturm-Liouville*

$$-\psi_s'' + u\psi_s = \lambda_s\psi_s \tag{2.23}$$

entonces $\psi[C]_{[n],s}$ satisface la ecuación de Sturm-Liouville

$$-\psi''[C]_{[n],s} + u[C]_{[n]}\,\psi[C]_{[n],s} = \lambda_s\psi[C]_{[n],s} \tag{2.24}$$

con $\psi[C]_{[n],s}$ y $u[C]_{[n],s}$ dados por

$$\psi_s \longrightarrow \psi[C]_{[n],s} \equiv \frac{W_{n,s}}{W_n} \tag{2.25}$$

y

$$u \longrightarrow u[C]_{[n]} = u - 2\frac{d^2}{dx^2}\ln W_n \tag{2.26}$$

Nótese que las transformaciones de Crum de ψ y u (2.25,2.26), no son definidas iterativamente. La prueba del teorema de Crum se puede encontrar en [5], [10].

Aquí sólo comentaremos algunos aspectos cruciales de la prueba dada por Crum y que usaremos posteriormente.

El primer paso en la prueba del teorema de Crum necesita de la derivada del determinante

Wronskiano W_k. Tomando la derivada de

$$W_2 = \begin{vmatrix} \psi_1 & \psi_2 \\ \psi_1' & \psi_2' \end{vmatrix} \tag{2.27}$$

trivialmente obtenemos

$$W_2' = \begin{vmatrix} \psi_1 & \psi_2 \\ \psi_1'' & \psi_2'' \end{vmatrix} \tag{2.28}$$

Este resultado puede ser generalizado al caso $n \times n$

Lema 3 *La derivada del determinante W_n viene dada por*

$$W'_n = \left\{ \psi_1^{(n)} M_{(1,n)}^{(1)} + \psi_2^{(n)} M_{(2,n)}^{(1)} + \cdots + \psi_{n-1}^{(n)} M_{(n-1,n)}^{(1)} + \psi_n^{(n)} M_{(n,n)}^{(1)} \right\} \tag{2.29}$$

donde $M_{(i,n)}^{(1)}$ representa el menor correspondiente a la entrada (i, n) del determinante W_n y $\psi_i^{(n)}$ representa la $n-$ésima derivarada de la función ψ_i

Asumimos el resultado válido para Wronskianos de orden $n-1$. Desarrollando el determinante W_n por la última fila (expansión de Laplace), obtenemos

$$\begin{aligned} W'_n \quad = \quad & \left\{ \psi_1^{(n)} M_{(1,n)}^{(1)} + \psi_2^{(n)} M_{(2,n)}^{(1)} + \cdots + \psi_{n-1}^{(n)} M_{(n-1,n)}^{(1)} + \psi_n^{(n)} M_{(n,n)}^{(1)} \right\} + \\ & \left\{ \psi_1^{(n-1)} \left(M_{(1,n)}^{(1)} \right)' + \cdots + \psi_{n-1}^{(n-1)} \left(M_{(n-1,n)}^{(1)} \right)' + \psi_n^{(n-1)} \left(M_{(n,n)}^{(1)} \right)' \right\} \end{aligned} \tag{2.30}$$

Nótese que los Wronskianos $M_{(i,n)}^{(1)}$ son de órden $(n-1) \times (n-1)$ y así para estos Wronskianos el teorema es válido, es decir,

$$\det B \equiv \left\{ \psi_1^{(n-1)} \left(M_{(1,n)}^{(1)} \right)' + \cdots + \psi_{n-1}^{(n-1)} \left(M_{(n-1,n)}^{(1)} \right)' + \psi_n^{(n-1)} \left(M_{(n,n)}^{(1)} \right)' \right\} \tag{2.31}$$

es un determinante cuyas dos últimas líneas son iguales y por lo tanto $\det B = 0$. El resultado

(2.29) puede escribirse como

$$W'_n = \begin{vmatrix} \psi_1 & \psi_2 & \cdots & \psi_{n-1} & \psi_n \\ \psi'_1 & \psi'_2 & \cdots & \psi'_{n-1} & \psi'_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \psi_1^{(n-2)} & \psi_2^{(n-2)} & \cdots & \psi_{n-1}^{(n-2)} & \psi_n^{(n-2)} \\ \psi_1^{(n)} & \psi_2^{(n)} & \cdots & \psi_{n-1}^{(n)} & \psi_n^{(n)} \end{vmatrix} \tag{2.32}$$

Otro resultado clave en la prueba del teorema de Crum viene dado por el siguiente lema

Lema 4 *El determinante Wronskiano de los Wronskianos, W_n y $W_{n-1,s}$, es igual a $W_{n,s}W_{n-1}$. En otras palabras*

$$W\left(W_n, W_{n-1,s}\right) = W_{ns}W_{n-1} \tag{2.33}$$

La prueba de este lema descansa sobre el teorema de Jacobi para determinantes. Tanto la prueba como el teorema de Jacobi se encuentran en el apéndice B.

Nótese que para $n = 1$ la transformación de Crum se reduce a la transformación de Darboux. Para este caso $W_1 = \psi_1$, y $W_{1,s} = W\left(\psi_1, \psi_s\right)$, y se obtiene

$$\psi[D]_{[1],s} \equiv \psi[C]_{[1],s} = \frac{W_{1,s}}{\psi_1} = \psi'_s - \frac{\psi'_1}{\psi_1}\psi_s \quad , \quad s > 1 \tag{2.34}$$

$$u[D]_{[1]} \equiv u[C]_{[1]} = u - 2\frac{d^2}{dx^2}\ln W_1 = u - 2\frac{d}{dx}\frac{\psi'_1}{\psi_1} \tag{2.35}$$

No es apriori claro que esta igualdad entre las transformaciones de Crum y Darboux siga siendo válida para órdenes superiores. La respuesta es dada en el capítulo final de nuestro trabajo.

Oscilador armónico

Hallemos la familia de potenciales que se generan con la transformación de Crum del oscilador armónico. La ecuación diferencial viene dada por

$$-\psi'' + \omega^2 x^2 \psi = \lambda\psi \tag{2.36}$$

Los valores propios y las primeras autofunciones de este sistema son : $\lambda_n = (2n-1)\,\omega$, $\quad n = 1, 2, ...$ y

1. $\psi_1 = \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{1/4} \exp\left\{-\frac{\omega}{2}x^2\right\}$

2. $\psi_2 = \sqrt{2\omega}x\psi_1$

3. $\psi_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(2\omega x^2 - 1\right)\psi_1$

4. $\psi_4 = \sqrt{\frac{\omega}{3}}\left(2\omega x^3 - 3x\right)\psi_1$

5. $\psi_5 = \frac{1}{2\sqrt{6}}\left(4\omega^2 x^4 - 12\omega x^2 + 3\right)\psi_1$

6. $\psi_6 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\omega}{15}}\left(4\omega^2 x^5 - 20\omega x^3 + 15x\right)\psi_1$

Para el cálculo de los respectivos Wronskianos se hace necesario las derivadas de las primeras funciones propias

1. *a*) $\psi_1' = -\omega x \psi_1$

   b) $\psi_2' = \sqrt{2\omega}\left(1 - \omega x^2\right)\psi_1$

   c) $\psi_3' = \frac{\omega}{\sqrt{2}}\left(5x - 2\omega x^3\right)\psi_1$

Con esta infraestructura podemos ya calcular $u\,[C]_{[1]}$, $u\,[C]_{[2]}$, $u\,[C]_{[3]}$ después de realizar los cálculos pertinetes se obtiene

$$u\,[C]_{[1]} = u - 2\frac{d}{dx}\frac{\psi_1'}{\psi_1} = u + 2\omega \tag{2.37}$$

$$u\,[C]_{[2]} = u - 2\frac{d}{dx}\frac{W'\left(\psi_1, \psi_2\right)}{W\left(\psi_1, \psi_2\right)} = u + 4\omega \tag{2.38}$$

$$u\,[C]_3 = u - 2\frac{d}{dx}\frac{W'\left(\psi_1, \psi_2, \psi_3\right)}{W\left(\psi_1, \psi_2, \psi_3\right)} = u + 6\omega \tag{2.39}$$

Nótese el procedimiento directo para determinar la familia de potenciales solubles. En contraste con la transformación de Darboux de órden superior que requiere tanto del conocimiento de las soluciones de los potenciales intermedios como de los potenciales mismos (2.19).

Capítulo 3

Mecánica cuántica supersimétrica

Como se ha visto en el capítulo anterior la transformación de Darboux del problema de Sturm-Liouville (2.11) genera un nuevo potencial con su respectiva solución. Una propiedad importante que se ha hecho notar ha sido la iso-espectralidad de los dos potenciales, excepto por el estado base. En este capítulo mostraremos un nuevo punto de vista para la generación de potenciales solubles, el punto de vista de la mecánica cuántica supersimétrica (SUSY QM). Una de las implicaciones de este punto de vista coincide con la transformación de Darboux: Dado un potencial soluble u, SUSY QM permite determinar otro potencial u_1 con el mismo espectro que u excepto por el estado base. Si u y u_1 además cumplen la condición de invarianza de forma, establecida por Gendenhtein en 1983, el potencial u puede resolverse de una manera completamente algebraica, análoga al método de operdores escalera para el potencial del oscilador armónico. Estos temas serán tratado en este capítulo.

Iniciemos con la definición de lo que es un sistema cuántico supersimétrico.

Matemáticamente, se define un sistema cuántico como la pareja $(\mathcal{H}, H)$ donde $H \neq 0$ representa un operador autoadjunto (el Hamiltoniano del sistema), actuando sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ (el espacio de estados). Como es usual el conmutador y el anticonmutador de dos operadores se representan por $[A, B]$ y $\{A, B\}$ respectivamente. Análogamente, $A^\dagger$ representa el operador adjunto de A.

Definición 5 *Un sistema cuántico $(\mathcal{H}, H)$ es llamado supersimétrico, [8], si existe un número* *finito de operadores no auto-adjuntos $q_1, ..., q_M$ actuando sobre $\mathcal{H}$ tales que*

$$\left\{q_i, q_j^\dagger\right\} = \delta_{ij} H \quad , \quad \{q_i, q_j\} = 0 \quad , \quad i, j \in \{1, 2, ..., M\} \tag{3.1}$$

Nótese que de la definición se obtiene que

$$\left\{q_i^\dagger, q_j^\dagger\right\} = 0 \quad \text{y} \quad [H, q_i] = 0 \quad , \quad i, j \in \{1, 2, ..., M\} \tag{3.2}$$

En [18] se muestra que la mayoría de potenciales solubles exactamente (Coulomb, oscilador armónico, Morse, Eckart, Poshl-Teller) se pueden incluir en un sistema cuántico supersimétrico, apropiado.

3.1. Factorización de la ecuación de Schrödinger y SUSY QM

En esta sección mostraremos como se puede construir un sistema cuántico supersimétrico a partir del problema regular de Sturm Liouville (2.11). Consideremos la ecuación de Schrödinger

$$H^{(0)}\psi \equiv \left(-D^2 + u\right)\psi = \lambda\psi \tag{3.3}$$

donde $D^2 = \frac{d^2}{dx^2}$. Sin pérdida de generalidad se puede asumir que el valor propio del estado base es cero, $\lambda_1 = 0$. En tal caso $u = \frac{\psi_1''}{\psi_1}$. Esta representación del potencial en términos del estado base nos permite factorizar el operador de Schrödinger (3.3) como

$$\left(-D - \frac{\psi_1'}{\psi_1}\right)\left(D - \frac{\psi_1'}{\psi_1}\right)\psi = \lambda\psi \tag{3.4}$$

Cada uno de los factores define un operador, adjunto el uno del otro:

$$A^\dagger \equiv -D - \frac{\psi_1'}{\psi_1} \quad \text{y} \quad A \equiv D - \frac{\psi_1'}{\psi_1} \tag{3.5}$$

Entonces el operador Hamiltoniano $H^{(0)}$ se factoriza como

$$H^{(0)} = A^\dagger A \tag{3.6}$$

Si conmutamos los operadores $A^\dagger$ y A , obtenemos un nuevo Hamiltoniano:

$$H^{(1)} \equiv AA^\dagger = -D^2 + u - 2\left(\frac{\psi_1'}{\psi_1}\right)' = -D^2 + u_{[1]} \tag{3.7}$$

Nótese que $u_{[1]}$ es la transformada de Darboux del potencial u, y A es el operador que efectúa la transformación de Darboux de las autofunciones ψ, ecuación (2.14). Este hecho sugiere la iso-espectralidad de los Hamiltonianos $H^{(0)}$ y $H^{(1)}$. En efecto esto se mostrará más adelante.

Si definimos los operadores

$$H \equiv \begin{pmatrix} H^{(0)} & 0 \\ 0 & H^{(1)} \end{pmatrix} \quad , \quad q^\dagger \equiv \begin{pmatrix} 0 & A^\dagger \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad q \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A & 0 \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

obtenemos, de acuerdo a la defnición dada, un sistema cuántico supersimétrico con $M = 1$. Es fácil verificar, en efecto que

$$\left\{q, q^\dagger\right\} = H \quad , \quad q^2 = \left(q^\dagger\right)^2 = 0 \quad , \quad [H, q] = \left[H, q^\dagger\right] = 0 \tag{3.9}$$

Nótese que desde este punto de vista los potenciales relacionados por una transformación de Darboux, se pueden interpretar como los componentes de un sisterma SUSY QM.

3.2. El superpotencial

Cada uno de los operadores A y A^+ se puede considerar como *operadores de Schrödinger de grado 1.* Para estos operadores no se usa la denominación de potencial sino de superpotencial. En el lenguaje de SUSY QM, se usan las siguientes denominaciones: superpotencial a la expresión $\sigma \equiv -\frac{\psi_1'}{\psi_1}$, potenciales compañeros supersimétricos a u y $u_{[1]}$, estados compañeros supersimétricos a las autofunciones ψ y $\psi_{[1]}$. Hamiltonianos compañeros supersimétricos a $H^{(0)}$ y $H^{(1)}$.

Nótemos que el superpotencial contiene toda la información del sistema cuántico supersimétrico: en términos del superpotencial σ,

1. Los potenciales compañeros supersimétricos se pueden representar como

$$u = \sigma^2 - \sigma' \quad \text{y} \quad u_{[1]} = \sigma^2 + \sigma' \tag{3.10}$$

   Nótese que estas ecuaciones son ecuaciones de Ricatti con solución particular $\sigma = \frac{\psi_1'}{\psi_1}$.

2. El estado base queda determinado por

$$\psi_1(x) = \exp\left\{-\int^x \sigma(x)\, dx\right\} \tag{3.11}$$

3. Los dos Hamiltonianos $H^{(0)}$ y $H^{(1)}$ se definen como

$$H^{(0,1)} = -D^2 + \left(\sigma^2 \mp \sigma\right) \tag{3.12}$$

   respectivamente.

4. Y los operadores que definen la transformación supersimétrica

$$A = D + \sigma \quad , \quad A^{\dagger} = -D + \sigma \tag{3.13}$$

El sistema cuántico supersimétrico se puede representar como una ecuación de Schrödinger matricial. En efecto, si definimos la función de onda Ψ como

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi \\ \psi_{[1]} \end{pmatrix} \tag{3.14}$$

entonces la ecuación matricial de Schrödinger

$$H\Psi = \lambda\Psi \tag{3.15}$$

puede escribirse en la forma

$$\left(-D^2 + U\right)\Psi = \lambda\Psi \tag{3.16}$$

donde

$$U = \Sigma^2 + \Sigma', \tag{3.17}$$

$$\Sigma \equiv \begin{pmatrix} -\sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix} \tag{3.18}$$

3.3. Transformaciones supersimétricas

Si introducimos en el álgebra supersimétrica el operador autoadjunto, K, conocido en la literatura como operador de involución y definido por

$$K \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{3.19}$$

logramos inducir una descomposición del espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ en suma directa. En efecto puesto que

$$K^2 = 1 \tag{3.20}$$

se sigue que K sólo admite como autovalores a ± 1. Este hecho permite descomponer un estado $\Psi \in \mathcal{H}$ como

$$\Psi = \frac{1}{2}(\Psi + K\Psi) + \frac{1}{2}(\Psi - K\Psi) \equiv \Psi_b + \Psi_f \tag{3.21}$$

Es decir,

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_b \oplus \mathcal{H}_f \tag{3.22}$$

con

$$\begin{cases} \mathcal{H}_b &= \{\Psi \in \mathcal{H} \mid K\Psi = +\Psi\} \\ \mathcal{H}_f &= \{\Psi \in \mathcal{H} \mid K\Psi = -\Psi\} \end{cases} \tag{3.23}$$

Motivados por el papel que desempeña el operador q en física de partículas, los vectores pertenecientes a $\mathcal{H}_b$ y a $\mathcal{H}_f$ son llamados respectivamente vectores bosónicos (o pares) y vectores fermiónicos (o impares). Sin embargo en el contexto de la mecánica cuántica, esta terminología sólo expresa la descomposición introducida por el operador K. La interpretación precisa depende del ejemplo que se esté considerando.

El operador K también induce una clasificación de los operadores que actúan sobre el espacio de estados $\mathcal{H}$. En efecto, si M

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \tag{3.24}$$

representa un operador actuando sobre $\mathcal{H} = \mathcal{H}_b \oplus \mathcal{H}_f$ entonces

$$[K, M] = 0 \text{ si y sólo si } M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \tag{3.25}$$

y

$$\{K, M\} = 0 \text{ si y sólo si } M = \begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix} \tag{3.26}$$

De esta forma un operador que conmute con K se llamará par y uno que anticonmute con K se llamára impar.

En particular los operadores q y $q^\dagger$ son operadores impares. Se tiene que

$$q : \mathcal{H}_b \to \mathcal{H}_f \tag{3.27}$$

y

$$q^\dagger : \mathcal{H}_f \to \mathcal{H}_b \tag{3.28}$$

lo cual significa que q y $q^\dagger$ intercambian estados bosónicos y fermiónicos. Es precisamente esta propiedad fundamental de q y $q^\dagger$ la que está en el origen de la terminología de transformaciones supersimétricas.

3.4. El espectro de un sistema cuántico supersimétrico

Sean ψ y $\psi_{[1]}$ los estados estacionarios de los correspondientes Hamiltonianos $H^{(0)}$ y $H^{(1)}$ Análogamente, sean λ_n y $\lambda_{[1],n}$ los autovalores correspondientes, es decir,

$$H^{(0)}\psi_n = \lambda_n \psi_n \quad , \quad H^{(1)}\psi_{[1],n} = \lambda_{[1],n}\psi_{[1],n} \tag{3.29}$$

Se mostrará que los potenciales u y $u_{[1]}$ tienen el mismo espectro de energía, excepto que el nivel de energía del estado base $\lambda_1 = 0$ del correspondiente potencial u , no tiene nivel de energía correspondiente para $u_{[1]}$.

Más específicamente,

1. Si ψ_n es autofunción de $H^{(0)}$ con autovalor λ_n, entonces $A\psi_n$ es función propia de $H^{(1)}$ con el mismo autovalor de energía. En efecto

$$H^{(1)} A\psi_n = \left(AA^\dagger\right) A\psi_n = AH^{(0)}\psi_n = \lambda_n A\psi_n \tag{3.30}$$

2. Análogamente, si $\psi_{[1],n}$ es autofunción de $H^{(1)}$ con autovalor $\lambda_{[1],n}$, entonces $A^\dagger\psi_{[1],n}$ es función propia de $H^{(0)}$ con el mismo autovalor de energía.

3. Nótese, que $A\psi_1 = 0$, entonces, no existe estado compañero para ψ_1.

4. El estado base de $H^{(1)}$ es $\psi_{[1],2}$ y por supuesto debe ser proporcional a $A\psi_2$

$$A\psi_2 \propto \psi_{[1],2} \tag{3.31}$$

en general

$$A\psi_n \propto \psi_{[1],n} \quad , \quad A^\dagger\psi_{[1],n} \propto \psi_n \tag{3.32}$$

$$\lambda_{[1],n} = \lambda_n \quad , \quad n > 1 \tag{3.33}$$

3.5. Potenciales invariantes de forma

La condición de invarianza de forma que se define sobre potenciales compañeros supersimétricos nos provee de un criterio, gracias al cual el problema de hallar el espectro completo de un sistema SUSY QM tiene solución exacta y simple.

La invarianza de forma nos ofrece nuevos aspectos sobre potenciales solubles y simplifica el problema de hallar el espectro y las funciones propias de una amplia clase de problemas unidimensionales en mecánica cuántica.

Los potenciales compañeros supersimétricos $u(x;a)$ y $u_{[1]}(x;a)$, donde a representan los parámetros de los potenciales, se dicen que son invariantes de forma si

$$u_{[1]}(x;a) = u(x;f(a)) + R(f(a)) \tag{3.34}$$

donde $f(a)$ y $R(f(a))$ son funciones independientes de x.

Potenciales con esta propiedad hay bastantes ([6],[18]). Un par de ejemplos ilustran esta condición.

El modelo del oscilador

- El superpotencial viene dado por

$$\sigma = \omega x \tag{3.35}$$

- Los potenciales u y $u_{[1]}$ vienen dados por[1]

$$u(x;\omega) = \sigma^2 - \sigma' = \omega^2 x^2 - \omega \tag{3.36}$$

y

$$u_{[1]}(x;\omega) = \sigma^2 + \sigma' = \omega^2 x^2 + \omega \tag{3.37}$$

- Nótese que $u_{[1]}(x;\omega)$ y $u(x;\omega)$ son invariantes de forma, con

$$f(\omega) = \omega \quad , \quad R(f(\omega)) = 2\omega \tag{3.38}$$

Puesto que $u_{[1]}(x;a)$ se puede volver a transformar, entonces surge la cuestion de si $u_{[2]}(x;a)$ es invariante de forma con $u_{[1]}(x;a)$ y si se mantienen las mismas funciones f y R en esta iteración. Estas preguntas serán respondidas positivamentese en el capítulo siguiente. Ahora se verá que esta condición (SIP) junto con las ideas de la mecánica cuántica supersimétrica permiten una descripción algebraica de los autovalores y autofuciones (de esta forma estas dos herramientas conceptuales permiten generalizar la metodología de los operadores de creación y destrucción en el caso del oscilador armónico).

[1] Recordemos que el potencial u se ha desplazado, tal que $\lambda_1 = 0$

3.6. Autoestados de potenciales invariantes de forma

Construimos una sucesión de Hamiltonianos $H^{(s)}$ donde

$$H^{(0)} = -D^2 + u\left(x; a\right) \tag{3.39}$$

y

$$H^{(1)} = -D^2 + u_1\left(x; a\right) = -D^2 + u\left(x; f\left(a\right)\right) + R\left(f\left(a\right)\right) \tag{3.40}$$

y

$$\begin{aligned} H^{(2)} &= -D^2 + u_2\left(x; a\right) = -D^2 + u_1\left(x; f\left(a\right)\right) + R\left(f\left(a\right)\right) && (3.41) \\ &= -D^2 + u\left(x; f^2\left(a\right)\right) + R\left(f^2\left(a\right)\right) + R\left(f\left(a\right)\right) && (3.42) \end{aligned}$$

Un proceso de iteración genera la fórmula recurrente

$$H^{(s)} = -D^2 + u\left(x; f^s\left(a\right)\right) + \sum_{k=1}^{s} R\left(f^{\,k}\left(a\right)\right) \tag{3.43}$$

1. Al comparar el espectro de $H^{(s)}$ y el de $H^{(s+1)}$ se nota que son Hamiltonianos compañeros supersimétricos. Así que estos Hamiltonianos tienen espectro energético idéntico salvo que el estado base de $H^{(s)}$ no tiene compañero supersimétrico. De este hecho se deduce [18] que

$$\lambda_1^{(s)} = \sum_{k=1}^{s} R\left(f^{\,k}\left(a\right)\right) \quad , \quad \lambda_n = \sum_{k=1}^{n} R\left(f^{\,k}\left(a\right)\right) \quad , \quad \lambda_1 = 0 \tag{3.44}$$

Además se puede obtener ψ_n en términos de ψ_1

$$\psi_n\left(x; a\right) \propto A^+\left(x; a\right) A^+\left(x; a_1\right) ....A^+\left(x; a_{n-1}\right) \psi_1\left(x; a_n\right) \tag{3.45}$$

donde

$$a_i = f^i\left(a\right) \tag{3.46}$$

Capítulo 4

Resultados

En este capítulo establecemos la conexión entre la k-ésima transformada de Darboux y la k-ésima transformada de Crum. Igualmente se establece la conexión entre la transformación que se origina con la condición de invarianza de forma y la transformada de Crum. Se concluye con el resultado fundamental: bajo la condición de invariancia de forma todas las tres transformaciones (Darboux, Crum, invariancia de forma), son equivalentes.

4.1. Conexión entre las transformaciones de Darboux y Crum de órdenes superiores

Inicialmente, examinemos el caso $k = 2$.

$$u[D]_{[2]} = u[D]_{[1]} - 2\frac{d}{dx}\frac{\psi'[D]_{[1],2}}{\psi[D]_{[1],2}} \tag{4.1}$$

Puesto que $u[D]_{[1]}$ es la transformada de Darboux del potencial inicial, podemos escribir (4.1) como

$$u[D]_{[2]} = u - 2\frac{d}{dx}\left(\frac{\psi_1'}{\psi_1} + \frac{\psi'[D]_{[1],2}}{\psi[D]_{[1],2}}\right) \tag{4.2}$$

Teniendo en cuenta que $\psi[D]_{[1],2} = \frac{W_{1,2}}{\psi_1}$ y usando la identidad simple $W_{n,n+1} = W_{n+1}$, (4.2) se puede escribir como

$$u[D]_{[2]} = u - 2\frac{d}{dx}\left(\frac{\psi_1'}{\psi_1} + \frac{\left(\frac{W_2}{\psi_1}\right)'}{\frac{W_2}{\psi_1}}\right) \tag{4.3}$$

lo cual finalmente da

$$u[D]_{[2]} = u - 2\frac{d}{dx}\left(\frac{W_2'}{W_2}\right) = u[C]_{[2]} \tag{4.4}$$

Similarmente, las autofunciones

$$\psi[D]_{[2],s} = \frac{\begin{vmatrix} \psi[D]_{[1],2} & \psi[D]_{[1],s} \\ \psi'[D]_{[1],2} & \psi'[D]_{[1],s} \end{vmatrix}}{\psi[D]_{[1],2}} \tag{4.5}$$

pueden ser puestas en la forma

$$\psi[D]_{[2],s} = \frac{\frac{1}{\psi_1}\begin{vmatrix} W_2 & W_{1,s} \\ \left(\frac{W_2}{\psi_1}\right)' & \left(\frac{W_{1,s}}{\psi_1}\right)' \end{vmatrix}}{\frac{W_2}{\psi_1}} = \frac{\begin{vmatrix} W_2 & W_{1,s} \\ \left(\frac{W_2}{\psi_1}\right)' & \left(\frac{W_{1,s}}{\psi_1}\right)' \end{vmatrix}}{W_2} \tag{4.6}$$

Con ayuda de una de las propiedades estándar de los determinantes, es decir,

$$\det\left(\vec{z}_1, ..., \vec{z}_i, ..., \vec{z}_n\right) = \det\left(\vec{z}_1, ..., \vec{z}_i + \alpha\vec{z}_k, ..., \vec{z}_n\right) \tag{4.7}$$

la última ecuación se reduce a

$$\psi[D]_{[2],s} = \frac{\frac{1}{\psi_1}\begin{vmatrix} W_2 & W_{1,s} \\ W_2' & W_{1,s}' \end{vmatrix}}{W_2} \tag{4.8}$$

Aplicando el resultado del lema 4 y recordando que $W_1 = \psi_1$, finalmente obtenemos

$$\psi[D]_{[2],s} = \frac{W_{2,s}}{W_2} = \psi[C]_{[2],s} \tag{4.9}$$

En conclusión tenemos que

$$\begin{cases} u[D]_{[2]} &= u[C]_{[2]} \\ \psi[D]_{[2],s} &= \psi[C]_{[2],s} \end{cases} \tag{4.10}$$

Los pasos anteriores nos sirven para iniciar la prueba por inducción de la siguiente afirmación general:

Teorema 6 *La n-ésima transformación de Crum es equivalente a la transformación de Darboux de órden n. Esto quiere decir que cualquier transformación de Crum puede ser alcanzada iterativamente por transformaciones sucesivas de Darboux, es decir,*

$$\begin{aligned} u[C]_{[n]} &= u[D]_{[n]} \\ \psi[C]_{[n],s} &= \psi[D]_{[n],s} \end{aligned} \tag{4.11}$$

Prueba. Asumir el teorema válido para n significa que la afirmación

$$\begin{cases} u[D]_{[n]} = u[D]_{[n-1]} - 2\dfrac{d}{dx}\dfrac{\psi'[D]_{[n-1],n}}{\psi[D]_{[n-1],n}} \\ \\ \psi[D]_{[n],s} = \dfrac{W\left(\psi[D]_{[n-1],n}\,,\psi[D]_{[n-1],s}\right)}{\psi[D]_{[n-1],n}} \end{cases} \quad , \quad s > n \tag{4.12}$$

implica que

$$\begin{cases} u[D]_{[n]} = u - 2\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{W_n'}{W_n}\right) \\ \\ \psi[D]_{[n],s} = \dfrac{W_{n,s}}{W_n} \end{cases} \quad , \quad s > n \tag{4.13}$$

Basados en la hipótesis de inducción (4.12,4.13), tenemos que mostrar que

$$u[C]_{[n+1]} = u[D]_{[n+1]} = u[D]_{[n]} - 2\frac{d}{dx}\frac{\psi'[D]_{[n],n+1}}{\psi[D]_{[n],n+1}} = u - 2\frac{d}{dx}\frac{W_{n+1}'}{W_{n+1}} \tag{4.14}$$

y

$$\psi[D]_{[n+1],s} = \frac{W\left(\psi[D]_{[n],n+1},\psi[D]_{[n],s}\right)}{\psi[D]_{[n],n+1}} = \frac{W_{n+1,s}}{W_{n+1}} \tag{4.15}$$

La validez de la hipótesis de inducción para n nos permite escribir

$$u[D]_{[n+1]} = u[D]_{[n]} - 2\frac{d}{dx}\frac{\psi'[D]_{[n],n+1}}{\psi[D]_{[n],n+1}} = u - 2\frac{d}{dx}\left(\frac{W_n'}{W_n} + \frac{\psi'[D]_{[n],n+1}}{\psi[D]_{[n],n+1}}\right) \tag{4.16}$$

Usando la validez de la hipótesis de inducción para n, pero esta vez para las funciones de onda obtenemos

$$u[D]_{[n+1]} = u - 2\frac{d}{dx}\left(\frac{W_n'}{W_n} + \frac{\left(\frac{W_{n+1}}{W_n}\right)'}{\frac{W_{n+1}}{W_n}}\right) = u - 2\frac{d}{dx}\left(\frac{W_{n+1}'}{W_{n+1}}\right) = u[C]_{[n+1]} \tag{4.17}$$

Similarmente, para las autofunciones, el resultado es

$$\psi[D]_{[n+1],s} = \frac{\begin{vmatrix} \psi[D]_{[n],n+1} & \psi[D]_{[n],s} \\ \psi'[D]_{[n],n+1} & \psi'[D]_{[n],s} \end{vmatrix}}{\psi[D]_{[n],n+1}} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{W_{n+1}}{W_n} & \frac{W_{n,s}}{W_n} \\ \left(\frac{W_{n+1}}{W_n}\right)' & \left(\frac{W_{n,s}}{W_n}\right)' \end{vmatrix}}{\frac{W_{n+1}}{W_n}} \tag{4.18}$$

Fácilmente uno procede a

$$\psi[D]_{[n+1],s} = \frac{\begin{vmatrix} W_{n+1} & W_{n,s} \\ \frac{W_{n+1}'}{W_n} - \frac{W_n' W_{n+1}}{W_n^2} & \frac{W_{n,s}'}{W_n} - \frac{W_n' W_{n,s}}{W_n^2} \end{vmatrix}}{W_{n+1}} = \frac{\frac{1}{W_n}\begin{vmatrix} W_{n+1} & W_{n,s} \\ W_{n+1}' & W_{n,s}' \end{vmatrix}}{W_{n+1}} \tag{4.19}$$

Aplicando el lema 4 podemos escribir

$$\psi[D]_{[n+1],s} = \frac{W_{n+1,s}}{W_{n+1}} = \psi[C]_{[n+1],s} \tag{4.20}$$

Lo cual completa la prueba.

Es instructivo seguir este teorema por medio de un ejemplo explícito

4.1.1. Ejemplo

Se cosidera el potencial de la forma (potencial Morse)

$$u(x;A) = 2\left[A^2 - A\left(A + \frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right)\operatorname{sech}^2(\alpha x)\right] \tag{4.21}$$

Las primeras funciones propias vienen dadas por:

1. $\psi_1 = c_1 [\operatorname{sech}(\alpha x)]^{\frac{\sqrt{2}A}{\alpha}}$

2. $\psi_2 = c_2 \sinh(\alpha x)\, \psi_1$

3. $\psi_3(x) = c_3 \left(-\cosh^2(\alpha x) + \frac{(2\sqrt{2}A-\alpha)}{\alpha}\sinh^2(\alpha x)\right)\psi_1$

Los valores propios vienen dados por

$$\lambda_n = 2\left(A^2 - \left(A - \frac{(n-1)\,\alpha}{\sqrt{2}}\right)^2\right) \quad , \quad n = 1, 2, ... \tag{4.22}$$

Si definimos A_n como

$$A_n \equiv A - \frac{n\alpha}{\sqrt{2}} \quad , \quad n = 0, 1, 2, ... \tag{4.23}$$

entonces los valores propios se pueden escribir como

$$\lambda_n = 2\left(A^2 - A_{n-1}^2\right) \quad , \quad n = 1, 2, ... \tag{4.24}$$

Por ejemplo

$$\lambda_2 = 2\left(A^2 - A_1^2\right) \quad , \quad \lambda_3 = 2\left(A^2 - A_2^2\right) \tag{4.25}$$

o en forma explícita:

$$\lambda_1 = 0 \quad , \quad \lambda_2 = 2\sqrt{2}A\alpha - \alpha^2 \quad , \quad \lambda_3 = 4\sqrt{2}A\alpha - 4\alpha^2 \tag{4.26}$$

Nótese también que

$$\psi_3(x) = c_3\left(-\cosh^2(\alpha x) + \frac{\sqrt{2}}{\alpha}(A + A_1)\sinh^2(\alpha x)\right)\psi_1 \tag{4.27}$$

$u[C]_{[1]} = u[D]_{[1]}$

De las definiciones originales (2.34, 2.35), se nota, trivialmente que

$$u[C]_{[1]} = u[D]_{[1]} \tag{4.28}$$

Para el ejemplo que estamos siguiendo,

$$\frac{\psi_1'}{\psi_1} = -\sqrt{2}A \tanh(\alpha x) \tag{4.29}$$

Este resultado nos permite, finalmente, calcular explícitamente el potencial transformado,

$$u[C]_{[1]} = u[D]_{[1]} = 2\left[A^2 - AA_1 \operatorname{sech}^2(\alpha x)\right] \tag{4.30}$$

$\psi[C]_{[1],s} = \psi[D]_{[1],s}$

De las definiciones (2.34, 2.35), se obtiene directamente

$$\psi[C]_{[1],s} \equiv \frac{W_{1,s}}{W_1} = \psi_s' - \frac{\psi_1'}{\psi_1}\psi_s \equiv \psi[D]_{[1],s} \tag{4.31}$$

1. En particular,

$$\psi[C]_{[1],2} = \psi[D]_{[1],2} \tag{4.32}$$

$$\frac{W_{1,2}}{W_1} = \frac{\begin{vmatrix} \psi_1 & c_2 \sinh(\alpha x)\,\psi_1 \\ \psi_1' & c_2\alpha \cosh(\alpha x)\,\psi_1 + c_2 \sinh(\alpha x)\,\psi_1' \end{vmatrix}}{\psi_1} \tag{4.33}$$

$$\frac{W_{1,2}}{W_1} = c_2\alpha \cosh(\alpha x)\,\psi_1 \tag{4.34}$$

$$\psi[C]_{[1],2} = \psi[D]_{[1],2} = c_2\alpha \cosh(\alpha x)\,\psi_1 \tag{4.35}$$

2. Otro caso particular,

$$\psi[C]_{[1],3} = \psi[D]_{[1],3} \tag{4.36}$$

$$\frac{W_{1,3}}{W_1} = \frac{\begin{vmatrix} \psi_1 & c_3 \left(-\cosh^2(\alpha x) + \frac{\sqrt{2}}{\alpha}(A + A_1)\sinh^2(\alpha x) \right) \psi_1(x) \\ \\ \psi_1' & 4\sqrt{2} c_3 A_1 \sinh(\alpha x)\cosh(\alpha x)\psi_1(x) - c_3(\ldots)\psi_1' \end{vmatrix}}{\psi_1} \tag{4.37}$$

$$\psi[C]_{[1],3} = \psi[D]_{[1],3} = 4\sqrt{2} c_3 A_1 \sinh(\alpha x)\cosh(\alpha x)\psi_1(x) \tag{4.38}$$

Resumen

Resumen

1.

$$u[C]_{[1]} = u[D]_{[1]} = 2\left[A^2 - AA_1 \operatorname{sech}^2(\alpha x)\right] \tag{4.39}$$

2.

$$\psi[C]_{[1],2} = \psi[D]_{[1],2} = c_2 \alpha \cosh(\alpha x)\psi_1 \tag{4.40}$$

3.

$$\psi[C]_{[1],3} = \psi[D]_{[1],3} = 4\sqrt{2} c_3 A_1 \sinh(\alpha x)\cosh(\alpha x)\psi_1(x) \tag{4.41}$$

$u[C]_{[2]} = u[D]_{[2]}$

1. Calculemos $u[C]_{[2]}$,

$$u[C]_{[2]} = u - 2\frac{d^2}{dx^2}\ln W_2 \tag{4.42}$$

De (4.34) se obtiene directamente,

$$\ln W_2 = \ln c_2\alpha + \ln\cosh(\alpha x) + 2\ln\psi_1 \tag{4.43}$$

entonces

$$\frac{d^2}{dx^2}\ln W_2 = \alpha\left(\alpha - 2\sqrt{2}A\right)\operatorname{sech}^2(\alpha x) \tag{4.44}$$

teniendo en cuenta (4.21), finalmente obtenemos,

$$u[C]_{[2]} = 2\left[A^2 - \left[\left(A - \frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right)\left(A - \sqrt{2}\alpha\right)\right]\operatorname{sech}^2(\alpha x)\right] \tag{4.45}$$

o

$$u[C]_{[2]} = 2\left[A^2 - A_1 A_2 \operatorname{sech}^2(\alpha x)\right] \tag{4.46}$$

2. Calculemos $u[D]_{[2]}$

$$u[D]_{[2]} = u[D]_{[1]} - 2\frac{d}{dx}\frac{\psi'[D]_{[1],2}}{\psi[D]_{[1],2}} \tag{4.47}$$

teniendo en cuenta (4.35) se obtiene

$$\frac{\psi'[D]_{[1],2}}{\psi[D]_{[1],2}} = -\sqrt{2}A_1 \tanh(\alpha x) \tag{4.48}$$

por lo tanto

$$\frac{d}{dx}\frac{\psi'[D]_{[1],2}}{\psi[D]_{[1],2}} = -\sqrt{2}\alpha A_1 \operatorname{sech}^2(\alpha x) \tag{4.49}$$

este resultado junto con (4.30) nos conduce finalmente a

$$u[D]_{[2]} = 2\left[A^2 - A_1 A_2 \operatorname{sech}^2(\alpha x)\right] \tag{4.50}$$

3. conclusión

$$u[C]_{[2]} = u[D]_{[2]} \tag{4.51}$$

$\psi[C]_{[2],s} = \psi[D]_{[2],s}$

1. Calculemos $\psi[C]_{[2],3}$

$$\psi[C]_{[2],3} = \frac{W_3}{W_2} = \frac{\begin{vmatrix} \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 \\ \psi_1' & \psi_2' & \psi_3' \\ -\lambda_1\psi_1 & -\lambda_2\psi_2 & -\lambda_3\psi_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \psi_1 & \psi_2 \\ \psi_1' & \psi_2' \end{vmatrix}} \tag{4.52}$$

resolviendo W_3 por la última fila y teniendo en cuenta que $\lambda_1 = 0$ se obtiene

$$\psi[C]_{[2],3} = \lambda_2\psi_2\frac{W_{1,3}}{W_2} - \lambda_3\psi_3 \tag{4.53}$$

el factor $\frac{W_{1,3}}{W_2}$ se halla explícitamente con la ayuda de (4.34) y (4.38)

$$\frac{W_{1,3}}{W_2} = \frac{4\sqrt{2}c_3A_1\sinh(\alpha x)\cosh(\alpha x)\,\psi_1^2(x)}{c_2\alpha\cosh(\alpha x)\,\psi_1^2} \tag{4.54}$$

$$\frac{W_{1,3}}{W_2} = \left(\frac{4\sqrt{2}c_3A_1}{c_2\alpha}\right)\sinh(\alpha x) \tag{4.55}$$

$$\lambda_2\psi_2\frac{W_{1,3}}{W_2} = \left(\frac{4\sqrt{2}\lambda_2c_3A_1}{\alpha}\right)\sinh^2(\alpha x)\,\psi_1 \tag{4.56}$$

por otro lado

$$\lambda_3\psi_3 = \lambda_3c_3\left(-\cosh^2(\alpha x) + \frac{\sqrt{2}}{\alpha}(A + A_1)\sinh^2(\alpha x)\right)\psi_1(x) \tag{4.57}$$

así, teniendo en cuenta (4.26) obtenemos

$$\psi[C]_{[2],3} = \lambda_3c_3\cosh^2(\alpha x)\,\psi_1(x) \tag{4.58}$$

2. Calculemos ahora $\psi[D]_{[2],3}$

$$\psi_{[2],3} = \frac{\begin{vmatrix} \psi_{[1],2} & \psi_{[1],3} \\ \psi'_{[1],2} & \psi'_{[1],3} \end{vmatrix}}{\psi_{[1],2}} \tag{4.59}$$

$$\psi[D]_{[2],3} = \frac{\left(\frac{\psi_{[1],3}}{\psi_{[1],2}}\right)'\psi^2_{[1],2}}{\psi_{[1],2}} = \left(\frac{\psi_{[1],3}}{\psi_{[1],2}}\right)'\psi_{[1],2} \tag{4.60}$$

$$= \frac{4\sqrt{2}c_3A_1}{c_2}\cosh(\alpha x)\,\psi_{[1],2} \tag{4.61}$$

$$= 4\sqrt{2}c_3A_1\alpha\cosh^2(\alpha x)\,\psi_1 \tag{4.62}$$

$$= \lambda_3c_3\cosh^2(\alpha x)\,\psi_1 \tag{4.63}$$

3. Conclusión

$$\psi[C]_{[2],s} = \psi[D]_{[2],s} \tag{4.64}$$

4.2. Conexión entre la condición de invariancia de forma y transformaciones de Crum

A la luz del resultado de la sección anterior, podemos quitar la distinción entre las transformaciones de órden superior de Darboux $[D]$ y Crum $[C]$.

Denotemos con a el conjunto de parámetros en el potencial , es decir,

$$u = u(x; a) \tag{4.65}$$

La condición para la invariancia de forma del potencial u viene dada por

$$u_{[1]}(x; a) = u(x; f(a)) + R(f(a)) \tag{4.66}$$

donde f transforma a en otro conjunto de parámetros $f(a)$ y $R(f(a))$ es una función de únicamente los parámetros.

En la sección anterior establecimos la equivalencia entre la transformación de Darboux de óden superior y el resultado de Crum. Puesto que la condición de invarianza de forma es dada en términos de la transformación de Darboux de primer órden, es válido preguntarse si las transformaciones de Darboux de órden superior (transformaciones de Crum) juegan un papel en la ecuación de Schrödinger con potenciales invariantes de forma.

Como un primer paso probaremos el siguiente teorema:

Lema 7 *Bajo la condición de invarianza de forma se cumple*

$$\psi_s(x; f(a)) = \psi_{[1],s+1}(x; a) \tag{4.67}$$

y

$$\lambda_s(f(a)) + R(f(a)) = \lambda_{s+1}(a) \tag{4.68}$$

Estos resultados no son nuevos, pero puesto que haremos uso de ellos daremos aquí una pequeña prueba. Con la abreviación $D^2 = \frac{d^2}{dx^2}$ comezamos con el problema de Sturm-Liouville inicial

$$\left(-D^2 + u\left(x;a\right)\right)\psi_s\left(x;a\right) = \lambda_s\left(a\right)\psi_s\left(x;a\right) \tag{4.69}$$

y

$$\left(-D^2 + u_{[1]}\left(x;a\right)\right)\psi_{[1],s}\left(x;a\right) = \lambda_s\left(a\right)\psi_{[1],s}\left(x;a\right) \quad , \quad s > 1 \tag{4.70}$$

La ecuación (4.69) es válida para cualquier a, y así podemos reemplazar a por $f\left(a\right)$, obteniendo

$$\left(-D^2 + u\left(x;f\left(a\right)\right)\right)\psi_s\left(x;f\left(a\right)\right) = \lambda_s\left(f\left(a\right)\right)\psi_s\left(x;f\left(a\right)\right) \tag{4.71}$$

sumando $R\left(f\left(a\right)\right)\psi_s\left(x;f\left(a\right)\right)$ a ambos lados de la ecuación anterior obtenemos

$$\left(-D^2 + u\left(x;f\left(a\right)\right) + R\left(f\left(a\right)\right)\right)\psi_s\left(x;f\left(a\right)\right) = \left(\lambda_s\left(f\left(a\right)\right) + R\left(f\left(a\right)\right)\right)\psi_s\left(x;f\left(a\right)\right) \tag{4.72}$$

La condición de invariancia de forma (con miras al próximo lema diremos que $u_{[1]}$ y u son un par de potenciales invariantes de forma) nos permite escribir

$$\left(-D^2 + u_{[1]}\left(x;a\right)\right)\psi_s\left(x;f\left(a\right)\right) = \left(\lambda_s\left(f\left(a\right)\right) + R\left(f\left(a\right)\right)\right)\psi_s\left(x;f\left(a\right)\right) \tag{4.73}$$

Sin pérdida de generalidad, el espectro puede ser ordenado como

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < .... \tag{4.74}$$

Entonces los conjuntos $\{\lambda_s(a)\}$, $\{\lambda_s(f(a))\}$ y $\{\lambda_s(f(a)) + R(f(a))\}$ son conjuntos similarmente ordenados. $\psi_{[1],s+1}$ es entonces una autofución del espectro ordenado $\lambda_2 < \lambda_3 < ....$ Concluimos que

$$\psi_s\left(x;f\left(a\right)\right) = \psi_{[1],s+1}\left(x;a\right) \tag{4.75}$$

y

$$\lambda_s\left(f\left(a\right)\right) + R\left(f\left(a\right)\right) = \lambda_{s+1}\left(a\right) \tag{4.76}$$

Para la presentación del teorema principal de esta sección, probaremos el siguiente lema:

Lema 8 *En virtud del lema anterior y bajo la condición de que u y $u_{[1]}$ es una pareja de potenciales invariantes de forma, $u_{[1]}$ y $u_{[2]}$ son también una pareja invariante de forma, es decir,*

$$u_{[2]}(x;a) = u_{[1]}(x;f(a)) + R(f(a)) \tag{4.77}$$

La prueba puede ser hecha en dos pasos

1. La condición de invarianza de forma y la definición de transformación de Darboux nos permite escribir

$$u(x;a) - 2\frac{d}{dx}\frac{\psi_1'(x;a)}{\psi_1(x;a)} = u_{[1]}(x;a) = u(x;f(a)) + R(f(a)) \tag{4.78}$$

Esta ecuación es válida si cambiamos a por $f(a)$, es decir,

$$u(x;f(a)) - 2\frac{d}{dx}\frac{\psi_1'(x;f(a))}{\psi_1(x;f(a))} = u_{[1]}(x;f(a)) = u(x;f^2(a)) + R\left(f^2(a)\right) \tag{4.79}$$

Así, obtenemos trivialmente

$$u(x;f(a)) = u_{[1]}(x;f(a)) + 2\frac{d}{dx}\frac{\psi_1'(x;f(a))}{\psi_1(x;f(a))} \tag{4.80}$$

2. Aplicando de nuevo la definición de la transformación de Darboux sobre $u_{[1]}(x;a)$ obtenemos:

$$u_{[2]}(x;a) = u_{[1]}(x;a) - 2\frac{d}{dx}\frac{\psi_{[1],2}'(x;a)}{\psi_{[1],2}(x;a)} \tag{4.81}$$

Usando la condición de invariaza de forma se obtiene

$$u_{[2]}(x;a) = u(x;f(a)) + R(f(a)) - 2\frac{d}{dx}\frac{\psi_{[1],2}'}{\psi_{[1],2}}(x;a) \tag{4.82}$$

El resultado del primer paso de la prueba, (4.80), puede ser usado para llegar a

$$u_{[2]}(x;a) = u_{[1]}(x;f(a)) + R(f(a)) + 2\frac{d}{dx}\left\{\frac{\psi_1'(x;f(a))}{\psi_1(x;f(a))} - \frac{\psi_{[1],2}'(x;a)}{\psi_{[1],2}(x;a)}\right\} \tag{4.83}$$

Aplicando ahora (4.75) del lema (7) para $s = 1$, es decir,

$$\psi_{[1],2}\left(x;a\right) = \psi_1\left(x;f\left(a\right)\right) \tag{4.84}$$

obtenemos el resultado que queríamos probar:

$$u_{[2]}\left(x;a\right) = u_{[1]}\left(x;f\left(a\right)\right) + R\left(f\left(a\right)\right) \tag{4.85}$$

Vamos a llamar las propiedades (4.75) *invarianza de forma de las autofunciones* (o mejor, las dos autofuciones involucradas constituyen una pareja invariante de forma) y (4.76) invarianza de forma de los autovalores.

Nótese que la invarianza de forma de las funciones de onda se sigue de la invarianza de forma de los potenciales. Desde la invarianza de forma de las autofunciones, podemos, a su vez, concluir que los siguientes dos potenciales relacionados por la transformada de Darboux constituyen una pareja de potenciales invariantes de forma. Así, uno es llevado a la conjetura de que la cadena continúa: Desde el lema (8) se puede mostrar que las siguientes parejas de autofunciones relacionadas por la correspondiente transformación de Darboux de órden superior constituyen también una pareja invariante de forma, desde lo cual se sigue que la siguiente pareja de potenciales conforman una pareja invariante de forma. Sin duda, podemos probar el siguiente teorema.

Teorema 9 *Todos los potenciales vecinos y autofunciones vecinas correspondientes a transformaciones de Darboux de órden superior constituyen parejas invariantes de forma, respectivamente. Esto quiere decir que*

$$u_{[k]}\left(x;a\right) = u_{[k-1]}\left(x;f\left(a\right)\right) + R\left(f\left(a\right)\right) \tag{4.86}$$

y

$$\psi_{[k],s+1}\left(x;a\right) = \psi_{[k-1],s}\left(x;f\left(a\right)\right) \tag{4.87}$$

excepto por un factor multiplicativo. Con más detalle, (4.86) implica (4.87), lo cual a su vez *implica*

$$u_{[k+1]}(x;a) = u_{[k]}(x; f(a)) + R(f(a)) \tag{4.88}$$

La prueba requiere inducción matemática, cuyos primeros pasos consisten en (4.75, 4.85).

Asumimos como hipótesis de inducción, la implicación (4.86) $\Rightarrow$ (4.87). Esto es suficiente puesto que iniciamos con la condición de invarianza de forma original para potenciales (definición de potenciales invariantes de forma). Los primeros pasos de la inducción son dados por los lemas 5.1 y 5.2. Tenemos que mostrar que bajo esta condición, se obtiene

$$\psi_{[k+1],s+1}(x;a) = \psi_{[k],s}(x, f(a)) \tag{4.89}$$

desde lo cual, se sigue a su vez que

$$u_{[k+2]}(x;a) = u_{[k+1]}(x; f(a)) + R(f(a)) \tag{4.90}$$

Vamos a realizar la prueba por pasos:

1. Partimos de

$$\left(-D^2 + u_{[k]}(x;a)\right)\psi_{[k],s}(x;a) = \lambda_s(a)\,\psi_{[k],s}(x;a) \quad , \quad s > k \tag{4.91}$$

2. Puesto que la ecuación anterior es válida para cualquier a, se puede reemplazar a por $f(a)$. Si además sumamos a ambos lados de la ecuación la expresión

$$R(f(a))\,\psi_{[k],s}(x; f(a)) \tag{4.92}$$

y usamos la hipótesis de inducción, obtenemos

$$\left(-D^2 + u_{[k+1]}(x;a)\right)\psi_{[k],s}(x; f(a)) = (\lambda_s(f(a)) + R(f(a)))\,\psi_{[k],s}(x;a) \quad , \quad s > k \tag{4.93}$$

la ecuación (4.76) nos dice entonces que

$$\psi_{[k],s}(x; f(a)) = \psi_{[k+1],s+1}(x; f(a)) \tag{4.94}$$

salvo un factor multiplicativo.

3. Por definición tenemos que

$$u_{[k+1]}(x;a) = u_{[k]}(x;a) - 2\left(\frac{\psi'_{[k],k+1}(x;a)}{\psi_{[k],k+1}(x;a)}\right)' \tag{4.95}$$

para cualquier a. Por lo tanto

$$u_{[k+1]}(x;f(a)) = u_{[k]}(x;f(a)) - 2\left(\frac{\psi'_{[k],k+1}(x;f(a))}{\psi_{[k],k+1}(x;f(a))}\right)' \tag{4.96}$$

Tomando $u_{[k]}(x;f(a))$ de la última ecuación e insertando el resultado en la hipótesis de inducción se muestra fácilmente que

$$u_{[k+1]}(x;a) = u_{[k+1]}(x;f(a)) + 2\left(\frac{\psi'_{[k],k+1}(x;f(a))}{\psi_{[k],k+1}(x;f(a))}\right)' + R(f(a)) \tag{4.97}$$

4. De nuevo, por definición uno sabe que

$$u_{[k+2]}(x;a) = u_{[k+1]}(x;a) - 2\left(\frac{\psi'_{[k+1],k+2}(x;a)}{\psi_{[k+1],k+2}(x;a)}\right)' \tag{4.98}$$

5. Combinando las últimas dos ecuaciones se obtiene

$$u_{[k+2]}(x;a) = u_{[k+1]}(x;f(a)) + R(f(a)) + 2\left(\frac{\psi'_{[k],k+1}(x;f(a))}{\psi_{[k],k+1}(x;f(a))} - \frac{\psi'_{[k+1],k+2}(x;a)}{\psi_{[k+1],k+2}(x;a)}\right)' \tag{4.99}$$

6. El último paso es usar el resultado ya establecido (4.87) para obtener

$$u_{[k+2]}(x;a) = u_{[k+1]}(x;f(a)) + R(f(a)) \tag{4.100}$$

lo cual completa la prueba.

La condición de invarianza de forma (más exactamente la invarianza de forma entre u y

$u_{[1]}$) nos permite definir un nuevo Hamiltoniano de órden s :

$$H^{(s)}[S.I.] \equiv -D^2 + u\left(x; f^{\,s}(a)\right) + \sum_{k=1}^{s} R\left(f^{\,k}(a)\right) \tag{4.101}$$

Nótese que esta definición no hace referencia a la transformación de Darboux de órden s (o equivalentemente a la transformación de Crum de órden s). Sin embargo en virtud del teorema (9) , podemos iterar:

$$\begin{aligned} H^{(s)}[S.I.] &= -D^2 + u_{[1]}\left(x; f^{\,s-1}(a)\right) + \sum_{k=1}^{s-1} R\left(f^{\,k}(a)\right) && (4.102)\\ &= -D^2 + u_{[2]}\left(x; f^{\,s-2}(a)\right) + \sum_{k=1}^{s-2} R\left(f^{\,k}(a)\right) && (4.103)\\ &= ... = -D^2 + u_{[s]}(x; a) = H^{(s)}[D] && (4.104) \end{aligned}$$

Por lo tanto, en vista de lo anterior junto con el teorema (6) podemos establecer como corolario:

Corolario 10 *Bajo la condición de invarianza de forma las tres transformaciones son iguales, es decir,*

$$H^{(s)}[S.I.] = H^{(s)}[D] = H^{(s)}[C] \tag{4.105}$$

4.2.1. Ejemplo

El potencial (potencial de Morse)

$$u(x; A) = 2\left[A^2 - A\left(A + \frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right)\operatorname{sech}^2(\alpha x)\right] \tag{4.106}$$

tiene como potencial compañero al potencial (ec- 51)

$$u_{[1]}(x; A) \equiv 2\left[A^2 - A\left(A - \frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right)\operatorname{sech}^2(\alpha x)\right] \tag{4.107}$$

Nótese que u y $u_{[1]}$ son potenciales invariantes de forma:

$$u_{[1]}(x; A) = u\left(x; f(A)\right) + R\left(f(A)\right) \tag{4.108}$$

donde

$$A_1 \equiv f(A) = A - \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \tag{4.109}$$

y

$$R(f(A)) = 2\left(A^2 - A_1^2\right) \tag{4.110}$$

$\psi_s(x; f(a)) = \psi_{[1],s+1}(x; a)$

Nótese que

$$\psi_1(x; f(A)) = c_1(f(A))\left[\sec\mathrm{h}(\alpha x)\right]^{\frac{\sqrt{2}f(A)}{\alpha}} = c_1\left[\sec\mathrm{h}(\alpha x)\right]^{\frac{\sqrt{2}A}{\alpha}-1} = c\cosh(\alpha x)\,\psi_1 \tag{4.111}$$

Así

$$\psi_{[1],2}(x; A) = c\psi_1(x; f(A)) \tag{4.112}$$

También

$$\psi_2(x; f(A)) = c_2(f(A))\sinh(\alpha x)\,\psi_1(x; f(A)) \tag{4.113}$$

$$= c_2(f(A))\sinh(\alpha x)\cosh(\alpha x)\,\psi_1 \propto \psi_{[1],3} \tag{4.114}$$

$\lambda_s(f(a)) + R(f(a)) = \lambda_{s+1}(a)$

Nótese

$$\lambda_n(A) = 2\left(A^2 - A_{n-1}^2\right) \quad , \quad n = 1 \tag{4.115}$$

entonces

$$\lambda_n(f(A)) = 2\left(A_1^2 - A_n^2\right) \tag{4.116}$$

entonces

$$\lambda_n(f(A)) + R(f(A)) = \lambda_{n+1}(A) \tag{4.117}$$

$u_{[2]}(x; a) = u_{[1]}(x; f(a)) + R(f(a)))$

Recordemos que

$$u[C]_{[1]} = u[D]_{[1]} = u(x; f(a)) + R(f(a))) = 2\left[A^2 - AA_1\,\mathrm{sech}^2(\alpha x)\right] \tag{4.118}$$

Entonces

$$u_{[1]}\left(x;f\left(A\right)\right)+R\left(f\left(A\right)\right)=2\left[f\left(A\right)^{2}-f\left(A\right)\left(f\left(A\right)-\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right)\operatorname{sech}^{2}\left(\alpha x\right)\right]+2\left(A^{2}-A_{1}^{2}\right) \quad (4.119)$$

$$=2\left[A^{2}-A_{1}A_{2}\operatorname{sech}^{2}\left(\alpha x\right)\right]=u_{[2]}\left(x;A\right) \quad (4.120)$$

la última igualdad se logra comparando con (4.51)

$\psi_{[2],s+1}\left(x;a\right)=\psi_{[1],s}\left(x;f\left(a\right)\right)$

Veamos por ejemplo que

$$\psi_{[2],3}\left(x;a\right)=\psi_{[1],2}\left(x;f\left(a\right)\right) \quad (4.121)$$

Recordemos (4.35):

$$\psi_{[1],2}\left(x;A\right)=c_{2}\left(A\right)\alpha\cosh\left(\alpha x\right)\psi_{1}\left(x;A\right) \quad (4.122)$$

entonces

$$\psi_{[1],2}\left(x;A_{1}\right)=c_{2}\left(A_{1}\right)\alpha\cosh\left(\alpha x\right)\psi_{1}\left(x;A_{1}\right) \quad (4.123)$$

teniendo en cuenta (4.112), la expresión anterior se transforma en

$$\psi_{[1],2}\left(x;A_{1}\right)=\frac{c_{2}\left(A_{1}\right)}{c}\alpha\cosh\left(\alpha x\right)\psi_{[1],2}\left(x;A\right) \quad (4.124)$$

teniendo en cuenta (4.35)

$$\psi_{[1],2}\left(x;A_{1}\right)=\frac{c_{2}\left(A_{1}\right)c_{2}\left(A\right)}{c}\alpha^{2}\cosh^{2}\left(\alpha x\right)\psi_{1}\left(x;A\right) \quad (4.125)$$

$$=\bar{c}\psi_{[2],3}\left(x;A\right) \quad (4.126)$$

Capítulo 5

Conclusiones

En el presente trabajo hemos clarificado las relaciones entre transformaciones de Darboux y Crum. Hemos mostrado que la transformación de Crum puede ser alcanzada iterativamente por trasformaciones de Darboux de órden superior. Esto es válido tanto para los potenciales como para las funciones propias. Si además el potencial original resulta ser invariante de forma con su compañero supersimétrico, otra transformación (la cual no hace uso de la transformación de Crum para $n > 1$) es posible (ecuación 4.101). Probamos que esta transformación es también equivalente a la transformación de Crum. Los principales pasos de la prueba fueron (4.86), (4.87) y (4.76). El primero es una generalización de la condición original de invarianza de forma. Nótese que (4.87) y (4.76) podrían ser llamadas condiciones de invarianza de forma para las autofunciones y los autovalores.

Los resultados de este trabajo ayudan a entender la relación entre las diferentes transformaciones del operador Hamiltoniano. Indudablemente, en vista de nuestros resultados uno podría decir que la transformación de Crum la cual aparece mucho más compleja que el resultado original de Darboux es esencialmente una transformación de Darboux iterativa de órden superior y por lo tanto no es más compleja que la primera.

Apéndice A

Demostración de la proposición de Darboux

Se presenta a continuación la demostración de la proposición de Darboux

Las condiciones del problema permiten definir a y como (2.3); luego se construye la ecuación diferencial para esta variable, lográndose el resultado (2.2):

Por hipótesis

$$\psi'' = \{u(x) + \lambda\}\,\psi \tag{A.1}$$

y

$$f'' = \{u(x) + \lambda_1\}\,f \tag{A.2}$$

Entonces, haciendo uso de la identidad

$$\frac{f''}{f} = \left(\frac{f'}{f}\right)' + \left(\frac{f'}{f}\right)^2 \tag{A.3}$$

se obtiene después de restar (A.1) y (A.2):

$$\left(\frac{\psi'}{\psi} - \frac{f'}{f}\right)' + \left(\frac{\psi'}{\psi} - \frac{f'}{f}\right)\left(\frac{\psi'}{\psi} + \frac{f'}{f}\right) = \lambda - \lambda_1 \tag{A.4}$$

factorizando $1/\psi$

$$\left\{\frac{1}{\psi}\left(\psi'-\psi\frac{f'}{f}\right)\right\}'+\frac{1}{\psi}\left(\psi'-\psi\frac{f'}{f}\right)\left(\frac{\psi'}{\psi}+\frac{f'}{f}\right)=\lambda-\lambda_1 \tag{A.5}$$

Definimos y por

$$y\equiv\psi'-\psi\frac{f'}{f} \tag{A.6}$$

Entonces (A.5) se convierte en:

$$\left(\frac{1}{\psi}y\right)'+\frac{1}{\psi}y\left(\frac{\psi'}{\psi}+\frac{f'}{f}\right)=\lambda-\lambda_1 \tag{A.7}$$

Ahora se construye la ecuación diferencial para la variable y. Derivamos (A.7)

$$\left(\frac{1}{\psi}y\right)''+\left(\frac{\psi'}{\psi^2}y+\frac{1}{\psi}\frac{f'}{f}y\right)'=0 \tag{A.8}$$

Desarrollamos el primer paréntesis

$$\left(-\frac{\psi'}{\psi^2}y+\frac{1}{\psi}y'\right)'+\left(\frac{\psi'}{\psi^2}y+\frac{1}{\psi}\frac{f'}{f}y\right)'=0 \tag{A.9}$$

Se cancelan los primeros términos de cada paréntesis:

$$\left(\frac{1}{\psi}y'\right)'+\left(\frac{1}{\psi}\frac{f'}{f}y\right)'=0 \tag{A.10}$$

Desarrollamos la derivada

$$\left(-\frac{\psi'}{\psi^2}y'+\frac{1}{\psi}y''\right)+\left(-\frac{\psi'}{\psi^2}\frac{f'}{f}y+\frac{1}{\psi}\left(\frac{f'}{f}\right)'y+\frac{1}{\psi}\frac{f'}{f}y'\right)=0 \tag{A.11}$$

multiplicamos por ψ y agrupamos términos

$$y''-\frac{1}{\psi}\left(\psi'-\psi\frac{f'}{f}\right)y'+\left(-\frac{\psi'}{\psi}\frac{f'}{f}+\left(\frac{f'}{f}\right)'\right)y=0 \tag{A.12}$$

se usa (A.6)

$$y''+\left(-\frac{\psi'}{\psi}\frac{f'}{f}+\left(\frac{f'}{f}\right)'-\frac{1}{\psi}y'\right)y=0 \tag{A.13}$$

reemplazamos a $y\prime$ por su expresión equivalente que resulta de (A.6)

$$y'' + \left\{ -\frac{\psi'}{\psi}\frac{f'}{f} + \left(\frac{f'}{f}\right)' - \frac{1}{\psi}\left[\psi'' - \psi'\frac{f'}{f} - \psi\left(\frac{f'}{f}\right)'\right]\right\} y = 0 \tag{A.14}$$

simplificamos:

$$y'' + \left(\left(\frac{f'}{f}\right)' - \frac{\psi''}{\psi} + \left(\frac{f'}{f}\right)'\right) y = 0 \tag{A.15}$$

teniendo en cuenta (A.3) la expresión anterior se transforma en:

$$y'' + \left(2\left(\frac{f'}{f}\right)' - \frac{\psi''}{\psi}\right) y = 0 \tag{A.16}$$

que es equivalente a

$$y'' - \left(f\left(x\right)\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{f\left(x\right)}\right) - \frac{f''\left(x\right)}{f\left(x\right)} + \frac{\psi''}{\psi}\right) y = 0 \tag{A.17}$$

Se usa (A.1., A.2) en la expresión anterior:

$$y'' - \left(f\left(x\right)\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{f\left(x\right)}\right) - \lambda_1 + \lambda\right) y = 0 \tag{A.18}$$

Se obtiene la ecuación diferencial para y,

$$y'' = \left(\left(\frac{1}{f}\right)'' f + \lambda - \lambda_1\right) y \tag{A.19}$$

cuya solución es (A.6).

A.1. Solución del ejemplo 1

1. Para construir otra ecuación diferencial soluble, por el método de Darboux, se debe encontrar una solución particular, f, para el valor $h = 0$. Se resuelve entonces

$$f'' = 0 \tag{A.20}$$

a) cuya solución general es

$$f\left(x\right)=A+Bx \tag{A.21}$$

b) Si se toma como solución particular funciones de la forma

$$f\left(x\right)=Bx \tag{A.22}$$

entonces

$$\left(\frac{1}{f}\right)''f=\left(\frac{1}{Bx}\right)''(Bx)=\frac{2}{x^2} \tag{A.23}$$

y la nueva ecuación soluble es:

$$y''=\left\{\frac{2\cdot 1}{x^2}+h\right\}y \tag{A.24}$$

La solución es

$$y=\psi'-\frac{\psi}{x} \tag{A.25}$$

donde u es una solución de

$$\psi''=h\psi \quad , \quad \lambda\neq 0 \tag{A.26}$$

c) Repitiendo el proceso nuevamente, se toma como ecuación inicial (A.24). Para $h=0$

$$f''=\frac{2}{x^2}f \tag{A.27}$$

o

$$x^2f''-2f=0 \tag{A.28}$$

ecuación tipo Frobenius. Soluciones particulares pueden ser

$$f=x^2 \quad \text{o} \quad f=x^{-1} \tag{A.29}$$

La segunda solución particular no genera nada nuevo. La primera solución genera la ecuación diferencial

$$y''=\left\{\frac{3\cdot 2}{x^2}+h\right\}y \tag{A.30}$$

continuando con el proceso de iteración se obtiene la familia de ecuaciones solubles

$$y'' = \left\{ \frac{m\,(m-1)}{x^2} + h \right\} y \tag{A.31}$$

donde m representa un entero.

A.2. Solución del ejemplo 2

Hallamos la solución particular para $h = -1$

$$f'' = -f \tag{A.32}$$

entonces

$$f = \sin x \quad \text{o} \quad f = \cos x \tag{A.33}$$

Si tomamos como solución particular $f = \sin x$ entonces

$$f\,(x) \left(\frac{1}{f\,(x)} \right)'' = \frac{2}{\sin^2 (x)} - 1 \tag{A.34}$$

y la nueva ecuación diferencial es

$$y'' = \left\{ \frac{2}{\sin^2 (x)} + h \right\} y \tag{A.35}$$

Si tomamos como solución particular $f = \cos x$ entonces

$$f\,(x) \left(\frac{1}{f\,(x)} \right)'' = \frac{2}{\cos^2 (x)} - 1 \tag{A.36}$$

y la nueva ecuación diferencial es

$$y'' = \left\{ \frac{2}{\cos^2 (x)} + h \right\} y \tag{A.37}$$

1. a) continuando con la iteración, se obtiene la familia de ecuaciones diferenciales solubles

$$y'' = \left\{ \frac{m(m-1)}{\sin^2(x)} + \frac{n(n-1)}{\cos^2(x)} + h \right\} y \tag{A.38}$$

Apéndice B

Una aplicación del teorema de Jacobi

La identidad $W(W_n, W_{n-1,s}) = W_{ns}W_{n-1}$ ha sido usada por Crum en la prueba de su teorema. Nosotros también la hemos usado varias veces en el trabajo. Por lo tanto vale la pena realizar la prueba.

Vamos primero a establecer algunas notaciones y definiciones. Sea $A = [a_{ij}]$ una matriz $n \times n$. Denotemos al determinante de A por $|A|$, como es usual. Llamaremos menor M_r al determinante que se obtiene con las r filas i_1, i_2, ..., i_r y las r columnas k_1, k_2, ..., k_r de A. Se define el complemento del menor M_r como el determinante que se obtiene de quitar las r filas i_1, i_2, ..., i_r y las r columnas k_1, k_2, ..., k_r.. Este complemento lo denotaremos por M_r^c . Definimos $M^{(r)}$ como

$$M^{(r)} = (-1)^{i_1+i_2+\ldots+i_r+k_1+k_2+\ldots+k_r} M_r^c \tag{B.1}$$

Además, se Δ la matriz de cofactores de A :

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix} \tag{B.2}$$

y M_r y M_r' los menores de $|A|$ y Δ respectivamente.

Teorema 11 (Jacobi) *Con estas notaciones, el teorema de Jacobi afirma que*

$$M'_r = |A|^{r-1}\, M^{(r)} \tag{B.3}$$

Antes de proceder, tomaremos una pequeña diversión con un ejemplo concreto del anterior teorema. Tomaremos como determinante de A, el Wronskiano de las funciones ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_s

$$|A| \equiv W_{3,s} = \begin{vmatrix} \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 & \psi_s \\ \psi'_1 & \psi'_2 & \psi'_3 & \psi'_s \\ \psi''_1 & \psi''_2 & \psi''_3 & \psi''_s \\ \psi'''_1 & \psi'''_2 & \psi'''_3 & \psi'''_s \end{vmatrix} \tag{B.4}$$

La matriz de cofactores viene dada por

$$\Delta = \begin{vmatrix}
+\begin{vmatrix} \psi'_2 & \psi'_3 & \psi'_s \\ \psi''_2 & \psi''_3 & \psi''_s \\ \psi'''_2 & \psi'''_3 & \psi'''_s \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} \psi'_1 & \psi'_3 & \psi'_s \\ \psi''_1 & \psi''_3 & \psi''_s \\ \psi'''_1 & \psi'''_3 & \psi'''_s \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} \psi'_1 & \psi'_2 & \psi'_s \\ \psi''_1 & \psi''_2 & \psi''_s \\ \psi'''_1 & \psi'''_2 & \psi'''_s \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} \psi'_1 & \psi'_2 & \psi'_3 \\ \psi''_1 & \psi''_2 & \psi''_3 \\ \psi'''_1 & \psi'''_2 & \psi'''_3 \end{vmatrix} \\
-\begin{vmatrix} \psi_2 & \psi_3 & \psi_s \\ \psi''_2 & \psi''_3 & \psi''_s \\ \psi'''_2 & \psi'''_3 & \psi'''_s \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} \psi_1 & \psi_3 & \psi_s \\ \psi''_1 & \psi''_3 & \psi''_s \\ \psi'''_1 & \psi'''_3 & \psi'''_s \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} \psi_1 & \psi_2 & \psi_s \\ \psi''_1 & \psi''_2 & \psi''_s \\ \psi'''_1 & \psi'''_2 & \psi'''_s \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 \\ \psi''_1 & \psi''_2 & \psi''_3 \\ \psi'''_1 & \psi'''_2 & \psi'''_3 \end{vmatrix} \\
+\begin{vmatrix} \psi_2 & \psi_3 & \psi_s \\ \psi'_2 & \psi'_3 & \psi'_s \\ \psi'''_2 & \psi'''_3 & \psi'''_s \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} \psi_1 & \psi_3 & \psi_s \\ \psi'_1 & \psi'_3 & \psi'_s \\ \psi'''_1 & \psi'''_3 & \psi'''_s \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} \psi_1 & \psi_2 & \psi_s \\ \psi'_1 & \psi'_2 & \psi'_s \\ \psi'''_1 & \psi'''_2 & \psi'''_s \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 \\ \psi'_1 & \psi'_2 & \psi'_3 \\ \psi'''_1 & \psi'''_2 & \psi'''_3 \end{vmatrix} \\
-\begin{vmatrix} \psi_2 & \psi_3 & \psi_s \\ \psi'_2 & \psi'_3 & \psi'_s \\ \psi''_2 & \psi''_3 & \psi''_s \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} \psi_1 & \psi_3 & \psi_s \\ \psi'_1 & \psi'_3 & \psi'_s \\ \psi''_1 & \psi''_3 & \psi''_s \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} \psi_1 & \psi_2 & \psi_s \\ \psi'_1 & \psi'_2 & \psi'_s \\ \psi''_1 & \psi''_2 & \psi''_s \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 \\ \psi'_1 & \psi'_2 & \psi'_3 \\ \psi''_1 & \psi''_2 & \psi''_3 \end{vmatrix}
\end{vmatrix} \tag{B.5}$$

Tomemos como filas y columnas: $(i_1, i_2) = (3,4) = (k_1, k_2)$. Nótese que $r = 2$. El teorema de Jacobi afirma que

$$\begin{vmatrix} +\begin{vmatrix} \psi_1 & \psi_2 & \psi_s \\ \psi_1' & \psi_2' & \psi_s' \\ \psi_1''' & \psi_2''' & \psi_s''' \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 \\ \psi_1' & \psi_2' & \psi_3' \\ \psi_1''' & \psi_2''' & \psi_3''' \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} \psi_1 & \psi_2 & \psi_s \\ \psi_1' & \psi_2' & \psi_s' \\ \psi_1'' & \psi_2'' & \psi_s'' \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 \\ \psi_1' & \psi_2' & \psi_3' \\ \psi_1'' & \psi_2'' & \psi_3'' \end{vmatrix} \end{vmatrix} = W_{3,s} \begin{vmatrix} \psi_1 & \psi_2 \\ \psi_1' & \psi_2' \end{vmatrix} \tag{B.6}$$

Usando el lema (4), el lado izquierdo se puede presentar en la forma

$$\begin{vmatrix} \frac{d}{dx}W_{2,s} & \frac{d}{dx}W_3 \\ W_{2,s} & W_3 \end{vmatrix} \tag{B.7}$$

Entonces

$$\begin{vmatrix} \frac{d}{dx}W_{2,s} & -\frac{d}{dx}W_3 \\ -W_{2,s} & W_3 \end{vmatrix} = W_{3,s}W_2 \tag{B.8}$$

explícitamente esto implica la siguiente igualdad:

$$W_{3,s}W_2 = W_3\frac{d}{dx}W_{2,s} - W_{2,s}\frac{d}{dx}W_3 = W\left(W_3, W_{2,s}\right) \tag{B.9}$$

La prueba del caso general no requiere ningún nuevo procedimiento y sigue esencialmente los mismos pasos que subyacen al ejemplo.

Sea W_{ns} el Wronskiano de las $n+1$ funciones $\psi_1, \ldots, \psi_n, \psi_s$

$$|A| = W_{n,s} = \begin{vmatrix} \psi_1 & \psi_2 & \ldots & \psi_n & \psi_s \\ \psi_1' & \psi_2' & \ldots & \psi_n' & \psi_s' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \psi_1^{(n-1)} & \psi_2^{(n-1)} & \ldots & \psi_n^{(n-1)} & \psi_s^{(n-1)} \\ \psi_1^{(n)} & \psi_2^{(n)} & \ldots & \psi_n^{(n)} & \psi_s^{(n)} \end{vmatrix} \tag{B.10}$$

Sea Δ la matriz de cofactores de $W_{n,s}$. Vamos a aplicar el teorema de Jacobi para la elección

$$(i_1, i_2) = (n, n+1) = (k_1, k_2) \tag{B.11}$$

En tal caso, $r = 2$, y

$$M_r' = \begin{vmatrix} +W_{n-1,s}' & -W_n' \\ & \\ -W_{n-1,s} & +W_n \end{vmatrix} = W\left(W_n, W_{n-1,s}\right) \tag{B.12}$$

donde hemos usado explícitamente el resultado del lema 4. Claramente tenemos que

$$M^{(r)} = W_{n-1} \tag{B.13}$$

Entonces

$$W\left(W_n, W_{n-1,s}\right) = W_{ns} W_{n-1} \tag{B.14}$$

lo cual prueba el lema 5.

Bibliografía

[1] H. Nicolai, J. Phys. **A9** 1497 (1976)

[2] E. Witten, Nucl. Phys. B188, **513** (1981)

[3] Darboux, C. R. Acad. Sc. Paris, **94** (1882), p. 1456.

[4] L. Infeld and T. E. Hull, Rev. Mod. Phys. **23**, 21 (1951)

[5] Crum M M. Quart. J. Math. Oxford (2) **6** (1955), 121-127.

[6] L. Gendenshtein, Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz. **38**, 299 (1983) [JETP Lett.**38**, 356 (1983)].

[7] A. N. F. Aleixo, A. B. Balantekin and M. A. Candido-Ribeiro, J. Phys. **A38** 11641 (2003)

[8] M. Combescure, F. Gieres and M. Kibler, J. Phys. **A37** 10385 (2004)

[9] F. Cooper, A. Khare and U. Sukhatme, Phys. Rep. **251** 267 (1995)

[10] V. B. Matveev, M. A. Salle. Darboux Transformation and Solitons. Springer, 1991

[11] Georg. Junker. Supersymmetric Methods in Quantum and Statistical Physics. Springer, 1996.

[12] F. Cooper, A. Khare, U. Sukhatme. Supersymmetry in Quantum Mechanics. World Scientific, 2001.

[13] B. K. Bagchi. Supersymmetry in Quantum and Classical Mechanics. Chapman, 2001.

[14] O. Cornejo-Perez. Mathematical Methods of Factorization and Feedback Approach for Biological Systems. arXiv:physics/0509242 , 2005

[15] E. L. Ince. Ordinary differential equations. Dover Publications 1956

[16] A. A. Andrianov, N. V. Borisov, M. J. Ioffe. Phys. Lett. B181(1,2), 141-144 (1986).

[17] C. H. Edwards y D. E. Penney. Ecuaciones Diferenciales. Prentice Hall, 2001

[18] R. Dutt, A. Khare, and U. P. Sukhatme. Am. J. Phys., **56**(2),163 1998

[19] E. Shrödinger, Proc. Roy. Acad. **A46**, 9 (1940)

[20] M. Bernstein and L. S. Brown, Phys. Rev. Lett, **52** 1933 (1984)

[21] D Gómez Ullate, N Kamram and R Milson. arXiv:nlin.SI/042052 26 Feb 2004

[22] B F Samsonov, A A Pecheritsin. J. Phys. A: Math. Gen. (37) 2004 pp 239-250