Espectro de los operadores diferenciales generados por sistemas de los líquidos estratificados para flujos compresibles

César A. Hernández

Director:
Dr. Andrei Giniatoulline

Trabajo presentado como requisito parcial para optar por el título de Magister en Matemáticas

Departamento de Matemáticas
Universidad de los Andes
Bogotá, Colombia

7 de Noviembre de 2006

Índice general

Preliminares y Notaciones

NOTACIONES

1. $\mathbb{R}$ denotará el conjunto de los números reales.

2. $\mathbb{R}^+$ denotará el conjunto de los números reales positivos.

3. $\mathbb{R}^n$ denotará el conjunto $\{x = (x_1, ..., x_n) | x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, ..., n\}$, dotado de la norma usual; $||x||^2 = \sum\limits_{j=1}^{n} x_i^2$.

4. Si $a \in \mathbb{R}^3$, $r \in \mathbb{R}^+$, entonces $B_r(a)$, denotará el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^3 : ||x - a|| < r\}$, llamado usualmente la bola abierta con centro en a y radio r.

5. Ω denotará un subconjunto acotado de $\mathbb{R}^3$.

6. $L_2(\Omega)$ denotará el espacio de Hilbert de las funciones de cuadrado integrable sobre Ω.

7. $(L_2(\Omega))^3$ denotará el espacio de Hilbert $L_2(\Omega) \times L_2(\Omega) \times L_2(\Omega)$, dotado del producto interno usual en el espacio producto.

8. $W_2^1(\Omega)$ denotará el espacio de Sobolev de las funciones de $L_2(\Omega)$ que tienen derivadas débiles de primer orden en Ω y con estas a su vez en $L_2(\Omega)$. Recordemos que si $g \in W_2^1(\Omega)$ su norma está dada por:

$$||g||_{W_2^1(\Omega)} = \left(\int\limits_{\Omega} \left[|\nabla f|^2 + f^2 \right] dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

9. $W_2^2(\Omega)$ denotará el espacio de Sobolev de las funciones de $L_2(\Omega)$ que tienen derivadas débiles de primero y segundo orden en Ω y con estas a su vez están en $L_2(\Omega)$.

10. $C(\mathbb{R}^3)$ denotará las funciones continuas en R^3.

11. $C_0^\infty(\Omega)$ denotará las funciones infinitamente diferenciables con soporte compacto en Ω.

PRELIMINARES

Enunciaremos aquí algunas definiciones y proposiciones que serán de gran utilidad en el desarrollo posterior del trabajo.
Consideremos el operador diferencial con coeficientes variables

$$l_{ij}(x, D) = \sum_{|\alpha| \le n_{ij}} a_{ij}^{\alpha}(x) D^{\alpha} \tag{1}$$

donde

$$\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n), \quad |\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n \quad \alpha_i \in \mathbb{N}, \quad D = (D_1, ..., D_n), \quad D_j = \frac{\partial}{\partial x_j},$$

$$D^{\alpha} = D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Vamos a denotar el orden del operador diferencial (es decir, el orden de la derivada más alta del operador) mediante el símbolo *deg*. En particular, para el operador del tipo (1)

$$deg\ l_{ij}(x, D) = n_{ij}$$

si por lo menos un factor de la derivada de orden n_{ij} en (1) es diferente de cero.
Consideremos el sistema de N ecuaciones diferenciales en derivadas parciales

$$\left\{ \begin{array}{c} l_{11}(x, D)u_1(x) + \cdots + l_{1N}(x, D)u_N(x) = f_1(x) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ l_{N1}(x, D)u_1(x) + \cdots + l_{NN}(x, D)u_N(x) = f_N(x) \end{array} \right. \tag{2}$$

para N funciones incógnitas $u_1, \ldots u_N$ en un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, donde $x = (x_1, ..., x_n) \in \Omega$, $n \ge 2$. Al introducir los campos vectoriales $u(x) = (u_1, ..., u_N)$, $f(x) = (f_1, ..., f_N)$ y el operador diferencial en forma matricial

$$L(x, D) = \begin{pmatrix} l_{11}(x, D) & \cdot & \cdot & \cdot & l_{1N}(x, D) \\ \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & \cdot \\ l_{N1}(x, D) & & & & l_{NN}(x, D) \end{pmatrix}$$

podemos escribir el sistema (2) de la siguiente manera:

$$L(x,D)u(x) = f(x). \tag{3}$$

La parte principal del sistema según Douglis-Nirenberg

Supongamos un punto x fijo en Ω. Sean $\{s_i\}_{i=1}^N$ y $\{t_j\}_{j=1}^N$ dos conjuntos de números enteros tales que

$$deg\ l_{ij}(x,D) \leq s_i + t_j \tag{4}$$

si $l_{ij}(x,D) \neq 0$. En el caso en que $l_{ij}(x,D) = 0$ no exigimos ninguna condición sobre la suma $s_i + t_j$. Consideremos estos conjuntos como vectores con coordenadas enteras:

$$s = (s_1, ..., s_N), \quad t = (t_1, ..., t_N).$$

Definimos la parte principal del sistema (3) que corresponde a los conjuntos dados s y t, en el sentido de Douglis-Nirenberg, como el operador diferencial matricial

$$\widetilde{L}_{s,t}(x,D) = \begin{pmatrix} \widetilde{l}^{s,t}_{11}(x,D) & \cdot & \cdot & \cdot & \widetilde{l}^{s,t}_{1N}(x,D) \\ \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & \cdot \\ \widetilde{l}^{s,t}_{N1}(x,D) & & & & \widetilde{l}^{s,t}_{NN}(x,D) \end{pmatrix}$$

donde

$$\widetilde{l}^{s,t}_{ij}(x,D) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad deg\ l_{ij}(x,D) < s_i + t_j \\ & \text{ó} \quad l_{ij}(x,D) = 0, \\ \sum_{|\alpha| = s_i + t_j} a^{\alpha}_{ij}(x) D^{\alpha} & \text{si} \quad deg\ l_{ij}(x,D) = s_i + t_j. \end{cases}$$

Definición 0.0.1. El sistema (3) se llama elíptico en el sentido de Douglis-Nirenberg en el punto $x \in \Omega$ si existen dos conjuntos s y t que satisfacen (4) y, además se cumple la condición $\det \widetilde{L}_{s,t}(x,\xi) \neq 0$ para todo $\xi \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$.

Es conveniente decir que la elípticidad antes definida no depende en lo mas minimo del conjunto de indices s y t. Para mas detalles sobre esta definición y sus consecuencias véase [21].
Por otro lado sea $U : D(U) \to H$, un operador lineal en un espacio de Hilbert H, donde $D(U)$ denota el dominio del operador U, entonces tenemos,

Teorema 0.0.2 (Weyl)**.** *Una condición necesaria y suficiente para que un valor real λ, sea un punto del espectro esencial del operador autoadjunto U, es que exista una sucesión de elementos $x_n \in D(U)$ tal que,*

$$||x_n|| = 1, \qquad x_n \rightharpoonup 0, \qquad (U - \lambda I)x_n \to 0.$$

Demostración. Ver por ejemplo ([15],[16]). $\square$

Un teorema similar se tiene cuando el operador U es antiautoadjunto, en este caso $\lambda = i\mu$ con $\mu \in \mathbb{R}$.

El siguiente lema no es muy interesante pero ayudará a comprender algunos detalles expuestos en el capítulo 2,

Lema 0.0.3. *Sean $y \in \mathbb{R}^n$, $r \in \mathbb{R}^+$ tales que $||y|| < r$, entonces $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_{kr}(ky) = \mathbb{R}^n$, y $B_{kr}(ky) \subseteq B_{(k+1)r}((k+1)y)$ para todo $k \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Tomemos $x \in \mathbb{R}^n$ fijo, entonces:

$$\frac{||x-ky||}{kr} \leq \frac{||x||}{kr} + \frac{||y||}{r}$$

como $\frac{||y||}{r} < 1$, entonces $0 < 1 - \frac{||y||}{r}$, por la propiedad arquimediana, existe un $k_\circ \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{||x||}{k_\circ r} < 1 - \frac{||y||}{r}$, de donde $\frac{||x||}{k_\circ r} + \frac{||y||}{r} < 1$, así que:

$$\frac{||x-k_\circ y||}{k_\circ r} < 1$$

es decir $||x - k_\circ y|| < k_\circ r$, de donde $x \in B_{k_\circ r}(k_\circ y)$.

Por otra parte, sea $z \in B_{kr}(ky)$,

$$||z-(k+1)y|| \leq ||z-ky|| + ||y|| < kr + r = (k+1)r$$

es decir $z \in B_{(k+1)r}((k+1)y)$. $\square$

Capítulo 1

Introducción

El objetivo de este trabajo es estudiar la estructura y la localización del espectro de operadores diferenciales que modelan pequeños movimientos de un fluido estratificado compresible en un campo gravitacional homogéneo.
Con este propósito nosotros consideramos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales parciales:

$$\begin{cases} q_{\bullet}\dfrac{\partial \vec{w}}{\partial t} + \bigtriangledown p + gq\vec{e}_3 = 0 \\ \dfrac{\partial q}{\partial t} - \dfrac{N^2 q_{\bullet}}{g} w_3 = 0 \\ \dfrac{\partial p}{\partial t} + div(q_{\bullet}\vec{w}) = 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

donde $\vec{w} = (w_1(\vec{x},t), w_2(\vec{x},t), w_3(\vec{x},t))$ es el campo de velocidades con $\vec{x} \in \Omega$, subconjunto acotado de $\mathbb{R}^3$, $t > 0$, $p(\vec{x},t)$ es el campo escalar de presión dinámica, $q(\vec{x},t)$ es la densidad dinámica, $q_{\bullet}$, g y N son constantes positivas, $\vec{e}_3 = (0,0,1)$.
Las ecuaciones (1.1) son deducidas en [1] asumiendo que la función de distribución estacionaria está dada por la función $q_{\bullet}e^{-Nx_3}$.
El sistema (1.1) ha sido estudiado desde diferentes puntos de vista, algunos de los resultados más relevantes pueden ser encontrados en [4], [5], [8], [9], [18], [19]. Particularmente, la suavidad de la solución del sistema estratificado para el caso de la intrusión fue estudiada en [8]. El caso aislado de unicidad de soluciones para fluidos estratificados en una clase de funciones crecientes fue considerado en [9]. El caso de espectro esencial para fluidos ideales (no compresibles) fue considerado en [4], [5]. La suavidad general de soluciones fue considerada en [18]. El espectro esencial para flujos rotatorios (no estratificados), ideales y compresibles fue considerado en [13], y propiedades matemáticas para problemas diferentes concernientes a fluidos rotatorios fueron considerados en [6] y [7].
Sin pérdida de generalidad podemos suponer $q_{\bullet} = 1$, $g = 1$ (lo cual puede ser hecho

introduciendo nuevas incógnitas $\vec{u}$, ρ de la siguiente manera):

$$\vec{u} = q.\vec{w} \qquad \rho = gq$$

Con estas sustituciones el sistema previo es transformado en:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \bigtriangledown p + \rho \vec{e}_3 = 0 \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial t} - N^2 u_3 = 0 \\ \dfrac{\partial p}{\partial t} + div(\vec{u}) = 0 \end{cases} \tag{1.2}$$

Nosotros observamos cierta similitud del caso incompresible del sistema (1.2) con el sistema que describe movimientos rotatorios de un fluido ideal con respecto al eje vertical ($\vec{w} = (0, 0, w)$):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{w} \times \vec{u} + \bigtriangledown p = 0 \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} + \dfrac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0 \end{cases} \tag{1.3}$$

Notamos particularmente la semejanza entre la forma escalar de los dos sistemas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_3^2}\right) + N^2\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2}\right) = 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_3^2}\right) + w^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_3^2} = 0 \end{aligned} \tag{1.4}$$

y sus correspondientes soluciones singulares ([12]):

$$\begin{aligned} \zeta(x,t) &= \frac{1}{4\pi |x_3|} \int_0^{\frac{Nt|x_3|}{|x|}} J_0(\alpha) d\alpha \\ \zeta(x,t) &= \frac{1}{4\pi |x|} \int_0^{\frac{wt|\vec{x}|}{|x|}} J_0(\alpha) d\alpha \end{aligned} \tag{1.5}$$

Esta analogía matemática entre ondas rotatorias y gravitacionales, puede conducir a una correspondiente analogía en sus propiedades espectrales.

En [13] se prueba que el espectro esencial de vibraciones normales generadas por ondas internas rotatorias para fluidos compresibles es el intervalo del eje real $[-w, w]$ para dominios acotados, y es todo el eje real $\mathbb{R}$ para el caso $\Omega = \mathbb{R}^3$. Debido a esto es apropiado expresar la pregunta: ¿es posible que el operador generado por (1.2) posea propiedades espectrales análogas a las del sistema rotatorio?

Aqui mostramos que la respuesta a esta pregunta es afirmativa.

1.1. Formulación del problema espectral

Sea Ω un dominio acotado en $\mathbb{R}^3$ y consideremos la condición de frontera $\vec{u}\cdot\vec{n}|_{\partial\Omega} = 0$, para el sistema (1.2), donde $\vec{n}$ denota la normal exterior a Ω.
Consideremos ahora el siguiente problema de vibraciones normales:

$$\begin{aligned} \vec{u}(\vec{x},t) &= \vec{v}(\vec{x})e^{-\lambda t} \\ \rho(\vec{x},t) &= Nv_4(\vec{x})e^{-\lambda t} \quad , \quad \lambda \in \mathbb{C}, \\ p(\vec{x},t) &= v_5(\vec{x})e^{-\lambda t} \end{aligned} \tag{1.6}$$

entonces el sistema (1.2), se transforma en:

$$\begin{aligned} -\lambda\vec{v} + Nv_4\vec{e}_3 + \bigtriangledown v_5 &= 0 \\ -\lambda N v_4 - N^2 v_3 &= 0 \\ -\lambda v_5 + div(\vec{v}) &= 0 \end{aligned} \tag{1.7}$$

si denotamos $\widetilde{v} = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ y escribimos el sistema (1.7), en la forma matricial:

$$L\widetilde{v} = 0 \tag{1.8}$$

donde,

$$L = M - \lambda I, \tag{1.9}$$

y

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ 0 & 0 & 0 & N & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ 0 & 0 & -N & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Acorde a [17] y [21], el símbolo principal $L^\circ(\xi)$ según Douglis-Nirenberg asociado al operador L tomando $s_i = t_j = 0$, $i, j = 1, 2, 3, 4$, $s_5 = t_5 = 1$ es:

$$L^\circ(\xi) = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 & \xi_1 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 & \xi_2 \\ 0 & 0 & -\lambda & N & \xi_3 \\ 0 & 0 & -N & -\lambda & 0 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

de donde,

$$det(L^\circ(\xi)) = \lambda((\lambda^2 + N^2)|\xi^{\shortmid}|^2 + \lambda^2\xi_3^2) \tag{1.10}$$

con $\xi^{\shortmid} = (\xi_1, \xi_2)$, $|\xi^{\shortmid}|^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2$.
El siguiente lema nos dará información precisa de la elipticidad según Douglis-Nirenberg del operador L.

Lema 1.1.1. $\lambda \in [-iN, iN]$ *si y solo si L no es Douglis-Nirenberg elíptico.*

Demostración. Sabemos que, $det(L^{\circ}(\xi)) = 0$ si y solo si $\lambda = 0$ o $\lambda^2 = \frac{-N^2|\xi^{\prime}|^2}{|\xi^{\prime}|^2+\xi_3^2}$, tomemos $\vec{\xi} = (1, 0, \xi_3), \xi_3 \in \mathbb{R}$ entonces

$$\lambda^2 = \frac{-N^2}{1+\xi_3^2}, \qquad \lambda \in \mathbb{C}, \tag{1.11}$$

de esta última ecuación se deduce que $\lambda \in i\mathbb{R}$ es decir $\lambda = i\mu$, $\mu \in \mathbb{R}$, sabemos que:

$$\frac{-N^2}{1+\xi_3^2} \geq -N^2$$

por tanto $\mu^2 \leq N^2$ y entonces $|\mu| \leq N$ con lo cual $\lambda \in [-iN, iN]$ $\square$

Desde el punto de vista físico, la separación de variables (1.6) sirve como herramienta para establecer la posibilidad de representar todo proceso no estacionario descrito por (1.2) como una superposición lineal de vibraciones normales. El conocimiento del espectro de vibraciones normales puede ser útil para estudiar la estabilidad de los flujos. También, el espectro del operador M es importante en la investigación de los flujos no lineales débiles, dado que en los puntos de bifurcación donde las soluciones no lineales pequeñas se presentan, pertenecen al espectro de vibraciones normales lineales, es decir al espectro del operador M.
Primero nosotros demostraremos que M es antiautoadjunto y con ello su espectro estará en el eje imaginario, después basados en el teorema de Weyl nosotros investigaremos el espectro de M en dominios acotados y por último estudiaremos el espectro de M en todo el espacio tridimensional $\mathbb{R}^3$.

Capítulo 2

Espectro del operador M en Dominios Acotados

Ahora investigaremos el espectro del operador M, para ello definamos el dominio del operador M como sigue:

$$D(M) = \left\{ \begin{array}{c} \vec{u} \in (L_2(\Omega))^3 | \exists f \in L_2(\Omega) : \\ \langle \vec{u}, \triangledown\varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle \forall \varphi \in W_2^1(\Omega) \end{array} \right\} \times W_2^1(\Omega) \times W_2^1(\Omega).$$

la condición entre las llaves en la definición anterior afirma que $\vec{u}$ tiene divergencia débil $-f \in L_2(\Omega)$, lo cual se escribe como:

$$div(\vec{u}) = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = -f$$

En adelante veremos el operador M actuando sobre $D(M)$ con valores en $(L_2(\Omega))^5$.

Lema 2.0.2. *El operador M es antiautoadjunto.*

Demostración. Nosotros observamos primero que, para el fluido compresible, el lema no puede ser probado usando la proyección de $L_2(\Omega)$ sobre el espacio de los campos solenoidales como fue hecho en ([4],[5]). Aquí nosotros usaremos directamente la definición de operador antiautoadjunto.
Como $M = M_0 + B$, donde

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N & 0 \\ 0 & 0 & -N & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

es un operador antisimétrico acotado, entonces es suficiente probar la antiautoadjuntez para el operador M_0 con $D(M_0) = D(M)$ (ver teorema de Kato-Rellich en [15]).

Mostremos primero la antisimetría de M_0, sean $\widetilde{u} = (\vec{u}, u_4, u_5), \widetilde{v} = (\vec{v}, v_4, v_5) \in D(M_0)$ entonces:

$$\begin{aligned}
\langle M_0\widetilde{u}, \widetilde{v}\rangle &= \langle \bigtriangledown u_5 + div(\vec{u}), \widetilde{v}\rangle \\
&= \langle \bigtriangledown u_5, \widetilde{v}\rangle + \langle div(\vec{u}), \widetilde{v}\rangle \\
&= \langle \bigtriangledown u_5, \vec{v}\rangle + \langle div(\vec{u}), v_5\rangle \\
&= -\langle u_5, div(\vec{v})\rangle - \langle \vec{u}, \bigtriangledown v_5\rangle \qquad (*) \\
&= -\langle \widetilde{u}, div(\vec{v}) + \bigtriangledown v_5\rangle \\
&= -\langle \widetilde{u}, M_0\widetilde{v}\rangle
\end{aligned}$$

donde la igualdad $(*)$ fue obtenida haciendo integración por partes.
Ahora verificaremos que $D(M_0) = D(M_0^*)$.
Por la antisimetría de M_0 tenemos $D(M_0) \subseteq D(M_0^*)$, en efecto:
sea $\widetilde{u} \in D(M_0)$, tomemos $\widetilde{\eta} = -M_0\widetilde{u}$ y $\widetilde{x} \in D(M_0)$, entonces:

$$\langle \widetilde{x}, \widetilde{\eta}\rangle = \langle \widetilde{x}, -M_0\widetilde{u}\rangle = -\langle \widetilde{x}, M_0\widetilde{u}\rangle = \langle M_0\widetilde{x}, \widetilde{u}\rangle$$

en la última igualdad se usó la antisimetría de M_0, por tanto:

$$\langle M_0\widetilde{x}, \widetilde{u}\rangle = \langle \widetilde{x}, \widetilde{\eta}\rangle, \quad \forall \widetilde{x} \in D(M_0)$$

esto último significa que $\widetilde{u} \in D(M_0^*)$.
Para la otra inclusión, como el operador M_0 no actúa sobre la cuarta componente del vector $\widetilde{u}$, sin pérdida de generalidad, podemos considerar $u_4 = v_4 = f_4 = 0$.
Sea $\widetilde{v} \in D(M_0^*)$, esto significa que $\widetilde{v} \in (L_2(\Omega))^5$ y existe $\widetilde{f} = (\vec{f}, 0, f_5) \in (L_2(\Omega))^5$ tal que $\langle M_0\widetilde{u}, \widetilde{v}\rangle = \langle \widetilde{u}, \widetilde{f}\rangle$, para todo $\widetilde{u} \in D(M_0)$; es decir,

$$\langle M_0\widetilde{u}, \widetilde{v}\rangle = \langle \bigtriangledown u_5, \vec{v}\rangle + \langle div(\vec{u}), v_5\rangle = \langle \vec{u}, \vec{f}\rangle + \langle u_5, f_5\rangle$$

ahora, sea $\widetilde{u} = (0,0,0,0,u_5)$, $u_5 \in W_2^1(\Omega)$, para ese $\widetilde{u}$ tenemos:

$$\langle \bigtriangledown u_5, \vec{v}\rangle = \langle u_5, f_5\rangle$$

es decir $\vec{v}$ tiene divergencia débil $-f_5 \in L_2(\Omega)$.
Falta mostrar que $v_5 \in W_2^1(\Omega)$, para ello consideremos $\widetilde{u} = (u_1, u_2, u_3, 0, 0)$, para tal $\widetilde{u}$ tenemos:

$$\langle div(\vec{u}), v_5\rangle = \langle \vec{u}, \vec{f}\rangle$$

es decir v_5 tiene gradiente débil $-\vec{f} \in (L_2(\Omega))^3$, lo que se escribe como:

$$\left(\frac{\partial v_5}{\partial x_1}, \frac{\partial v_5}{\partial x_2}, \frac{\partial v_5}{\partial x_3}\right) = -(f_1, f_2, f_3)$$

de donde $\frac{\partial v_5}{\partial x_i} = -f_i \in L_2(\Omega)$ para $i = 1, 2, 3$. Y con ello $v_5 \in W_2^1(\Omega)$. $\square$
Como M es antiautoadjunto entonces su espectro está localizado sobre el eje imaginario

del plano complejo. El siguiente teorema nos da la ubicación exacta del espectro esencial de M en dicho eje. Antes de esto recordemos que el espectro esencial está compuesto de los puntos pertenecientes al espectro continuo, puntos límites del espectro puntual y de valores propios de multiplicidad infinita([15],[16]).

Teorema 2.0.3. *El espectro esencial del operador M es el intervalo del eje imaginario $[-iN, iN]$. Además, los puntos $\lambda_0 = 0, \pm iN$ son valores propios de multiplicidad infinita.*

Demostración. En esta prueba mostraremos que se satisfacen explícitamente las condiciones del teorema de Weyl.
Consideremos $\lambda_0 \in (-iN, iN)\backslash\{0\}$, construyamos una sucesión de Weyl en una vecindad de $x_0 \in \Omega$.
Sea $\vec{\xi}$ un punto arbitrario sobre la superficie del cono:

$$(\lambda_0^2 + N^2)|\xi'|^2 + \lambda_0^2\xi_3^2 = 0, \quad \xi_i \neq 0, \quad i = 1, 2, 3. \tag{2.1}$$

observemos que la ecuación (2.1), es igual al determinante de la matriz $L_0(\xi)$, salvo por el factor λ_0, por tanto existe un vector no nulo

$$\vec{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5), \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, \tag{2.2}$$

tal que $L_0(\xi)\vec{\eta} = 0$, es decir,

$$\begin{cases} -\lambda_0\eta_1 + \xi_1\eta_5 = 0 \\ -\lambda_0\eta_2 + \xi_2\eta_5 = 0 \\ -\lambda_0\eta_3 + N\eta_4 + \xi_3\eta_5 = 0 \\ -N\eta_3 - \lambda_0\eta_4 = 0 \\ \xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_3 + \xi_3\eta_3 = 0 \end{cases} \tag{2.3}$$

La matriz de este sistema es:

$$A = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & 0 & 0 & 0 & \xi_1 \\ 0 & -\lambda_0 & 0 & 0 & \xi_2 \\ 0 & 0 & -\lambda_0 & N & \xi_3 \\ 0 & 0 & -N & -\lambda_0 & 0 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

la cual es equivalente por filas a la matriz:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\xi_1\lambda_0^{-1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\xi_2\lambda_0^{-1} \\ 0 & 0 & 1 & -N\lambda_0^{-1} & -\xi_3\lambda_0^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \xi_3 N(N^2 + \lambda_0^2)^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\xi_3^2 N^2(N^2 + \lambda_0^2)^{-1} + |\vec{\xi}|^2 \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

donde $|\vec{\xi}|^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2$ y la componente $(5,5)$ en la matriz B es 0, en efecto:

$$\begin{aligned}
-\xi_3^2 N^2 (N^2+\lambda_0^2)^{-1} + |\vec{\xi}|^2 &= \frac{-\xi_3^2 N^2 + (|\xi'|^2 + \xi_3^2)(N^2+\lambda_0^2)}{N^2+\lambda_0^2} \\
&= \frac{-\xi_3^2 N^2 + |\xi'|^2 (N^2+\lambda_0^2) + \xi_3^2(N^2+\lambda_0^2)}{N^2+\lambda_0^2} \\
&= \frac{-\xi_3^2 N^2 - \lambda_0^2 \xi_3^2 + \xi_3^2 (N^2+\lambda_0^2)}{N^2+\lambda_0^2} \qquad (*) \\
&= 0
\end{aligned}$$

donde la igualdad $(*)$ fue obtenida de (2.1).
De las afirmaciones anteriores se sigue que la variable η_5 en el sistema $B\vec{\eta} = 0$, es libre, sea $\eta_5 = 1$, entonces de (2.4) se tiene:

$$\begin{cases}
\eta_1 = \dfrac{\xi_1}{\lambda_0} \\
\eta_2 = \dfrac{\xi_2}{\lambda_0} \\
\eta_3 = \dfrac{\xi_3 \lambda_0}{N^2+\lambda_0^2} \\
\eta_4 = \dfrac{-\xi_3 N}{N^2+\lambda_0^2} \\
\eta_5 = 1
\end{cases} \tag{2.5}$$

es claro, por la elección de λ_0 y $\vec{\xi}$ que $\eta_i \neq 0$ para $i = 1,2,3,4,5$.
Ahora tomemos una función $\varphi_0(x) \in C_0^\infty(\Omega)$, tal que $\int\limits_\Omega \varphi_0^2(x)dx = 1$, es conveniente mencionar que la función φ_0, puede definirse sobre todo $\mathbb{R}^3$, si x no está en el soporte de φ_0, entonces $\varphi_0(x) = 0$.
Para x_0 fijo en Ω, definamos,

$$\varphi_k(x) = k^{\frac{3}{2}} \varphi_0(k(x-x_0)), \qquad k = 1,2,3,...$$

no es dificíl mostrar que para un k suficientemente grande el soporte de φ_k esta contenido en Ω.
Además podemos ver fácilmente que para un k suficientemente grande:

$$||\varphi_k||_{L_2(\Omega)} = 1, \qquad \left|\left|\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j}\right|\right|_{L_2(\Omega)} = C_j^1 k, \qquad \left|\left|\frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x_j^2}\right|\right|_{L_2(\Omega)} = C_j^2 k^2 \quad j = 1,2,3. \tag{2.6}$$

donde las constantes $C_j^i \neq 0$, no dependen de k.
En efecto:

Como Ω es acotado entonces existen $a \in \mathbb{R}^3$ y $r \in \mathbb{R}^+$, tal que $\Omega \subseteq B_r(a)$. Veamos primero que sucede con $||\varphi_k(x)||^2_{L_2(\Omega)}$, para ello consideremos:

$$\int\limits_{B_r(a)} (k^{\frac{3}{2}}\varphi_0(k(x-x_0)))^2 dx = k^3 \int\limits_{B_r(a)} \varphi_0^2(k(x-x_0))dx$$
$$= \int\limits_{B_{rk}(k(a-x_0))} \varphi_0^2(y)dy \qquad (*)$$

donde $(*)$ fue obtenido tomando el cambio de coordenadas $y = k(x-x_0)$.
Si utilizamos el lema (0.0.3) con $y = a - x_0$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_0$, $B_{nr}(n(a-x_0)) \supseteq B_r(a)$, por tanto:

$$\int\limits_{B_{rk}(k(a-x_0))} \varphi_0^2(y)dy = \int\limits_{B_r(a)} \varphi_0^2(y)dy = \int\limits_{\Omega} \varphi_0^2(y)dy = 1$$

para un k suficientemente grande. De estos argumentos se deduce que $||\varphi_k(x)||^2_{L_2(\Omega)} = 1$, cuando k tiende a infinito.
De manera similar:

$$\int\limits_{B_r(a)} \left(k^{\frac{5}{2}}\frac{\partial\varphi_0(k(x-x_0))}{\partial x_i}\right)^2 dx = k^5 \int\limits_{B_r(a)} \left(\frac{\partial\varphi_0(k(x-x_0))}{\partial x_i}\right)^2 dx$$
$$= k^2 \int\limits_{B_{rk}(k(a-x_0))} \left(\frac{\partial\varphi_0(y)}{\partial y_i}\right)^2 dy \qquad (*)$$

$(*)$ es consecuencia inmediata del cambio de coordenadas hecho anteriormente. Utilizando (0.0.3), obtenemos que:

$$k^2 \int\limits_{B_{rk}(k(a-x_0))} \left(\frac{\partial\varphi_0(y)}{\partial y_i}\right)^2 dy = k^2 \int\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial\varphi_0(y)}{\partial y_i}\right)^2 dy$$

para un k suficientemente grande. De aquí se deduce que $\left|\left|\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_j}\right|\right|_{L_2(\Omega)} = C_j^1 k$, cuando k tiende a infinito.
La afirmación restante en (2.6), se demuestra de manera análoga.
Ahora podemos definir la sucesión de Weyl; consideremos,

$$\widetilde{u}^k(x) = (u_1^k(x), u_2^k(x), u_3^k(x), r^k(x), q^k(x)) \qquad k = 1, 2, 3, ... \tag{2.7}$$

tal que:

$$\begin{cases} u_j^k(x) = \eta_j e^{ik^3\langle x,\xi\rangle}\left(\varphi_k + \dfrac{i}{k^3\xi_j}\dfrac{\partial\varphi_k}{\partial x_j}\right) & j = 1, 2, 3. \\ r^k(x) = \eta_4 e^{ik^3\langle x,\xi\rangle}\varphi_k \\ q^k(x) = -\dfrac{i}{k^3}\varphi_k e^{ik^3\langle x,\xi\rangle} \end{cases} \tag{2.8}$$

donde $\langle x, \xi \rangle = x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + x_3\xi_3$.
Veamos que para $\widetilde{u}^k$, valen las condiciones del teorema de Weyl, es decir,

- $\widetilde{u}^k \in D(M)$.
- $\widetilde{u}^k$ tiende débilmente a cero, si k tiende a infinito.
- $||(M - \lambda_0 I)\widetilde{u}^k||_{(L_2(\Omega))^5}$ tiende a cero, si k tiende a infinito.
- $||\widetilde{u}^k||_{(L_2(\Omega))^5} = 1$.

Que $\widetilde{u}^k \in D(M)$ se sigue inmediatamente pues cada componente de $\widetilde{u}^k$ pertenece a $C_0^\infty(\Omega)$ a partir de un k suficientemente grande.
Veamos ahora la convergencia débil a cero de la sucesión $\widetilde{u}^k$. Para ello es suficiente ver la convergencia débil a cero de cada componente de $\widetilde{u}^k$. Ya que:

$$\begin{aligned}\left|\left|\eta_j e^{ik^3\langle x,\xi\rangle}\frac{i}{k^3\xi_j}\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_j}\right|\right|_{L_2(\Omega)} &= \frac{|\eta_j|}{k^3|\xi_j|}\left|\left|\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_j}\right|\right|_{L_2(\Omega)} \\ &= \frac{|\eta_j|C_j^1}{|\xi_j|k^2} \qquad \text{para } k \text{ suficientemente grande,}\end{aligned}$$

entonces, en la demostración de la convergencia débil a cero de las funciones

$$u_j^k(x) = \eta_j e^{ik^3\langle x,\xi\rangle}\left(\varphi_k + \frac{i}{k^3\xi_j}\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_j}\right),$$

es suficiente verificar la convergencia débil a cero de las funciones $e^{ik^3\langle x,\xi\rangle}\varphi_k$, en efecto:
Sea $f(x) \in L_2(\Omega)$, como $\mathbb{C}_0^\infty(\Omega)$ es denso en $L_2(\Omega)$, existe $g(x) \in \mathbb{C}_0^\infty(\Omega)$ tal que

$$||f(x) - g(x)||_{L_2(\Omega)} < \epsilon, \tag{2.9}$$

por otro lado,

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega e^{ik^3\langle x,\xi\rangle}\varphi_k(x)f(x)dx\right| &\le \left|\int_\Omega e^{ik^3\langle x,\xi\rangle}\varphi_k(x)(f(x)-g(x))dx\right| + \left|\int_\Omega e^{ik^3\langle x,\xi\rangle}\varphi_k(x)g(x)dx\right| \\ &\le \left(\int_\Omega \varphi_k^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega (f(x)-g(x))^2dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &+ \left|\int_\Omega e^{ik^3\langle x,\xi\rangle}\varphi_k(x)g(x)dx\right|\end{aligned}$$

usando (2.6) y (2.9), el primer sumando en la última desigualdad tiende a cero si k tiende a infinito. Para ver que el segundo sumando en la última desigualdad tiende a cero si k tiende a infinito, consideremos $h(x) := \varphi_k(x)g(x)$, es claro que $h(x) \in \mathbb{C}_0^\infty(\Omega)$, y:

$$\begin{aligned}
\left| \int\limits_\Omega e^{ik^3\langle x,\xi\rangle} h(x)dx \right| &= \left| -\int\limits_\Omega \frac{1}{ik^3\xi_j} e^{ik^3\langle x,\xi\rangle} \frac{\partial h}{\partial x_j} dx \right| \\
&\leq \frac{1}{k^3|\xi_j|} \left(\int\limits_\Omega e^{2ik^3\langle x,\xi\rangle} dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_\Omega \left(\frac{\partial h}{\partial x_j} \right)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{C}{k^3|\xi_j|}, \qquad C > 0,
\end{aligned}$$

de aquí se deduce que $\int\limits_\Omega e^{ik^3\langle x,\xi\rangle} h(x)dx$ tiende a cero si k tiende a infinito, de donde la sucesión $e^{ik^3\langle x,\xi\rangle}\varphi_k$ tiende débilmente a cero si k tiende a infinito.
La convergencia débil a cero de las funciones $r^k(x)$ se sigue inmediatamente de la convergencia débil hacia cero de las funciones $e^{ik^3\langle x,\xi\rangle}\varphi_k$.
Como,

$$||q^k(x)||_{L_2(\Omega)} = \frac{1}{k^3} \tag{2.10}$$

entonces q^k converge a 0 en el sentido de la norma, por tanto q^k converge débilmente a cero cuando k tiende a infinito. De esta forma hemos terminado la convergencia débil hacia cero de la sucesión $\widetilde{u}^k(x)$.
Ahora veamos la convergencia a cero de la sucesión $(M - \lambda_0 I)\widetilde{u}^k$.
Sea $\widetilde{f}^k = (f_1^k, f_2^k, f_3^k, f_4^k, f_5^k)$, donde $\widetilde{f}^k = (M - \lambda_0 I)\widetilde{u}^k$. Como antes, basta ver que:

$$\lim_{k\to\infty} ||f_i^k||_{L_2(\Omega)} = 0, \qquad i = 1, 2, 3, 4, 5.$$

Entonces tenemos:

$$\begin{aligned}
f_1^k(x) &= -\lambda_0 u_1^k(x) + \frac{\partial}{\partial x_1}(q^k(x)) \\
&= (-\lambda_0\eta_1 + \xi_1)\varphi_k e^{ik^3\langle x,\xi\rangle} - ik^{-3}(\lambda_0\eta_1\xi_1^{-1} + 1)e^{ik^3\langle x,\xi\rangle}\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_1} \\
&= -ik^{-3}(\lambda_0\eta_1\xi_1^{-1} + 1)e^{ik^3\langle x,\xi\rangle}\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_1}
\end{aligned}$$

donde la última igualdad fue obtenida de (2.3), con $-\lambda_0\eta_1 + \xi_1 = 0$. Por tanto,

$$||f_1^k||_{L_2(\Omega)} \leq \alpha\frac{1}{k^3} \left|\left| \frac{\partial\varphi_k}{\partial x_1} \right|\right|_{L_2(\Omega)}, \qquad \alpha > 0$$

usando (2.6), llegamos a que $||f_1^k||_{L_2(\Omega)}$ tiende a cero, si k tiende a infinito.

Análogamente,

$$\begin{aligned}
f_2^k(x) &= -\lambda_0 u_2^k(x) + \frac{\partial}{\partial x_2}(q^k(x)) \\
&= (-\lambda_0\eta_2 + \xi_2)\varphi_k e^{ik^3\langle x,\xi\rangle} - ik^{-3}(\lambda_0\eta_2\xi_2^{-1} + 1)e^{ik^3\langle x,\xi\rangle}\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_2} \\
&= -ik^{-3}(\lambda_0\eta_2\xi_2^{-1} + 1)e^{ik^3\langle x,\xi\rangle}\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_2}
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$||f_2^k||_{L_2(\Omega)} \leq \alpha\frac{1}{k^3}\left|\left|\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_2}\right|\right|_{L_2(\Omega)}, \qquad \alpha > 0$$

y de (2.6), obtenemos que $||f_2^k||_{L_2(\Omega)}$ tiende a cero, si k tiende a infinito.
De manera similar,

$$\begin{aligned}
f_3^k(x) &= -\lambda_0 u_3^k(x) + Nr^k(x) + \frac{\partial}{\partial x_3}(q^k(x)) \\
&= (-\lambda_0\eta_3 + N\eta_4 + \xi_3)\varphi_k e^{ik^3\langle x,\xi\rangle} - ik^{-3}(\lambda_0\eta_3\xi_3^{-1} + 1)e^{ik^3\langle x,\xi\rangle}\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_3} \\
&= -ik^{-3}(\lambda_0\eta_3\xi_3^{-1} + 1)e^{ik^3\langle x,\xi\rangle}\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_3}
\end{aligned}$$

de donde se sigue que

$$||f_3^k||_{L_2(\Omega)} \leq \alpha\frac{1}{k^3}\left|\left|\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_3}\right|\right|_{L_2(\Omega)}, \qquad \alpha > 0$$

esto muestra que $||f_3^k||_{L_2(\Omega)}$ tiende a cero, si k tiende a infinito.
Del mismo modo,

$$\begin{aligned}
f_4^k(x) &= -Nu_3^k(x) - \lambda_0 r^k(x) \\
&= (-N\eta_3 - \lambda_0\eta_4)\varphi_k e^{ik^3\langle x,\xi\rangle} - N\eta_3 ik^{-3}\xi_3^{-1}e^{ik^3\langle x,\xi\rangle}\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_3} \\
&= -N\eta_3 ik^{-3}\xi_3^{-1}e^{ik^3\langle x,\xi\rangle}\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_3}
\end{aligned}$$

la última igualdad se sigue naturalmente de (2.3), pues $-N\eta_3 - \lambda_0\eta_4 = 0$. Por tanto

$$||f_4^k||_{L_2(\Omega)} = \alpha\frac{1}{k^3}\left|\left|\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_3}\right|\right|_{L_2(\Omega)}, \qquad \alpha > 0$$

y $||f_4^k||_{L_2(\Omega)}$ tiende a cero, si k tiende a infinito.
Por último de (2.3) tenemos que $\langle\xi,\eta\rangle = 0$ en $\mathbb{R}^3$, lo cual implica que:

$$\begin{aligned}
f_5^k(x) &= div(\vec{u}^k(x)) - \lambda_0 q^k(x) \\
&= ik^{-3}e^{ik^3\langle x,\xi\rangle}\left(\lambda_0\varphi_k + \sum_{j=1}^{3}\eta_j\xi_j^{-1}\frac{\partial^2\varphi_k}{\partial x_j^2}\right)
\end{aligned}$$

utilizando lo anterior y (2.6) podemos concluir que:

$$||f_5^k||_{L_2(\Omega)} \leq \alpha\frac{1}{k^3} + \beta\frac{1}{k}, \qquad \alpha > 0, \quad \beta > 0$$

para un k suficientemente grande, por tanto $||f_5^k||_{L_2(\Omega)}$ tiende a cero, si k tiende a infinito.
La condición $||\widetilde{u}^k|| = 1$, realmente es equivalente a que las normas de la sucesión de Weyl estén separadas de cero, y claramente es suficiente ver que al menos una de las coordenadas del campo $\widetilde{u}^k$ esté separada de cero.
Consideremos la cuarta componente de $\widetilde{u}^k$, entonces, utilizando (2.8) y (2.6) se sigue que:

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} ||r^k(x)||^2_{L_2(\Omega)} &= \lim_{k\to\infty} ||\eta_4 e^{ik^3\langle x,\xi\rangle}\varphi_k||^2_{L_2(\Omega)} \\ &= \lim_{k\to\infty} |\eta_4|^2||\varphi_k||^2_{L_2(\Omega)} \\ &= |\eta_4|^2\end{aligned}$$

de aquí se deduce que si k tiende a infinito,

$$||\widetilde{u}^k||_{(L_2(\Omega))^5} \geq ||r^k(x)||_{L_2(\Omega)} = |\eta_4| \neq 0$$

y así hemos probado las condiciones del teorema de Weyl.
Como el espectro esencial es un conjunto cerrado entonces los puntos $\lambda = 0$, $\lambda = \pm iN$, están en el espectro esencial. Ahora mostraremos que los puntos $\lambda = 0$, $\lambda = \pm iN$ son valores propios de multiplicidad infinita.
Para $\lambda = 0$, el sistema $(M - \lambda I)\widetilde{u}$ toma la forma:

$$\begin{aligned}\frac{\partial q}{\partial x_1} &= 0 \\ \frac{\partial q}{\partial x_2} &= 0 \\ Nu_4 + \frac{\partial q}{\partial x_3} &= 0 \\ -Nu_3 &= 0 \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} &= 0.\end{aligned}$$

es fácil ver que las funciones del tipo $(u_1(x_2,x_3), u_2(x_1,x_3), 0, 0, 0)$, $u_1,\ u_2 \in C_0^\infty$, satisfacen el último sistema.

Para $\lambda = \pm iN$, el sistema $(M-\lambda I)\widetilde{u}$, se transforma en:

$$\begin{aligned} \mp iNu_1 + \frac{\partial q}{\partial x_1} &= 0 \\ \mp iNu_2 + \frac{\partial q}{\partial x_2} &= 0 \\ \mp iNu_3 + Nu_4 + \frac{\partial q}{\partial x_3} &= 0 \\ -Nu_3 \mp iNu_4 &= 0 \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \mp iNq &= 0. \end{aligned}$$

el cual es equivalente a

$$\begin{aligned} \mp iNu_1 + \frac{\partial q}{\partial x_1} &= 0 \\ \mp iNu_2 + \frac{\partial q}{\partial x_2} &= 0 \\ \frac{\partial q}{\partial x_3} &= 0 \\ \pm iu_3 &= u_4 \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \mp iNq &= 0. \end{aligned} \tag{2.11}$$

evidentemente, cualquier función del tipo $(0,0,\varphi(x_1,x_2),\pm i\varphi(x_1,x_2),0)$, $\varphi \in C_0^\infty$, satisface (2.11). $\square$

Hasta el momento hemos mostrado que el espectro esencial de M contiene el intervalo $[-iN, iN]$, nos preguntamos ahora: ¿es posible que existan puntos del espectro esencial que estén en el eje imaginario pero afuera del intervalo $[-iN, iN]$?

La respuesta a esta pregunta quedará totalmente contestada debido a que en [20] fue demostrado que: $\sigma_{ess}M = Q \bigcup S$, donde,

$$Q = \{\lambda \in \mathbb{C} : L = M - \lambda I \text{ no es Douglis-Nirenberg elíptico}\}$$

y,

$$S = \left\{ \begin{array}{c} \lambda \in \mathbb{C}\backslash Q : \text{la condición de frontera del operador} \quad (M-\lambda I) \\ \text{no satisface la condición de Lopatinsky} \end{array} \right\}$$

Nosotros demostramos en (1.1.1), que $Q = [-iN, iN]$.

Mostremos ahora que si λ es imaginario puro y $\lambda \notin [-iN, iN]$, la condición de frontera $\vec{u}\cdot\vec{n}|_{\partial\Omega} = 0$ sobre $M - \lambda I$ satisface la condición de Lopatinsky, de donde se deduce que S es vacío, y con ello, $\sigma_{ess}M = [-iN, iN]$.

Recordemos que la condición de Lopatinsky, consiste en la independencia de las filas de la matriz

$$\overset{\circ}{G}(x,\xi',\tau)\widehat{L}^{\circ}(x,\xi',\tau)$$

con respecto al modulo $M^+(x,\xi',\tau)$, para $||\xi'|| \neq 0$.
Aquí $x = (x_1, x_2, x_3)$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, $\xi' = (\xi_1, \xi_2)$, $\widehat{L}^\circ(x,\xi)$ es la matriz adjunta de $L^\circ(x,\xi)$, el cual es el símbolo principal del operador L, $\overset{\circ}{G}(x,\xi)$ es la parte principal de la matriz $G(x,D)$ que especifica las condiciones de frontera, $M^+(x,\xi',\tau) = \prod(\tau - \tau_j(x,\xi'))$, $\tau_j(x,\xi')$ son las raíces de la ecuación $det(L^\circ(x,\xi',\tau)) = 0$ con parte imaginaria positiva.
En nuestro caso, como $\lambda \notin [-iN, iN]$ entonces podemos introducir el parámetro $a \neq 0$, con

$$a^2 = \frac{\lambda^2 + N^2}{\lambda^2},$$

de (1.10), la ecuación característica $det(L^0(\xi)) = 0$, toma la forma

$$a^2|\xi'|^2 + \xi_3^2 = 0$$

la cual tiene una raíz $\tau = ia|\xi'|$ en la parte superior del plano complejo $\mathbb{C}$. Escojamos coordenadas locales tales que $\xi_1 = 1$, $\xi_2 = 0$. Entonces $M^+(\xi',\tau) = \tau - ia$, y

$$L^\circ(\tau) = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & N & \tau \\ 0 & 0 & -N & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & \tau & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

entonces,

$$\widehat{L}^\circ(\tau) = \begin{pmatrix} -\lambda^2\tau^2 & 0 & \lambda^2\tau & -\lambda N\tau & \lambda(\lambda^2+N^2) \\ 0 & -\lambda^2(1+\tau^2) - N^2 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda^2\tau & 0 & -\lambda^2 & \lambda N & \lambda^2\tau \\ \lambda N\tau & 0 & -N\lambda & -\lambda^2(1+\tau^2) & \lambda^2 N\tau \\ \lambda(\lambda^2+N^2) & 0 & \lambda^3\tau & -\lambda^2 N\tau & \lambda^2(\lambda^2+N^2) \end{pmatrix}$$

por otro lado, la condición de frontera puede ser escrita como $G\vec{u}|_{\partial\Omega} = 0$, donde $G = (n_1, n_2, n_3, 0, 0)$, de donde $G = \overset{\circ}{G}$, es un vector fila constante. Como $\widehat{L}^\circ(\tau)$ es una matriz 5×5, se sigue que $\overset{\circ}{G}\,\widehat{L}^\circ(\tau)$ es una matriz 1×5, y por tanto las condiciones de complementaridad son satisfechas, con lo que se prueba que S es vacío, y con ello el espectro esencial del operador M es sin duda el intervalo del eje imaginario $[-iN, iN]$.

Capítulo 3

Espectro del operador M en $\mathbb{R}^3$

En este capítulo consideraremos el sistema (1.8) en $\Omega = \mathbb{R}^3$. Para el problema de vibraciones normales nosotros tenemos el sistema

$$(M^* - \lambda I)\widetilde{u} = 0,$$

donde la matriz M^* es la misma matriz M, y el dominio de M^* está definido como sigue:

$$D(M^*) = \left\{ \begin{array}{c} \vec{u} \in (L_2(\mathbb{R}^3))^3 | \exists f \in L_2(\mathbb{R}^3) : \\ \left\langle \vec{u}, \bigtriangledown\varphi \right\rangle = \left\langle f, \varphi \right\rangle \forall \varphi \in W_2^2(\mathbb{R}^3) \end{array} \right\} \times W_2^2(\mathbb{R}^3) \times W_2^2(\mathbb{R}^3).$$

Teorema 3.0.4. *El espectro esencial del operador M^* es todo el eje imaginario. Además, los puntos λ tales que $\lambda \notin [-iN, iN]$, pertenecen al espectro continuo del operador M^*.*

Demostración. Sea $\lambda \in [-iN, iN]$. Notemos primero que, debido al teorema de inclusión $W_2^2(\mathbb{R}^3) \to C(\mathbb{R}^3)$, para todo $\varphi \in W_2^2(\mathbb{R}^3)$ nosotros tenemos la propiedad: $\lim\limits_{|x| \to \infty} \varphi(x) = 0$. Entonces, para todo φ_1, $\varphi_2 \in W_2^2(\mathbb{R}^3)$ la integración por partes:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j} \varphi_2 dx = -\int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_j} \varphi_1 dx$$

es válida. Por tanto haciendo un calculo análogo al del lema (2.0.2), obtenemos la antiautoadjuntez del operador M^*, y usando la misma sucesión de Weyl como en el teorema (2.0.3), nosotros tenemos que $\lambda \in [-iN, iN]$ pertenece al espectro esencial.

Ahora, el sistema $L\widetilde{u} = 0$ en (1.8), escrito explícitamente es:

$$\begin{cases} -\lambda u_1 + \dfrac{\partial u_5}{\partial x_1} = 0 \\ -\lambda u_2 + \dfrac{\partial u_5}{\partial x_2} = 0 \\ -\lambda u_3 + N u_4 + \dfrac{\partial u_5}{\partial x_3} = 0 \\ -N u_3 - \lambda u_4 = 0 \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} + \dfrac{\partial u_3}{\partial x_3} - \lambda u_5 = 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

el cual es equivalente a la ecuación escalar:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + N^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} - \lambda^2 u = 0; \tag{3.2}$$

en efecto:
De las tres primeras ecuaciones en (3.1), tenemos que:

$$\begin{aligned} -\lambda\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 u_5}{\partial x_1^2} &= 0 \\ -\lambda\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial^2 u_5}{\partial x_2^2} &= 0 \\ -\lambda\frac{\partial u_3}{\partial x_3} + N\frac{\partial u_4}{\partial x_3} + \frac{\partial^2 u_5}{\partial x_3^2} &= 0 \end{aligned} \tag{3.3}$$

si sumamos estas ecuaciones obtenemos:

$$-\lambda\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right) + \Delta u_5 + N\frac{\partial u_4}{\partial x_3} = 0 \tag{3.4}$$

y utilizando la quinta ecuación en (3.1), entonces (3.4) se transforma en:

$$-\lambda^2 u_5 + \Delta u_5 + N\frac{\partial u_4}{\partial x_3} = 0 \tag{3.5}$$

Ahora, de la cuarta ecuación en (3.1) y de la tercera ecuación en (3.3), tenemos,

$$\frac{\partial u_4}{\partial x_3} = \frac{-N}{\lambda}\frac{\partial u_3}{\partial x_3}, \qquad N\frac{\partial u_4}{\partial x_3} = -\frac{\partial^2 u_5}{\partial x_3^2} + \lambda\frac{\partial u_3}{\partial x_3}, \tag{3.6}$$

combinando estas dos ecuaciones, se observa que,

$$\frac{-N^2}{\lambda}\frac{\partial u_3}{\partial x_3} = -\frac{\partial^2 u_5}{\partial x_3^2} + \lambda\frac{\partial u_3}{\partial x_3}$$

de donde,

$$\frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \frac{\lambda}{\lambda^2 + N^2} \frac{\partial^2 u_5}{\partial x_3^2} \tag{3.7}$$

igualando (3.7) con la primera ecuación en (3.6) se deduce:

$$\frac{\partial u_4}{\partial x_3} = \frac{-N}{\lambda^2 + N^2} \frac{\partial^2 u_5}{\partial x_3^2} \tag{3.8}$$

y reemplazando en (3.5),

$$\frac{\partial^2 u_5}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_5}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_5}{\partial x_3^2} - \frac{N^2}{\lambda^2 + N^2} \frac{\partial^2 u_5}{\partial x_3^2} - \lambda^2 u_5 = 0$$

por tanto,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + N^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} - \lambda^2 u = 0 \tag{3.9}$$

con lo que se demuestra la equivalencia entre (3.1) y (3.2).
Esta última ecuación es elíptica si $\lambda \in [-i\infty, -iN] \bigcup [iN, i\infty]$, de hecho el símbolo principal asociado a (3.9) es,

$$L^0(\xi) = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + N^2} \xi_3^2$$

la única forma de que $L^0(\xi) = 0$ con $\xi \neq 0$ es que $\lambda \in [-iN, iN]$. En efecto: $L^\circ(\xi) = 0$ si

$$(\lambda^2 + N^2)|\xi'|^2 + \lambda^2 \xi_3^2 = 0, \qquad |\xi'|^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2.$$

el resultado se sigue del lema (1.1.1).
Cambiando la escala en x_3, podemos escribir la relación (3.9), como:

$$\Delta u - \lambda^2 u = 0.$$

De ([19],[22]) nosotros tenemos que el espectro continuo del operador de Laplace actuando sobre $W_2^2(\mathbb{R}^3)$, está compuesto de los puntos $\lambda^2 \in (-\infty, 0]$. Esto es, los puntos $\lambda \in (-i\infty, i\infty)$ forman el espectro continuo del operador diferencial en (3.9) cuando esta es equivalente al operador de Laplace, en otras palabras, cuando $\lambda \in [-i\infty, -iN] \bigcup [iN, i\infty]$.
Finalmente, nosotros tenemos que los puntos $\lambda \in [-iN, iN]$ pertenecen al espectro esencial de M^*, y los puntos $\lambda \in [-i\infty, -iN] \bigcup [iN, i\infty]$ pertenecen al espectro continuo de M^*, por tanto el teorema ha sido probado. □

Bibliografía

[1] A. Brekhovskih and V. Goncharov. *Introduction to the mechanics of continuous media*, Nauka, Moscow, (1982) (in Russian).

[2] S. Szekers-Zenkovic, *Construction of the fundamental solution for the operator of inner waves*, Dokl. Akad. Nauk 246 (1979), 286-288 (in Russian).

[3] A. Calderón and A. Zygmund, *On singular integrals*, Amer.J.Math, 78 (1956), 289-309.

[4] A. Giniatoulline, *On the essential spectrum of the operators generated by PDE systems of stratified fluids*, Internat. J.Computer Research, 12 (2003), 63-72.

[5] A. Giniatoulline and C.Rincón, *On the spectrum of normal vibrations for stratified fluids*, Computational Fluid Dynamics J. 13 (2004), 273-281.

[6] S. Sobolev, *On a new problem of Mathematical Physics*, Izv.Akad.Nauk,Ser,Mat, 18 (1954), 7-50 (in Russian).

[7] V. Maslennikova, *About asymptotic decay of the solutions of Sobolev viscous system*, Mat.Sbornik 134 (1973), 49-60.

[8] V. Maslennikova and A. Giniatoulline, *On the intrusion problem in a viscous stratified fluid for three space variables*, Math.Notes, 51, (1992), 374-379.

[9] A. Giniatoulline, *On the uniqueness of solutions in the class of increasing functions for a system describing the dynamics of a viscous weakly stratified fluid in three dimensional space*, Rev.Colombiana Mat., 31, (1997), 71-76.

[10] E. T. Copson, *Asymptotic Expansions*, CUP (2004), 120 pag.

[11] A. Kolmogorov and S. Fomin, *Eléments de la théorie des fonctions et de l´analyse fonctionelle*, MIR (1977).

[12] S.Gabov and A.Sveshnikov, *Dynamic problems for the stratified fluids*, Nauka, Moscow, (1986), 288p.(in Russian).

[13] V. Maslennikova, A. Giniatoulline, *Spectral properties of operators for systems of hydrodynamics*, Siberian Math.J., 29 (1988), 812-824.

[14] M. Bogovskii, *Decomposition of L_2*, Dokl.Akad.Nauk, 286 (1986), 781-786 (in Russian).

[15] T. Kato *Perturbation theory for linear operators*, Springer, Berlin (1966).

[16] F. Riesz, B.Sz.-Nagy, *Functional analysis*, Fr. Ungar, N.Y., (1972).

[17] A. Giniatoulline (1996): *Sobre los sistemas elípticos en el sentido de Petrovski y en el sentido de Douglis-Nirenberg.* Lect. Mat., 17 (1996), 37-47.

[18] A. Giniatoulline, *Essential spectrum of the operators generated by PDE systems of stratified fluids and L_p-estimates for the solutions*, Intern. J. Comput. Science and appl., 2 (2005), 38-56.

[19] A. Giniatoulline, *An introduction to spectral theory*, R.T.Edwards, Philadelphia (2005), 200 pages.

[20] G. Grubb and G. Geymonat, *The essential spectrum of elliptic systems of mixed order*,Math. Ann. 277, 257-276 (1977).

[21] S. Agmon and A. Douglis and L. Nirenberg, *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations*, Comm. Pure and Appl. Mathematics, 17 (1964), 35-92.

[22] G. Talenti, *Spectrum of the Laplace operator acting in $L_p(\mathbb{R}^n)$*, Symposia Mathematica Instituto Nazionale di Alta Mathematica. 7 (1971).