

**Diseño de un modelo matemático para el problema de programación
del tamaño de lote económico considerando órdenes pendientes,
ventas perdidas y deterioro para múltiples productos**

Trabajo de Tesis
presentado al
Departamento de Ingeniería Industrial

por

Adriana María Rodríguez Rojas

Asesor: José Fidel Torres, Ph.D.

Para optar al título de
Magíster en Ingeniería Industrial

Departamento de Ingeniería Industrial
Universidad de los Andes
Diciembre de 2006

**Diseño de un modelo matemático para el problema de programación
del tamaño de lote económico considerando órdenes pendientes,
ventas perdidas y deterioro para múltiples productos**

Aprobado por:

José Fidel Torres, P.h.D., Asesor

Germán Riaño, P.h.D.

Ignacio Pérez, P.h.D

Fecha de Aprobación _____

A Rodrigo Cáliz por ser la luz en mi camino

Reconocimientos

A mi asesor Fidel Torres, por su motivación, orientación y aportes durante el desarrollo de este trabajo.

A Rodrigo por su constante apoyo, comprensión y paciencia.

A Eslendy y Oscar por darme ánimos y apoyarme todos los días.

A todos aquellos que de una forma u otra estuvieron apoyándome.

Tabla de Contenido

<i>Dedicatoria</i>	<i>I</i>
<i>Reconocimientos</i>	<i>II</i>
<i>Tabla de Contenido</i>	<i>III</i>
<i>Lista de Figuras</i>	<i>V</i>
<i>Lista de Tablas</i>	<i>VI</i>
<i>INTRODUCCIÓN</i>	<i>VII</i>
<i>I. CONSIDERACIONES GENERALES</i>	<i>1</i>
1. OBJETIVOS.....	1
1.1. Objetivo General	1
1.2. Objetivos Específicos	1
<i>II. MARCO TEÓRICO</i>	<i>3</i>
2.1. Problema de programación del tamaño del lote económico.....	3
2.2. Aproximaciones para solucionar el ELSP	5
2.2.1. Aproximación de Ciclo Común (CC).....	5
2.2.2. Aproximación del Periodo Básico (BP)	6
2.2.3. Aproximación del Periodo Básico Extendido (EBP)	7
2.3. Factor de deterioro en modelos de inventario	8
2.4. Backorders parciales en modelos de inventario	9
2.5. Algoritmos Genéticos	10
2.5.1. Características de los Algoritmos Genéticos	11
2.5.2. Elementos para implementar un AG	12
2.5.3. Esquema general de un AG	14
2.6. Diseño Factorial 2^k	14
<i>III. DESCRIPCIÓN Y MODELADO DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN</i>	<i>20</i>
3.1. Descripción.....	20

3.2. Dinámica del inventario	22
3.3. Construcción de la función objetivo.....	24
3.4. Formulación del modelo.....	26
3.5. Algoritmo genético propuesto para solucionar el problema de investigación .	27
<i>IV. COTA INFERIOR Y SUPERIOR PARA EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN</i>	<i>28</i>
4.1 Cota Inferior	28
4.2 Cota Superior.....	30
<i>V. RESULTADOS NUMÉRICOS</i>	<i>33</i>
5.1. Descripción de los datos.....	33
5.2. Diseño de experimentos	35
5.2.1. Resultados Diseño de Experimentos.....	36
5.3. Resultados obtenidos con el AG	47
<i>VI. CONCLUSIONES Y FUTURAS INVESTIGACIONES</i>	<i>51</i>
<i>Apéndice A. Derivación de la ecuación (7)</i>	<i>52</i>
<i>REFERENCIAS</i>	<i>53</i>

Lista de Figuras

1. Procedimiento General de un AG	14
2. Dinámica del inventario para el producto i.	22
3. Histograma de los Residuos	37
4. Gráfica de probabilidad Normal de los Residuales	37
5. Resultados Prueba de Bartlett y de Levene	38
6. Resultados Prueba de Kolmogorv-Smirnov	39
7. Resultados prueba de Kolmogorv-Smirnov (Ln)	40

Lista de Tablas

1. Parámetros de la curva de operación característica para el diseño factorial de dos factores, modelo con efectos fijos.	16
2. Datos del problema de Bomberger	34
3. Datos adicionales del problema.....	34
4. Variaciones en la Fracción de demanda que queda pendiente	34
5. Kruskal-Wallis, Instancia 1.	41
6. Kruskal-Wallis, Factor 1 (Instancia 1)	42
7. Kruskal-Wallis, Factor 2 (Instancia 1)	42
8. Kruskal-Wallis, Instancia 2	43
9. Kruskal-Wallis, Factor 1 (Instancia2)	44
10. Kruskal -Wallis, Factor 2 (Instancia 2)	44
11. Kruskal-Wallis, Instancia 3.	45
12. Kruskal-Wallis, Factor 1 (Instancia 3)	46
13. Kruskal-Wallis, Factor 2 (Instancia 3)	46
14. Comparación de las cotas IS, CC vs. AG.....	49
15. Comparación de las cotas IS, CC vs. AG (15 utilizaciones).....	49
16. Comparación de las cotas IS, CC vs. AG (Variación α_j)	50

INTRODUCCIÓN

El problema de programación del tamaño de lote económico, ha atraído la atención de investigadores en los últimos 50 años. El problema consiste en fabricar diferentes productos en una sola máquina, permitiendo producir un solo producto a la vez. El objetivo es encontrar el patrón de programación del ciclo de producción que minimice el costo total de inventario.

El problema tiene complejidad NP-hard, (Hsu, 1983). Para resolver algunas instancias del problema, varios investigadores han desarrollado aproximaciones que permiten obtener buenas soluciones factibles del problema.

La formulación y solución del problema de programación del tamaño de lote económico, por sus siglas en inglés de aquí en adelante, ELSP, se torna más compleja cuando se tiene en cuenta el deterioro de los productos con el paso del tiempo. Dado que existen gran cantidad de industrias en donde los productos que se almacenan pueden deteriorarse, resolver dicho problema es de gran relevancia no solo a nivel académico sino también práctico. Muchos de los modelos de inventarios asumen que los productos pueden ser almacenados indefinidamente. En la realidad la mayoría de los productos se deterioran o empiezan a ser obsoletos con el tiempo.

Por otra parte, el ELSP no considera escasez en el modelo original; considerar la escasez dentro del modelo permitiría tener en consideración un nuevo elemento de decisión relacionado con la viabilidad económica de permitir o no escasez, dados unos costos asociados. Adicionalmente, la mayoría de modelos consideran que se debe producir lo suficiente para satisfacer la demanda, pero no tienen en cuenta que puede ser más costoso producir y mantener el inventario que asumir el costo por escasez, dado que es posible que los costos por mantener el inventario y por deterioro de los productos almacenados pueden ser mayores que los costos por faltantes.

El problema que se aborda en este trabajo de tesis consiste en formular un modelo matemático, para el ELSP considerando órdenes pendientes, ventas perdidas y deterioro en los productos, de tal forma que se minimicen los costos de inventario. Este problema no ha sido tratado antes en la literatura, por lo que se considera un problema nuevo. Dada la complejidad del problema, se eligió la técnica metaheurística de Algoritmos Genéticos, ya que esta técnica es abordada en trabajos similares; además a lo largo de la investigación realizada se encontró que se obtenían muy buenos resultados con ésta.

Es importante mencionar que los modelos que se encuentran en la literatura que consideran backorders parciales y deterioro se trabajan para un solo producto. Una investigación enfocada en resolver el ELSP considerando deterioro en el inventario y backorders parciales no ha sido hecha previamente, por lo que es atractivo el tema y fue escogido como tema de investigación.

En el primer capítulo de este documento se presentan los objetivos y el alcance de la investigación. El segundo capítulo, presenta las bases teóricas para los elementos del problema de investigación, el ELSP, el deterioro y la escasez en los modelos de inventario. También se presenta una breve descripción teórica sobre algoritmos genéticos y diseño factorial 2^k . En el tercer capítulo, se realiza la descripción del problema de investigación y del algoritmo genético propuesto y la modelación del mismo. En el cuarto capítulo, dado que no existen cotas para el problema, se desarrollan la cota superior e inferior. En el quinto capítulo, se presenta la descripción de los datos utilizados para validar el modelo, un diseño de experimentos para evaluar la influencia de los parámetros de entrada, del algoritmo genético, sobre el valor de la función objetivo y la comparación de los resultados obtenidos con el algoritmo genético y las cotas obtenidas en el cuarto capítulo. Finalmente, en el sexto capítulo, se presentan las conclusiones y recomendaciones para futuras investigaciones.

Capítulo I

CONSIDERACIONES GENERALES

1. OBJETIVOS

1.1. Objetivo General

Diseñar un modelo para el problema de programación del tamaño de lote económico considerando órdenes pendientes y ventas perdidas para productos que se deterioran.

1.2. Objetivos Específicos

- Modelar el problema de forma que se minimicen los costos de inventario.
- Investigar sobre las técnicas de solución existentes y evaluar su posible aplicación al modelo.
- Calcular cotas inferior y superior para evaluar la calidad de la solución obtenida.
- Proponer una estrategia de solución al problema, con la que se obtengan buenos resultados.

1.3. Alcance del proyecto

El proyecto de investigación que se quiere desarrollar pretende formular un modelo matemático para el problema de programación del tamaño de lote económico para productos que se deterioran y que permita considerar escasez.

Dada la naturaleza del problema se procederá a tratarlo con la metaheurística de algoritmos genéticos, y a que en las investigaciones de Chatfield (1993), Khouja et al. (1998), Torres y Rojas (2006), entre otras, éste método ha arrojado buenos resultados. Por lo tanto el alcance de esta investigación está limitado al diseño del modelo de

inventario que minimice los costos y a la implementación de la técnica de solución más adecuada para resolverlo.

Capítulo II

MARCO TEÓRICO

En este capítulo, se presenta el marco teórico del problema de programación del tamaño de lote económico, los sistemas de inventarios que almacenan productos susceptibles a deterioro y los modelos que permiten órdenes pendientes parciales. La expresión órdenes pendientes, de aquí en adelante será denotada por el término en inglés backorders. Adicionalmente, se hace una corta descripción sobre algoritmos genéticos y diseño factorial 2^2 .

2.1. Problema de programación del tamaño del lote económico

El Problema de programación del tamaño del lote económico, consiste en programar la producción de diferentes productos en una sola máquina, permitiéndose producir un solo producto a la vez. El objetivo es determinar el ciclo de producción para todos los n productos, utilizando un enfoque de programación de producción repetitiva (cíclica), que minimice el costo total de inventario.

Los supuestos que el problema tiene en cuenta son los siguientes:

- i. La máquina procesa un producto a la vez.
- ii. La tasa de demanda para cada producto es determinística y constante.
- iii. La tasa de producción para cada producto es determinística y constante.
- iv. La tasa de producción es mayor que la tasa de demanda
- v. No se permite escasez en el inventario.
- vi. Los costos de preparación y los tiempos son independientes de la secuencia de producción.
- vii. Los costos de inventario son proporcionales al nivel de inventario.

Los costos que se consideran para cada producto por unidad de tiempo son el costo de mantenimiento de inventario y el costo de preparación.

Los costos totales para el producto i , están determinados por:

$$C_i = \frac{A_i}{T_i} + h_i \left(\frac{(p_i - d_i)d_i}{2p_i} \right) T_i.$$

El modelo que se utiliza para este problema es el siguiente:

$$\text{Min} \sum_{i=1}^n \left(\frac{A_i}{T_i} + h_i \left(\frac{(p_i - d_i)d_i}{2p_i} \right) T_i \right).$$

Sujeto a:

$$\sum_{i=1}^n \left[\tau_i + \left(\frac{d_i}{p_i} \right) T_i \right] \leq T.$$

La restricción asegura que el tiempo utilizado en la preparación y en la producción no excede el tiempo disponible.

Donde:

n = Número total de productos.

d_i = Tasa de demanda para el producto i .

p_i = Tasa de producción diaria del producto i

A_i = Costo fijo de preparación del lote del producto i .

h_i = Costo de mantener el inventario del producto i

C_i = Costo total del producto i .

τ_i = Tiempo de preparación en días para el producto i .

T_i = Tiempo de ciclo del i – ésimo producto.

Para resolver este problema se han desarrollado aproximaciones orientadas a garantizar la factibilidad de las soluciones ya que es difícil probar la factibilidad de la programación, por lo que se cataloga como un problema NP-hard; una demostración detallada de la complejidad del problema puede encontrarse en el trabajo propuesto por Hsu (1983). Varios autores han desarrollado diferentes aproximaciones y heurísticas para resolver el problema, entre los que se encuentran: Delporte y Thomas (1977), Krajewski y Ritszman (1987); Dobson (1987) y Roundy (1989) desarrollaron aproximaciones, con base en la formulación original hecha por Maxwell (1964), en donde se consideran tiempos de ciclo y tamaños de lote que pueden variar en el tiempo. Zipkin (1991) plantea una aproximación en donde se permite que los tamaños de lote varíen en las diferentes corridas de producción. Recientemente, Silver et al. (1998) realizaron una revisión sobre las investigaciones que se han hecho acerca del ELSP.

2.2. Aproximaciones para solucionar el ELSP

En la búsqueda de una solución al problema de programación del tamaño de lote económico, se han desarrollado diferentes aproximaciones que encuentran soluciones para la versión restringida del problema, entre las más conocidas se encuentran las aproximaciones del Ciclo Común, el Periodo Básico y el Periodo Básico Extendido. Elmaghraby (1978) cubre una importante investigación sobre las aproximaciones encontradas hasta 1978; Lopez y Kingsman (1991) y Kakish (1995) hacen una revisión sobre investigaciones más recientes.

2.2.1. Aproximación de Ciclo Común (CC)

La aproximación de Ciclo Común, de aquí en adelante denotado con las siglas en inglés (CC), atribuida a Hanssmann (1962), es una solución factible y proporciona una cota superior al problema; consiste determinar la longitud de un solo ciclo T para todos los productos, en donde se pueda producir cada producto una vez. Esta aproximación no tiene en cuenta la secuencia de las corridas de producción; la secuencia, así como la longitud del ciclo son constantes. La solución es factible si se

asegura que el tiempo total de producción sea menor que la longitud del ciclo T . El modelo que se utiliza para el problema original es el siguiente:

$$\text{Min} \sum_{i=1}^n \left(\frac{A_i}{T} + h_i \left(\frac{(p_i - d_i) d_i}{2p_i} \right) T \right).$$

Sujeto a:

$$\sum_{i=1}^n \left[\tau_i + \left(\frac{d_i}{p_i} \right) T_i \right] \leq T .$$

Donde:

$$T_i = T \quad \forall i, i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Esta aproximación ha sido tratada por Krone (1964) y Gupta (1992), quienes desarrollaron un modelo en donde se permite tener órdenes pendientes. Recientemente Gary et al (2005) hacen uso de esta aproximación y consideran en su modelo deterioro en los productos.

2.2.2. Aproximación del Periodo Básico (BP)

La aproximación del periodo básico, de aquí en adelante denotada con las siglas en inglés (BP), desarrollada por Bomberger (1966), consiste en permitir que cada producto tenga una longitud de ciclo diferente. El BP utiliza un solo periodo básico T , que es el intervalo de tiempo dedicado a la preparación de la máquina y a la producción de los productos. Se utiliza el tiempo de ciclo T_i de cada producto, que es un múltiplo entero de T , donde $T_i = k_i T$ y k_i es un multiplicador entero de T . Esta aproximación asegura una secuencia factible, pero se requiere que el periodo básico sea lo suficientemente largo para poder acomodar la producción de todos los productos y así eliminar conflictos de programación que se puedan generar; por esta razón se impone una restricción de factibilidad.

El modelo que se utiliza es el siguiente:

$$\text{Min} \sum_{i=1}^n \left(\frac{A_i}{Tk_i} + h_i \left(\frac{(p_i - d_i)d_i}{2p_i} \right) Tk_i \right).$$

Sujeto a:

$$\sum_{i=1}^n \left[\tau_i + \left(\frac{d_i}{p_i} \right) Tk_i \right] \leq T .$$

Esta aproximación ha sido utilizada por autores como Goyal (1973), Larrañeta y Onieva (1988), Grznar y Riggle (1997), entre otros. Chatfield (1993) y Khouja et al. (1998) utilizaron algoritmos genéticos para resolver el problema y obtuvieron mejores soluciones a las encontradas hasta el momento con otros métodos.

2.2.3. Aproximación del Periodo Básico Extendido (EBP)

La aproximación del Periodo Básico Extendido, de aquí en adelante denotada por las siglas en inglés (EBP), según Chatfield (s.f.) el EBP expande el BP, ya que se utilizan dos periodos básicos consecutivos T . Los productos son programados de acuerdo a las siguientes reglas:

- i. Si k_i es impar entonces el producto i puede ser programado en los dos periodos.
- ii. Si k_i es par entonces el producto i sólo puede programarse en un periodo, ya que se puede producir tanto en periodos pares como impares.

La factibilidad se determina si todos los productos asignados a cada periodo pueden producirse dentro del periodo T .

Este modelo ha sido tratado por Fujita (1978), Haessler (1979), Axsäter (1987), Philipoom et al. (1989), entre otros. Años más tarde Davis (1995) plantea un algoritmo mejorado que combina diferentes técnicas de programación para solucionar

el ELSP bajo este enfoque. Yao y Huang (2004) utilizan la aproximación de EBP para productos que se deterioran, bajo la política de orden dos (PoT) que restringe a los multiplicadores a ser enteros de orden dos, proponiendo un algoritmo genético para solucionar el problema.

2.3. Factor de deterioro en modelos de inventario

Muchos de los modelos de inventarios asumen que los productos pueden ser almacenados indefinidamente. En la práctica, la mayoría de los productos se deterioran o se tornan obsoletos con el tiempo. Usualmente el deterioro se observa durante el periodo de almacenamiento, por ejemplo, de los vegetales, frutas, carnes, gasolina, alcohol, películas fotográficas, sustancias radioactivas, componentes electrónicos, etc. Algunas veces, la tasa de deterioro de algunos productos es relativamente baja y no es de gran importancia en el modelo de inventario. Sin embargo, la tasa de deterioro de algunos productos puede tener un gran impacto en las políticas de decisión generadas a partir de modelos de inventario, en caso de ser ignorada. Si se considera que un producto perecedero no se deteriora, se pueden producir faltantes en el inventario y subestimar los costos, entre otros efectos.

El primer investigador en considerar el deterioro en el inventario fue Whitin (1957) quien consideró que se tenía un periodo de almacenamiento predeterminado y que al final de dicho periodo los bienes presentaban deterioro. Hadley y Whitin (1961) trabajaron bajo el mismo enfoque que Whitin (1957). Ghare and Schrander (1963) clasifican el deterioro en tres categorías: i) desperdicio directo, en donde se encuentran los vegetales, frutas y comida fresca etc.; ii) Deterioro físico, por ejemplo la gasolina y el alcohol etc.; iii) Deterioro como un cambio en la pérdida de eficacia, por ejemplo componentes electrónicos y medicinas. Raafat (1991) clasifica el deterioro, por el valor del tiempo de inventario, en tres categorías: i) utilidad constante: la utilidad no cambia significativamente, con el paso del tiempo, dentro de su periodo de vida útil, ejemplo las medicinas; ii) utilidad creciente: la utilidad se incrementa con el paso del tiempo, ejemplo algunas bebida alcohólicas; iii) utilidad decrece: la utilidad disminuye con el paso del tiempo, ejemplo los vegetales, frutas y alimentos frescos, etc.

La mayoría de los modelos del inventario que consideran el factor de deterioro son modelos para un solo producto. Misra (1975) estudió el modelo EPQ para productos que se deterioran con tasa de deterioro constante y tasa variable en el tiempo. Otros investigadores como Elsayed y Teresi (1983), Heng, Labban, y Linn (1991) y Abad (1996), (2000), también propusieron modelos para un solo producto. Sin embargo, en la literatura se encuentran muy pocos artículos que estudien modelos de inventario multi-producto con factor de deterioro. Kar, Bhunia y Maiti (2001) propusieron un modelo del inventario multi-producto con factor de deterioro, que considera restricciones de inversión y de espacio. Wu y Wee (2001) y Yang y Wee (2000), (2002), (2003) propusieron modelos de inventario multi-producto considerando el deterioro de los productos, de forma similar a formulaciones realizadas en trabajos anteriores. Goyal y Giri (2001) proporcionaron una revisión sobre los modelos de inventario para los productos que se deterioran.

2.4. Backorders parciales en modelos de inventario

La escasez de inventarios es el resultado de no tener inventario suficiente para satisfacer la demanda cuando esta se presenta. Cuando se presenta este problema, pueden darse dos casos:

- i. Si la demanda se acumula, es decir los pedidos que no se pudieron abastecer quedan pendientes, se incurre en el costo de demora asociado.
- ii. Si la demanda se pierde, se asume un costo de oportunidad definido usualmente por el margen unitario que se deja de percibir, aunque hay elementos no tangibles que eventualmente podrían ser tenidos en cuenta, como por ejemplo la pérdida de credibilidad por parte de los clientes.

En la literatura se encuentran algunos modelos de inventario que consideran backorders parciales; estos han sido tema de investigación de varios autores entre los que se encuentran Fabryc y Banks (1967), Jelen (1970) entre otros. Montgomery et al. (1973) proponen una solución utilizando una transformación no-singular de la función de costo y dos etapas de minimización. Park (1982) reformuló el problema considerando que una fracción de la demanda queda pendiente y que el resto es venta

perdida. Zeng (2001) desarrolló un modelo de inventario que permite backorders parciales considerando demanda estocástica.

Entre los estudios en los que se tiene en cuenta backorders parciales para productos perecederos, pueden encontrarse Rosenberg (1979), Kalro y Gohil (1982). Wee y Mercan (1992) desarrollan un modelo que permite backorders parciales con reaprovisionamiento instantáneo para el inventario que decae. Posteriormente, se desarrollaron modelos de inventario para productos que se deterioran que consideran backorders parciales con reaprovisionamiento finito Wee (1992) y Abad (2000).

Es importante mencionar que los modelos que se encuentran en la literatura que consideran backorders parciales y deterioro se trabajan para un solo producto. Una investigación enfocada en resolver el ELSP considerando deterioro en el inventario y backorders parciales no ha sido hecha previamente, por lo que es atractivo el tema y fue escogido como tema de investigación.

2.5. Algoritmos Genéticos

Los algoritmos genéticos, de aquí en adelante denotado como (AG) son técnicas de búsqueda aleatoria dirigida. Fueron propuestos en 1975 por John Holland, profesor de la Universidad de Michigan con la idea de crear un algoritmo con la misma filosofía de la naturaleza de evolución y selección. Se trata de generar un conjunto con posibles soluciones (factibles), donde cada una recibe el nombre de individuo y a su vez, el conjunto de individuos es llamado población. Todo individuo es representado por un cromosoma, que contiene la información asociada a él, que consiste en una mezcla de símbolos conocidos como genes. El fin de los AG es imitar la reproducción de individuos formando así nuevas generaciones, donde los mejores individuos de cada generación tienen mayor probabilidad de transmitir la información genética a la siguiente generación.

Los AG son utilizados en problemas donde no es fácil encontrar la solución o cuando se quiere encontrar una mejor solución a la que se tiene.

2.5.1. Características de los Algoritmos Genéticos

Según Kook (2004), algunas de las características de los AG son:

- i. Estocásticos: Las transformaciones dadas para el proceso de búsqueda de la solución y el paso de una generación a otra son probabilísticas.
- ii. Búsqueda múltiple: El proceso es realizado simultáneamente en un conjunto de cromosomas, lo cual permite que no se llegue a una única solución, sino posiblemente a varias en un período relativamente corto de tiempo.
- iii. Exploratorios: De todos los algoritmos estocásticos, los AG son los que realizan una mayor exploración al subespacio de posibles soluciones válidas.
- iv. Independientes de los Parámetros Iniciales: La convergencia del algoritmo es relativamente independiente de la población inicial. Esto es cierto en poblaciones relativamente grandes, escogidas de forma aleatoria.
- v. Robustez Paramétrica: La convergencia del AG depende de la codificación de los parámetros; no de los parámetros en sí. Si la representación de los datos y las operaciones de cruce y selección han sido bien escogidas, es muy difícil que el algoritmo no converja. Si el algoritmo está bien diseñado, convergerá rápidamente a una solución aceptable.
- vi. Paralelismo intrínseco: Independientemente de su implementación, paralela o no, los algoritmos genéticos exploran el espacio de solución en forma paralela.
- vii. Independencia del Problema: El algoritmo genético no está ligado con el problema particular. Esto hace al algoritmo bastante robusto, por ser útil para cualquier problema, pero a la vez débil, por no especializarse en ninguno.

2.5.2. Elementos para implementar un AG

- i. Criterio de codificación: Determina cómo se va a almacenar la información en el cromosoma. Generalmente se utilizan vectores binarios, cuya longitud está determinada por el número de variables que existen en una solución y el número de bits necesarios para representarlas.
- ii. Criterio de tratamiento de individuos no factibles: Determina qué tipo de tratamiento se le va a dar a los individuos que no cumplan las restricciones.
- iii. Criterio de inicialización: Determina la forma como se va a crear la población inicial del AG.
- iv. Criterio de parada: Determina cuándo el algoritmo ha llegado a una solución relativamente aceptable.
- v. Función de adaptación: Corresponde a la función objetivo del problema.
- vi. Operadores genéticos: Se emplean para determinar cómo va a ser la nueva generación. Los más utilizados son los de selección, cruce y mutación.
 - a. Selección: el operador de selección es el encargado de escoger los individuos que van a reproducirse. Algunas de las técnicas de selección que se conocen son:
 - Selección directa: toma elementos de acuerdo a un criterio objetivo, son empleados cuando se quieren seleccionar dos individuos distintos, y se selecciona el primero por un método aleatorio o estocástico.
 - Selección aleatoria: puede ser realizada por selección equiprobable o selección estocástica. Dentro de selección estocástica los métodos más utilizados son los siguientes:

- Por ruleta: Consiste en la construcción de una ruleta; la ruleta se construye asignándole a cada individuo de la población una parte que es proporcional a su adaptación. Los mejores individuos tienen mayor posibilidad de ser elegidos. Por lo general la población se ordena de manera que los individuos que tienen una mayor porción estén al inicio de la ruleta.
- Por torneo: Consiste en seleccionar un subconjunto de individuos de la población, generalmente se hace de manera aleatoria y de ellos se selecciona los que tengan mejor adaptación. Este proceso se repite hasta formar una nueva población.

b. Cruce: El operador de cruce es el encargado de generar nuevos individuos, haciendo uso de estrategias de reproducción. Su importancia radica en que es el mayor responsable de la evolución de la población. Las técnicas de cruce más utilizadas son las siguientes:

- Cruce de un punto: se selecciona un punto al azar del vector.
- Cruce multipunto: sigue la misma estrategia del cruce de un punto, pero se establece más de un punto de cruce.
- Cruce uniforme: Cada gen de la descendencia tiene la misma probabilidad de pertenecer a uno u otro padre.

c. Mutación: Es la variación aleatoria de la información contenida en el código genético. La mutación permite una mayor exploración y evita que se caiga en óptimos locales. Por lo general se utilizan probabilidades de mutación bajas para no generar demasiada aleatoriedad en el algoritmo, ya que esto dificulta el hallazgo de una buena solución.

- vii. Criterios de reemplazo: Los criterios que determinan quiénes se van a cruzar.
- viii. Parámetros de funcionamiento: Determina qué parámetros que, sin poder ser incluidos en ninguno de los anteriores, son fundamentales para el funcionamiento de un AG.

2.5.3. Esquema general de un AG

En la Figura 1. se presenta el procedimiento general de un AG.

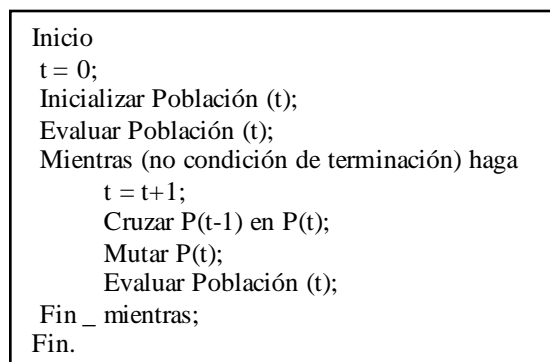


Figura 1: Procedimiento General de un AG

2.6. *Diseño Factorial 2^k*

Según Montgomery (2002), los diseños factoriales son a ampliamente utilizados en experimentos en los que intervienen varios factores, con el fin de estudiar el efecto conjunto de estos sobre una respuesta. Existen varios casos especiales del diseño factorial que son de gran importancia, ya que son utilizados continuamente en el campo de la investigación.

El diseño factorial más utilizado es el 2^2 , donde se trabaja con 2 factores, cada uno con dos niveles; estos se denominan por lo general alto (A) y bajo (B).

Los supuestos de un diseño factorial 2^2 son:

- Los factores son fijos
- El diseño es completamente aleatorizado
- Se satisfacen los supuestos de normalidad

Existen varios modelos para describir las observaciones de un experimento factorial, las más conocidas son: el modelo de los efectos, el modelo de las medias y un modelo de regresión simple. El modelo que comúnmente se utiliza para describir las observaciones de un diseño factorial de dos factores es el modelo de los efectos.

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + (\mu\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk} \quad \begin{cases} i = 1, 2, \dots, a \\ j = 1, 2, \dots, b \\ k = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

Donde:

μ = Efecto promedio global.

τ_i = Efecto del i -ésimo nivel del factor 1 de los renglones.

β_j = Efecto del j -ésimo nivel del factor 2 de las columnas.

$(\tau\beta)_{ij}$ = Efecto de la interacción entre τ_i y β_j .

ε_{ijk} = Error.

Si se cumple con el supuesto en el que los factores son fijos, los efectos de los tratamientos son definidos como las desviaciones de la media global, por lo tanto:

$\sum_{i=1}^a \tau_i = 0$ y $\sum_{j=1}^b \beta_j = 0$. Así mismo los efectos de las interacciones son fijos, por lo

tanto: $\sum_{i=1}^a (\tau\beta)_{ij} = \sum_{j=1}^b (\tau\beta)_{ij} = 0$

Si el modelo es adecuado, se debe cumplir que el error sigue una distribución normal e independiente con varianza σ^2 constante, pero desconocida.

El número total de observaciones, puesto que hay n réplicas es: nab .

Para determinar el número de replicas que se deben realizar, Montgomery (2002), propone que el experimentador se debe basar en las curvas de operación característica. Para poder utilizar estas curvas, se debe encontrar el valor mínimo de ϕ^2 , donde ϕ^2 es una diferencia especificada entre las medias de dos tratamientos cualesquiera.

En la Tabla 1. se presentan los parámetros de la curva de operación característica.

Factor	ϕ^2	Grados de libertad del numerador	Grados de libertad del denominador
A	$\frac{bn \sum_{i=1}^a \tau_i}{a\sigma^2}$	$a-1$	$ab(n-1)$
B	$\frac{an \sum_{j=1}^b \beta_j}{b\sigma^2}$	$b-1$	$ab(n-1)$
AB	$\frac{n \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (\tau\beta)_{ij}^2}{\sigma^2 [(a-1)(b-1) + 1]}$	$(a-1)(b-1)$	$ab(n-1)$

Tabla 1: Parámetros de la curva de operación característica para el diseño factorial de dos factores, modelo con efectos fijos.

Fuente: (Montgomery 2002, p.189)

Después de construir el diseño de experimentos, se procede a verificar los supuestos del modelo. Para realizar la verificación de los supuestos del modelo, generalmente se utilizan las pruebas de Bartlett, Levene y Kolmogorov-Smirnov. Si los supuestos del modelo no se cumplen, se procede a realizar pruebas no paramétricas, y a que éstas no suponen ninguna distribución de probabilidad. La prueba no paramétrica más utilizada, cuando se quiere un equivalente al análisis de varianza, es la de Kruskal-Wallis. A continuación se presenta una breve descripción de cada una de las pruebas mencionadas anteriormente.

- Prueba de Bartlett

Según Snedecor (1989), la prueba de Bartlett se utiliza para verificar la homogeneidad de la varianza. Las hipótesis que se plantean en la prueba se presentan a continuación:

$$H_0: \sigma_1 = \sigma_2 = \dots = \sigma_k .$$

$$H_a: \sigma_i \neq \sigma_j .$$

La prueba de Bartlett proporciona el estadístico T , que se distribuye como una Chi-cuadrado con $k-1$ grados de libertad.

$$T = \frac{(N - k) \ln s_p^2 - \sum_{i=1}^k (N_i - 1) \ln s_i^2}{1 + (1/3(k - 1)) \left(\left(\sum_{i=1}^k 1/(N_i - 1) \right) - 1/(N - k) \right)}$$

Donde:

s_i^2 = Varianza del i-ésimo grupo

N = Tamaño de la muestra

N_i = Tamaño de la muestra del i-ésimo grupo

k = Número de grupos

s_p^2 = Varianza repartida

Donde la varianza repartida está definida como:

$$s_p^2 = \sum_{i=1}^k (N_i - 1) s_i^2 / (N - k)$$

Se rechaza H_0 si $T > \chi^2_{(\alpha, k-1)}$, donde $\chi^2_{(\alpha, k-1)}$ es el valor crítico de la distribución chi-cuadrado con k-1 grados de libertad, con un nivel de significancia α .

- Prueba de Levene

Según Olkin et al. (1960), la prueba de Levene es alternativa a la prueba de Bartlett y se utiliza para verificar homogeneidad en la varianza. Las hipótesis que se plantean en la prueba se presentan a continuación:

$H_0: \sigma_1 = \sigma_2 = \dots = \sigma_k$

$H_a: \sigma_i \neq \sigma_j$

La prueba de Levene proporciona el estadístico W que es definido como:

$$W = \frac{(N - k) \sum_{i=1}^k N_i (\bar{Z}_i - \bar{Z}_{..})^2}{(k - 1) \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^N (Z_{ij} - \bar{Z}_i)^2}$$

Donde:

Z_{ij} está definido por:

1. $Z_{ij} = |Y_{ij} - \bar{Y}_i|$, donde, \bar{Y}_i es la media del i-ésimo subgrupo.
2. $Z_{ij} = |Y_{ij} - \tilde{Y}_i|$, donde, \tilde{Y}_i es la mediana del i-ésimo subgrupo.
3. $Z_{ij} = |Y_{ij} - \tilde{Y}'_i|$, donde \tilde{Y}'_i es el 10% de la media ajustada el i-ésimo subgrupo.

$Z_{i.}$ es el grupo de medias de Z_{ij} y $Z_{..}$ es la media total de Z_{ij} .

Se rechaza H_0 si $W > F_{(1-\alpha, k-1, N-k)}$, donde $F_{(1-\alpha, k-1, N-k)}$ es el valor de la distribución F con k-1 grados de libertad a un nivel de significancia α .

- Prueba de Kolmogorov Smirnov

Es una prueba no paramétrica que se utiliza para determinar la bondad de ajuste de dos distribuciones entre si. Se realiza con el fin de verificar si los datos que provienen de una población tienen la distribución teórica supuesta (Sheskin, 2000). Por lo general se utiliza para probar que los datos siguen una distribución normal. Las hipótesis que se plantean en la prueba se presentan a continuación:

$H_0: F(X) = F_0(X)$ para todos los valores de X.

$H_a: F(X) \neq F_0(X)$ para por lo menos un valor de X.

Donde :

$F(x)$ = Función desconocida.

$F_0(x)$ = Función teórica.

La prueba de Kolmogorv-Smirnov utiliza el estadígrafo D, que es definido como:

$D = \text{máximo } |F(X) - F_0(X)|$.

Luego, la hipótesis nula se rechaza si, el valor teórico de D es mayor que el valor crítico del estadístico D, con un nivel de significancia α .

- Prueba de Kruskal-Wallis

Según Sheskin (2000), es una prueba no paramétrica para un solo factor; permite comparar las medianas de las k muestras para contrastar si vienen de la misma población. Las hipótesis que se plantean en la prueba se presentan a continuación:

Ho: $\theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_k$ La mediana de las k muestras son iguales.

Ha: $\theta_i \neq \theta_j$ Al menos una de las muestras tiene mediana distinta a las otras.

La prueba de Kruskal-Wallis proporciona el estadístico H que se distribuye como una Chi –cuadrado con k-1 grados de libertad, si el tamaño de cada grupo es mayor que 5.

$$H = \frac{12}{n(n+1)} \sum_{i=1}^k \frac{R_i^2}{n_i} - 3(n+1)$$

Donde:

n = Número de observaciones

k = Número de muestras

Cuando hay empates en los datos se hace una modificación al estimador y se obtiene el estadístico H^*

$$H^* = \frac{H}{1 - \frac{\sum_{i=1}^g t_i^3 - t_i}{n^3 - n}}$$

Donde:

g = Número de muestras con empate

t = Número de casos en los que ha ocurrido empate

Luego, la hipótesis nula se rechaza si $H > \chi_{k-1, 1-\alpha}^2$, donde $\chi_{(\alpha, k-1)}^2$ es el valor crítico de la distribución chi-cuadrado con k-1 grados de libertad, con un nivel de significancia α .

Capítulo III

DESCRIPCIÓN Y MODELADO DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

En este capítulo, se presenta el modelo matemático para el ELSP considerando backorders parciales y deterioro en el inventario. Adicionalmente se describe el AG propuesto para solucionar el problema de investigación.

3.1. Descripción

El problema de programación del tamaño de lote económico (ELSP) consiste en la programación del ciclo de producción para dos o más productos, en una sola máquina, en tamaños de lote, que pueden diferir en los tiempos de ciclo y de producción, debido a que no todos los productos tienen las mismas tasas de producción y de demanda. Como ya se dijo anteriormente, el ELSP ha sido motivo de estudio durante varias décadas. Sin embargo, el ELSP convencional no incluye el factor de deterioro, ni se permiten backorders parciales. Se debe tener en cuenta que existen productos que son susceptibles a deteriorarse y que puede ser menos costoso asumir un costo por escasez que incurrir en costos por mantenimiento y deterioro del inventario. Esto implica que las decisiones que se podrían derivar de un modelo sin deterioro pueden ser sustancialmente diferentes que aquellas generadas por un modelo que considere el deterioro. Adicionalmente, si la demanda no puede ser satisfecha por problemas de deterioro en los artículos, esto causaría un costo adicional por escasez sumado al hecho de asumir las pérdidas asociadas al deterioro en sí mismo.

Por las razones anteriormente expuestas, se plantea un modelo matemático para dar solución al ELSP considerando deterioro y backorder parciales para los productos.

En particular, el modelo matemático que se quiere desarrollar tendrá en cuenta los siguientes supuestos:

- La máquina procesa un producto a la vez.
- La tasa de demanda para cada producto es determinística y constante.
- La tasa de producción para cada producto es determinística y constante.
- La tasa de producción es mayor que la tasa de demanda.
- El deterioro del inventario sigue una distribución exponencial.
- Cada unidad producida está disponible inmediatamente para satisfacer la demanda.
- Se permite tener escasez y la demanda es parcialmente satisfecha.
- Los costos de inventario son proporcionales al nivel de inventario.

En anteriores investigaciones se han denotado para los cuatro segmentos del modelo, las variables de nivel de inventario y tiempo por I_1, I_2, I_3, I_4 y t_1, t_2, t_3, t_4 . Para el desarrollo del modelo que se propone, esta notación ha sido cambiada por conveniencia. Se utilizaron algunas ideas del modelo propuesto por Wee (1992), realizando la adaptación necesaria para el caso de multi producto y efectuando el cambio de notación. El modelo propuesto utiliza la aproximación de BP.

Notación empleada:

n = Número total de productos.

d_i = Tasa de demanda para el producto i .

p_i = Tasa de producción diaria del producto i .

θ_i = Factor de deterioro para el producto i .

A_i = Costo de preparación del lote del producto i .

h_i = Costo de mantener el inventario del producto i .

ξ_i = Costo por deterioro del producto i .

ς_i = Costo por backorder del producto i .

φ_i = Costo por ventas perdidas del producto i .

C_i = Costo total del producto i .

τ_i = Tiempo de preparación para el producto i .

β_i = Tiempo de duración del inventario positivo antes de terminar la producción para el producto i .

ω_i = Tiempo de duración del ciclo de inventario positivo para el producto i .

ψ_i = Tiempo de duración del inventario negativo antes de iniciar la producción para el producto i .

γ_i = Tiempo de duración del inventario negativo antes de terminar la producción para el producto i .

λ_i = Tiempo de duración del ciclo de inventario negativo para el producto i .

T = Periodo básico de proceso en el horizonte de planeación.

k_i = Multiplicador entero del ciclo básico para el producto i .

K = Conjunto de multiplicadores, $K = \{k_1, \dots, k_n\}$.

T_i = Tiempo de ciclo del i - ésimo producto, $T_i = k_i * T$.

α_i = Fracción de la demanda que tiene la orden pendiente.

3.2. Dinámica del inventario

La dinámica del inventario para el producto i en cualquier momento durante el ciclo de producción se muestra en la Figura 2.

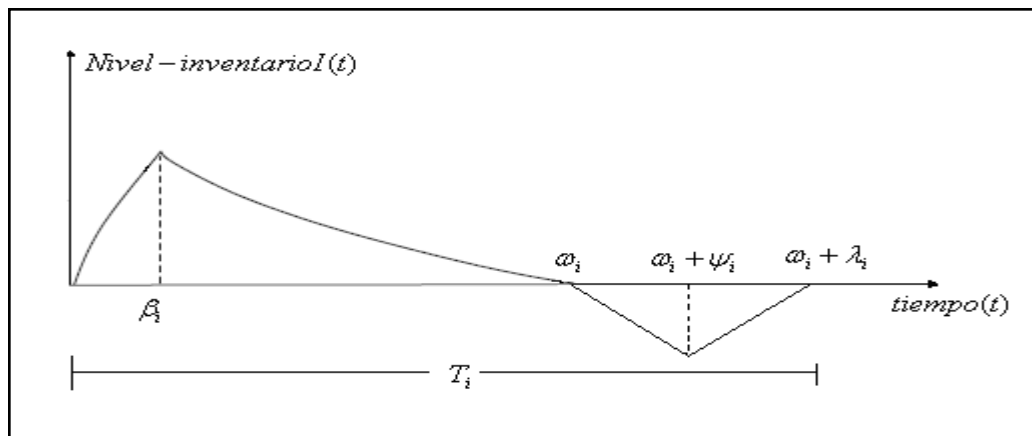


Figura 2: Dinámica del inventario para el producto i .

Durante el intervalo de tiempo $[0, T_i]$, el nivel de inventario se rige por las siguientes ecuaciones:

Durante $t \in [0, \beta_i)$, el nivel de inventario se rige por:

$$\frac{dI_i(t)}{dt} + I_i(t)\theta_i = p_i - d_i, \quad I_i(0) = 0. \quad (1)$$

Durante $t \in [\beta_i, \omega_i)$, el nivel de inventario se rige por:

$$\frac{dI_i(t)}{dt} + I_i(t)\theta_i = -d_i, \quad I_i(\omega_i) = 0. \quad (2)$$

La solución para la ecuación diferencial (1) es:

$$I_i(t) = \frac{p_i - d_i}{\theta_i} (1 - e^{-\theta_i t}), \quad \text{para } t \in [0, \beta_i). \quad (3)$$

La solución para la ecuación diferencial (2) es:

$$I_i(t) = \frac{d_i}{\theta_i} (e^{-\theta_i(\omega_i - t)} - 1), \quad \text{para } t \in [\beta_i, \omega_i). \quad (4)$$

Las ecuaciones (3) y (4) en términos de $t = \beta_i$, se pueden expresar como:

$$I_i(t) = \frac{p_i - d_i}{\theta_i} (1 - e^{-\theta_i \beta_i}) = \frac{d_i}{\theta_i} (e^{-\theta_i(\omega_i - \beta_i)} - 1). \quad (5)$$

Resolviendo la ecuación (5) para β_i se obtiene:

$$\beta_i = \frac{1}{\theta_i} \ln \left(\frac{p_i - d_i + d_i e^{\theta_i \omega_i}}{p_i} \right). \quad (6)$$

Con el fin de simplificar la expresión para β_i dada en la ecuación (6), se utilizó la aproximación de la serie de Taylor para $e^{\theta_i \omega_i}$ y se obtuvo la siguiente expresión:

$$\beta_i = \frac{d_i}{p_i} \left(1 + \frac{\omega_i \theta_i}{2} \right) \omega_i. \quad (7)$$

En el Apéndice A, se presenta la derivación de la ecuación (7).

Durante el intervalo $t \in [\omega_i, \lambda_i]$ se tienen backorders parciales, por lo que las ecuaciones que rigen el sistema son:

Durante $t \in [\omega_i, \omega_i + \lambda_i)$ el nivel de inventario se rige por:

$$\frac{dI_i(t)}{dt} = -\alpha_i d_i, \quad I_i(\omega_i) = 0. \quad (8)$$

La solución para la ecuación diferencial (8) para $t \in [\omega_i, \omega_i + \lambda_i)$ es:

$$I_i(t) = -\alpha_i d_i (t - \omega_i). \quad (9)$$

El nivel máximo de órdenes pendientes se da cuando $t = \omega_i + \psi_i$ y se puede expresar como:

$$I_i(t) = -\alpha_i d_i (\omega_i + \psi_i - \omega_i) = -\alpha_i d_i \psi_i. \quad (10)$$

Durante $t \in [\omega_i + \psi_i, \omega_i + \lambda_i]$ el nivel de inventario se rige por:

$$\frac{dI_i(t)}{dt} = \alpha_i (p_i - d_i). \quad (11)$$

La solución de la ecuación (11) dada la condición inicial por la ecuación (10) es:

$$I_i(t) = \alpha_i (p_i - d_i)(t - \omega_i - \psi_i) - \alpha_i d_i \psi_i. \quad (12)$$

En la ecuación (12) para $t = \omega_i + \lambda_i$ y cuando $I(\omega_i + \lambda_i) = 0$, se resuelve para ψ_i y se obtiene:

$$\psi_i = \frac{(p_i - d_i)\lambda_i}{p_i}. \quad (13)$$

De la Figura 2. se tiene que, $\lambda_i = \psi_i + y_i$ y tomando la ecuación (13), se tiene que:

$$y_i = \frac{d_i}{p_i} \lambda_i. \quad (14)$$

3.3. Construcción de la función objetivo

La función objetivo de este problema busca minimizar los costos totales de inventario durante el ciclo T_i . Esta incluye los costos de preparación, mantenimiento, deterioro, backorder y venta perdida.

Función objetivo

$$\text{Min} \quad \sum_{i=1}^n C_i(\beta_i, \omega_i, \psi_i, \lambda_i).$$

A continuación se presenta la derivación de cada uno de los costos que se tienen en cuenta en la función objetivo.

- Costo de mantener el inventario

$$h_i \int_0^{\beta_i} \frac{p_i - d_i}{\theta_i} (1 - e^{-\theta_i t}) dt + h_i \int_{\beta_i}^{\omega_i} \frac{d_i}{\theta_i} (e^{\theta_i(\omega_i - t)} - 1) dt . \quad (15)$$

La solución a la ecuación (15) da como resultado el costo de mantener el inventario para el producto i .

$$h_i \int_0^{\omega_i} I_i(t) dt = h_i \frac{(p_i \beta_i - d_i \omega_i)}{\theta_i} . \quad (16)$$

- Costo de deterioro

La expresión $(p_i \beta_i - d_i \omega_i)$ representa el número de unidades que se deterioran.

El costo de deterioro está dado por la siguiente expresión:

$$\xi(p_i \beta_i - d_i \omega_i) . \quad (17)$$

- Costo por escasez

Dado que se tienen backorders parciales, se tiene costo por la demanda que queda pendiente y por la venta perdida.

- Costo por demanda pendiente

Las unidades que están pendientes se pueden expresar como $\alpha_i d_i \psi_i$ y el costo está determinado por.

$$\varsigma_i \left(\frac{\alpha_i d_i \psi_i}{2} \right) \lambda_i . \quad (18)$$

- Costo por venta perdida

Las unidades que son venta perdida se pueden expresar como $(d_i \psi_i - \alpha_i d_i \psi_i)$ y el costo está determinado por:

$$\varphi_i (d_i \psi_i (1 - \alpha_i)) . \quad (19)$$

3.4. Formulación del modelo

Función objetivo

$$\text{Min} \sum_{i=1}^n \left(\frac{A_i}{T_i} + \frac{hi}{T_i} \left(\frac{p_i \beta_i - d_i \omega_i}{\theta_i} \right) + \frac{\xi_i}{T_i} (p_i \beta_i - d_i \omega_i) + \frac{\zeta_i}{T_i} \left(\frac{\alpha d_i \psi_i}{2} \right) \lambda_i + \frac{\varphi_i}{T_i} ((1-\alpha) d_i \psi_i) \right). \quad (20)$$

Sujeto a:

$$\sum_{i=1}^n [(\tau_i + \beta_i + y_i)] \leq T. \quad (21)$$

Expresando β_i , ψ_i y λ_i en términos de ω_i y T_i , y utilizando la aproximación de BP se modifican las ecuaciones (20) y (21).

De lo que se obtiene:

Función objetivo

$$\text{Min} \sum_{i=1}^n \left[\frac{A_i}{k_i T} + \frac{hi}{k_i T} \left(\frac{d_i \omega_i^2}{2} \right) + \frac{\xi_i}{k_i T} \left(\frac{d_i \theta_i \omega_i^2}{2} \right) + \frac{\zeta_i}{k_i T} \left(\frac{\alpha d_i (1-\rho_i) (k_i T - \omega_i)^2}{2} \right) + \frac{\varphi_i}{k_i T} ((1-\alpha) d_i (1-\rho_i) (k_i T - \omega_i)) \right]. \quad (22)$$

Sujeto a:

$$\sum_{i=1}^n \left[\tau_i + \frac{d_i}{p_i} \left(1 - \frac{\theta_i \omega_i}{2} \right) \omega_i + \frac{d_i (k_i T - \omega_i)}{p_i} \right] \leq T. \quad (23)$$

La función objetivo (22) busca minimizar los costos totales de inventario para el ciclo T_i . La restricción (23) hace referencia a la restricción de capacidad para que la programación de producción sea factible, en donde se establece que el tiempo de producción y preparación de la máquina no excederá el tiempo disponible (T). Esto garantiza que todos los productos puedan ser producidos.

3.5. Algoritmo genético propuesto para solucionar el problema de investigación

Para la elaboración del AG, se utilizó la propuesta hecha por Torres y Rojas (2006), en donde la representación de la solución es un cromosoma compuesto por los multiplicadores enteros k_i , donde $1 \leq k_i \leq 15$; cada k_i se representa con 4 bits, haciendo uso de la representación binaria. La población inicial es generada aleatoriamente. La función de adaptación se evalúa con el cálculo de la función objetivo, descrita en el capítulo anterior; si se viola la condición de factibilidad, la función objetivo es penalizada. Se utiliza la técnica de selección por ruleta para seleccionar a los individuos. El cruce es hecho por la técnica de cruce por un punto. La mutación se hace cambiando aleatoriamente de 1 a 0 o de 0 a 1 cada uno de los genes del cromosoma, según un parámetro de mutación. Se tomó un tamaño de población de 30 y 500 generaciones.

Capítulo IV

COTA INFERIOR Y SUPERIOR PARA EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

En este capítulo se desarrollarán cotas para evaluar la calidad de la solución obtenida con la técnica de AG.

4.1 Cota Inferior

Para obtener una cota inferior se utilizará la técnica de la solución independiente, por sus siglas en inglés de aquí en adelante (IS). Esta es una relajación del problema original que se obtiene ignorando algunas o todas las restricciones del problema y cuyo fin es hallar la solución para cada producto independientemente.

IS para el caso del ELSP considerando deterioro y backorders parciales, puede ser obtenida relajando el hecho de programar los lotes de producción de todos los productos, optimizando los valores de T_i para cada producto. “IS proporciona una cota inferior óptima para el ELSP original, si la factibilidad de las restricciones es satisfecha.” Gupta (1991, p.101).

La cota inferior para T_i es:

$$T_i^* = \sqrt{\frac{(2A_i + h_i d_i \omega_i^2 + \xi_i d_i \theta_i \omega_i^2 + \zeta_i \alpha_i d_i (1 - \rho_i) \omega_i^2 - 2\varphi_i (1 - \alpha_i) d_i (1 - \rho_i) \omega_i)}{\zeta_i \alpha_i d_i (1 - \rho_i)}}. \quad (24)$$

La cota proporciona una solución factible si se cumple la siguiente condición:

$$2A_i + h_i d_i \omega_i^2 + \xi_i d_i \theta_i \omega_i^2 + \zeta_i \alpha_i d_i (1 - \rho_i) \omega_i^2 > \varphi_i (1 - \alpha_i) d_i (1 - \rho_i) \omega_i \quad \forall i.$$

Después de algunas simplificaciones se obtiene:

$$T_i^* = \sqrt{\frac{2A_i(h_i d_i + \xi_i d_i \theta_i + \zeta_i \alpha_i d_i (1 - \rho_i)) - (\varphi_i^2 (1 - \alpha_i)^2 d_i^2 (1 - \rho_i)^2)}{\zeta_i \alpha_i d_i (1 - \rho_i)(h_i d_i + \xi_i d_i \theta_i + \zeta_i \alpha_i d_i (1 - \rho_i)) - (\zeta_i \alpha_i d_i (1 - \rho_i))^2}}. \quad (25)$$

Donde el costo mínimo por unidad de tiempo por unidad está dado por:

$$C_i^{IS} = \left[\frac{A_i}{T_i} + \frac{h_i}{T_i} \left(\frac{d_i \omega_i^2}{2} \right) + \frac{\xi_i}{T_i} \left(\frac{d_i \theta_i \omega_i^2}{2} \right) + \frac{\zeta_i}{T_i} \left(\frac{\alpha_i d_i (1 - \rho_i) (T_i - \omega_i)^2}{2} \right) + \frac{\varphi_i}{T_i} ((1 - \alpha_i) d_i (1 - \rho_i) (T_i - \omega_i)) \right].$$

La condición necesaria para que la programación de producción sea factible es:

$$\frac{\tau_i + \frac{d_i}{p_i} \left(1 - \frac{\theta_i \omega_i}{2} \right) \omega_i + \frac{d_i (k_i T - \omega_i)}{p_i}}{T_i} \leq 1. \quad (26)$$

Por consiguiente, el tiempo de ciclo para el producto i por el método de IS se encuentra limitado por:

$$T_i^{LB} \leq T_i \leq T_i^{UB}.$$

Donde:

$$T_i^{LB} = \frac{-(J - 1) - \sqrt{(J - 1)^2 - 4FM}}{2F}, \quad (27)$$

$$T_i^{UB} = \frac{-(J - 1) + \sqrt{(J - 1)^2 - 4FM}}{2F}. \quad (28)$$

Donde:

$$J = \left[\frac{d_i \theta_i [\zeta_i \varphi_i \alpha_i (1 - \alpha_i) d_i^2 (1 - \rho_i)^2]}{p_i [h_i d_i + \xi_i d_i \theta_i + \zeta_i \alpha_i d_i (1 - \rho_i)]^2} \right] + \left[\frac{d_i}{p_i} \right], \quad (29)$$

$$F = \left[\frac{d_i \theta_i (\zeta_i \alpha_i d_i (1 - \rho_i))^2}{2p_i [h_i d_i + \xi_i d_i \theta_i + \zeta_i \alpha_i d_i (1 - \rho_i)]^2} \right], \quad (30)$$

$$M = \left[\frac{d_i \theta_i (\varphi_i (1 - \alpha_i) d_i (1 - \rho_i))^2}{2 p_i [h_i d_i + \xi_i d_i \theta_i + \zeta_i \alpha_i d_i (1 - \rho_i)]^2} \right] + \tau_i. \quad (31)$$

Por lo tanto:

$$T_i^{IS} = \left\{ \begin{array}{ll} T_i^*, & \text{si } T_i^{LB} \leq T_i^* \leq T_i^{UB} \\ T_i^{LB}, & \text{si } T_i^* < T_i^{LB} \\ T_i^{UB}, & \text{si } T_i^* > T_i^{UB} \end{array} \right\}.$$

Utilizando el método de IS el costo total de inventario está dado por:

$$C_i^{IS} = \sum_{i=1}^n \left[\frac{A}{T_i^{IS}} + \frac{h_i}{T_i^{IS}} \left(\frac{d_i \alpha_i^2}{2} \right) + \frac{\xi_i}{T_i^{IS}} \left(\frac{d_i \theta_i \omega_i^2}{2} \right) + \frac{\zeta_i}{T_i^{IS}} \left(\frac{\alpha_i d_i (1 - \rho_i) (T_i^{IS} - a)^2}{2} \right) + \frac{\rho_i}{T_i^{IS}} ((1 - \alpha_i) d_i (1 - \rho_i) (T_i^{IS} - a)) \right]. \quad (32)$$

4.2 Cota Superior

A continuación se desarrollará una expresión para el CC para el ELSP para productos perecederos permitiendo backorders parciales. Como se mencionó anteriormente, el CC proporciona una solución factible y proporciona una cota superior para el problema.

Para obtener la solución del CC se asume que todos los productos tienen una longitud de ciclo idéntica, es decir, se toma $k_i = 1$ y $T_i = T$ para todo i .

El modelo matemático para la aproximación del CC para el ELSP considerando deterioro en los productos y backorders parciales es el siguiente:

Función objetivo:

$$\text{Min} \sum_{i=1}^n \left[\frac{A}{T} + \frac{h_i}{T} \left(\frac{d_i \alpha_i^2}{2} \right) + \frac{\xi_i}{T} \left(\frac{d_i \theta_i \omega_i^2}{2} \right) + \frac{\zeta_i}{T} \left(\frac{\alpha_i d_i (1 - \rho_i) (T - a)^2}{2} \right) + \frac{\rho_i}{T} ((1 - \alpha_i) d_i (1 - \rho_i) (T - a)) \right]. \quad (33)$$

Sujeto a:

$$\sum_{i=1}^n \left[\tau_i + \frac{d_i}{p_i} \left(1 + \frac{\theta_i \omega_i}{2} \right) \omega_i + \frac{d_i (T - \omega_i)}{p_i} \right] \leq T . \quad (34)$$

La función objetivo (32) busca minimizar los costos totales de inventario para el ciclo T . Donde T es la duración del ciclo común. La restricción (33) garantiza factibilidad cuando los productos son restringidos a un ciclo común.

Para minimizar la función objetivo, se realiza la derivada $\frac{\partial C}{\partial T} = 0$.

$$\frac{\partial C}{\partial T} = \sum_{i=1}^n \left[\frac{A_i}{T^2} - \frac{h_i d_i \omega_i^2}{2T^2} - \frac{\xi_i d_i \theta_i \omega_i^2}{2T^2} + \frac{\zeta_i \alpha_i d_i (1 - \rho_i) T^2}{2T^2} - \frac{\zeta_i \alpha_i d_i (1 - \rho_i) \omega_i^2}{2T^2} + \frac{\varphi_i (1 - \alpha_i) d_i (1 - \rho_i) \omega_i}{T^2} \right] = 0. \quad (35)$$

Se resuelve la ecuación (34) para T , obteniendo la siguiente expresión:

$$T = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n [2A_i + h_i d_i \omega_i^2 + \xi_i d_i \theta_i \omega_i^2 + \zeta_i \alpha_i d_i (1 - \rho_i) \omega_i^2 - 2\varphi_i (1 - \alpha_i) d_i (1 - \rho_i) \omega_i]}{\sum_{i=1}^n \zeta_i \alpha_i d_i (1 - \rho_i)}}. \quad (36)$$

Después de algunas simplificaciones se obtiene:

$$T = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n 2A_i \sum_{i=1}^n (h_i d_i + \xi_i d_i \theta_i + \zeta_i \alpha_i d_i (1 - \rho_i)) - \sum_{i=1}^n \varphi_i^2 (1 - \alpha_i)^2 d_i^2 (1 - \rho_i)^2}{\sum_{i=1}^n \zeta_i \alpha_i d_i (1 - \rho_i) \sum_{i=1}^n (h_i d_i + \xi_i d_i \theta_i + \zeta_i \alpha_i d_i (1 - \rho_i)) - \sum_{i=1}^n (\zeta_i \alpha_i d_i (1 - \rho_i))^2}}. \quad (37)$$

Para obtener una solución factible, se debe tener en cuenta la condición necesaria para garantizar la factibilidad del ciclo común,

$$\sum_{i=1}^n \left[\tau_i + \frac{d_i}{p_i} \left(1 + \frac{\omega_i \theta_i}{2} \right) \omega_i + \frac{d_i (T - \omega_i)}{p_i} \right] \leq T . \quad (38)$$

Se obtiene una solución factible sólo si se cumple la siguiente condición:

$$T^{LB} \leq T \leq T^{UB}.$$

Donde:

$$T^{LB} = \frac{-(J-1) - \sqrt{(J-1)^2 - 4FM}}{2F}, \quad (39)$$

$$T^{UB} = \frac{-(J-1) + \sqrt{(J-1)^2 - 4FM}}{2F}. \quad (40)$$

Donde:

$$J = \sum_{i=1}^n \left[\frac{d_i \theta_i [\zeta_i \varphi_i \alpha_i (1 - \alpha_i) d_i^2 (1 - \rho_i)^2]}{p_i [h_i d_i + \xi_i d_i \theta_i + \zeta_i \alpha_i d_i (1 - \rho_i)]^2} \right] + \sum_{i=1}^n \left[\frac{d_i}{p_i} \right], \quad (41)$$

$$F = \sum_{i=1}^n \left[\frac{d_i \theta_i (\zeta_i \alpha_i d_i (1 - \rho_i))^2}{2p_i [h_i d_i + \xi_i d_i \theta_i + \zeta_i \alpha_i d_i (1 - \rho_i)]^2} \right], \quad (42)$$

$$M = \sum_{i=1}^n \left[\frac{d_i \theta_i (\varphi_i (1 - \alpha_i) d_i (1 - \rho_i))^2}{2p_i [h_i d_i + \xi_i d_i \theta_i + \zeta_i \alpha_i d_i (1 - \rho_i)]^2} \right] + \sum_{i=1}^n \tau_i. \quad (43)$$

Por lo tanto:

$$T^{CC} = \left\{ \begin{array}{ll} T, & \text{si } T^{LB} \leq T \leq T^{UB} \\ T^{LB}, & \text{si } T < T^{LB} \\ T^{UB}, & \text{si } T > T^{UB} \end{array} \right\}.$$

Utilizando la aproximación de CC el costo total de inventario está dado por:

$$C^{CC} = \sum_{i=1}^n \left[\frac{A_i}{T^{CC}} + \frac{h_i}{T^{CC}} \left(\frac{d_i \varphi_i}{2} \right) + \frac{\xi_i}{T^{CC}} \left(\frac{d_i \theta_i}{2} \right) + \frac{\zeta_i}{T^{CC}} \left(\frac{\alpha d_i (1 - \rho_i) (T^{CC} - \alpha)^2}{2} \right) + \frac{\varphi_i}{T^{CC}} (1 - \alpha) d_i (1 - \rho_i) (T^{CC} - \alpha) \right]. \quad (44)$$

Capítulo V

RESULTADOS NUMÉRICOS

En este capítulo se presentan los resultados obtenidos. En primera instancia se realiza un diseño de experimentos con el fin de evaluar cuál es el impacto de los factores de entrada del AG sobre el valor de la función objetivo. Posteriormente, se compara el resultado obtenido con el AG y las cotas propuestas en el capítulo anterior.

5.1. Descripción de los datos

Para validar el modelo propuesto, se utilizó la base de datos del problema de Bomberger (1962). Como el problema de Bomberger no considera deterioro en los productos, el factor de deterioro fue generado aleatoriamente utilizando una distribución uniforme en el rango $[0.01, 0.3]$, para cada producto. Por otra parte en el problema original no se consideran backorders parciales, por lo que la fracción de demanda que queda pendiente se fija en 0.7. Así mismo los costos por deterioro (\$/unidad), backorder (\$/unidad * año) y venta perdida (\$/unidad) fueron incluidos en el problema y se calcularon de la siguiente manera:

Costo por deterioro = $0.06 * \text{Costo por unidad}$.

Costo por backorder = $0.01 * \text{Costo por unidad}$.

Costo por venta perdida = $0.03 * \text{Costo por unidad}$.

Todos los costos son calculados basados en un año de 240 días de trabajo. La producción está basada en un turno de 8 horas de trabajo al día. En la Tabla 2. se presentan los datos del problema de Bomberger. En la Tabla 3. se presentan los datos que fueron incluidos en el problema.

Índice del producto	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Demanda anual (unidades)	24000	24000	48000	96000	48000	48000	144000	204000	204000	240000
Costo fijo en marcha (\$)	15	20	30	10	110	50	30	130	20	5
Tasa de producción (unidades/año)	720000	192000	228000	180000	48000	144000	576000	312000	480000	360000
Tiempo de set up (hrs)	0,00020833	0,000520833	0,001041667	0,000520833	0,002083333	0,001041667	0,004166667	0,002083333	0,003125	0,00020833
Costo de mantenimiento (\$/año)	0,00065	0,01775	0,0125	0,01	0,2785	0,02675	0,15	0,59	0,09	0,004

Tabla 2: Datos del problema de Bomberger

Índice del producto	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Costo de backorder (\$/año)	0,00065	0,001775	0,00125	0,001	0,02785	0,002675	0,015	0,059	0,009	0,0004
Costo de venta perdida (\$/un)	0,00195	0,005225	0,003825	0,003	0,0855	0,008025	0,045	0,177	0,027	0,0012
Costo de deterioro (\$/un)	0,00089	0,01065	0,00765	0,006	0,1671	0,01605	0,09	0,354	0,054	0,0024
Factor de deterioro	0,228564091	0,041753663	0,223556187	0,033792351	0,108548998	0,21829024	0,035767098	0,087625791	0,21368	0,287062216
Fracción de la demanda que tiene la orden pendiente	0,7	0,7	0,7	0,7	0,7	0,7	0,7	0,7	0,7	0,7

Tabla 3: Datos adicionales del problema

Índice del producto	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Fracción de la demanda que tiene la orden pendiente	0,8	0,8	0,8	0,8	0,8	0,8	0,8	0,8	0,8	0,8
	0,5	0,5	0,5	0,7	0,5	0,5	0,5	0,7	0,5	0,5
	0,1	0,4	0,4	0,7	0,3	0,1	0,1	0,7	0,1	0,4

Tabla 4: Variaciones en la Fracción de demanda que queda pendiente

Con el fin de obtener instancias diferentes para validar el modelo, se aplicó la propuesta hecha por Bomberger para obtener soluciones inicialmente para tres niveles de utilización. La demanda es multiplicada por el factor a_j , donde: $a_1 = 2$, $a_2 = 3$ y $a_3 = 4.445$. Luego se realizaron las 15 variaciones en la utilización propuestas por Bomberger.

Adicionalmente, se propone hacer cambios en el parámetro que corresponde a la fracción de la demanda que queda pendiente. Para facilitar el análisis de las variaciones, se fija el valor de la utilización en 66%. Las variaciones que se proponen se presentan en la Tabla 4.

5.2. Diseño de experimentos

Con el objetivo de determinar cuál de los dos parámetros de entrada, que no son fijos, del AG influye en el valor de la función objetivo, se realizó un diseño factorial 2^2 . Se tienen dos factores, cada uno con dos niveles (alto y bajo); los factores que se van a incluir en el diseño de experimentos con sus respectivos niveles son los siguientes:

- Factor 1: Probabilidad de cruce
 - Nivel 1: 0.2
 - Nivel 2: 0.8

- Factor 2: Probabilidad de mutación
 - Nivel 1: 0.001
 - Nivel 2: 0.1

Los valores para cada uno de los niveles fueron sugeridos por el asesor de tesis y son producto de experiencias con el uso de AG y de la investigación hecha por Torres y Rojas (2006).

El tamaño de la muestra se determinó según las curvas de operación característica de Montgomery (2002), obteniendo $n = 10$ réplicas.

Se utilizó MINITAB 14 para crear, graficar y analizar el diseño factorial y se obtuvieron los siguientes resultados para cada una de las instancias planteadas.

5.2.1. Resultados Diseño de Experimentos

Para realizar el análisis de los resultados obtenidos con el diseño de experimentos, se siguió el siguiente procedimiento:

- i. Verificación de los supuestos del modelo.
- ii. Transformación de los datos, en el caso que los datos no sigan una distribución normal.
- iii. Aplicación de pruebas no paramétricas, en el caso que no se cumplan los supuestos del modelo y que no se obtengan mejoras con la transformación de los datos.

Este procedimiento se realizó para las instancias, de los tres niveles de utilización, propuestas.

- **Instancia 1. utilización 66.18%**

- i. **Verificación de los supuestos**

Se corrió el diseño factorial 2^2 para 10 replicas en cada combinación. Los resultados obtenidos se presentan a continuación.

En la Figura 3. se puede observar que la varianza no es constante, por lo que posiblemente no se cumple con el supuesto de homoscedasticidad.

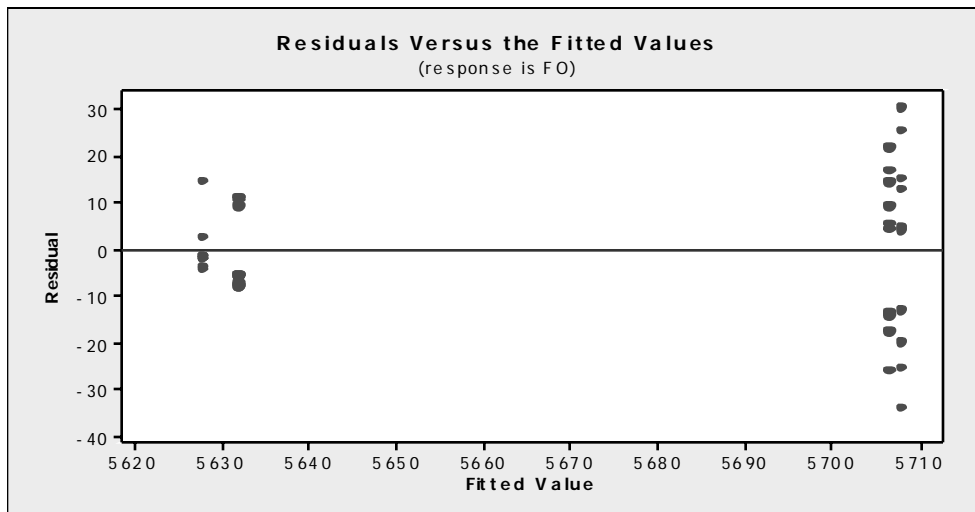


Figura 3: Histograma de los Residuos

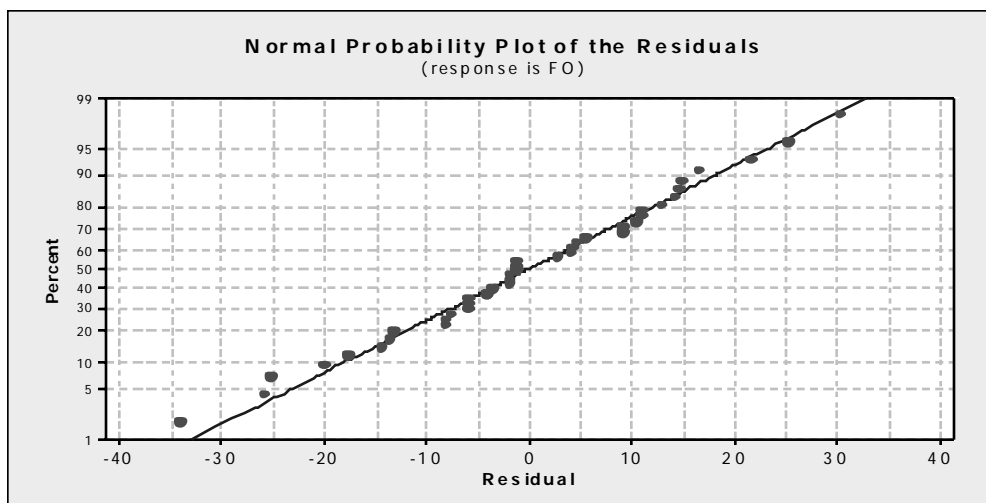


Figura 4: Gráfica de probabilidad Normal de los Residuales

En la Figura 4. se observa que existen algunas anomalías, ya que no todos los residuos se encuentran sobre la línea, esto indica que posiblemente no se cumple con el supuesto de normalidad.

Como se sospecha que no se cumple con los supuestos de homogeneidad en la varianza y de normalidad, se utilizarán la prueba de Bartlett, la prueba de Levene y la prueba de Kolmogorov-Smirnov, para verificar los supuestos. Para verificar la

normalidad de los datos se utiliza la prueba de Kolmogorov-Smirnov, para verificar la homogeneidad en la varianza se utilizan las otras dos pruebas. Utilizando MINITAB 14, se aplicaron las tres pruebas. Los resultados se presentan a continuación en las Figuras 5 y 6 respectivamente.

- Prueba de Bartlett y Levene

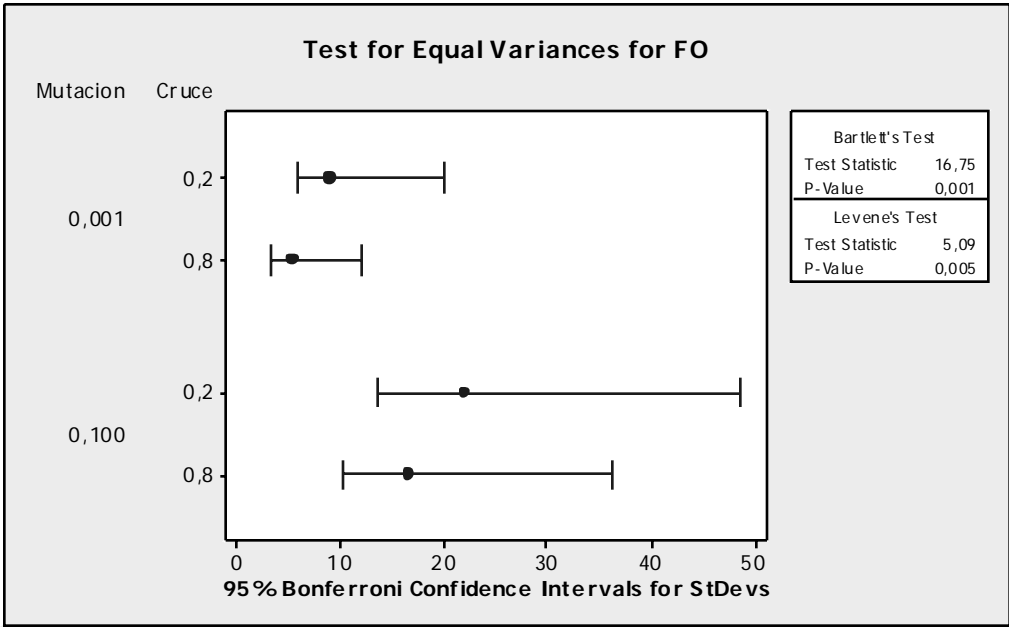


Figura 5: Resultados Prueba de Bartlett y de Levene

En la Figura 5, se observa que el p-value que se obtuvo con las pruebas de Bartlett y Levene fue $P=0.001$ y $P= 0.005$, respectivamente. Con un nivel de confianza del 95% se rechaza H_0 , y se concluye que no se cumple con el supuesto de homoscedasticidad.

- Prueba de Kolmogorov-Smirnov

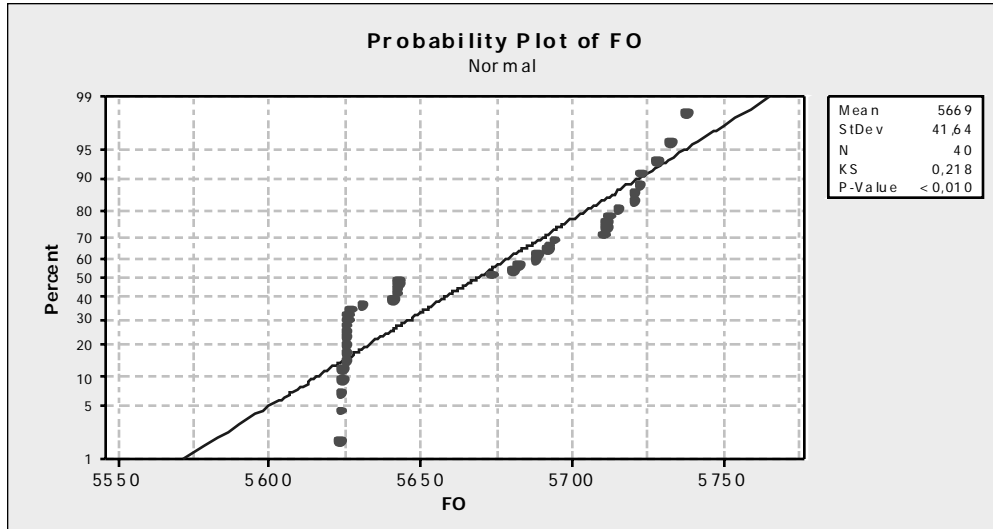


Figura 6: Resultados Prueba de Kolmogorov-Smirnov

El resultado de la prueba de Kolmogorov-Smirnov, arroja un p-value < 0.01. Con un nivel de confianza del 95% se rechaza H_0 y se concluye que los datos no siguen una distribución normal.

ii. Transformación de los datos

Como se verificó que no se cumple con los supuestos del modelo, se realizó la transformación de $Ln(x)$, con el fin de ajustarlos a una distribución normal.

Se aplicó la prueba de Kolmogorov-Smirnov para verificar la normalidad de los datos. En la figura 7 se presentan los resultados obtenidos.

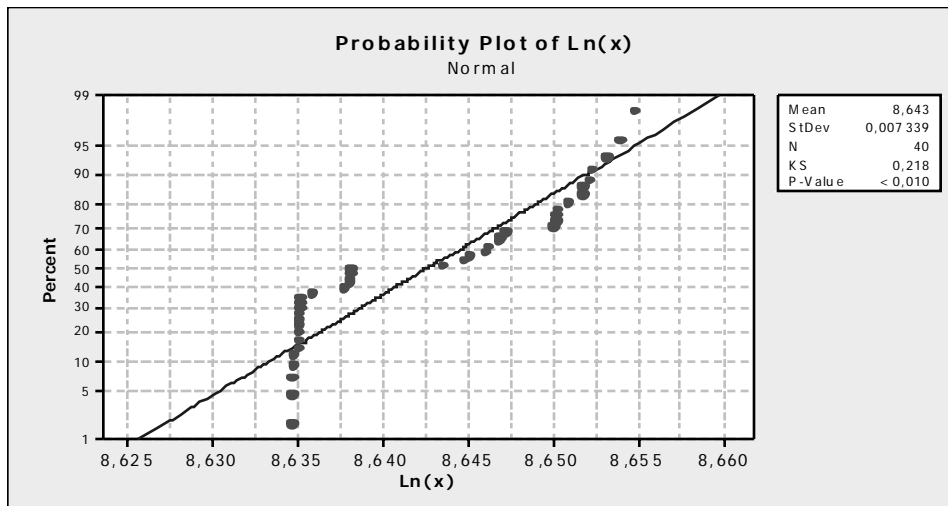


Figura 7: Resultados prueba de Kolmogorv-Smirnov (Ln)

El resultado de la prueba de Kolmogorov-Smirnov, arroja un p-value < 0.01 . Con un nivel de confianza del 95% se rechaza H_0 y se concluye que los datos no siguen una distribución normal.

Como no se pudo ajustar los datos a una distribución normal mediante la transformación propuesta, el paso a seguir es realizar un análisis no paramétrico.

iii. Análisis no paramétrico

Este tipo de análisis no supone ninguna distribución de probabilidad para los datos. Para realizar este análisis se utilizó la prueba de Kruskal-Wallis. Es una prueba para un solo factor. Por lo tanto, se requiere codificar los cuatro tratamientos que se generan en el diseño 2^2 de 1 a 4, de tal forma que se pueda utilizar la prueba de Kruskal Wallis de un solo factor. Los resultados obtenidos con la prueba de Kruskal-Wallis se presentan en la Tabla 5.

Kruskal-Wallis Test: Función Objetivo versus C1				
Kruskal-Wallis Test on FO				
C1	N	Median	Ave Rank	Z
1	10	5626	10,9	-3,00
2	10	5626	10,1	-3,25
3	10	5711	30,3	3,06
4	10	5712	30,7	3,19
Overall	40		20,5	
H = 29,30 DF = 3 P = 0,001				
H = 29,36 DF = 3 P = 0,001 (adjusted for ties)				

Tabla 5: Kruskal-Wallis, Instancia 1.

El p-value obtenido con la prueba es $P=0.001$. Con un nivel de confianza del 95%, se rechaza H_0 y se concluye que alguno de los factores está afectando significativamente el valor de la función objetivo, es decir que al menos uno de los tratamientos tiene mediana distinta a los otros.

Se sabe que uno de los factores está influyendo en el valor de la función objetivo, pero la prueba de Kruskal-Wallis, de acuerdo con la codificación diseñada, no permite determinar cuál de los dos factores es el que genera diferencia significativa en el valor de la función objetivo. Para poder detectar cuál de los dos factores está causando la influencia se realizará una prueba de de Kruskal-Wallis para cada factor. Los resultados se presentan a continuación.

- **Factor 1: Probabilidad de Cruce**

Los resultados de la prueba de kruskal-Wallis para el factor 1, se presentan en la Tabla 6.

Kruskal-Wallis Test: Función Objetivo versus Cruce				
Kruskal-Wallis Test on FO				
Cruce	N	Median	Ave Rank	Z
0,2	20	5658	20,8	0,16
0,8	20	5662	20,2	-0,16
Overall	40		20,5	
H = 0,03 DF = 1 P = 0,871				
H = 0,03 DF = 1 P = 0,871 (adjusted for ties)				

Tabla 6: Kruskal-Wallis, Factor 1 (Instancia 1)

El p-value que arroja la prueba es $P = 0.871$. Con un nivel de confianza del 95% se puede decir que no existe evidencia estadística para rechazar H_0 y se concluye que la probabilidad de cruce no está afectando el valor de la función objetivo.

- **Factor 2: Probabilidad de Mutación**

Los resultados de la prueba de Kruskal-Wallis para el factor 2, se presentan en la Tabla 7.

Kruskal-Wallis Test: Función Objetivo versus Mutación				
Kruskal-Wallis Test on FO				
Mutacion	N	Median	Ave Rank	Z
0,001	20	5626	10,5	-5,41
0,100	20	5712	30,5	5,41
Overall	40		20,5	
H = 29,27 DF = 1 P = 0,001				
H = 29,33 DF = 1 P = 0,001 (adjusted for ties)				

Tabla 7: Kruskal-Wallis, Factor 2 (Instancia 1)

El p-value obtenido con la prueba es $P= 0.001$. Con un nivel de confianza del 95%, se rechaza H_0 y se concluye que la probabilidad de mutación está afectando significativamente el valor de la función objetivo.

Para las otras instancias se siguió el mismo procedimiento, obteniendo resultados similares con los que se llegó a la misma conclusión. A continuación se presentan los resultados obtenidos.

- **Instancia 2 (88%)**

Los resultados de la prueba de Kruskal-Wallis para la instancia 2, se presentan en la Tabla 8.

Kruskal-Wallis Test: Función Objetivo versus C1					
Kruskal-Wallis Test on Función Objetivo					
C1	N	Median	Ave Rank	Z	
1	10	6875	11,2	-2,90	
2	10	6960	29,8	2,90	
3	10	6971	31,0	3,28	
4	10	6866	10,0	-3,28	
Overall	40		20,5		
H = 28,79 DF = 3 P = 0,001					
H = 28,82 DF = 3 P = 0,001 (adjusted for ties)					

Tabla 8: Kruskal-Wallis, Instancia 2

El p-value arrojado por la prueba es $P= 0.001$. Con un nivel de confianza del 95%, se rechaza H_0 y se concluye que alguno de los factores está afectando significativamente el valor de la función objetivo, es decir que al menos uno de los tratamientos tiene mediana distinta a los otros.

- **Factor 1: Probabilidad de Cruce**

Los resultados de la prueba de Kruskal-Wallis para el factor 1, se presentan en la Tabla 9.

Kruskal-Wallis Test: Función Objetivo versus Cruce				
Kruskal-Wallis Test on Función Objetivo				
Probabilidad				
Cruce	N	Median	Ave Rank	Z
0,2	20	6909	20,5	0,00
0,8	20	6898	20,5	0,00
Overall	40		20,5	
H = 0,00 DF = 1 P = 1,000				
H = 0,00 DF = 1 P = 1,000 (adjusted for ties)				

Tabla 9: Kruskal-Wallis, Factor 1 (Instancia2)

El p-value obtenido con la prueba es $P= 1.00$. Con un nivel de confianza del 95%, se puede decir que no existe evidencia estadística para rechazar H_0 y se concluye que la probabilidad de cruce no está afectando el valor de la función objetivo.

- **Factor 2: Probabilidad de Mutación**

Los resultados de la prueba de kruskal-Wallis para el factor 2, se presentan en la Tabla 10.

Kruskal-Wallis Test: Función Objetivo versus Mutación				
Kruskal-Wallis Test on Función Objetivo				
Probabilidad				
Mutación	N	Median	Ave Rank	Z
0,001	20	6866	10,6	-5,36
0,100	20	6966	30,4	5,36
Overall	40		20,5	
H = 28,69 DF = 1 P = 0,001				
H = 28,72 DF = 1 P = 0,001 (adjusted for ties)				

Tabla 10: Kruskal -Wallis, Factor 2 (Instancia 2)

El p-value que arroja la prueba es $P= 0.001$. Con un nivel de confianza del 95%, se rechaza H_0 y se concluye que la probabilidad de mutación está afectando significativamente el valor de la función objetivo.

- **Instancia 3 (98%)**

Los resultados de la prueba de Kruskal-Wallis para la instancia 3, se presentan en la Tabla 11.

Kruskal-Wallis Test: Función Objetivo versus C1				
Kruskal-Wallis Test on Función Objetivo				
C1	N	Median	Ave Rank	Z
1	10	7339	9,7	-3,37
2	10	7437	30,5	3,12
3	10	7448	30,1	3,00
4	10	7345	11,7	-2,75
Overall	40		20,5	
H = 28,26 DF = 3 P = 0,001				
H = 28,27 DF = 3 P = 0,001 (adjusted for ties)				

Tabla 11: Kruskal-Wallis, Instancia 3.

El p-value que se obtiene con la prueba es $P= 0.001$. Con un nivel de confianza del 95%, se rechaza H_0 y se concluye que alguno de los factores está afectando significativamente el valor de la función objetivo, es decir que al menos uno de los tratamientos tiene mediana distinta a los otros

- **Factor 1: Probabilidad de Cruce**

Los resultados de la prueba de Kruskal-Wallis para el factor 1, se presentan en la Tabla 12.

Kruskal-Wallis Test: Función Objetivo versus Cruce				
Kruskal-Wallis Test on Función Objetivo				
Probabilidad				
Cruce	N	Median	Ave Rank	Z
0,2	20	7385	20,1	-0,22
0,8	20	7369	20,9	0,22
Overall	40		20,5	
H = 0,05 DF = 1 P = 0,829				
H = 0,05 DF = 1 P = 0,829 (adjusted for ties)				

Tabla 12: Kruskal-Wallis, Factor 1 (Instancia 3)

El p-value que arroja la prueba es $P= 0.829$. Con un nivel de confianza del 95%, se puede decir que no existe evidencia estadística para rechazar H_0 y se concluye que la probabilidad de cruce no está afectando el valor de la función objetivo.

- **Factor 2: Probabilidad de Mutación**

Los resultados de la prueba de Kruskal-Wallis para el factor 2, se presentan en la Tabla 13.

Kruskal-Wallis Test: Función Objetivo versus Mutación				
Kruskal-Wallis Test on Función Objetivo				
Probabilidad				
Mutación	N	Median	Ave Rank	Z
0,001	20	7343	10,7	-5,30
0,100	20	7442	30,3	5,30
Overall	40		20,5	
H = 28,11 DF = 1 P = 0,000				
H = 28,12 DF = 1 P = 0,000 (adjusted for ties)				

Tabla 13: Kruskal-Wallis, Factor 2 (Instancia 3)

El p-value que arroja la prueba, es $P= 0.000$. Con un nivel de confianza del 95%, se rechaza H_0 y se concluye que la probabilidad de mutación está afectando significativamente el valor de la función objetivo.

En general se puede concluir que la probabilidad de mutación es el factor que está afectando significativamente el valor de la función objetivo, mientras que la probabilidad de cruce no está afectando significativamente el valor de ésta. En los resultados obtenidos para todas las instancias, se puede observar que el menor valor de la función objetivo se obtiene con una probabilidad de mutación baja de 0.001 y una probabilidad de cruce alta de 0.8; por lo tanto esta combinación de parámetros es considerada la más conveniente para el AG.

5.3. Resultados obtenidos con el AG

A continuación se presentan los resultados obtenidos con el AG que incluyen el valor de la función objetivo, el valor de la cota inferior, la cota superior, la relación entre la función objetivo y las cotas, el tiempo de ciclo y los valores de k_i .

La Tabla 14, presenta los resultados obtenidos para las instancias de 66.18%, 88.24% y 98%. Para una utilización del 66.18% y durante las cinco corridas propuestas, el costo total obtenido con AG estuvo un 9.91% por encima de la cota inferior y un 5.81% de la cota superior. Para una utilización del 88.24% y durante las cinco corridas propuestas, el costo total obtenido con AG estuvo un 11.48% por encima de la cota inferior y un 4.76% de la cota superior. Para una utilización del 98% y durante las cinco corridas propuestas, el costo total obtenido con AG estuvo un 11.87% por encima de la cota inferior y un 4.44% de la cota superior. En los resultados se puede observar la convergencia en un mismo punto del AG para todas las instancias.

La Tabla 15, presenta los resultados obtenidos para las 15 instancias propuestas por Bomberger, en donde la utilización se incrementa en un 5% desde 50% hasta 80% y luego se haciendo incrementos más pequeños. Para utilizaciones inferiores a 65%, el costo total obtenido con AG estuvo en promedio un 8.95% por encima de la cota inferior y un 6.45% de la cota superior. Para niveles de utilización superiores a 65%, el costo total obtenido con AG estuvo en promedio un 11.5% por encima de la cota inferior y un 4.81% de la cota superior. Adicionalmente, se puede observar que a

medida que la utilización aumenta, la diferencia entre la cota inferior y la solución obtenida con AG se incrementa.

La Tabla 16, presenta los resultados obtenidos con las variaciones hechas en la fracción de demanda que queda pendiente (α_i). Para una utilización del 66.18% y $\alpha_i = 0.8$, el costo total obtenido con AG estuvo un 9.28% por encima de la cota inferior y un 6.53% de la cota superior. Comparando los resultados obtenidos, con los obtenidos en la Tabla 14, para el mismo nivel de utilización y con un $\alpha_i = 0.7$, se puede decir que el costo total con AG se incrementó. En la siguiente variación de α_i , se encontró después varios experimentos, que los productos 4 y 8 deben tener un $\alpha_i \geq 0.7$, de lo contrario el problema resulta infactible. Si se comparan los resultados de la Tabla 14, para niveles de $\alpha_i = 0.5$ para los productos 1,2,3,5,6,7,9 y 10 y $\alpha_i = 0.7$ para los productos 4 y 8, se puede decir que la diferencia con la cota inferior fue de 9.41% y que el costo total con AG se incrementó. Después de varios experimentos, se encontraron los valores mínimos de α_i , para el conjunto de datos analizado. Estas variaciones de α_i , corresponden a la tercera variación propuesta en la Tabla 4. Comparando los resultados obtenidos, con los de la Tabla 14, se puede decir que la diferencia con la cota inferior fue de 7.81% y que el costo total con AG se incrementó.

Utilización (%)	CLB (\$/año)	CBP _{AG} (\$/año)	(CBP-CLB)/CLB (%)	CUB (\$/año)	(CUB-CBP)/CUB (%)	T (días)	k ₁	k ₂	k ₃	k ₄	k ₅	k ₆	k ₇	k ₈	k ₉	k ₁₀
66,18	5116,82	5623,71	9,91	5970,50	5,81	93,83	5	1	1	1	2	3	7	1	2	1
66,18	5116,82	5623,71	9,91	5970,50	5,81	93,83	5	1	1	1	2	3	7	1	2	1
66,18	5116,82	5623,71	9,91	5970,50	5,81	93,83	5	1	1	1	2	3	7	1	2	1
66,18	5116,82	5623,71	9,91	5970,50	5,81	93,83	5	1	1	1	2	3	7	1	2	1
88,24	6150,20	6856,11	11,48	7198,72	4,76	92,14	5	1	1	1	1	3	6	1	2	1
88,24	6150,20	6856,11	11,48	7198,72	4,76	92,14	5	1	1	1	1	3	6	1	2	1
88,24	6150,20	6856,11	11,48	7198,72	4,76	92,14	5	1	1	1	1	3	6	1	2	1
88,24	6150,20	6856,11	11,48	7198,72	4,76	92,14	5	1	1	1	1	3	6	1	2	1
88,24	6150,20	6856,11	11,48	7198,72	4,76	92,14	5	1	1	1	1	3	6	1	2	1
98,00	6553,84	7331,80	11,87	7672,08	4,44	87,73	5	1	1	1	1	3	6	1	2	1
98,00	6553,84	7331,80	11,87	7672,08	4,44	87,73	5	1	1	1	1	3	6	1	2	1
98,00	6553,84	7331,80	11,87	7672,08	4,44	87,73	5	1	1	1	1	3	6	1	2	1
98,00	6553,84	7331,80	11,87	7672,08	4,44	87,73	5	1	1	1	1	3	6	1	2	1
98,00	6553,84	7331,80	11,87	7672,08	4,44	87,73	5	1	1	1	1	3	6	1	2	1

Tabla 14: Comparación de las cotas IS, CC vs. AG.

Utilización (%)	CLB (\$/año)	CBP _{AG} (\$/año)	(CBP-CLB)/CLB (%)	CUB (\$/año)	(CUB-CBP)/CUB (%)	T (días)	k ₁	k ₂	k ₃	k ₄	k ₅	k ₆	k ₇	k ₈	k ₉	k ₁₀
50	4232,93	4574,67	8,07	4921,37	7,04	108,30	6	1	1	1	2	4	7	1	2	1
55	4518,98	4911,24	8,68	5259,84	6,63	102,71	6	1	1	1	2	4	7	1	2	1
60	4793,19	5236,98	9,26	5585,36	6,24	98,87	6	1	1	1	2	3	7	1	2	1
65	5056,28	5551,15	9,79	5898,40	5,89	94,75	5	1	1	1	2	3	7	1	2	1
70	5308,90	5854,46	10,28	6199,34	5,56	91,03	5	1	1	1	2	3	7	1	2	1
75	5551,61	6145,28	10,69	6488,47	5,29	99,91	5	1	1	1	1	3	6	1	2	1
80	5784,94	6422,61	11,02	6766,04	5,08	96,70	5	1	1	1	1	3	6	1	2	1
83	5920,63	6583,82	11,20	6927,11	4,96	94,94	5	1	1	1	1	3	6	1	2	1
86	6053,20	6741,16	11,37	7084,11	4,84	93,29	5	1	1	1	1	3	6	1	2	1
89	6182,74	6894,63	11,51	7237,09	4,73	91,76	5	1	1	1	1	3	6	1	2	1
92	6309,31	7044,22	11,65	7386,06	4,63	90,33	5	1	1	1	1	3	6	1	2	1
95	6432,99	7189,95	11,77	7531,05	4,53	88,98	5	1	1	1	1	3	6	1	2	1
97	6513,87	7284,95	11,84	7625,51	4,47	88,14	5	1	1	1	1	3	6	1	2	1
98	6553,84	7331,80	11,87	7672,08	4,44	87,73	5	1	1	1	1	3	6	1	2	1
99	6513,87	7378,23	13,27	7718,22	4,41	87,33	5	1	1	1	1	3	6	1	2	1

Tabla 15: Comparación de las cotas IS, CC vs. AG (15 utilizaciones)

Utilización (%)	CLB (\$/año)	CBPAG (\$/año)	(CBP-CLB)/CLB (%)	CUB (\$/año)	(CUB-CBP)/CUB (%)	T (días)	k1	k2	k3	k4	k5	k6	k7	k8	k9	k10
66%	5318,22	5812,04	9,29	6218,49	6,54	83,13	6	1	1	1	2	3	6	1	2	1
66%	5659,14	6192,14	9,42	6549,91	5,46	103,32	6	1	1	1	1	4	7	1	2	1
66%	6300,72	6793,22	7,82	7245,75	6,25	97,89	13	1	1	1	1	8	15	1	2	1

Tabla 16: Comparación de las cotas IS, CC vs. AG (Variación α_i)

Capítulo VI

CONCLUSIONES Y FUTURAS INVESTIGACIONES

En esta tesis de maestría se desarrolló un modelo matemático para un nuevo problema de programación del tamaño de lote económico, considerando órdenes pendientes y ventas perdidas para productos que se deterioran. Se modeló el problema de forma que los costos de inventario fueran mínimos. Para modelar el problema, se eligió la aproximación del periodo básico (BP), luego de realizar una investigación sobre las aproximaciones existentes. Se construyeron cotas superior e inferior para evaluar la calidad de la solución obtenida. Para darle solución al problema se escogió la metaheurística de Algoritmos Genéticos, con la que se obtuvieron buenos resultados.

Por medio del diseño de experimentos se puede concluir que la probabilidad de mutación afecta significativamente el valor de la función objetivo. El menor valor de la función objetivo se obtuvo con una probabilidad de mutación baja de 0.001 y una probabilidad de cruce alta de 0.8. Para niveles de utilización inferiores a 65%, el costo total obtenido con AG estuvo en promedio un 8.95% por encima de la cota inferior y un 6.45% de la cota superior. Por otra parte, para niveles de utilización superiores a 65%, el costo total estuvo en promedio un 11.5% por encima de la cota inferior y un 4.81% de la cota superior. Con los resultados obtenidos, se concluye que a medida que la utilización aumenta, la diferencia entre la cota inferior y la solución obtenida con AG se incrementa.

Las futuras investigaciones podrían enfocarse en obtener mejores soluciones, mediante el uso de la aproximación de EBP, Fujita (1978). Por otra parte se podrían considerar modelos con efectos como demanda estocástica, otras distribuciones para el deterioro, demanda dependiente de la tasa de ventas, etc.

Apéndice A. Derivación de la ecuación (7).

La derivación de la ecuación (7) se obtiene utilizando la aproximación de la serie de Taylor para $e^{\theta_i \beta_i}$, esto se hace ya que se considera que el valor de $\theta_i \beta_i$ es muy pequeño.

Dada la ecuación (6),

$$\beta_i = \frac{1}{\theta_i} \ln \left(\frac{p_i - d_i + d_i e^{\theta_i \omega_i}}{p_i} \right). \quad (6)$$

$$\theta_i \beta_i = \ln \left(\frac{p_i - d_i + d_i e^{\theta_i \omega_i}}{p_i} \right) \quad (A.1)$$

$$e^{\theta_i \beta_i} = \left(\frac{p_i - d_i + d_i e^{\theta_i \omega_i}}{p_i} \right) \quad (A.2)$$

$$p_i e^{\theta_i \beta_i} = p_i - d_i + d_i e^{\theta_i \omega_i}$$

$$\because e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$p_i (1 + \theta_i \beta_i) = p_i - d_i + d_i \left(1 + \theta_i \omega_i + \frac{\theta_i^2 \omega_i^2}{2} \right)$$

$$\beta_i = \frac{d_i \theta_i \omega_i \left(1 + \frac{\omega_i \theta_i}{2} \right)}{p_i \theta_i} \quad (A.3)$$

$$\beta_i = \frac{d_i}{p_i} \left(1 + \frac{\omega_i \theta_i}{2} \right) \omega_i. \quad (7)$$

REFERENCIAS

Abad, P.L., (2000). Optimal lot size for a perishable good under conditions of finite production and partial backordering and lost sale. *Computers and Industrial Engineering*, 38, 457-465.

_____, P.L., (1996). Optimal pricing and lot-sizing under conditions of perishability and partial backordering. *Management Science*, 42, 1093-1104.

_____, P.L., (2000). Optimal lot size for a perishable good under conditions of finite production and partial backordering and lost sale. *Computers & Industrial Engineering* 38, 457-465.

Bomberger, E., (1966). A dynamic programming approach to a lot size scheduling problem. *Management Science*, 12, 778-784.

Chatfiel, D., (1993). Applying the traditional genetic algorithm - the economic lot scheduling problem. Masters paper, Department of Management Science and Information Systems, The Pennsylvania State University.

Chatfield, D., (s.f.). The economic lot scheduling problem: A pure genetic search approach. A ser publicado en *Computers & Operations Research*.

Sheskin, D., (2000). *Handbook of parametric and nonparametric statistical procedures*. (2da. Ed.). United States of America: Chapman & Hall.

Davis, S. G., (1995). An improved algorithm for solving the economic lot size problem (ELSP). *Journal of Production Research*, 33(4), 1007-1026.

Delporte, C. and Thomas, L., (1977). Lot sizing and sequencing for N products and one facility. *Management Science*, 23, 1070-1079.

- Dobson, G.,(1987) The economic lot-scheduling problem: achieving feasibility using time varying lot sizes. *Operations Research*, 35(5), 764 -771.
- Elmaghraby, S. E., (1978). The economic lot scheduling problem (ELSP): review and extensions. *Management Science*, 24(6), 578-598.
- Elsayed, E.A., & Teresi, C., (1983). Analysis of inventory system with deteriorating items. *International Journal of Production Research*. 21, 449–460.
- Fujita, S., (1978). The application of marginal analysis to the ELSP. *AIIE Transactions*, 10(4). 354-361.
- Ghare, P.M., & Schrader, G. F., (1963). A model for an exponentially decaying inventory. *Journal of Industrial Engineering*, 14, 238 – 243.
- Goyal, S., (1973). Scheduling a multi-product single-machine system. *Operations Research Quarterly*. 24, (2). 261-266.
- Goyal, S.K.,Giri, B.C., (2001). Recent trends in modelling of deteriorating inventory. *European Journal of Operational Research*, 134 (1), 1-16.
- Grznar, J. & Riggle, C., (1996). An optimal algorithm for the basic period approach to the economic lot scheduling problem. *Omega*, 25, (3). 355-364.
- Gupta, D., (1991). On the economic lot scheduling problem with backlogging: The common cycle approach. *Operations Research Letters*, 12, 101-109.
- Hadley ,G. and Whitin ,T.M., (1992). *Analysis of Inventory Systems*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- Haessler, R., (1979). An improved extended basic period approach for solving the ELSP. *AIIE Transactions*, 11(4). 336-340.
- Hanssmann, F., (1962). *Operations Research in Production and Inventory*, Willey, New York.

Heng, K.J., Labban, J., & Linn, R.J., (1991). An order-level lot-size inventory model for deteriorating items with finite replenishment rate. *Computers and Industrial Engineering*, 20, 187-197.

Hsu, W.L., (1983). On the general feasibility of scheduling lot sizes of several products on one machine. *Management Science*, 29, 93 – 105.

Kakish, A., (1995). The economic lot scheduling problem: A review, Unpublished Masters Project, American University of Beirut.

Kar, S., Bhunia, A.k., & Maiti, M., (2001). Inventory of multi-deteriorating items sold from two shops under single management with constraints on space and investment. *Computers and Operational Research*. 28, 1203-1221.

Khouja, M., Michalewicz, Z., Wilmot, M., (1998). The use of genetic algorithms to solve the economic lot size scheduling problem. *European Journal of Operational Research*, 110, 509-524.

Kook, W., (2004). Análisis del estado del arte en algoritmos genéticos. Tesis no publicada. Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia.

Krajewski, L. & Ritzman, L. P., (1987). *Operations Management, Strategy and Analysis*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, 585-588.

Krone, L., (1964). A note on economic lot sizes for multi-purpose equipment. *Management Science*. 10, 461-464.

Lin, G., Kroll, D., Lin, C., (2005). Determining a common production cycle time for an economic lot scheduling problem with deteriorating items. *European Journal of Operational Research*, (s.f.).

Lopez M. & Kingsman B., (1991). The economic lot scheduling problem: theory and practice. *International Journal of Production Economics*, 23, 147-164.

Maxwell, W.L., (1964). The scheduling of economic lot sizes. *Naval Research Logistics Quarterly*.

Misra, R.B.,(1975). Optimal production lot size model for a system with deteriorating items. *International Journal of Production Research*. 40, 809 - 824.

Montgomery, D., (2002). *Diseño y análisis de experimentos*. (2da Ed.). México: Limusa Wiley.

Olkin, I, Ghurye, S, Hoeffding, W, Madow, W & Mann, H., (1960). *Contributions to Probability and Statistics: Essays in Honor of Harold Hotelling*. Stanford University Press, Stanford, CA, 278-292.

Park, Kyung., (1982). Inventory model with partial backorders. *International Journal Systems SCI*, 13, (12), 1313-1317.

Phillipoom, P., Rees L. & Taylor B., (1989). Solving the ELSP using the method of prime subperiods. *Decision Sciences*, 20, 794–809.

Raafat, F., (1991). Survey of literature on continuously deteriorating inventory models. *Journal of Operational Research Society*, 42, 27-37.

Roundy, R., (1989). Rounding off to powers of two in continuous relaxations of capacitated lot sizing problems. *Management Science* 35, 1433 – 1442.

Snedecor, G & Cochran, W., (1989). *Statistical Methods*, Eighth Edition, Iowa State University Press

Sylver, E., Pyke, D., Peterson, R., (1998). *Inventory Management and Production Planning Scheduling*, Third Ed., John Wiley and Sons, New York.

Torres, F. & Rojas, G., (2006). Un algoritmo genético para el problema de programación del tamaño de lote económico (ELSP). *Congreso Latino-Iberoamericano de Investigación Operativa*. Montevideo, Uruguay.

Wee, H. M., (1992). Economic production lot size model for deteriorating items with partial back-ordering. *Computers and Industrial Engineering*, 24,(3). 449-458.

Wu, K. S., (2001). An EOQ inventory model for items with Weibull distribution deterioration, ramp type demand rate and partial backlogging. *Production Planning and Control*. 12(8), 787-793.

Wu, M.Y., & Wee, H. M. (2001). Buyer-seller joint cost for deteriorating items with multiple-lot-size deliveries. *Journal of the Chinese Institute of Industrial Engineering*. 18 109-119.

Yang, P. C., & Wee, H. M., (2000). Economic ordering policy of deteriorating items for vendor and buyer: An integrated approach. *Production Planning and Control*. 11, 474-480.

_____, P. C., & Wee, H. M., (2002). An single-vendor multi-buyers production-inventory policy for deteriorating item. *European Journal of Operational Research*. 143, 570-581.

_____, P. C., & Wee, H. M., (2003). An integrated multi-lot-size production inventory model for deteriorating items. *Computers and Operational Research*. 30, 671-682.

Yao, M.J y Huang, J.X., (2005). Solving the economic lot scheduling problem with deteriorating items using genetic algorithms. *Journal of Food Engineering*, 70 309-322.

Zipkin, P.H., (1991). Computing optimal lot sizes in the economic lot scheduling problem. *Operations Research* 39, 56 - 63.