

**IMPLEMENTACIÓN NUMÉRICA Y COMPUTACIONAL DE LA LEY HIPOPLÁSTICA PARA
SUELOS**

THOMAS JULIAN SOLANO VELANDIA

**UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA CIVIL Y AMBIENTAL
BOGOTÁ, D.C.
2006**

**IMPLEMENTACIÓN NUMÉRICA Y COMPUTACIONAL DE LA LEY HIPOPLÁSTICA PARA
SUELOS**

THOMAS JULIAN SOLANO VELANDIA

**Tesis para optar al título de
Magíster en Ingeniería Civil**

Asesor

ARCESIO LIZCANO PELAEZ, Ph. D.

**UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA CIVIL Y AMBIENTAL
BOGOTÁ, D.C.**

2006

A mis padres y hermanos, por su apoyo
a María José y Amanda por ser mi motivación
y a María del Pilar por su compañía y amor

AGRADECIMIENTOS

El autor agradece la financiación de esta investigación al Centro de Investigación de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de los Andes CIFI y al Departamento de Matemáticas de la Universidad de los Andes. Igualmente agradece a los profesores Arcesio Lizcano y René Meziat de la Universidad de los Andes, por su apoyo y consejos.

CONTENIDO

	pag.
INTRODUCCIÓN	9
1. ECUACION HIPOPLASTICA	11
2. IMPLEMENTACION NUMERICA	15
2.1 Formulación en Elementos Finitos	15
2.1.1 Mecánica del medio continuo	15
2.1.1.1 Descripción Material del Movimiento	15
2.1.1.2 Medidas de deformación	16
2.1.1.3 Objetividad del Tensor de Esfuerzos	17
2.1.2 Discretización en el espacio	18
2.1.3 Discretización en el tiempo	19
2.1.4 Análisis iterativo e incremental	19
2.1.5 Integración numérica de la matriz jacobiana	23
3. IMPLEMENTACION COMPUTACIONAL	25
3.1 Subrutina de material	25
3.2 Desarrollo en FEAP	26
3.3 Desarrollo del Pre-proceso y el Post-proceso	27
5. VALIDACION	31
5. CONCLUSIONES	35
BIBLIOGRAFÍA	36

LISTA DE TABLAS

Tabla 1. Parámetros Hipoplásticos del modelo	Pag. 32
--	------------

LISTA DE FIGURAS

	Pag.
Figura 1. Diagrama de flujo de la solución por elementos finitos de un problema de contorno	28
Figura 2. Diagrama de flujo de la subrutina de material hipoplástico, implementada en FEAP	29
Figura 3. Interacción entre el programa de pre-proceso y postproceso, GID y el motor de solución en FEAP	30
Figura 4. Esquema del modelo de validación.	32
Figura 5. Modelo de elementos finitos creado en GID	33
Figura 6. Deformaciones presentadas en los dos modelos antes del incremento $t=0.07$	34

RESUMEN

El comportamiento de las estructuras geotécnicas depende de las restricciones, condiciones iniciales y tipo de carga. Por lo que es necesario utilizar leyes constitutivas y métodos numéricos adecuados para reproducir el comportamiento del suelo. La ley Hipoplástica está basada en parámetros del suelo, utiliza una ecuación tensorial para carga y descarga y modela fenómenos que otras leyes son incapaces de modelar. El objetivo de este trabajo es generar un programa de elementos finitos que implemente la ley Hipoplástica para el comportamiento de suelos granulares. El programa está provisto de una interfase gráfica amigable.

Abstract: : The behavior of the geotechnic structures depend on geometry, restrictions, initial conditions and type of load, reason why it is necessary to use the constitutive laws and the numerical methods to reproduce the behavior of these structures. The hypoplastic laws that are based on soil parameters, use a single tensorial equation for loading and unloading. The goal of this work it is to generate a finite element analysis program which uses the hypoplastic law for granular soils behavior in the presence of monotonic and cyclic loads. The program is provided with graphic user interface with simple and friendly procedures.

INTRODUCCIÓN

Las fallas de estructuras geotécnicas como asentamientos excesivos de estructuras, colapso de estructuras de retención en excavaciones, deslizamientos de tierra, colapso del fondo de excavaciones, falla de taludes de terraplenes, entre otras, son fallas muy frecuentes, que generan grandes traumatismos sociales y económicos, y en muchos casos pérdidas de vidas humanas. Sistemas de remediación de fallas son implementados sin éxito. El conocimiento insuficiente tanto de las condiciones geotécnicas del sitio de construcción, como del comportamiento mecánico del suelo, y los consecuentes diseños deficientes o inadecuados para esas condiciones del sitio o para el uso de la estructura, son las causas más comunes de fallas de estructuras geotécnicas. Por otro lado, la utilización de metodologías inadecuadas para el análisis del comportamiento del suelo, puede conducir a predicciones y pronósticos erróneos para el diseño o el sobredimensionamiento de las estructuras.

Diseños de estructuras geotécnicas, óptimos desde el punto de vista económico y confiables desde el punto de vista de seguridad, requieren, por lo tanto, de un buen conocimiento del comportamiento mecánico del suelo y del empleo de metodologías adecuadas de análisis.

En los últimos 30 años se han venido desarrollando metodologías de cálculo que predicen de manera realista el comportamiento del suelo ante sollicitaciones externas, sin recurrir a los conceptos de la elastoplasticidad. Estas nuevas teorías, conocidas como hipoplásticas, modelan la rigidez no lineal y la resistencia del suelo en función de la relación de vacíos, del estado de esfuerzos y de la trayectoria de deformación o de carga, tal como se observa en ensayos de laboratorio. Por sus características, las teorías hipoplásticas predicen el

comportamiento de estructuras geotécnicas mucho mejor que las teorías rivales, lo cual conlleva a mejorar sustancialmente la confiabilidad / calidad de los diseños.

El uso de estas leyes requiere la implementación de métodos numéricos, que permitan analizar grandes problemas de contorno, de geometría irregular, condiciones de borde y condiciones de carga variables, así como la no linealidad de los materiales. El método más apropiado es el Método de Elementos Finitos.

El empleo de estos métodos y estas leyes constitutivas en problemas de contorno reales, es posible mediante el uso de programas de cómputo, dotados de motores de solución eficaces y de gran exactitud. Los programas deben contar con interfaces de usuario que permitan definir el modelo de manera gráfica, disminuyendo las posibilidades de error en la introducción de datos. Además, deben permitir hacer una revisión de resultados de manera gráfica que permita su validación.

En la actualidad, la ley Hipoplástica ha sido implementada en el programa multipropósito Abaqus. El propósito de este proyecto es generar un programa de código abierto, flexible y con la capacidad de ser re-programado para implementar nuevas posibilidades de cálculo.

1 ECUACIÓN HIPOPLÁSTICA

La ley Hipoplástica para suelos granulares describe la relación entre la evolución de los esfuerzos y la evolución de las deformaciones, por medio de una ecuación diferencial que incluye funciones lineales y no lineales. Estas ecuaciones fueron formuladas mediante métodos heurísticos, con las consideraciones necesarias para modelar el comportamiento mecánico de los suelos granulares. A diferencia de los modelos elastoplásticos, la hipoplasticidad no requiere la descomposición de las deformaciones en una parte elástica y una parte plástica. Por otro lado, no utiliza la superficie de fluencia, el potencial plástico, ni las reglas de flujo y endurecimiento. La hipoplasticidad describe el comportamiento de los esqueletos granulares que se caracterizan por las siguientes propiedades (Tejchman y Bauer 2005):

- Las presiones en el esqueleto y la relación de vacíos definen el estado del material;
- las deformaciones en el esqueleto se deben a re-acomodamiento de los granos (Deformaciones menores a 10^{-5} , como las debidas al contacto elástico entre granos, no son tenidas en cuenta);
- los granos son permanentes, no se destruyen (se excluyen los efectos de abrasión y Crushing); las relaciones de vacíos crítica, máxima y mínima, decrecen exponencialmente con la presión;
- y no se tienen en cuenta los efectos físico-químicos como la capilaridad, cementación y contacto entre los granos.

El modelo constitutivo hipoplástico propone una ecuación tensorial, no-lineal, que relaciona la velocidad de esfuerzos \mathbf{T}_s (Tensor objetivo de Jaumann) y la velocidad de deformación \mathbf{D}_s (El subíndice s se refiere a la parte sólida del material (Wolffersdorff, 1996):

$$\dot{\mathbf{T}}_s = L : \mathbf{D}_s + \mathbf{N} \|\mathbf{D}_s\| \quad (1)$$

Los tensores $\Lambda(\mathbf{T}_s, e)$ y $\mathbf{N}(\mathbf{T}_s, e)$ son funciones del tensor de esfuerzos de Cauchy \mathbf{T}_s y la relación de vacíos e :

$$L = f_b f_e \frac{1}{\hat{\mathbf{T}} : \hat{\mathbf{T}}} (F^2 I + a^2 \hat{\mathbf{T}} \hat{\mathbf{T}}) \quad (2)$$

$$\mathbf{N} = f_d f_b f_e \frac{Fa}{\hat{\mathbf{T}} : \hat{\mathbf{T}}} (\hat{\mathbf{T}} + \hat{\mathbf{T}}^*) \quad (3)$$

La ecuación general se re-escrive así:

$$\dot{\mathbf{T}}_s = f_b f_e \left[L(\hat{\mathbf{T}}_s, \mathbf{D}_s) + f_d \mathbf{N}(\hat{\mathbf{T}}_s) \|\mathbf{D}_s\| \right] \quad (4)$$

donde,

$$\hat{\mathbf{T}}_s = \frac{\mathbf{T}_s}{tr \mathbf{T}_s}, \quad \|\mathbf{D}_s\| = \sqrt{tr \mathbf{D}_s^2}, \quad \hat{\mathbf{T}}_s^* = \hat{\mathbf{T}}_s - \frac{1}{3} \mathbf{1}, \quad (5)$$

$$a = \frac{\sqrt{3}(3 - \sin \varphi_c)}{2\sqrt{2} \sin \varphi_c}, \quad (6)$$

$$F = \sqrt{\frac{1}{8} \tan^2 \psi + \frac{2 - \tan^2 \psi}{2 + \sqrt{2} \tan \psi \cos 3\theta}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \tan \psi \quad (7)$$

$$\tan \psi = \sqrt{3} \left\| \hat{\mathbf{T}}_s^* \right\|, \quad \cos 3\theta = -\sqrt{6} \frac{\text{tr}(\hat{\mathbf{T}}_s^* \cdot \hat{\mathbf{T}}_s^* \cdot \hat{\mathbf{T}}_s^*)}{\left[\hat{\mathbf{T}}_s^* : \hat{\mathbf{T}}_s^* \right]^{\frac{3}{2}}} \quad (8)$$

donde, el parámetro φ_c corresponde al ángulo crítico de fricción.

El factor de barotropía f_b es proporcional a la dureza de los granos y depende de la relación de vacíos e . Los factores de picnotropía f_e y f_d dependen de la relación de vacíos relativa:

$$f_b = \frac{h_s}{nh_i} \frac{1 + e_i}{e_i} \left(\frac{3p_s}{h_s} \right)^{1-n} \lambda^\beta, \quad (9)$$

$$f_e = \left(\frac{e_c}{e} \right)^\beta \quad \text{con } 1 < \beta < 1,1 \quad (10)$$

$$f_d = \left(\frac{e - e_d}{e_c - e_d} \right)^\alpha \quad \text{con } 0,1 < \alpha < 0,3 \quad (11)$$

Se distinguen tres límites de la relación de vacíos, dependientes del estado de esfuerzos: e_i representa el estado de menor densidad, máxima relación de vacíos. e_c corresponde a la relación de vacíos crítica correspondiente al estado crítico del suelo. e_d representa el estado de mayor densidad y corresponde al mínimo valor de relación de vacíos después de un corte cíclico con pequeñas amplitudes.

$$\frac{e_i}{e_{i0}} = \frac{e_c}{e_{c0}} = \frac{e_d}{e_{d0}} = \exp \left[- \left(\frac{-\text{tr} \mathbf{T}_s}{h_s} \right)^n \right] \quad (12)$$

donde, h_s = Dureza de los granos, es una rigidez independiente de la presión. Para arenas puede ser estimada a partir de un ensayo oedométrico; n = Exponente que define la compresión proporcional. $0.2 < n < 0.5$; e_{d0} = Mínima relación de vacíos en ausencia de presión $\mathbf{T}_s=0$; e_{c0} = Relación de vacíos crítica con $\mathbf{T}_s=0$; e_{i0} = Máxima relación de vacíos con $\mathbf{T}_s=0$.

Reemplazando términos, la expresión final de la ecuación es:

$$\dot{\mathbf{T}}_s = \frac{h_s}{nh_i} \frac{1+e_i}{e_i} \left(\frac{-tr\mathbf{T}_s}{h_s} \right)^{1-n} \lambda^\beta \left(\frac{e_c}{e} \right)^\beta \left[\mathbf{L}(\hat{\mathbf{T}}_s, \mathbf{D}_s) + \left(\frac{e-e_d}{e_c-e_d} \right)^\alpha \mathbf{N}(\hat{\mathbf{T}}_s) \|\mathbf{D}_s\| \right] \quad (13)$$

2 Implementación Numérica

2.1 Formulación en elementos finitos

En la mayoría de casos, los problemas en los que se analiza el comportamiento mecánico de los suelos están marcados por la no-linealidad del material y las grandes deformaciones de los cuerpos. La hipoplasticidad se caracteriza por presentar tendencias altamente no lineales en los resultados. Por esto, la implementación del método de elementos finitos debe estar sujeta a formulaciones apropiadas del continuo que contemplen grandes deformaciones. Además, se deben utilizar esquemas de análisis no lineal que garanticen la convergencia de los modelos.

2.1.1 Mecánica del medio continuo

2.1.1.1 Descripción material del movimiento

Para describir la deformación macroscópica de un material, se requiere conocer donde está y donde *estuvo* determinada partícula. Las coordenadas cartesianas x denotan donde está la partícula y las coordenadas X denotan donde estuvo antes de la deformación.

La formulación utilizada en la ley Hipoplástica es la formulación Lagrangiana. En esta formulación, el comportamiento es descrito en términos de las coordenadas iniciales de la partícula. X en el tiempo $t=0$. En donde la partícula *está* es dado en términos de donde *estuvo*. En este tipo de notación, la partícula está permanentemente referenciada con las coordenadas X . El desplazamiento u se expresa en términos de X :

$$x = X + u(X, t) \quad (14)$$

Ante la necesidad de tener en cuenta la dependencia de la historia de los materiales no lineales, como los suelos, la descripción Lagrangiana hace más sencillo almacenar la información y actualizarla en cada instante de tiempo.

2.1.1.2 Medidas de deformación

Para hablar de deformación, se debe poder describir el movimiento relativo de una partícula respecto al movimiento de las partículas vecinas. Dos partículas con una vecindad infinitesimal en el tiempo $t=0$, dX , tendrán una posición relativa dx en el tiempo t .

Se puede definir una relación entre dx y dX , de la forma:

$$F = \frac{dx}{dX} \quad (15)$$

donde F es el tensor Gradiente de Deformación, y define la relación de una fibra de material dX antes de la deformación con la fibra dx después de la deformación.

Usar F directamente, complica el desarrollo de las ecuaciones constitutivas, por lo que es común introducir medidas de la deformación que están relacionadas completamente a las configuración de referencia o a la configuración actual (Taylor, 2003). Los términos utilizados en la ley Hipoplástica son el tensor de velocidad de deformación D_s y el tensor de esfuerzos de Cauchy T_s .

El tensor de desplazamiento U se calcula a partir de la descomposición polar del gradiente de deformación:

$$F = RU, \quad F^T F = (RU)^T RU = U^2 \quad (16)$$

donde R es el tensor ortogonal de giro.

Después de aplicar la descomposición y el cálculo de los vectores directores \mathbf{d} , se puede demostrar que:

$$U = (U^2)^{-1} \mathbf{d} \mathbf{1} U^2 \quad (17)$$

Para leyes constitutivas inelásticas es apropiado trabajar con deformaciones logarítmicas que permiten calcular de manera incremental los desplazamientos en cada instante de tiempo $\varepsilon = \ln U$.

La aproximación de primer orden de Pade para la expresión anterior, arroja como resultado:

$$\mathbf{D}_s = \frac{\varepsilon}{\Delta t} = \frac{2(U - \mathbf{I})(U + \mathbf{I})^{-1}}{\Delta t} \quad (18)$$

2.1.1.3 *Objetividad del Tensor de Esfuerzos*

Debido a que la variación en el tiempo de los esfuerzos de Cauchy es sensible a las rotaciones rígidas del cuerpo, se debe utilizar otra tasa para los esfuerzos, dada por el tensor objetivo de Jaumann (Niemunis, 2002):

$$\overset{\circ}{\mathbf{T}} = \dot{\mathbf{T}} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{W} - \mathbf{W} \cdot \mathbf{T} \quad (19)$$

El término $\mathbf{T} \cdot \mathbf{W} - \mathbf{W} \cdot \mathbf{T}$ es causa de la rotación rígida y es independiente del material.

2.1.1.4 *Condiciones de equilibrio*

La siguiente expresión define el equilibrio estático del continuo (Hügel, 1995):

$$\mathbf{L}^T \sigma + \rho \mathbf{f} = 0 \quad (20)$$

donde, σ = Vector de esfuerzos con 6 componentes:

$$\sigma^T = [T_{11}, T_{22}, T_{33}, T_{12}, T_{13}, T_{23}],$$

f = Fuerzas de volumen; ρ = Densidad; \mathbf{L} es el operador:

$$\mathbf{L}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (21)$$

De acuerdo con el principio de Galerkin, la condición de equilibrio de un cuerpo con volumen V , es:

$$\int_V \delta u^T (\mathbf{L}^T \sigma + \rho f) dV = 0 \quad (22)$$

conocida como la forma débil de la condición de equilibrio. u = Campo de desplazamientos.

Aplicando el teorema de Gauss, se obtiene:

$$\int_V (\mathbf{L} \delta u)^T \sigma dV = \int_V \rho \delta u^T f dV + \int_A \delta u^T t dA \quad (23)$$

donde, A = Superficie del cuerpo

2.1.2 Discretización en el espacio

La discretización en el espacio se lleva a cabo mediante la aplicación de las funciones de forma h_k , las cuales relacionan los desplazamientos locales de los nodos q_k y el campo de desplazamientos (Hügel, 1995):

$$u = \sum_{k=1}^n h_k q_k \quad (24)$$

para los n nodos de un elemento.

El campo de desplazamientos se obtiene de:

$$u = \mathbf{H}q_e \quad (25)$$

donde, \mathbf{H} es la matriz de interpolación y q_e es el vector de desplazamientos de los nodos del elemento:

$$q_e = \mathbf{Z}_e q \quad (26)$$

La matriz \mathbf{Z}_e relaciona los desplazamientos del elemento con los desplazamientos globales.

Utilizando los índices $k=1, \dots, n$ para los nodos y $e=1, \dots, m$ para los elementos, se tiene:

$$\begin{aligned} \sum_{e=1}^m \int_{V_e} (\mathbf{L}\mathbf{H}\mathbf{Z}_e \delta q)^T \sigma dV = \\ \sum_{e=1}^m \int_{V_e} \rho (\mathbf{H}\mathbf{Z}_e \delta q)^T f dV + \sum_{e=1}^m \int_{A_e} (\mathbf{H}\mathbf{Z}_e \delta q)^T t dA \end{aligned} \quad (27)$$

Factorizando y cancelando términos, se obtiene:

$$\begin{aligned} \underbrace{\sum_{e=1}^m \mathbf{Z}_e^T \int_{V_e} (\mathbf{L}\mathbf{H})^T \sigma dV}_{r_i} = \\ \underbrace{\sum_{e=1}^m \mathbf{Z}_e^T \int_{V_e} \rho \mathbf{H}^T f dV + \sum_{e=1}^m \mathbf{Z}_e^T \int_{A_e} \mathbf{H}^T t dA}_{r_e} \end{aligned} \quad (28)$$

donde, r_i = reacciones internas y r_e = fuerzas realizadas por las cargas externas.

2.1.3 Discretización en el tiempo

Las leyes incrementales y no lineales requieren que la carga sea aplicada en pequeños incrementos. La historia de esfuerzo se discretiza de la siguiente manera: (Hügel, 1995):

$$\sigma^{t+\Delta t} = \sigma^t + \Delta \sigma \quad (29)$$

Teniendo en cuenta los incrementos de esfuerzo $\Delta \sigma$ y los intervalos de tiempo Δt , y

haciendo la abreviación $\mathbf{B}=\mathbf{L}\mathbf{H}$, se obtiene una nueva ecuación discretizada:

$$\begin{aligned}
& \sum_{e=1}^m \mathbf{Z}_e^T \int_{V_e} \mathbf{B}^T \Delta \sigma dV = \\
& \underbrace{\sum_{e=1}^m \mathbf{Z}_e^T \int_{V_e} \rho \mathbf{H}^T \mathbf{f}^{t+\Delta t} dV + \sum_{e=1}^m \mathbf{Z}_e^T \int_{A_e} \mathbf{H}^T \mathbf{t}^{t+\Delta t} dA}_{\mathbf{r}_e^{t+\Delta t}} \\
& - \underbrace{\sum_{e=1}^m \mathbf{Z}_e^T \int_{V_e} \mathbf{B}^T \sigma^t dV}_{\mathbf{r}_i^t}
\end{aligned} \tag{30}$$

Partiendo de la relación:

$$\Delta \sigma = \mathbf{M} \mathbf{B} \mathbf{Z}_e \Delta \mathbf{q} , \tag{31}$$

se obtiene una serie de expresiones para calcular la matriz de rigidez global \mathbf{K} (Ecuación 32).

$$\begin{aligned}
& \sum_{e=1}^m \mathbf{Z}_e^T \int_{V_e} \mathbf{B}^T \mathbf{M} \mathbf{B} \mathbf{Z}_e \Delta \mathbf{q} dV = \mathbf{r}_e^{t+\Delta t} - \mathbf{r}_i^t \\
& \mathbf{K} \Delta \mathbf{q} = \mathbf{r}_e^{t+\Delta t} - \mathbf{r}_i^t \\
& \mathbf{K} = \sum_{e=1}^m \mathbf{Z}_e^T \int_{V_e} \mathbf{B}^T \mathbf{M} \mathbf{B} dV \mathbf{Z}_e
\end{aligned} \tag{32}$$

2.1.4 Análisis iterativo e incremental

El sistema de ecuaciones no lineales provenientes de la discretización, es solucionado de manera iterativa en cada instante de tiempo, cumpliendo los siguientes pasos (El índice j se refiere a la j -ésima iteración) (Hügel, 1995).

Cálculo de la solución $d\mathbf{q}$ (Delta de desplazamiento en los nodos en un instante de tiempo):

$$d\mathbf{q}_{j+1} = \mathbf{K}_j^{-1} \left(\mathbf{r}_e^{t+\Delta t} - \mathbf{r}_{i,j}^t \right) \tag{33}$$

La matriz de rigidez calculada en la última iteración del último paso en el tiempo, se utiliza en la primera iteración del paso de tiempo actual.

Actualización de los incrementos de desplazamiento:

$$\Delta \mathbf{q}_{j+1} = \Delta \mathbf{q}_j + d\mathbf{q}_{j+1} \quad (34)$$

Cálculo de los incrementos de deformación:

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{j+1} = \mathbf{B} \Delta \mathbf{q}_{j+1} \quad (35)$$

Cálculo del incremento de esfuerzos con la ecuación del material:

$$\Delta \boldsymbol{\sigma}_{j+1} = \mathbf{M}_{j+1} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{j+1} \quad (36)$$

Actualización de los esfuerzos:

$$\boldsymbol{\sigma}_{j+1} = \boldsymbol{\sigma}_0 + \Delta \boldsymbol{\sigma}_{j+1} \quad (37)$$

Cálculo de las fuerzas internas:

$$\mathbf{r}_{i,j+1} = \sum_{e=1}^m \mathbf{z}_e^T \int_{V_e} \mathbf{B}_j^T \boldsymbol{\sigma}_{j+1} dV \quad (38)$$

Cálculo de la matriz de rigidez:

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^m \mathbf{z}_e^T \int_{V_e} \mathbf{B}^T \mathbf{M} \mathbf{B} dV \mathbf{z}_e \quad (39)$$

Cálculo del residuo de aproximación:

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_e^{t+\Delta t} - \mathbf{r}_{i,j+1} \quad (40)$$

Si el error cumple con un margen de tolerancia, se sigue con la iteración hasta completar el incremento de carga deseado, de lo contrario se vuelve al paso i y se realiza un incremento menor de carga.

Cuando se trabaja con modelos lo suficientemente grandes, el cálculo de la matriz \mathbf{K} puede llegar a ser ineficiente, especialmente en los algoritmos computacionales que presentan problemas de almacenamiento de la información y rapidez de procesamiento. Las estrategias de cálculo de la matriz de rigidez, buscan optimizar el número de operaciones llevadas a cabo en cada iteración:

Método de Newton Raphson: La matriz de rigidez es formada con la matriz material actual \mathbf{M} . La matriz \mathbf{K} es actualizada en cada paso de tiempo y en cada iteración. Este método converge con gran rapidez, pero puede presentar problemas en el momento que la rigidez del material cambia abruptamente y la tangente desaparece, por lo que el método diverge. En algunos casos, la formulación de las leyes no lineales, generan matrices tangentes mal condicionadas que llevan a que el método de Newton Raphson sea ineficiente. (Hügel op. cit.)

Método de Newton Raphson Modificado: La modificación consiste en que la matriz de rigidez no es actualizada en cada iteración, solo se actualiza al comienzo de cada paso en el tiempo. El método es eficiente pero puede ser inestable en inflexiones de la trayectoria esfuerzo-deformación.

Métodos Quasi-Newton: En este tipo de métodos, como el método BFGS, se utiliza una matriz secante de rigidez, en lugar de utilizar la matriz tangente. Estos métodos convergen rápidamente y son más estables.

2.1.5 Integración numérica de la matriz Jacobiana

La formulación incremental de la hipoplasticidad, obliga realizar una integración en el tiempo del sistema de ecuaciones. Para esto se lleva a cabo una integración numérica, en la que se calcula una matriz Jacobiana \mathbf{M} que permita formar la matriz material \mathbf{M} y que se pueda implementar en los algoritmos de solución. La idea es optimizar este proceso, ya que por cada grado de libertad en cada iteración, es necesario realizar la integración. Además, es necesario garantizar una buena aproximación en la integración numérica. Por esto hay que tener en cuenta que la matriz Jacobiana de la Hipoplasticidad es asimétrica (Hügel, 1995):

$$M = \frac{\partial \dot{\mathbf{T}}_s}{\partial \mathbf{D}_s} \quad (41)$$

2.1.6 Esquema en el tiempo – euler Explícito

El incremento de los esfuerzos $\Delta \mathbf{T}_s$ en cada instante de tiempo, se lleva a cabo con el siguiente operador diferencial (omitiendo el subíndice s):

$$\Delta \mathbf{T} = \mathbf{T}^{t+\Delta t} - \mathbf{T}^t = \left[(1-\eta) \dot{\mathbf{T}}(\mathbf{T}^t) + \eta \dot{\mathbf{T}}(\mathbf{T}^{t+\Delta t}) \right] \Delta t \quad (42)$$

el factor η define el porcentaje de interpolación en la aproximación en el tiempo. De esta manera si $\eta=0$ el incremento de esfuerzo es igual a la tasa de esfuerzo actual por el incremento en el tiempo, por lo que la solución es explícita. Si $\eta=0.5$, el incremento de esfuerzo se calcula a partir de un promedio de la tasa actual y la tasa próxima de esfuerzos.

Si $\eta=1$, el incremento de esfuerzo se calcula a partir de la tasa próxima de esfuerzos, por lo que la solución es implícita.

El esquema utilizado en la implementación de la ley hipoplástica es el esquema Euler explícito:

$$\Delta \mathbf{T} = \dot{\mathbf{T}}(\mathbf{T}^t) \Delta t \quad (43)$$

Este tipo de esquemas de solución en el tiempo, carece de estabilidad en la aproximación, por lo que es necesario dividir en pasos más pequeños de tiempo, para ganar exactitud en la integración numérica.

3 Implementación Computacional

La programación del método de Elementos Finitos se basa en el principio de la discretización en el espacio. La idea es generar un programa con rutinas de cálculo que permitan formar las matrices elementales. Para esto, se lleva a cabo la integración numérica en cada elemento. Además, es necesario tener rutinas de ensamble para formar los sistemas de ecuaciones globales y de esta manera calcular las incógnitas a partir de las condiciones de equilibrio. La manera más eficiente de llevar a cabo esta tarea, es definir una rutina de cálculo de la matriz jacobiana en cada punto de integración.

A su vez, deberán existir rutinas que formen la matriz de rigidez y calculen las incógnitas a partir del equilibrio, por métodos de solución de sistemas de ecuaciones (Factorización LU, Descomposición, etc). Para cada tipo de elemento (Unidimensional, bidimensional, tridimensional, rectángulo, triángulo, tetraedro, etc) se deben programar algoritmos que permitan interpolar los valores a coordenadas globales, a partir de las funciones de forma. En el caso de los problemas no lineales, es necesario implementar estrategias de solución que permitan una convergencia de los resultados. Los más utilizados son los algoritmos de Newton Rapshón. Por otro lado, los programas deben estar provistos de rutinas que controlen la solución en el tiempo, cuando esta sea necesaria.

3.1 Subrutina de material

Para la implementación de la hipoplasticidad en un entorno computacional, se trabajó con el código de análisis multipropósito, FEAP (Programado en FORTRAN) (Taylor, 2003). La subrutina implementada, hace el cálculo para modelos en dos dimensiones en deformación

plana, y realiza los siguientes procesos: es llamada para el cálculo en los puntos de la integración numérica; calcula la Matriz Jacobiana, $\partial\Delta\sigma/\partial\Delta\varepsilon$, correspondiente a la ley constitutiva hipoplástica, y actualiza los esfuerzos y las variables de estado al final de cada incremento de tiempo.

FEAP, a su vez, permite el análisis de problemas estructurales con aplicación de pasos de carga en el tiempo, activación y desactivación de elementos, análisis iterativo no lineal (Newton Rapshon y BFGS).

La Figura 1 muestra el diagrama de flujo de la solución, con el uso de una rutina de material para el cálculo del Jacobiano. Las iteraciones obedecen al método de Newton Rapshon.

3.2 Desarrollo en FEAP

Además de la subrutina de material, es necesario implementar subrutinas que permitan el manejo de la información en la entrada de datos y en la salida de los resultados. Por otro lado, se generó una subrutina que calculara los esfuerzos geostáticos debidos al peso propio del material, la cual permite definir las condiciones iniciales. Además, se programó una subrutina que implementara el cálculo del tensor de velocidad de deformación a partir de la descomposición polar del gradiente de deformación (ecuaciones 16, 17 y 18). La siguiente es una lista de las subrutinas programadas, con una breve descripción del proceso que se lleva a cabo en ellas:

umatil: Lectura de los datos de entrada para el material hipoplástico.

geosta: Cálculo de los esfuerzos geostáticos para la condición inicial del modelo

dsten : Cálculo del tensor \mathbf{D}_s a partir del gradiente de deformación.

umat11: Subrutina del material Hipoplástico. Cálculo del tensor objetivo de esfuerzos.

Actualización de las variables de estado. Cálculo del Jacobiano.

umacr1: Escritura de resultados de desplazamiento para el post-proceso.

umacr2 : Escritura de resultados de esfuerzo para el post-proceso.

En la Figura 2 se muestra el diagrama de flujo de cálculo en la subrutina de material. Si los incrementos de deformación son muy grandes, la subrutina ingresa a un ciclo que busca aumentar la rigidez del material, para prevenir deformaciones fuera de orden.

3.3 Desarrollo del Pre-Proceso y el Post-Proceso

Ante la necesidad de utilizar una interfase gráfica para la definición del modelo y la revisión de los resultados, se personalizó la plataforma GID de pre-procesamiento y postprocesamiento de datos, provista de tecnología CAD.

Como resultado de la versión personalizada para el modelo hipoplástico, se obtiene un archivo con la información de entrada, necesaria para alimentar el motor de solución programado en FEAP. La configuración del programa GID se hace mediante scripts en lenguaje TCL-TK. Las siguientes son las funciones de pre-proceso programadas en GID: Definición de condiciones de borde (restricciones y desplazamientos impuestos), aplicación de fuerzas puntuales, fuerzas de presión. Definición de regiones para modelar activación y desactivación de elementos en modelo de procesos constructivos, entrada de los parámetros hipoplásticos y definición de los pasos de carga y los pasos de construcción en modelos geotécnicos.

Para el post-proceso de los resultados, se programaron dos rutinas en FEAP, que escriben los resultados en el formato de GID. La idea general es hacer una lista de los nodos, con sus coordenadas y los valores requeridos (Desplazamientos, esfuerzos, etc).

La Figura 3 muestra la interacción entre el programa GID y el motor de solución FEAP, y los archivos de configuración necesarios.

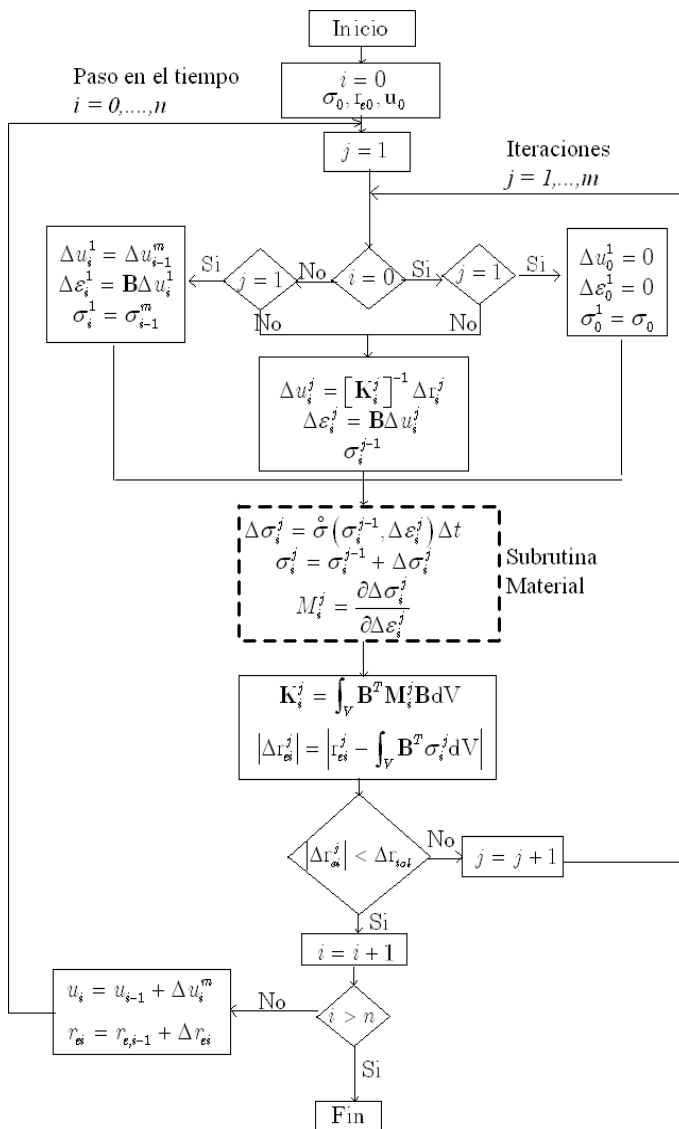


Figura 1. Diagrama de flujo de la solución por elementos finitos de un problema de contorno.

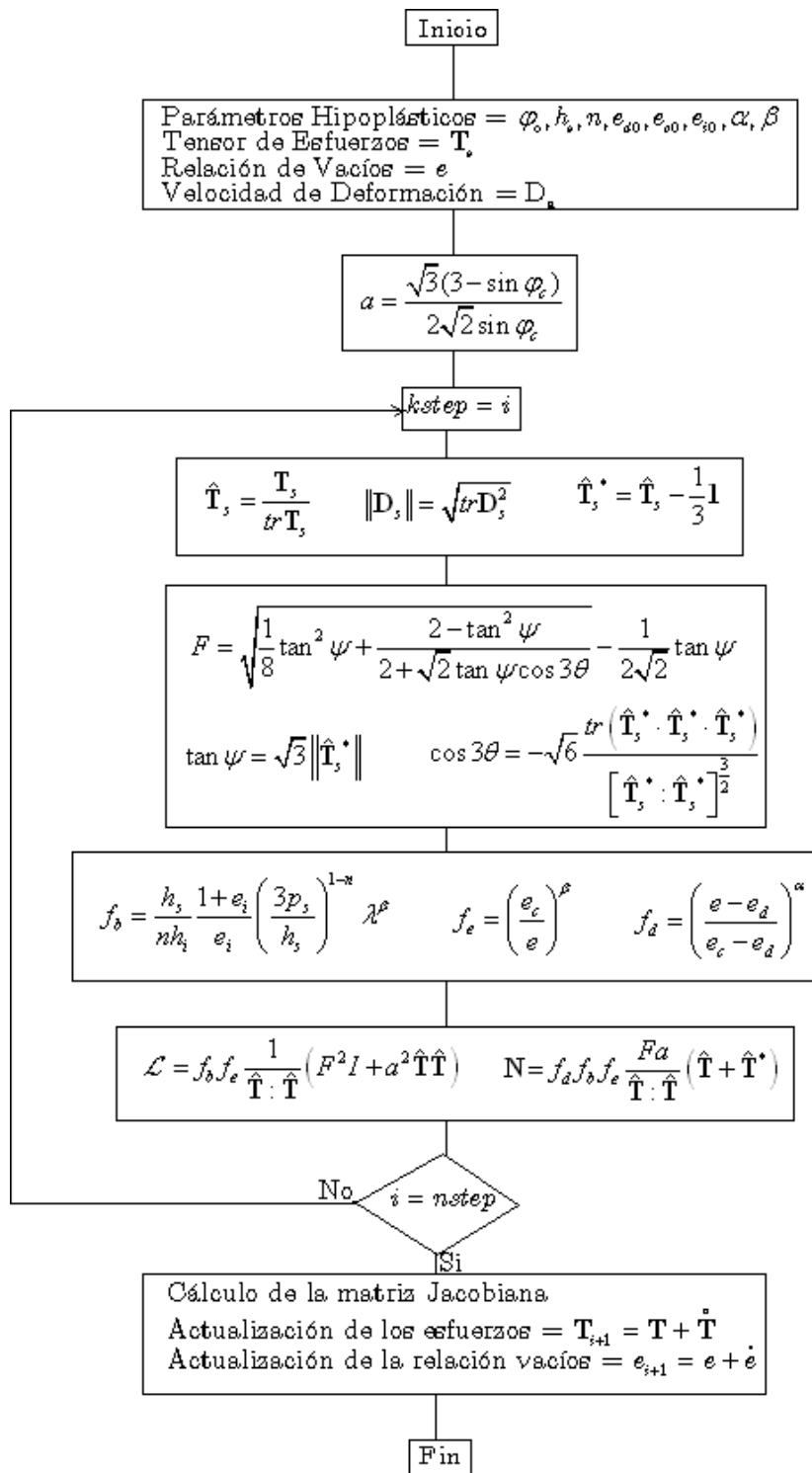


Figura 2. Diagrama de flujo de la subrutina de material Hipoplástico, implementada en las librerías FEAP.

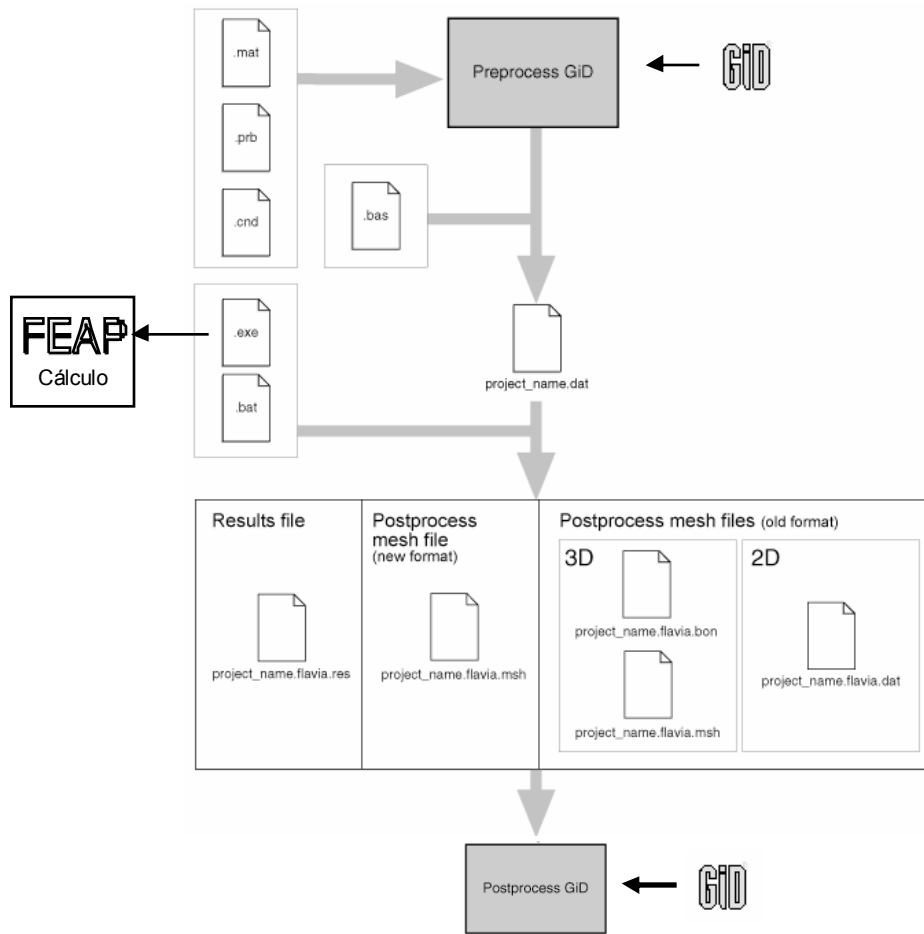


Figura 3. Interacción entre el programa de pre-proceso y post-proceso, GiD y el motor de solución en FEAP. Fuente: www.gidhome.com

4 Validación

Para la validación del programa, se llevó a cabo un modelo simple de compresión confinada. Las dimensiones del modelo son 2 pulgadas x 4 pulgadas y los parámetros hipoplásticos utilizados se muestran en la Tabla 1.

En la comparación de resultados, se utilizó el programa Abaqus. Este programa ha sido desarrollado y validado por más de 20 años, por lo que es una buena referencia para la validación de resultados.

El modelo es sometido a una presión uniforme de 100 psi. Los bordes laterales tienen restricción al movimiento en dirección x, y el borde inferior tiene restricción al movimiento en ambas direcciones. La Figura 4 muestra un esquema del modelo y la Figura 5 muestra el modelo de elementos finitos creado en GID.

La carga es aplicada en pequeños incrementos, controlados por los intervalos de tiempo, que son del orden de 1×10^{-4} . Este valor es el propuesto por Mayer (2000), para controlar la estabilidad del modelo. La ley Hipoplástica no depende de la velocidad de carga, por lo que las unidades de tiempo son irrelevantes. En el momento que el modelo alcanza el tiempo $t=1$, la carga habrá sido aplicada totalmente.

Se seleccionó el método de Newton Raphson para la iteración de la matriz de rigidez, con un máximo de 15 iteraciones. Fue necesario seleccionar un esquema de almacenamiento spar para la matriz de rigidez, el cual optimiza el espacio de almacenamiento, obviando las

posiciones donde hay valores igual a cero. La selección de este esquema de almacenamiento afecta los resultados, y a que la factorización de la matriz se hace de manera más precisa.

Tabla 1. Parámetros Hipoplásticos del modelo.

Parámetro	Valor
φ_c	0.66 rad
h_s	10.000 lb/inch ²
e_{d0}	0.31
e_{c0}	0.68
n	0.19
α	0.1
β	1.1

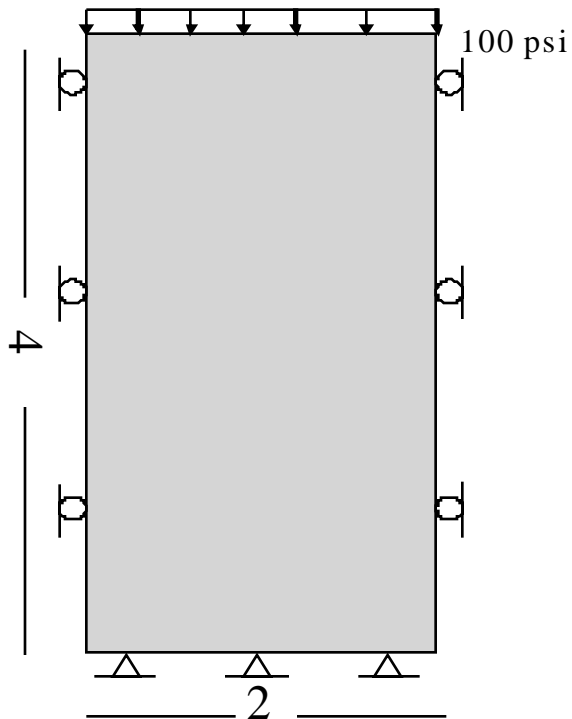


Figura 4. Esquema del modelo de validación. Unidades en pulgadas.

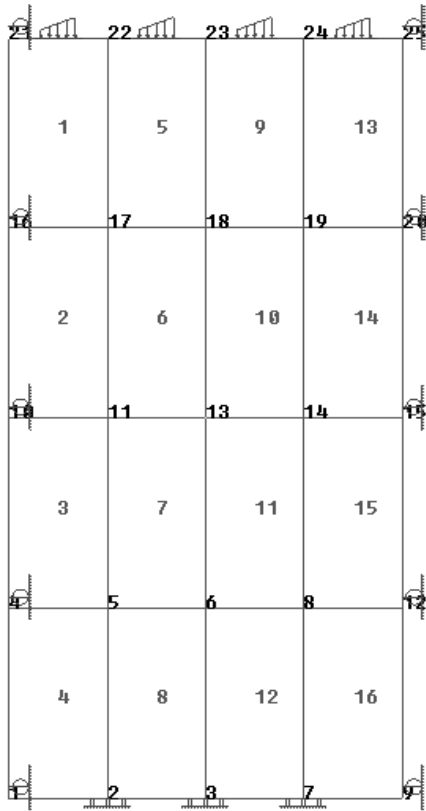


Figura 5. Modelo de elementos finitos creado en GID.

Las deformaciones calculadas presentan la misma tendencia que los resultados de Abaqus, pero los valores se van haciendo cada vez más grandes. El modelo se vuelve inestable, y en el tiempo $t=0.07$ se entra en el ciclo de estabilidad (aumento de la rigidez) dentro de la subrutina de material, sin alcanzar una rigidez apropiada para seguir corriendo y este se interrumpe automáticamente. La Figura 6 muestra las deformaciones de los dos modelos, la escala de las ordenadas esta en base logarítmica, para poder compararlas.

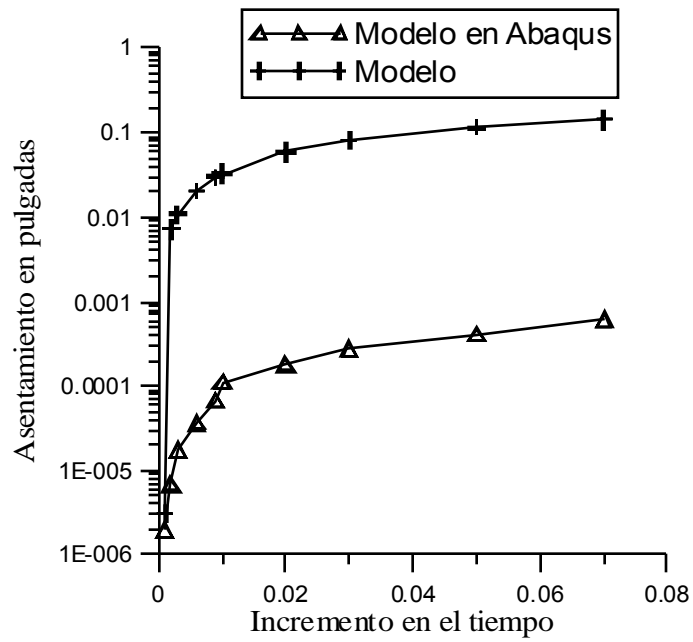


Figura 6. Deformaciones presentadas en los dos modelos antes del incremento $t=0.07$

5 CONCLUSIONES

- La programación de subrutinas de usuario en códigos abiertos, es una buena opción para implementar nuevos materiales para el análisis de problemas de contorno, por el método de elementos finitos.
- La no linealidad de la hipoplasticidad demanda un especial cuidado en la selección de los métodos de solución. Las características del Jacobiano de la ley constitutiva, afecta el cálculo de las matrices del modelo. Los resultados obtenidos con el programa FEAP son muy sensibles incluso con la selección del esquema de almacenamiento y cálculo de las matrices.
- El elemento utilizado en FEAP, para hacer el modelo, tiene una formulación Lagrangiana total. De esta manera, las deformaciones están referenciadas al sistema de coordenadas inicial de la malla, y los resultados del gradiente de deformación y velocidad de deformación no son relativos. Las grandes deformaciones que se obtienen, van disminuyendo la rigidez del material, hasta que el modelo se vuelve inestable y se interrumpe.
- Debido al carácter incremental de la ley, su formulación se basa en incrementos de deformación y esfuerzo. El esquema apropiado, debe actualizar las coordenadas en cada instante de tiempo, manteniendo las bases del esquema Lagrangiano. Por esto, es necesario programar un elemento en FEAP, basado en el esquema Lagrangiano actualizado, ya que la formulación de los elementos de FEAP está basada en el esquema Lagrangiano total.

6 REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Hügel, H. 1995. Prognose von Bodenverformungen. *Veröffentlichung des Institutes für Bodenmechanik und Felsmechanik der Universität Karlsruhe*
- Mayer, P. 2000. Verformungen und spannungsänderungen im borden durch schlitzwandherstellung und baugrubenaushub. *Veröffentlichung des Institutes für Bodenmechanik und Felsmechanik der Universität Karlsruhe*
- Niemunis, A. 2002. Extended hypoplastic models for soils. *Dissertation University of Bochum*
- Taylor R. 2003. FEAP A Finite Element Analysis Program. Theory Manual. *University of California at Berkeley*
- Tejchman, J., Bauer, E. 2005. Fe-simulations of a direct and a true simple shear test within a polar hypoplasticity. *Computers and Geotechnics*, 32: 1-16
- Wolffersdorff, P. 1996. A hypoplastic relation for granular materials with a predefined limit state surface. *Mechanics of cohesive-frictional materials*. 1: 251-271