

IEME-I-06-06

**PRONÓSTICO DE PRECIOS DE LA BOLSA DE ENERGÍA MEDIANTE EL
FILTRO KALMAN**

VIVIANA RIPELL GONZÁLEZ

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA Y ELECTRÓNICA

**BOGOTÁ
2006**

**PRONÓSTICO DE PRECIOS DE LA BOLSA DE ENERGÍA MEDIANTE EL
FILTRO KALMAN**

VIVIANARIPOLL GONZÁLEZ

**TESIS DE GRADO PARA OPTAR POR EL TÍTULO DE MAGÍSTER EN
INGENIERÍA ELÉCTRICA**

**ASESOR
DR. ALVARO TORRES M.
PROFESOR TITULAR UNIVERSIDAD DE LOS ANDES**

**UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
FACULTAD DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA Y ELECTRÓNICA
BOGOTÁ
2006**

TABLA DE CONTENIDOS

1.	INTRODUCCIÓN.....	1
2.	OBJETIVOS.....	3
3.	MERCADO DE ENERGÍA COLOMBIANO.....	4
3.1	GENERALIDADES DEL PARQUE DE GENERACIÓN.....	4
3.2	GENERALIDADES DEL MERCADO A CORTO PLAZO.....	5
3.3	CARACTERÍSTICAS DE PRECIOS DE BOLSA DE ENERGÍA	7
4.	MODELOS TRADICIONALES DE PRONÓSTICO DE PRECIO DE BOLSA DE ENERGÍA	9
4.1	MODELO MOVIMIENTO BROWNIANO (MBG).....	9
4.2	MODELO ORNSTEIN UHLENBECK GAUSSIANO (OUG).....	11
4.3	MODELO HOBSON ROGER ORNSTEIN UHLENBECK (HROU).....	13
5.	FILTRO KALMAN.....	17
5.1	UN POCO DE HISTORIA.....	17
5.2	CONCEPTOS DE FILTRO KALMAN.....	18
5.3	ALGORITMO.....	20
6.	APLICACIÓN DEL FILTRO KALMAN AL PRONÓSTICO DE PRECIO DE BOLSA	23
6.1	ALGORITMO.....	23
6.2	IMPLEMENTACIÓN.....	25
7.	CONCLUSIONES.....	32
8.	BIBLIOGRAFÍA.....	34

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Evolución del Embalse Ofertable. Fuente: Interconexión Eléctrica S.A.....	5
Figura 2. Determinación del precio de Bolsa a partir del despacho ideal.	6
Figura 3. Precio promedio de Bolsa	7
Figura 4. Pronóstico del precio de bolsa promedio diario mediante MBG.....	10
Figura 5. Pronóstico del precio de bolsa máximo diario mediante MBG.....	11
Figura 6. Pronóstico del precio de bolsa promedio diario mediante OUG	12
Figura 7. Pronóstico del precio de bolsa máximo diario mediante OUG.....	13
Figura 8. Pronóstico del precio de bolsa promedio diario mediante HROU.....	15
Figura 9. Pronóstico del precio de bolsa máximo diario mediante HROU.....	15
Figura 10. Rudolf Kalman	17
Figura 11. Algoritmo del Filtro Kalman	22
Figura 12. Diagrama de Flujo del procedimiento de aplicación del Filtro Kalman al pronóstico.....	25
Figura 13. Pronóstico de precio promedio de bolsa diario mediante MBG-FK.....	26
Figura 14. Pronóstico de precio máximo de bolsa diario mediante MBG-FK.....	26
Figura 15. Pronóstico de precio promedio de bolsa diario mediante OUG-FK.....	27
Figura 16. Pronóstico de precio máximo de bolsa diario mediante OUG-FK.....	27
Figura 17. Pronóstico de precio promedio de bolsa diario mediante HROU-FK	28
Figura 18. Pronóstico de precio máximo de bolsa diario mediante HROU-FK.....	28

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. Porcentajes de error en el pronóstico de precio de bolsa promedio en los distintos métodos.....	29
Tabla 2. Porcentajes de error en el pronóstico de precio de bolsa máximo en los distintos métodos.....	30

1. INTRODUCCIÓN

En la bolsa de energía colombiana los generadores hacen sus ofertas diariamente de acuerdo a su disponibilidad, compitiendo hasta atender la demanda del Sistema Interconectado Nacional (SIN). Todas las ventas realizadas por los generadores se pagan de acuerdo al precio de bolsa correspondiente a un despacho por mérito.

El problema que surge en este mercado competitivo es que el generador desconoce el nivel de energía que debe producir así como el precio de venta. Además, en Colombia los precios de energía presentan gran incertidumbre gracias a la elevada componente hidráulica de la parte generadora (70% para diciembre de 2002), la poca regulación de los embalses que se tienen y la varianza de la hidrología debida a fenómenos climatológicos como El Niño y La Niña.

La incertidumbre en el Mercado de Energía Mayorista (MEM) se puede separar en dos componentes: uno intrínseco como resultado de la interacción entre los que compran y venden y otro extrínseco que corresponde a un sistema energético muy dependiente del recurso hidráulico y por ende de la estacionalidad y volatilidad de los aportes hídricos. Estas particularidades determinan la forma que se invierte, planea y opera el sistema eléctrico, por ello mismo las herramientas de predicción constituyen una herramienta importante para dichos propósitos.

Un modelo de pronóstico del precio de la bolsa de energía es una herramienta útil para la toma de decisiones de los agentes del sector.

Este trabajo presenta un modelo de pronóstico de precios promedio diario y máximo diario de la bolsa en el corto plazo a través de un algoritmo basado en el Filtro Kalman el cual puede aplicarse sobre diferentes modelos de pronóstico que cumplan con una representación lineal estocástica de los precios de bolsa. En este trabajo, el Filtro Kalman es aplicado a tres modelos de pronósticos de basados en la caminata aleatoria como son el

modelo browniano geométrico, el modelo Ornstein Uhlenbeck y el modelo Hobson Rogers
Ornstein Uhlenbeck.

2. OBJETIVOS

El objetivo principal de este proyecto de investigación es estudiar, plantear y probar modelos de pronóstico de precios de energía del mercado mayorista de Colombia en el corto plazo aplicando la teoría del Filtro Kalman.

Considerar modelos más tradicionales de representación de la incertidumbre a través de la teoría de la probabilidad para la comparación con la aplicación del Filtro Kalman.

Validar los modelos planteados usando como sistema piloto los precios de bolsa de energía colombiana.

3. MERCADO DE ENERGÍA COLOMBIANO

En Colombia el proceso de reestructuración del sector eléctrico Colombiano inició con la Resolución 09-94 hecha por la Comisión de Regulación de Energía y Gas CREG:

“Por la cual se dictan disposiciones sobre contratos de energía eléctrica durante el período de transición hacia un mercado libre y se modifica parcialmente el Acuerdo Reglamentario para el Planeamiento de la Operación del Sistema Interconectado Nacional”.

Mediante esta resolución buscó una liberación del proceso de prestación de energía eléctrica, intentado crear las condiciones para establecer el mercado de energía eléctrica. De esta forma agentes privados pueden entrar a participar y el Estado reduce su función a regulador del mercado. Como regulador, el Estado intenta dar las señales necesarias para la expansión del mercado ahora por parte de los agentes privados y de esta manera garantizar la confiabilidad del sistema de energía eléctrico a largo plazo. [10]

3.1 GENERALIDADES DEL PARQUE DE GENERACIÓN

En Colombia, dos tecnologías conforman el parque de generación: las centrales hidroeléctricas y las térmicas. La primera, se caracteriza por presentar altos costos fijos sin embargo, costos variables bajos. La segunda, se caracteriza por tener bajos costos fijos y costos variables altos [10].

El régimen hidrológico Colombiano está bien definido bajo dos estaciones: invierno y verano; y debido a estas condiciones, la tecnología hidráulica constituye una gran parte del parque de generación cuando se está en invierno, y en tiempos hidrológicos poco favorables se hace necesario el uso de la tecnología térmica. Otra característica importante de la hidrología en Colombia es el evento del fenómeno del Niño el cual tiende a presentarse entre cada 5 y 7 años, su efecto se muestra en la gran disminución de la disponibilidad del

embalse [10]. (Figura 1), en esta época también es notoria la participación de la tecnología térmica. En general la participación conjunta de las centrales hidráulicas y térmicas permite disminuir el riesgo de desabastecimiento, es por esto que la participación de la tecnología térmica ha venido aumentando en el tiempo [10].

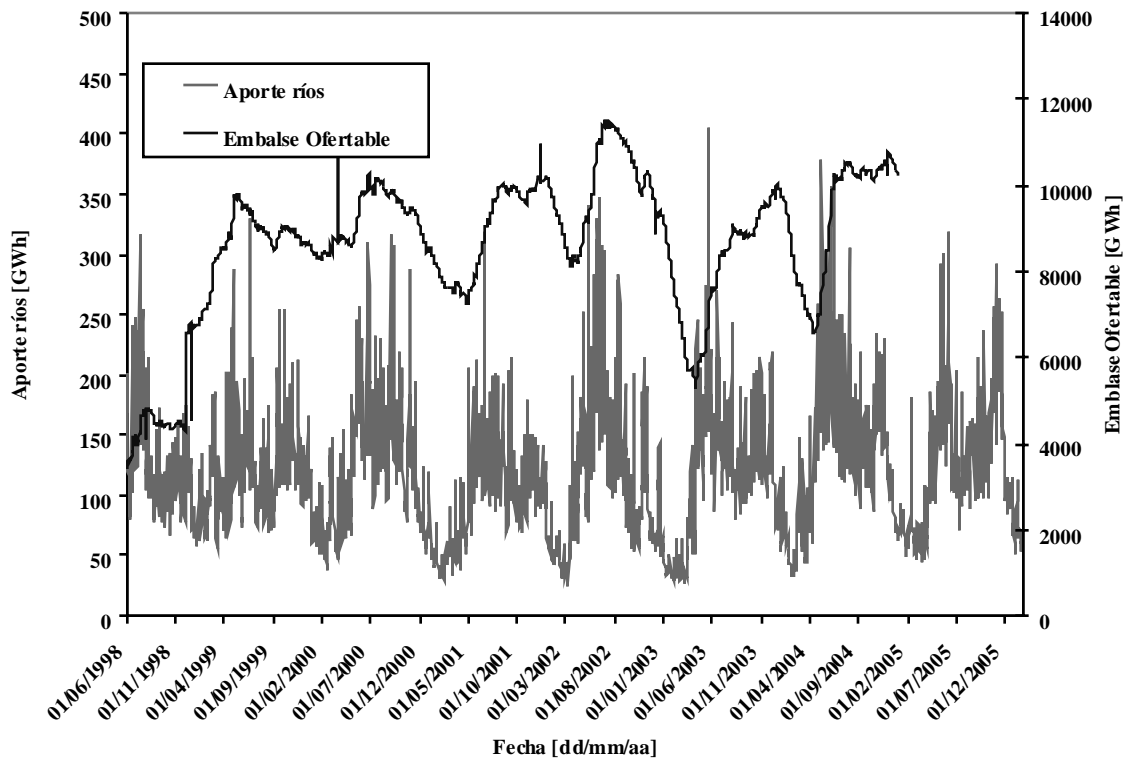


Figura 1. Evolución del Embalse Ofertable. ¹

3.2 GENERALIDADES DEL MERCADO A CORTO PLAZO

En el mercado de energía eléctrica las ventas se pueden hacer a largo plazo mediante contratos bilaterales o bien a corto plazo mediante la bolsa de energía.

En la bolsa de energía los generadores hacen sus ofertas diariamente de acuerdo a su disponibilidad, de esta forma los generadores compiten hasta atender la demanda del

¹ Fuente: Inerconexión Eléctrica S.A.

Sistema Interconectado Nacional. Todas las ventas hechas por los generadores se pagarán de acuerdo al precio de bolsa correspondiente a la última oferta que permita abastecer la demanda, los generadores con ofertas aceptadas son los despachados. (Ver Figura 2).



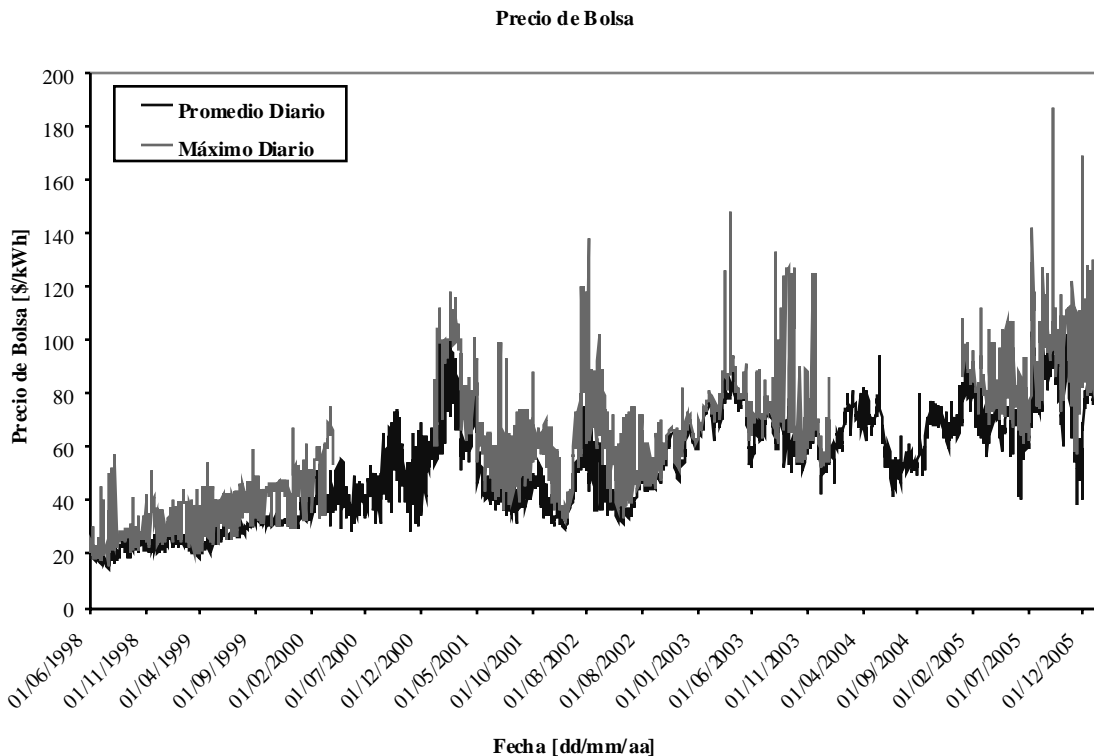
Figura 2. Determinación del precio de Bolsa a partir del despacho ideal.²

Las ofertas de los generadores deben reflejar sus costos variables, de esta forma, si son despachados tendrán ganancia obtenida por la renta marginal dada por la diferencia entre la venta hecha y el precio de bolsa (precio spot) el cual será mayor o igual al de su precio de oferta. Así los generadores podrán recuperar sus costos variables y en el largo plazo la totalidad de sus costos fijos.

La incertidumbre en el mercado de corto plazo está dada por la volatilidad generada gracias a la renta marginal que afectará a los generadores en la forma en como recuperarán sus inversiones y por tanto esta incertidumbre será una buena o mala señal para los inversionistas.

La Figura 3 muestra la evolución histórica del precio de bolsa promedio y máximo diario.

² Fuente: Interconexión Eléctrica S.A.



De la figura anterior se puede observar que dentro del año 1997 se presentó un cambio fuerte en el precio de bolsa como respuesta a la disminución de disponibilidad de energía debido a la presencia del fenómeno del Niño ya que fue necesario que se despacharan generadores con mayores costos variables. Este alto precio de bolsa disminuye a mediados del año 1998 cuando desaparece el fenómeno del Niño.

3.3 CARACTERÍSTICAS DE PRECIOS DE BOLSA DE ENERGÍA

Las tres principales propiedades que caracterizan los precios de la bolsa de energía son [2]:

3.3.1 Estacionalidad:

³ Fuente: Interconexión Eléctrica S.A.

Los precios presentan estacionalidades debidas a las características de la demanda típicamente fluctuaciones horarias recurrentes y a las características de la oferta condicionadas a los aportes hidráulicos.

3.3.2 Reversión a la media:

Las características económicas de los mercados eléctricos hacen que los precios fluctúen alrededor de un valor medio.

3.3.3 Picos de precio:

La energía no es un bien almacenable, lo cual induce algunos picos en el precio de bolsa.

4. MODELOS TRADICIONALES DE PRONÓSTICO DE PRECIO DE BOLSA DE ENERGÍA

4.1 MODELO MOVIMIENTO BROWNIANO (MBG)

4.1.1 Descripción

Este modelo se basa en términos de un Proceso de Wiener o movimiento Browniano (1).

$$\Delta w_t = \epsilon_t \sqrt{\Delta t} \quad (1)$$

Donde ϵ es una variable aleatoria que sigue una distribución normal estandarizada (N(0,1)). Siendo x_t el precio de bolsa en el tiempo t, el proceso de Wiener generalizado para esta variable en el tiempo discreto se define de acuerdo a (2)

$$\Delta x_t = \alpha x_t \Delta t + \sigma x_t \Delta w_t \quad (2)$$

Donde α y σ son constantes. El primer término implica que x tiene una tendencia α por unidad de tiempo y σ agrega ruido a la trayectoria seguida por x representando la volatilidad. Los cambios del proceso están lognormalmente distribuidos, tal como se presenta en (3)

$$\frac{\Delta x_t}{x_t} = \alpha \Delta t + \sigma \cdot \epsilon \cdot \sqrt{\Delta t} \quad (3)$$

Los parámetros se determinan mediante el criterio de máxima verosimilitud:

$$\alpha = \frac{1}{n} (\ln(x_n / x_0)) \quad (4)$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (x_t - x_{t-1} - \alpha)^2 \quad (5)$$

4.1.2 Aplicación del modelo al pronóstico de precio de bolsa

La Figura 4 muestra los resultados del pronóstico del precio promedio de bolsa mediante este método para las tres últimas semanas del 2005. La Figura 5 muestra los resultados para un pronóstico del precio de bolsa máximo diario.

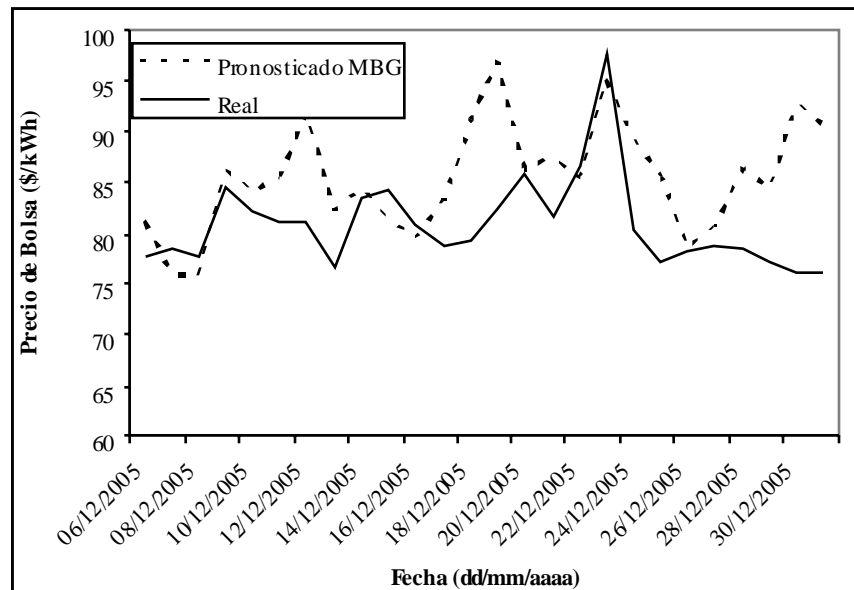


Figura 4. Pronóstico del precio de bolsa promedio diario mediante MBG

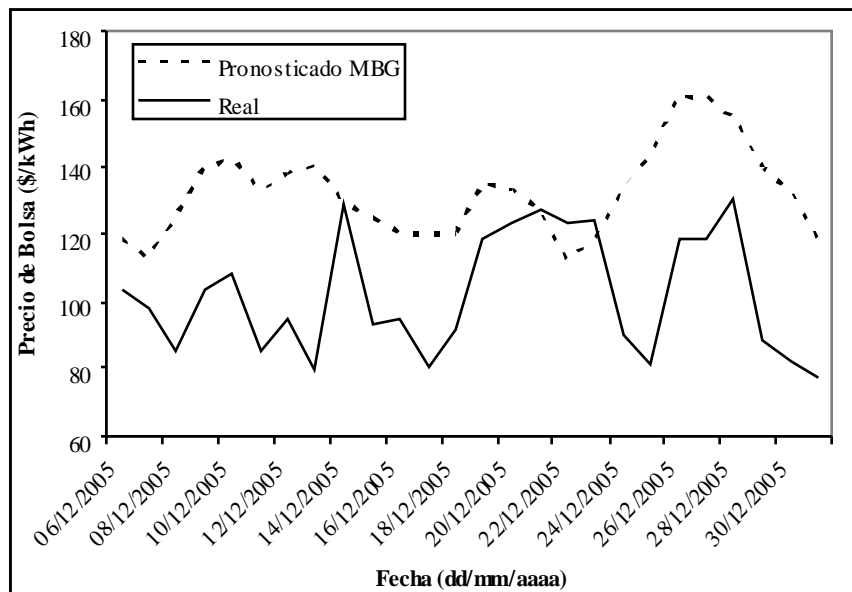


Figura 5. Pronóstico del precio de bolsa máximo diario mediante MBG

4.2 MODELO ORNSTEIN UHLENBECK GAUSSIANO (OUG)

4.2.1 Descripción

Este modelo permite que el precio de bolsa revierta en la media del proceso así:

$$\Delta x_t = \eta(m - x_t)\Delta t + \sigma\Delta w_t \quad (6)$$

Donde η es la tasa de reversión a la media m , σ la volatilidad de x_t . Los parámetros se determinan mediante el criterio de máxima verosimilitud así:

$$m = \frac{1}{n+1} \sum_{t=0}^n x_t \quad (7)$$

$$\eta = -\ln \left(\frac{\sum_{t=1}^n (x_t - m)(x_{t-1} - m)}{\sum_{t=1}^n (x_{t-1} - m)^2} \right) \quad (8)$$

$$\sigma = \frac{1}{n} \sqrt{\frac{2\eta}{1 - e^{-2\eta}}} \left[\sum_{t=1}^n (x_t - e^{-\eta} x_{t-1} - m + m e^{-\eta}) \right] \quad (9)$$

4.2.2 Aplicación del modelo al pronóstico de precio de bolsa

La Figura 6 muestra los resultados del pronóstico del precio promedio de bolsa mediante este método para las tres últimas semanas del 2005 y la Figura 7 muestra los resultados para un pronóstico del precio de bolsa máximo diario.

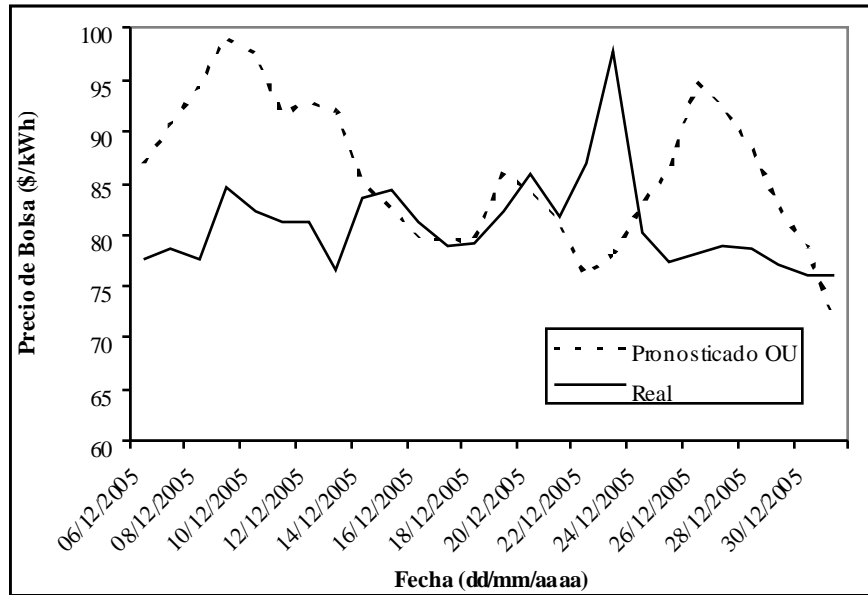


Figura 6. Pronóstico del precio de bolsa promedio diario mediante OUG

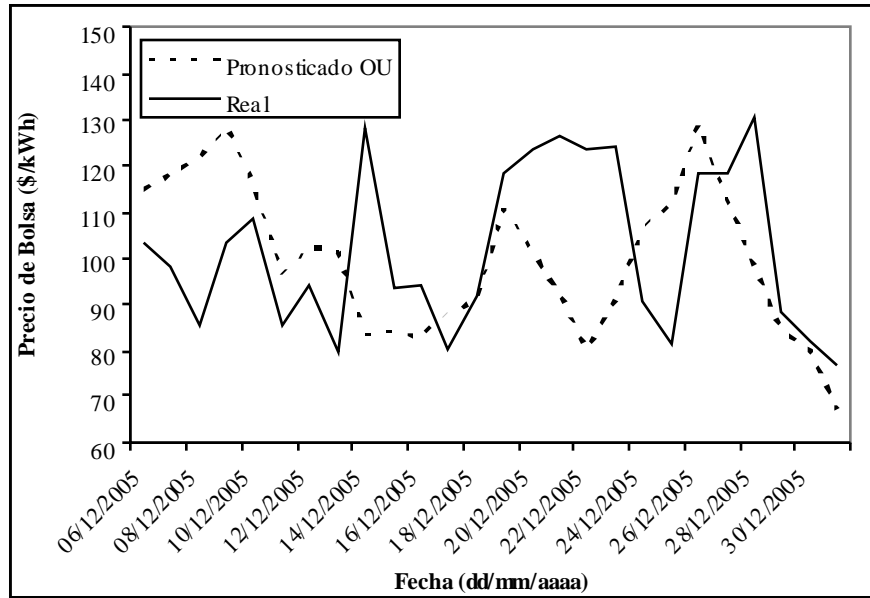


Figura 7. Pronóstico del precio de bolsa máximo diario mediante OUG

4.3 MODELO HOBSON ROGER ORNSTEIN UHLENBECK (HROU)

4.3.1 Descripción

El modelo propuesto por [1] no solo permite la reversión a la media sino también tiene en cuenta una volatilidad que depende de *funciones offset* con base en las variaciones de los precios pasados. La Ecuación (10) describe el modelo:

$$\Delta x_t = \eta(m - x_t)\Delta t + \sigma(S_t^{(1)}, S_t^{(2)})\Delta w_t \quad (10)$$

Donde $S_t^{(h)}$ son las *funciones offset*

$$S_t^{(m)} = (1 - \phi) \sum_{j=1}^{\infty} \phi^{j-1} (x_t - x_{t-j})^m \quad (11)$$

Para encontrar el valor de σ en [2] algunos expertos proponen usar el método GARCH

(1,1) donde la volatilidad se basa en las diferencias entre el precio del tiempo t y todos los anteriores así:

$$\sigma = \frac{\omega}{1-\phi} + \theta \sum_{j=1}^{t-1} \phi^{j-1} (x_{t-j+1} - x_{t-j})^2 \quad (12)$$

Donde ω, ϕ y θ son números positivos reales y $m = 1 - \theta - \phi$. Para la obtención de los parámetros se minimiza la siguiente ecuación:

$$F = \frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^{n-1} \left(\log \sigma^2 + \frac{(x_{t+1} - (1-m)x_t)^2}{\sigma^2} \right) \quad (13)$$

Donde m se obtiene mediante la ecuación (7).

4.3.2 Aplicación del modelo al pronóstico de precio de bolsa

La Figura 8 muestra los resultados del pronóstico del precio promedio de bolsa mediante este método para las tres últimas semanas del 2005 y la Figura 9 muestra los resultados para un pronóstico del precio de bolsa máximo diario.

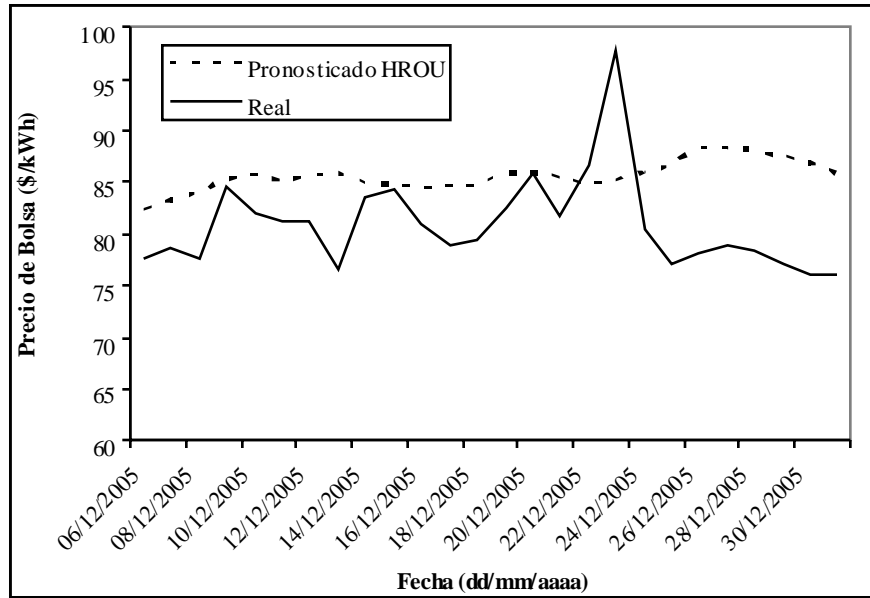


Figura 8. Pronóstico del precio de bolsa promedio diario mediante HROU

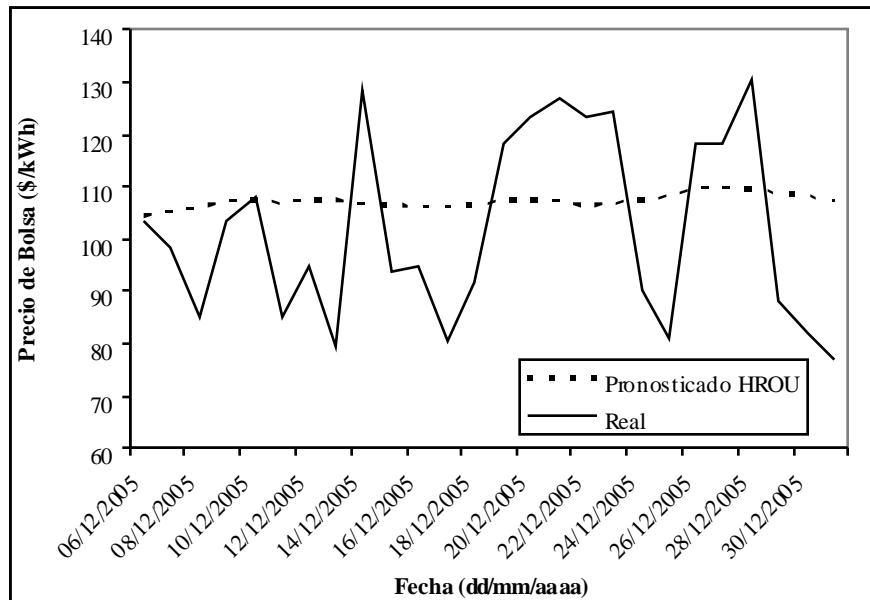


Figura 9. Pronóstico del precio de bolsa máximo diario mediante HROU

De las Figura 8 y Figura 9 se observa que la variación entre un dato pronosticado y otro es baja con respecto a las figuras de los anteriores modelos, esto es debido a que las *funciones offset* necesarias para hallar la varianza en el modelo HROU que no es constante no

variaron para los últimos datos, manteniéndose así una varianza baja en el modelo.

5. FILTRO KALMAN

5.1 UN POCO DE HISTORIA

Rudolf Emil Kalman nació en Budapest, Hungría, el 19 de Mayo de 1930, Ingeniero Eléctrico del Instituto Tecnológico de Massachussets con doctorado de la Universidad de Columbia en el año 1957. Algunos de sus cargos incluyen Matemático de Investigación en el R.I.A.S. (Research Institute for Advanced Study) en Baltimore entre 1958-1964, Profesor en la Universidad de Stanford entre 1964-1971 y Profesor Investigativo entre 1971 a 1992. Desde 1973 ha estado a cargo del Mathematical System Theory en el ETH (Swiss Federal Institute of Technology) en Zurich [4].



Figura 10. Rudolf Kalman ⁴

Dentro de los premios recibidos está la Medalla de Honor de IEEE en 1974, la Medalla Centenaria IEEE en 1984, el Premio de Kyoto en Alta Tecnología de la Fundación Inamori en 1985, el Premio Steele de la Sociedad Matemática Americana en 1987 y el Premio Bellman en 1997. Actualmente es miembro de la Academia Nacional de Ciencias en USA, la Academia Nacional de Ingeniería en USA y la Academia Americana de Artes y Ciencias en USA [9].

⁴ Fuente: <http://www.cs.unc.edu/~welch/kalman/index.html>

La idea inicial de Filtro Kalman se le ocurrió durante un viaje en tren desde Princeton a Baltimore en 1958 cuando el tren se detuvo durante una hora antes de llegar a Baltimore [4].

5.2 CONCEPTOS DE FILTRO KALMAN

El filtro de Kalman consiste en un conjunto de ecuaciones que calculan un estimador de un sistema en un tiempo k con base en la información disponible en $k-1$ y que además actualiza la información disponible en k .

Este filtro supone que el sistema puede ser descrito a través de un modelo estocástico lineal, en donde el error asociado tanto al sistema como a la información adicional que se incorpora tiene una distribución normal con media cero y varianza determinada. La solución es óptima ya que el filtro combina toda la información observada y el conocimiento previo acerca del comportamiento del sistema para producir una estimación del estado de tal manera que el error es minimizado estadísticamente. Cada vez que hay una nueva observación el filtro recalcula la solución.

El sistema dinámico a tratar debe estar representado por la forma estado-espacio descrito por las variables estado, las cuales, se suponen no están exactamente medidas por lo tanto para introducir algún grado de incertidumbre se usan procesos estocásticos.

El filtro de Kalman intenta resolver el problema general de estimar el estado X de un proceso en el tiempo discreto, el cual es representado por una ecuación diferencial estocástica lineal o ecuación de estado así:

$$X'(k+1) = \phi(k) * X(k) + W(k) \quad (14)$$

y una ecuación de observación o medida así:

$$Z(k) = H(k)X(k) + V(k) \quad (15)$$

donde ϕ es la matriz de transición que relaciona el estado en el momento actual k con el siguiente k , H es la matriz de observación y las variables aleatorias W y V representan el error del proceso y de la medida respectivamente que son independientes entre ellas, con media 0 y varianza determinada así:

$$\begin{aligned} W &\cong N(0, Q) \\ V &\cong N(0, R) \end{aligned} \quad (16)$$

Por simplicidad la matriz de transición, de observación y así como las perturbaciones Q y R pueden ser consideradas como constantes en el tiempo.

$X'(k-1)$ es el estado estimado en el tiempo k es decir la estimación *a priori* obtenido gracias solo a la información que se tiene en $k-1$, y $X'(k)$ es el estado estimado en el tiempo k gracias a la observación $Z(k)$, de esta forma, el error *a priori* estaría dado por:

$$e'(k) = X(k) - X'(k-1) \quad (17)$$

y el error *a posteriori* dado por:

$$e(k) = X(k) - X'(k) \quad (18)$$

La covarianza del error estaría dado por:

$$P'(k) = E\{e'(k)e(k)^T\} \quad (19)$$

y la covarianza del error a posteriori estaría dada por

$$P(k) = E\{e(k)e(k)^T\} \quad (20)$$

La ganancia de Kalman permite hacer la actualización mediante la combinación lineal entre del valor estimado a priori y la diferencia dada por la observación así:

$$\hat{X}(k) = \hat{X}(k-1) + K * [Z(k) - H * \hat{X}(k-1)] \quad (21)$$

La innovación en la ecuación anterior esta dada gracias a la diferencia $Z(k) - H * \hat{X}(k-1)$. El valor K minimiza la covarianza de error y se obtiene mediante la siguiente ecuación [9].

$$K(k) = P(k-1) * H^T * (H * P(k-1) * H^T + R)^{-1} \quad (22)$$

Cuando las perturbaciones R son cercanas a 0, la observación Z(k) es más confiable mientras que la medida de predicción $H * \hat{X}(k-1)$ es menos confiable; a su vez, si $P(k-1)$ se acerca a 0, la observación Z(k) es menos confiable mientras la medida de predicción se hace más confiable [4].

5.3 ALGORITMO

El filtro de Kalman se basa en la retroalimentación mediante los datos observados. Así el algoritmo puede ser dividido en dos partes:

5.3.1 Etapa de Proyección:

Actualiza la ecuación de predicción, proyectando el estado desde el tiempo k hasta el k+1 e intenta actualizar la matriz de covarianza P(k) del estado teniendo en cuenta la información disponible. Mediante las siguientes ecuaciones se lleva a cabo esta etapa:

$$X'(k+1) = \phi(k) * X(k) + W(k) \quad (23)$$

$$P'(k+1) = \phi(k)P(k)\phi(k)^T + Q(k) \quad (24)$$

5.3.2 Etapa de Corrección:

Con la información nueva observada corrige la proyección anterior. Mediante las siguientes ecuaciones se lleva a cabo esta etapa:

$$K(k) = P(k-1) * H^T * (H * P(k-1) * H^T + R)^{-1} \quad (25)$$

$$\hat{X}(k) = \hat{X}(k-1) + K(k) * [Z(k) - H * \hat{X}(k-1)] \quad (26)$$

$$P(k) = P(k-1) - P'(k+1) * H * P'(k+1) \quad (27)$$

En esta etapa es necesario el cálculo de la ganancia de Kalman K, que minimiza la covarianza el error de la nueva estimación del estado. Ya obtenido K se mide realmente el proceso para obtener Z y entonces generar una nueva estimación del estado que incorpora la nueva observación. Por último se obtiene una estimación de la covarianza del error.

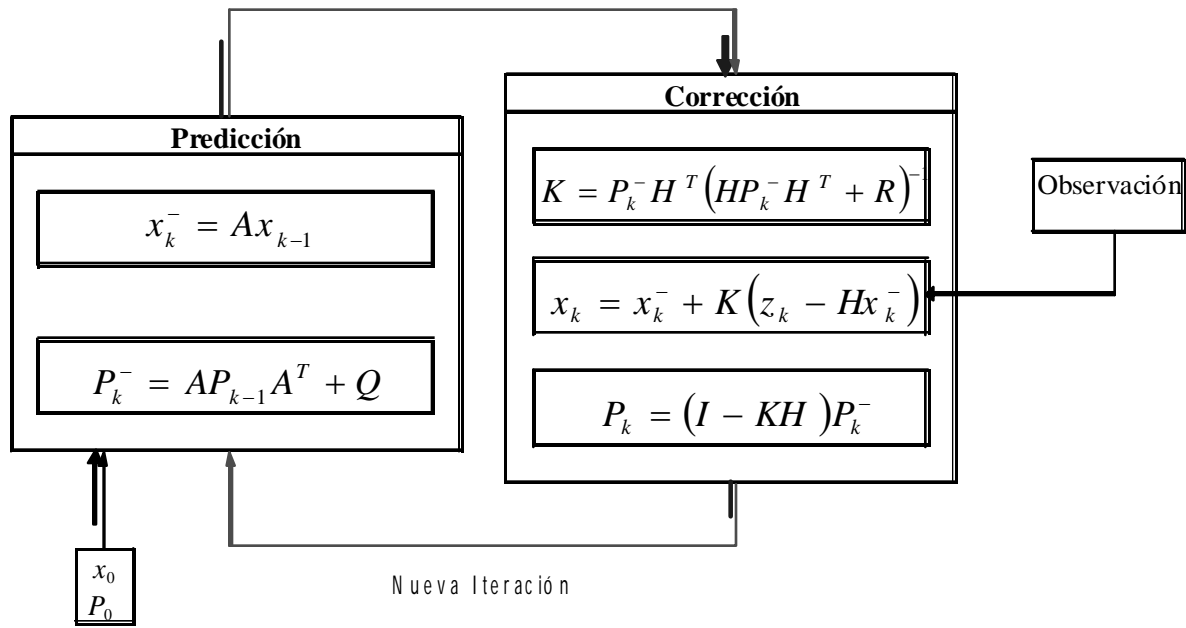


Figura 11. Algoritmo del Filtro Kalman

6. APLICACIÓN DEL FILTRO KALMAN AL PRONÓSTICO DE PRECIO DE BOLSA

6.1 ALGORITMO

Si se aplica el modelo del Filtro Kalman al pronóstico prediciendo y corrigiendo con nueva información por cada tiempo k que se desee pronosticar se obtendría un buen resultado, pero como la corrección es siguiente a la predicción, es decir una predicción al tiempo, se pronosticaría solo por un tiempo k ya que es necesaria la corrección inmediata. El pronóstico a corto plazo en el precio de bolsa requiere por lo menos una proyección de una semana.

Con el fin de obtener una mejor respuesta en el tiempo es necesario que los parámetros definidos en los modelos de precio de Bolsa Browniano Geométrico o el Modelo Ornstein-Uhlenbeck sean estimados constantemente. El hecho de ajustar estos parámetros para solo una parte de los datos (ya que es la información de la que se dispone) hace que el pronóstico solo aplique para periodos similares, por otro lado, si se dispone de nueva información los parámetros pueden tener en cuenta esta información y por tanto adaptarse.

El Filtro de Kalman permite la estimación recursiva que es lo que se pretende con este modelo de pronóstico. Para la aplicación se puede partir de cualquier modelo de pronóstico de precio. En este capítulo se aplica el Filtro Kalman a tres modelos explicados en el Capítulo 3: El Movimiento Browniano Geométrico, el modelo de Ornstein Uhlenbeck y por último al modelo de Hobson Rogers Ornstein Uhlenbeck. El Filtro de Kalman se aplica con el fin de aprovechar la nueva información disponible y hacer una mejor estimación de los parámetros que se obtuvieron a partir de los modelos anteriores.

El procedimiento que se lleva a cabo consiste en asumir que los parámetros ϕ cambian lentamente en el tiempo y que su comportamiento se puede asemejar a una caminata aleatoria con una pequeña varianza así:

$$\phi(k+1) = \phi(k) + W(k) \quad (28)$$

Donde $W \cong N(0, Q)$ y Q^2 es una constante positiva de valor pequeño. Así las cosas, el modelo de Filtro Kalman explicado en el Capítulo 3 aplica pero no a la variable de precio de bolsa, sino los parámetros del modelo de pronóstico.

El modelo de las mediciones esta representado por:

$$z(k) = Hx(k) + V(k) \quad (29)$$

Donde H es la matriz de observación, $V(k)$ es el error de la medición con media 0 y varianza σ_v^2 y la covarianza cruzada entre $W(k)$ y $V(k)$ es 0.

El algoritmo de FK puede describirse así [6]:

$$\phi(k) = \phi^-(k) + K * [z(k) - H(\phi^-(k)x(k))] \quad (30)$$

$$K = P^-(k)x(k)(x^T(k)P^-(k)x(k) + R)^{-1} \quad (31)$$

$$P(k) = (I - KH)P^-(k) \quad (32)$$

$$P^-(k) = P(k-1) - \frac{P^-(k-1)x(k)x^T(k)P^-(k)}{R + x^T(k)P^-(k-1)x(k)} + Q \quad (33)$$

Donde $z(k)$ es la nueva observación en el tiempo k , K es la ganancia de Kalman, P es la matriz de covarianzas, $Q = \sigma_w^2 I$, $R = \sigma_v^2 I$, I es la matriz identidad.

En este algoritmo la etapa de predicción está dada por las ecuaciones (28) y (33), mientras

la etapa de corrección está dada por (30), (31) y (32).

La **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.** muestra de manera esquemática el procedimiento de aplicación del FK para el pronóstico de precios.

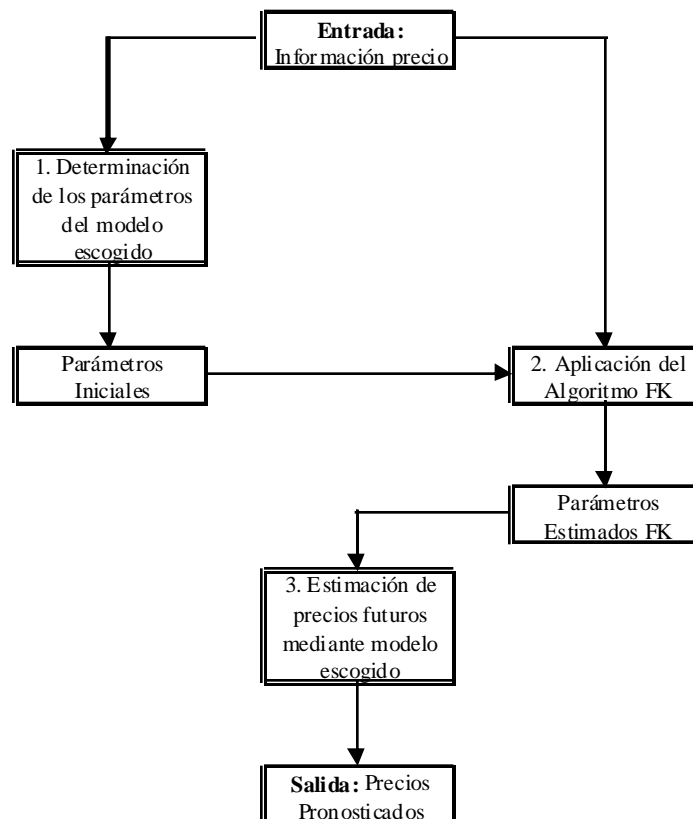


Figura 12. Diagrama de Flujo del procedimiento de aplicación del Filtro Kalman al pronóstico.

6.2 IMPLEMENTACIÓN

Los valores de Q y R se obtuvieron de forma experimental, obteniéndose $Q = 10^{-3}$ y $R = 1$. El valor inicial de esta dado por el resultado del modelo inicial de pronóstico que se proponga.

Las siguientes figuras muestran los resultados de la aplicación del procedimiento a los

modelos de pronóstico movimiento browniano geométrico, Ornstein Uhlenbeck y Hobson Roger Ornstein Uhlenbeck para el promedio y máximo diario del precio de bolsa de energía colombiana.

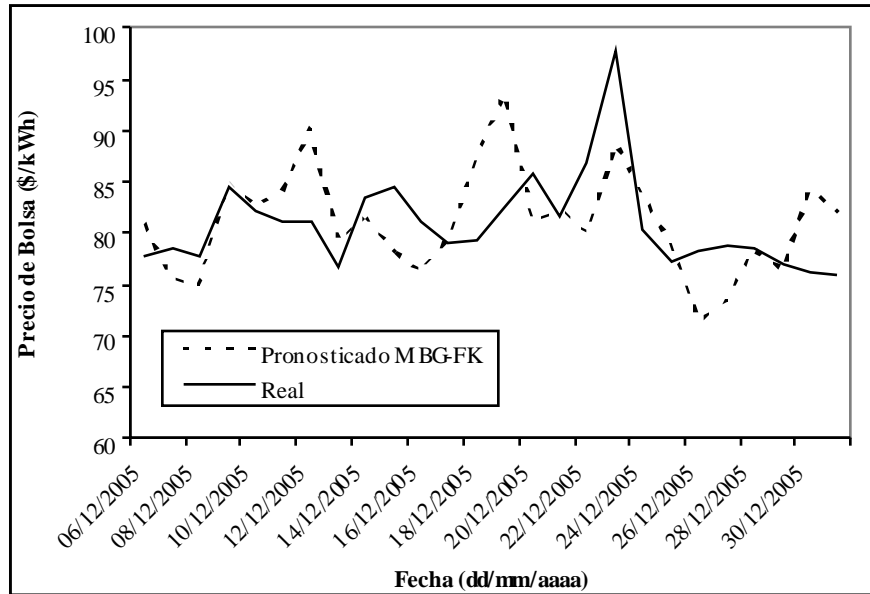


Figura 13. Pronóstico de precio promedio de bolsa diario mediante MBG-FK

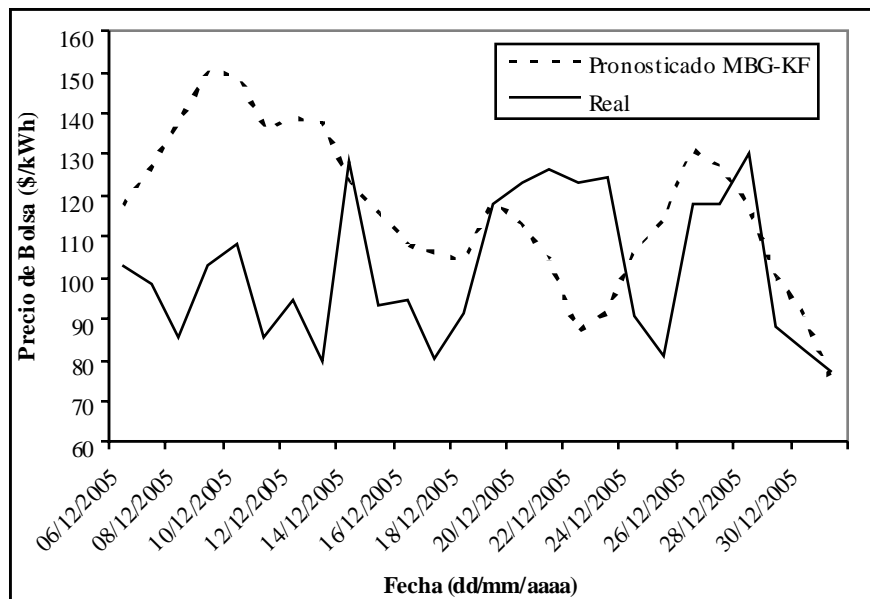


Figura 14. Pronóstico de precio máximo de bolsa diario mediante MBG-KF

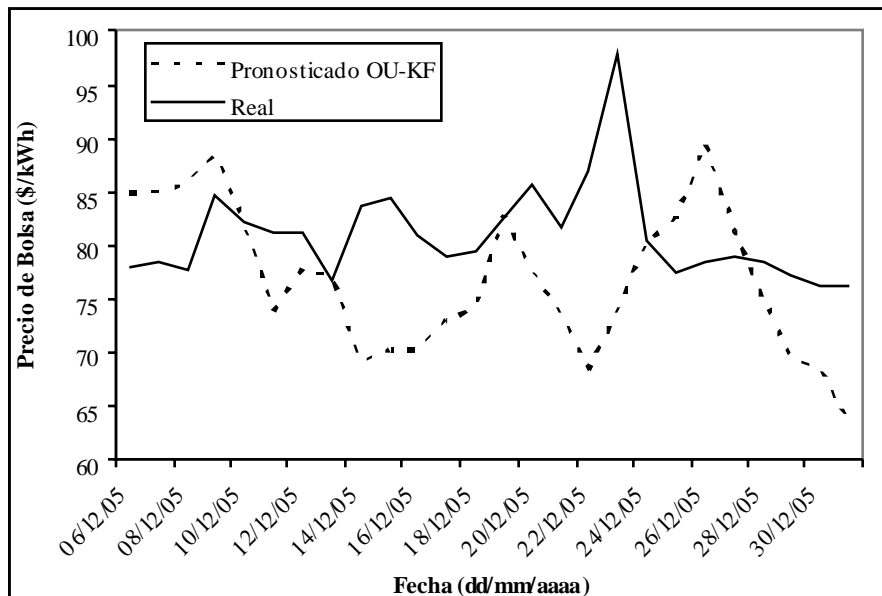


Figura 15. Pronóstico de precio promedio de bolsa diario mediante OUG-FK

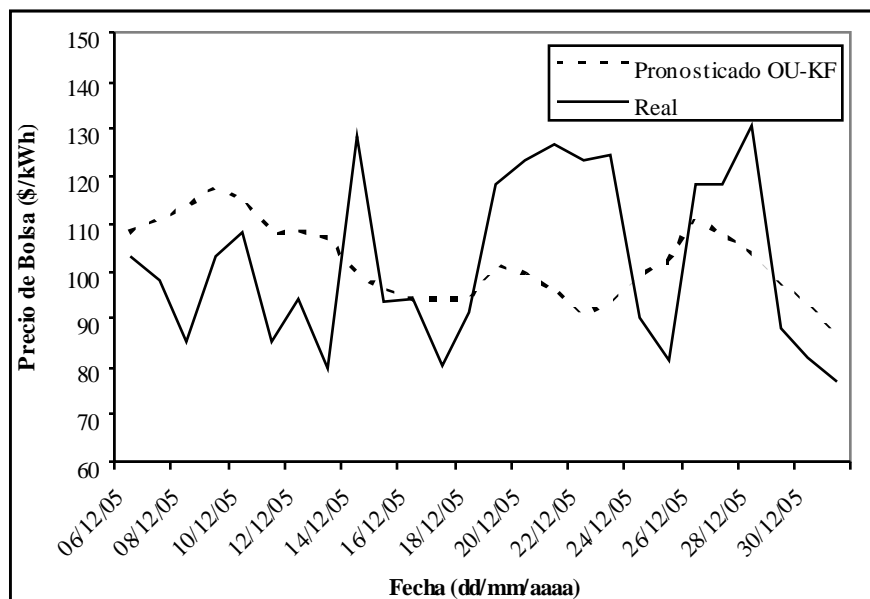


Figura 16. Pronóstico de precio máximo de bolsa diario mediante OUG-FK

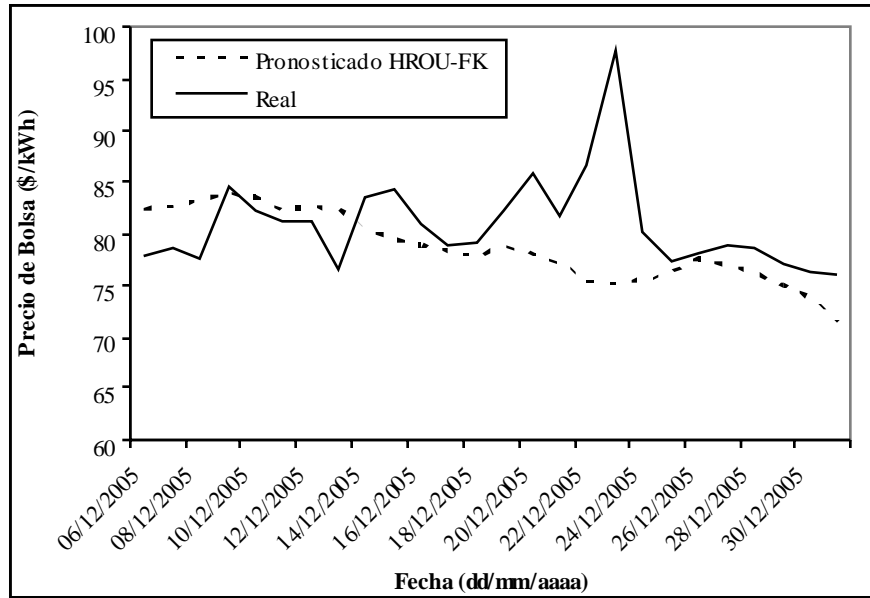


Figura 17. Pronóstico de precio promedio de bolsa diario mediante HROU-FK

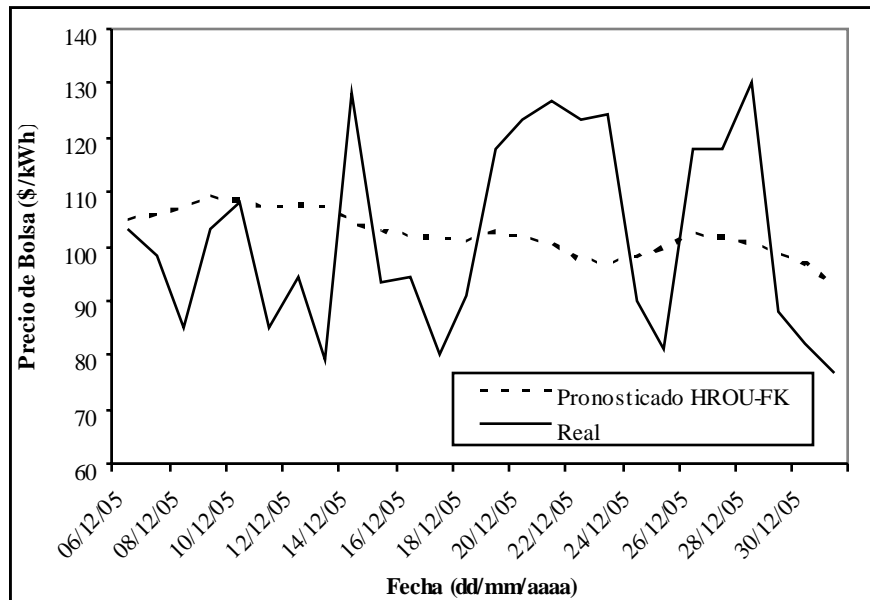


Figura 18. Pronóstico de precio máximo de bolsa diario mediante HROU-FK

El pronóstico conjunto de los valores promedio y máximo diario del precio de bolsa permite dar una idea más clara al agente de cómo se comportará el mercado en vez de hacer solo predicción de un promedio.

La Tabla 1 presenta la comparación entre los 6 métodos implementados en el pronóstico de precio de bolsa promedio diario. La Tabla 2 muestra la comparación entre los 6 métodos implementados en el pronóstico de precio de bolsa máximo diario.

Tabla 1. Porcentajes de error en el pronóstico de precio de bolsa promedio en los distintos métodos

Fecha	HROU	HROU-FK	OUG	OUG-FK	MBG	MBG-FK
06/12/2005	6,1%	5,8%	11,7%	9,3%	4,4%	3,9%
07/12/2005	6,1%	5,2%	15,1%	8,3%	3,2%	4,1%
08/12/2005	8,5%	7,1%	21,1%	10,4%	2,6%	3,7%
09/12/2005	1,0%	0,7%	17,2%	4,3%	2,0%	0,4%
10/12/2005	4,3%	1,7%	18,8%	0,0%	2,5%	0,6%
11/12/2005	4,9%	1,6%	12,9%	9,1%	5,4%	3,2%
12/12/2005	5,6%	1,9%	14,3%	4,4%	13,3%	10,0%
13/12/2005	12,1%	7,4%	19,8%	0,6%	7,3%	3,2%
14/12/2005	1,8%	3,8%	1,4%	17,2%	1,2%	2,6%
15/12/2005	0,5%	5,6%	2,6%	16,7%	3,5%	8,0%
16/12/2005	4,3%	2,8%	1,8%	13,4%	1,9%	6,4%
17/12/2005	7,3%	0,7%	0,8%	7,6%	5,5%	0,8%
18/12/2005	6,8%	1,8%	0,0%	6,8%	15,1%	9,2%
19/12/2005	4,3%	4,5%	4,4%	0,4%	17,7%	11,9%
20/12/2005	0,0%	9,1%	2,0%	9,9%	0,8%	5,6%
21/12/2005	4,7%	5,5%	0,7%	10,2%	7,2%	0,5%
22/12/2005	2,3%	13,1%	12,5%	21,3%	1,4%	8,6%
23/12/2005	12,9%	23,2%	20,3%	24,3%	2,5%	10,3%
24/12/2005	7,2%	6,0%	3,2%	0,1%	11,7%	3,7%
25/12/2005	12,4%	1,3%	11,7%	6,6%	10,8%	2,2%
26/12/2005	13,0%	0,8%	20,9%	14,4%	0,3%	9,6%
27/12/2005	12,1%	2,3%	17,0%	2,9%	2,3%	7,7%
28/12/2005	12,3%	2,9%	12,5%	4,6%	10,2%	0,0%
29/12/2005	13,5%	2,7%	7,0%	10,0%	9,7%	1,0%
30/12/2005	14,2%	3,2%	3,3%	10,2%	21,8%	9,6%
31/12/2005	12,9%	6,2%	6,0%	16,7%	19,4%	7,1%

Tabla 2. Porcentajes de error en el pronóstico de precio de bolsa máximo en los distintos métodos

Fecha	HROU	HROU-FK	OUG	OUG-FK	MBG	MBG-FK
06/12/2005	1,80%	0,99%	10,21%	4,37%	13,43%	11,88%
07/12/2005	7,91%	6,94%	16,80%	11,14%	25,58%	22,76%
08/12/2005	25,87%	24,28%	29,71%	24,77%	41,40%	38,10%
09/12/2005	5,68%	3,80%	19,32%	12,18%	35,87%	31,29%
10/12/2005	0,34%	0,79%	6,32%	5,71%	34,21%	27,58%
11/12/2005	25,37%	25,29%	11,39%	20,79%	45,35%	37,25%
12/12/2005	14,18%	13,86%	8,08%	12,99%	42,04%	32,13%
13/12/2005	35,30%	35,53%	21,49%	25,82%	52,09%	42,45%
14/12/2005	18,75%	16,83%	54,24%	29,39%	17,67%	4,28%
15/12/2005	10,50%	14,11%	11,66%	3,44%	38,63%	19,09%
16/12/2005	8,11%	12,59%	14,20%	0,27%	36,40%	12,50%
17/12/2005	26,40%	32,30%	8,91%	14,82%	46,37%	24,29%
18/12/2005	10,46%	16,32%	0,67%	3,07%	39,33%	11,97%
19/12/2005	13,25%	9,13%	6,82%	16,53%	29,19%	0,00%
20/12/2005	17,54%	12,90%	22,11%	24,04%	25,62%	8,81%
21/12/2005	20,59%	15,42%	37,50%	31,49%	21,13%	21,33%
22/12/2005	20,87%	13,77%	54,32%	35,70%	16,03%	42,13%
23/12/2005	21,71%	14,17%	36,38%	33,15%	19,17%	35,93%
24/12/2005	8,77%	19,09%	14,58%	8,49%	46,94%	14,78%
25/12/2005	22,84%	33,16%	27,11%	20,49%	54,88%	28,37%
26/12/2005	13,30%	7,14%	8,17%	6,83%	40,74%	9,75%
27/12/2005	13,92%	7,15%	5,11%	9,83%	40,82%	7,14%
28/12/2005	22,71%	15,95%	32,82%	26,40%	32,98%	10,69%
29/12/2005	11,78%	23,20%	5,14%	8,81%	51,26%	11,88%
30/12/2005	17,57%	31,60%	3,15%	11,54%	53,02%	9,27%
31/12/2005	20,61%	39,53%	14,45%	10,50%	52,53%	4,48%

De la Tabla 1 y Tabla 2 se puede observar que los pronósticos realizados con la aplicación del Filtro Kalman tanto como para el promedio y el máximo diario superan a los modelos iniciales hasta el día 13 de diciembre, es decir el pronóstico mejora en un plazo de 8 días. Sin embargo, más allá de esta semana el Filtro Kalman solo mejora algunos de los pronósticos.

El pronóstico del precio promedio diario mediante la aplicación del Filtro Kalman con el método HROU arroja errores por debajo del 8% para la primera semana. El pronóstico del precio máximo diario mediante la aplicación del Filtro Kalman con el método HROU arroja errores por debajo del 25% para la primera semana.

La aplicación del algoritmo del Filtro Kalman explicado a los modelos evidencia una disminución en los errores para la primera semana, esto es debido a que el Filtro Kalman le da mayor importancia a los últimos valores de observación y por tanto los pronósticos más cercanos a la última observación son mejores.

7. CONCLUSIONES

A través de esta investigación se ha podido establecer una metodología para la aplicación del Filtro Kalman en el pronóstico de precios de la bolsa de energía teniendo como base cualquier modelo que permita la representación del precio como una ecuación lineal.

Se analizaron tres modelos para la aplicación del Filtro Kalman: dos métodos tradicionales como el movimiento browniano geométrico y el de Ornstein Uhlenbeck y por último el modelo Ornstein Uhlenbeck no gaussiano. Con la aplicación del Filtro Kalman se logra mejorar los resultados obtenidos por los modelos iniciales para la primera semana de predicción del precio.

La aplicación del Filtro Kalman ha permitido una disminución de los porcentajes de errores en los pronósticos lo que se traduce en mayor conocimiento del precio y menor riesgo en la toma de decisiones operativas de los agentes del mercado eléctrico.

Una ventaja del Filtro Kalman es su capacidad de observación la cual permite que un nuevo dato o conocimiento de las variables del sistema sea tenido en cuenta mediante el algoritmo mientras no le da el mismo peso a cada observación del pasado.

La metodología del Filtro Kalman descrita no establece un modelo que defina el sistema de precios de bolsa de energía en Colombia, sino que intenta mejorar a través de las observaciones el sistema ya establecido, por tanto es muy importante la escogencia del modelo inicial del sistema.

En esta investigación se trabaja con modelos donde la variable a pronosticar depende solo del valor de la variable anterior. Sin embargo, se pueden considerar otros modelos tales como los econométricos y exponerlos al Filtro Kalman para encontrar mejoras en la predicción.

La aplicación del Filtro Kalman puede extenderse al pronóstico a mediano plazo siempre que los modelos en los que se base lo permitan, como por ejemplo apoyándose en proyecciones de variables explicativas del precio tales como el embalse, o los aportes, entre otros. Además podría aplicarse esta metodología para el pronóstico de los precios de bolsa en otras regiones.

8. BIBLIOGRAFÍA

- [1] D.G. Hobson, L.C.G. Rogers, "Complete models with stochastic volatility". *Mathematical Finance*, 8:27-48,1998.
- [2] J. Collet, V. Duwing, N. Oudjane, "Some non-Gaussian models for electricity spot prices", presentado en el 9th International Conference on Probabilistic Methods Applied to Power Systems KTH, Stockholm, Sweden-Junio 11-15, 2006.
- [3] J.Gran, "Electricity spot price dynamics" Stockholms Universitet, Nationalekonomiska institutionen, Magisteruppsats 10 Poäng VT 2001.
- [4] G. Welch, G. Bishop, "An Introduction to the Kalman Filter", University of North Carolina at Chapel Hill, 2004.
- [5] J. Hull, "Options, Futures, and Other Derivative Securities" Prentice Hall, 196-198, 1993.
- [6] I. Sánchez,"Short-term prediction of wind energy production", *International Journal of Forecasting* 22, 2006 (43– 56).
- [7] L.Cárdenas, A. Torres,"Pronóstico de precios de la bolsa de energía colombiana usando lógica difusa", Universidad de los Andes Departamento de Ingeniería Eléctrica y Electrónica.
- [8] F. Alvarado, R. Rajaraman,"Understanding price volatility in electricity markets", presentado en el 33rd Hawaii International Conference on System Sciences – 2000.
- [9] P. Maybeck, "Stochastic models, estimation, and control", Academic Press, vol, 1,2,1982.
- [10] CREG. "Documento preliminar a la Resolución de Cargo por Confiabilidad", 2004.
- [11] E. BARUCI, LANDI Leonardo, CHERUBINI Umberto, *Computational Methods in Finance: Option Pricing*. 1999
- [12] J. CARDENAS, ARIMA "Models to Predict Next-day Electricity Prices". Agosto 2003
- [13] S. CHEN, W. LEE, "Option Pricing with Genetic Algorithms: A second Report". 1997.
- [14] ELLIOT Robert, SICK Gordon. "Modeling Electricity Price Risk". Junio 2003

- [15] R. ENE , S.VLAD. "Forecasting Spreads on Emerging Markets Debt using Credit Default Swaps. A Kalman Filter Approach". Noviembre 2002.
- [16] K. KÅRESEN, E. HUSBY, "A Joint State-Space Model for Electricity Spot and Futures Prices" Diciembre 2000
- [17] M. MANOLIU. "Energy Futures Prices: Term Structure Models with Kalman Filter Estimation". Noviembre 2000.
- [18] I. MOGHRAM, R. SAIFUR. "Analysis and Evaluation of Five Short –Term Load Forecasting Techniques". Octubre 1989
- [19] F. NOGALES, J. CONTRERAS, A. CONEJO. "Forecasting Next-Day Electricity Prices by Time Series Models". Mayo 2002.
- [20] J. PARK, Y. PARK, Y LEE , "Composite Modeling for Adaptive Short-term Load Forecasting". Mayo 1991
- [21] E. SAAD, D. PROKHOROV, D. WUNSCH. "Comparative Study of Stock Trend Prediction Using Time Delay, Recurrent and Probabilistic Neural Networks", Noviembre 1998.
- [22] Y.WANG. "On-Demand Forecasting of Stock Prices Using a Real-Time Predictor". Agosto 2003.
- [23] NEON, ISA, <http://www.isa.com.co>